

1η Ομάδα Ασκήσεων

1. **(Άθροισμα Minkowski)** Εκτός από την ένωση και την τομή, μπορούμε να ορίσουμε και το *άθροισμα* δύο συνόλων. Συγκεκριμένα, ορίζουμε το άθροισμα Minkowski $A + B$ δύο συνόλων A, B , ως το νέο σύνολο που αποτελείται από όλους τους αριθμούς z που μπορούν να γραφούν ως το άθροισμα $a + b$ ενός αριθμού a που ανήκει στο A και ενός αριθμού b που ανήκει στο B . Πιο συνοπτικά:

$$A + B \triangleq \{z \in \mathbb{R} : z = a + b, a \in A, b \in B\}.$$

Με δεδομένο τον άνω ορισμό, προσδιορίστε τα ακόλουθα αθροίσματα Minkowski:

$$(0, 1) + (0, 1), \quad (0, 1) + \mathbb{Z}, \quad \mathbb{N} + \mathbb{N}.$$

Λύση:

(α') Θα δείξουμε ότι

$$(0, 1) + (0, 1) = (0, 2).$$

Πράγματι, έστω κάποιο $x \in (0, 1) + (0, 1)$. Τότε, εξ ορισμού του αθροίσματος Minkowski, $x = a + b$, όπου $a \in (0, 1)$ και $b \in (0, 1)$, άρα και $0 < a + b < 2$, επομένως $x \in (0, 2)$. Άρα, καταρχάς,

$$(0, 1) + (0, 1) \subseteq (0, 2).$$

Αντίστροφα, έστω κάποιο $x \in (0, 2)$. Μπορούμε να γράψουμε, τότε, $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$, όπου $\frac{x}{2} \in (0, 1)$, άρα βρήκαμε $a = \frac{x}{2} \in (0, 1)$ και $b = \frac{x}{2} \in (0, 1)$, άρα και $x \in (0, 1) + (0, 1)$. Αποδείξαμε λοιπόν, πως επιπλέον,

$$(0, 2) \subseteq (0, 1) + (0, 1),$$

και ο συνδυασμός των άνω αποτελεσμάτων δίνει το ζητούμενο.

(β') Θα δείξουμε ότι

$$(0, 1) + \mathbb{Z} = \mathbb{R} - \mathbb{Z}.$$

Κάπως πιο συνοπτικά από το προηγούμενο σκέλος, παρατηρήστε, καταρχάς, πως αν προσθέσουμε ένα $a \in (0, 1)$ και ένα $b \in \mathbb{Z}$ θα λάβουμε ένα $x = a + b \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Πράγματι, αν $x \in \mathbb{Z}$, τότε θα έχουμε $a = x - b$ με $a \in (0, 1)$ και $x - b \in \mathbb{Z}$, που είναι άτοπο. Άρα, θα έχουμε $(0, 1) + \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Αντιστρόφως, έστω κάποιο $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Παρατηρούμε πως $x = \lfloor x \rfloor + b$, όπου $x = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ είναι το ακέραιο μέρος του x , δηλαδή ο μεγαλύτερος ακέραιος μικρότερος ή ίσος του x , και $b \in (0, 1)$. Άρα, θα έχουμε και $\mathbb{R} - \mathbb{Z} \subseteq (0, 1) + \mathbb{Z}$. Συνδυάζοντας τα δύο αποτελέσματα προκύπτει το ζητούμενο.

(γ') Παρατηρήστε πως

$$\mathbb{N} + \mathbb{N} = \mathbb{N}.$$

Πράγματι, το άθροισμα δύο φυσικών μας κάνει ένα φυσικό (αυτό αποδεικνύει πως $\mathbb{N} + \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$), και, αντιστρόφως, κάθε φυσικός N μπορεί να γραφτεί ως $n + 0$ (αυτό αποδεικνύει πως $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} + \mathbb{N}$).

2. **(Επιμεριστική ιδιότητα)** Να αποδείξετε ότι η ένωση επιμερίζει την τομή και η τομή επιμερίζει την ένωση: για κάθε $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ότι δύο σύνολα A, B είναι ίσα αν και μόνο αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Λύση: Σχετικά με την πρώτη ισότητα, έστω $x \in A \cup (B \cap C)$. Τότε, είτε $x \in A$, είτε $x \in B \cap C$. Στην πρώτη περίπτωση, το x ανήκει και στο $A \cup B$ και στο $A \cup C$, άρα τελικά θα ανήκει και στην τομή τους, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Στην δεύτερη περίπτωση, το x θα ανήκει και στο B , άρα και στο $A \cup B$, και στο C , άρα και στο $A \cup C$. Άρα, πάλι θα ανήκει και στην τομή $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Επομένως, αποδείξαμε πως $x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, δηλαδή

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Έστω, τώρα, ένα $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Υπάρχουν δύο ενδεχόμενα. Το πρώτο είναι $x \in A$, στην οποία περίπτωση το x θα ανήκει και στο $A \cup (B \cap C)$. Στη δεύτερη περίπτωση, $x \notin A$, οπότε θα πρέπει $x \in B$ και $x \in C$, διότι σε διαφορετική περίπτωση είτε $x \notin A \cup B$ είτε $x \notin A \cup C$, και έχουμε άτοπο, αφού δεν θα ανήκει στην τομή τους. Άρα, θα πρέπει και $x \in B \cap C$, και τελικά, και πάλι, $x \in A \cup (B \cap C)$. Επομένως, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$, δηλαδή

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C).$$

Με συνδυασμό των δύο άνω αποτελεσμάτων, προκύπτει, τελικά, η ζητούμενη ισότητα.

Σχετικά με τη δεύτερη ισότητα, έστω πρώτα κάποιο $x \in A \cap (B \cup C)$. Άρα σίγουρα $x \in A$, και είτε $x \in B$, είτε $x \in C$, οπότε θα έχουμε είτε $x \in A \cap B$ είτε $x \in A \cap C$, άρα σίγουρα το x θα ανήκει στην ένωση $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Επομένως, αποδείξαμε πως $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ και επομένως

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Έστω, τώρα, ένα $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Θα πρέπει $x \in A$, ειδικά, το $x \notin (A \cap B)$, και $x \notin (A \cap C)$, άρα και $x \notin (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Επιπλέον, θα πρέπει και $x \in B \cup C$, διότι αλλιώς το x δεν ανήκει ούτε στο B , άρα ούτε και στο $A \cap B$, ούτε και στο C , άρα και στο $A \cap C$, άρα έχουμε άτοπο, γιατί δεν θα ανήκει και στην ένωσή τους. Άρα τελικά το x ανήκει στην τομή των A και $(B \cup C)$ και αποδείξαμε πως $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$, άρα

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C).$$

Με συνδυασμό των δύο άνω αποτελεσμάτων, προκύπτει, τελικά, και η δεύτερη ζητούμενη ισότητα.

3. **(Ιδιότητες πεδίου)** Αποδείξτε ότι ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες για κάθε $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Εννοείται ότι αν για κάποιο αριθμό εμφανίζεται ο αντίστροφός του, ο αριθμός αυτός είναι διάφορος του 0. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μόνο τα Αξιώματα Πεδίου και ιδιότητες που εμφανίζονται στις σημειώσεις σας και έχουν ήδη αποδειχθεί. Σε κάθε ισότητα ή ισοδυναμία που γράφετε, αναφέρετε το αξίωμα ή την ιδιότητα που χρησιμοποιείτε.

(α') Αν $xy = 0$, τότε είτε το $x = 0$, είτε το $y = 0$, είτε $x = y = 0$.

(β') $x(y - z) = xy - xz$.

(γ') $(x + y)/z = x/z + y/z$.

(δ') $(x/y)/(z/w) = (xw)/(yz)$.

Λύση:

(α') Έστω πως έχουμε $x \neq 0$ και $y \neq 0$. Τότε, φτάνουμε εύκολα σε άτοπο, ως εξής:

$$xy = 0 \Rightarrow x^{-1}(xy) = x^{-1}0 \Rightarrow (x^{-1}x)y = 0 \Rightarrow 1 \cdot y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Παρατηρήστε ότι ξέρουμε ότι το x^{-1} υπάρχει, αφού έχουμε υποθέσει ότι $x \neq 0$.

(β') Έχουμε

$$x(y - z) = x(y + (-z)) = xy + x(-z) = xy + (-xz) = xy - xz.$$

(γ') Έχουμε

$$(x + y)/z = (x + y)z^{-1} = xz^{-1} + yz^{-1} = x/z + y/z.$$

(δ')

$$(x/y)/(z/w) = (xy^{-1})(zw^{-1})^{-1} = xy^{-1}z^{-1}(w^{-1})^{-1} = xw(yz)^{-1} = (xw)/(yz).$$

4. **(Εσωτερικό συνόλων)** Προσδιορίστε το εσωτερικό των παρακάτω συνόλων. Ποια από αυτά είναι ανοικτά;

$$(0, 1), \quad (0, 1], \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{R} - \mathbb{Z}.$$

Λύση:

(α') Το εσωτερικό του $(0, 1)$ είναι όλο το $(0, 1)$, αφού για κάθε $x \in (0, 1)$ μπορούμε να βρούμε ένα (a, b) τέτοιο ώστε $(a, b) \subseteq (0, 1)$ και $x \in (a, b)$. Επομένως το $(0, 1)$ είναι ανοικτό.

(β') Το εσωτερικό του $(0, 1]$ είναι το $(0, 1)$, δηλαδή όλο το σύνολο εκτός του 1. Πράγματι, το 1 έχει αυθαίρετα κοντά του (και συγκεκριμένα από τα δεξιά του) αριθμούς εκτός του $(0, 1]$. Αφού το $(0, 1]$ έχει σημεία που δεν είναι εσωτερικά, δεν είναι ανοικτό.

- (γ') Κάθε στοιχείο του $\mathbb{Q}$ βρίσκεται αυθαίρετα κοντά σε κάποιον άρρητο, επομένως κανένα σημείο του $\mathbb{Q}$ δεν είναι εσωτερικό, επομένως $\text{int}\mathbb{Q} = \emptyset$, και το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ανοικτό.
- (δ') Ομοίως, κάθε στοιχείο του $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ βρίσκεται αυθαίρετα κοντά σε κάποιον ρητό, επομένως κανένα σημείο του $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ δεν είναι εσωτερικό, επομένως $\text{int}(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \emptyset$, και το $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ δεν είναι ανοικτό.
- (ε') Κάθε στοιχείο του $\mathbb{Z}$ βρίσκεται αυθαίρετα κοντά σε κάποιον μη ακέραιο, επομένως κανένα σημείο του $\mathbb{Z}$ δεν είναι εσωτερικό, επομένως $\text{int}\mathbb{Z} = \emptyset$, και το $\mathbb{Z}$ δεν είναι ανοικτό.
- (ζ') Οποιοδήποτε μη-ακέραιο x είναι εσωτερικό στο σύνολο $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
Αναλυτικά, αυτό μπορεί ναδειχθεί ως εξής. Έστω d η απόσταση του x από τον πλησιέστερό του ακέραιο. Τότε, το σύνολο $(x - d/2, x + d/2)$ είναι εντός του $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, επομένως το x είναι εσωτερικό. Επομένως, το $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ ταυτίζεται με το εσωτερικό του, και άρα είναι ανοικτό.

5. **(Εύρεση supremum και infimum)** Προσδιορίστε τα supremum, infimum, maximum και minimum των ακόλουθων συνόλων:

$$[0, 1), \quad (0, 1], \quad \mathbb{Q}, \quad \left\{1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \dots\right\}, \quad A = \{x : (x - \sqrt{2})(x - 3) \leq 0\}, \quad A \cap \mathbb{Q}.$$

Λύση:

- (α') Προφανώς $\inf[0, 1) = \min[0, 1) = 0$ και $\sup[0, 1) = 1$. Όμως, δεν υπάρχει το $\max[0, 1)$ διότι το 1 δεν ανήκει στο $[0, 1)$.
- (β') Ανάλογα, $\sup(0, 1] = \max(0, 1] = 1$ και $\inf(0, 1] = 0$. όμως δεν υπάρχει το $\min(0, 1]$ διότι το 0 δεν ανήκει στο σύνολο.
- (γ') Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ούτε άνω, ούτε κάτω φραγμένο, άρα δεν έχει supremum, infimum, maximum ή minimum.
- (δ') Παρατηρήστε ότι το ελάχιστο στοιχείο αυτού του συνόλου είναι το πρώτο, επομένως έχουμε

$$\inf \left\{1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \dots\right\} = \min \left\{1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \dots\right\} = \frac{1}{2}.$$

Από την άλλη, υπάρχουν στοιχεία του συνόλου αυθαίρετα κοντά στο 1, χωρίς όμως το 1 να ανήκει στο σύνολο. Άρα το σύνολο δεν έχει maximum, αλλά

$$\sup \left\{1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \dots\right\} = 1.$$

- (ε') Κατά τα γνωστά μας για τα τριώνυμα, το σύνολο μπορεί να γραφεί και ως $[\sqrt{2}, 3]$. Επομένως,

$$\inf A = \min A = \sqrt{2}, \quad \sup A = \max A = 3.$$

- (ζ') Αυτό που αλλάζει σε αυτή την περίπτωση είναι ότι το $\sqrt{2}$ δεν ανήκει στο σύνολο. Επομένως, έχουμε μεν

$$\inf A \cap \mathbb{Q} = \sqrt{2}, \quad \sup A \cap \mathbb{Q} = \max A \cap \mathbb{Q} = 3,$$

αλλά δεν υπάρχει το $\min A \cap \mathbb{Q}$.

6. **(Ιδιότητα κλειστών συνόλων)** Να δείξετε ότι όλα τα κλειστά, μη κενά, φραγμένα άνω σύνολα (όχι απαραίτητα διαστήματα) έχουν μέγιστο στοιχείο.

Λύση: Έστω σύνολο S μη κενό και φραγμένο άνω. Από το Αξίωμα της Πληρότητας θα έχει supremum $\sup S$. Θα δείξουμε ότι το $\sup S$ ανήκει στο S , επομένως, ως άνω φράγμα, είναι και μέγιστο στοιχείο. Θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Έστω, λοιπόν, πως το $\sup S$ δεν ανήκει στο S . Αφού το S είναι κλειστό, εξ' ορισμού το συμπλήρωμά του S^c είναι ανοικτό. Το $\sup S$ ανήκει στο S^c , αφού δεν ανήκει στο S , και θα πρέπει, αφού το S^c είναι ανοικτό, να είναι εσωτερικό του S^c . Θα υπάρχει, λοιπόν, διάστημα (a, b) τέτοιο ώστε $\sup S \in (a, b)$ και $(a, b) \subseteq S^c$. Εδώ έχουμε το άτοπο, αφού αν πάρουμε έναν αριθμό y στο διάστημα $(a, \sup S)$, ο αριθμός y θα είναι και αυτός άνω φράγμα του S , αφού $[y, \sup S] \subseteq S^c$, και μάλιστα μικρότερος από το $\sup S$ που εξ' ορισμού είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του S .

2η Ομάδα Ασκήσεων

7. **(Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση)** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $B \subseteq A$ τότε για κάθε $x_1, x_2 \in B$, έχουμε

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Λύση: Καταρχάς, παρατηρούμε ότι από τον ορισμό της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης, έχουμε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Άρα, πρέπει να αποδείξουμε την αντίστροφη συνεπαγωγή. Έστω, λοιπόν, πως $f(x_1) > f(x_2)$. Τότε αποκλείεται να έχουμε $x_1 = x_2$ διότι τότε αναγκαστικά $f(x_1) = f(x_2)$. Αποκλείεται, επίσης, $x_1 > x_2$ διότι τότε, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, θα πρέπει $f(x_1) < f(x_2)$. Το μόνο ενδεχόμενο που μένει, λοιπόν, είναι $x_1 < x_2$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

8. **(Γνήσια μονοτονία $\Rightarrow$ 1-1)** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη (δηλαδή γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα), τότε είναι 1-1. Το αντίστροφο ισχύει; Δηλαδή, αν η f είναι 1-1, τότε είναι και γνησίως μονότονη;

Λύση: Έστω πως μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, και έστω δύο x_1, x_2 , με $f(x_1) = f(x_2)$. Υπάρχουν τρία ενδεχόμενα: $x_1 < x_2$, $x_1 = x_2$, και $x_1 > x_2$. Όμως, αν $x_1 < x_2$, τότε επειδή η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα θα πρέπει $f(x_1) < f(x_2)$, επομένως η περίπτωση αυτή αποκλείεται. Ομοίως, αν $x_1 > x_2$, τότε πάλι επειδή η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα θα πρέπει $f(x_1) > f(x_2)$, επομένως και αυτή η περίπτωση αποκλείεται. Πρέπει, λοιπόν, $x_1 = x_2$. Αποδείξαμε, τελικά, ότι αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$, επομένως η f είναι 1-1. Η απόδειξη για την περίπτωση που η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι ανάλογη και παραλείπεται.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η ακόλουθη συνάρτηση είναι μεν 1-1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3 - x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

9. **(Infimum αθροίσματος)** Έστω συναρτήσεις $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$ κάτω φραγμένες στο σύνολο B . Να δείξετε ότι

$$\inf_{x \in B} \{f + g\} \geq \inf_{x \in B} \{f\} + \inf_{x \in B} \{g\}.$$

Μπορείτε να βρείτε μια γενική περίπτωση όπου ισχύει η ισότητα;

Λύση: Παρατηρήστε πως

$$f(y) \geq \inf\{f(x) : x \in B\}$$

για κάθε $y \in B$, εξ ορισμού του $\inf\{f(x) : x \in B\}$. Ανάλογα,

$$g(y) \geq \inf\{g(x) : x \in B\}$$

για κάθε $y \in B$, και αν προσθέσουμε κατά μέλη,

$$f(y) + g(y) \geq \inf\{f(x) : x \in B\} + \inf\{g(x) : x \in B\}.$$

Άρα, η ποσότητα στα δεξιά είναι κάτω φράγμα όλων των $f(y) + g(y)$, και επομένως θα είναι μικρότερη ή ίση του μέγιστου κάτω φράγματος όλων των $f(y) + g(y)$, δηλαδή του $\inf\{f(y) + g(y) : y \in B\}$, επομένως προκύπτει το ζητούμενο.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Έστω πως ισχύει το ανάποδο, δηλαδή

$$\inf\{f(x) + g(x) : x \in B\} < \inf\{f(x) : x \in B\} + \inf\{g(x) : x \in B\}.$$

Έστω μάλιστα $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$\inf\{f(x) + g(x) : x \in B\} + \epsilon = \inf\{f(x) : x \in B\} + \inf\{g(x) : x \in B\}.$$

Κατά τα γνωστά για το infimum, θα υπάρχει κάποιο x_1 τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} \inf\{f(x) + g(x) : x \in B\} &\leq f(x_1) + g(x_1) \\ &< \inf\{f(x) + g(x) : x \in B\} + \epsilon = \inf\{f(x) : x \in B\} + \inf\{g(x) : x \in B\}. \end{aligned}$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί ξέρουμε πως

$$f(x_1) \geq \inf\{f(x) : x \in B\}, \quad g(x_1) \geq \inf\{g(x) : x \in B\},$$

και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει πως

$$f(x_1) + g(x_1) \geq \inf\{f(x) : x \in B\} + \inf\{g(x) : x \in B\}.$$

Σχετικά με το τελευταίο ερώτημα, η ισότητα ισχύει, εκτός των άλλων, και οποτεδήποτε οι συναρτήσεις λαμβάνουν τις ελάχιστες τιμές τους και επιπλέον τις λαμβάνουν στο ίδιο σημείο x_0 . Μπορείτε να βρείτε άλλες περιπτώσεις;

10. **(Φθίνουσα σύνθεση)** Να δείξετε ότι αν η f είναι αύξουσα και η g είναι φθίνουσα, τότε οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι φθίνουσες στα σύνολα όπου αυτές ορίζονται. Επαναλάβετε για την περίπτωση που οι δοσμένες συναρτήσεις είναι γνησίως μονότονες.

Λύση: Στην περίπτωση που η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα, παρατηρήστε πως

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) > f(g(x_2)) \Rightarrow f \circ g(x_1) > f \circ g(x_2),$$

επομένως η $f \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επιπλέον

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) > g(f(x_2)) \Rightarrow g \circ f(x_1) > g \circ f(x_2),$$

άρα και η $g \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Στην περίπτωση που η f είναι απλώς αύξουσα και η g είναι απλώς φθίνουσα, τότε ανάλογα έχουμε πως

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) \geq g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) \geq f(g(x_2)) \Rightarrow f \circ g(x_1) \geq f \circ g(x_2),$$

επομένως η $f \circ g$ είναι φθίνουσα, και επιπλέον

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) \geq g(f(x_2)) \Rightarrow g \circ f(x_1) \geq g \circ f(x_2),$$

άρα και η $g \circ f$ είναι φθίνουσα.

11. **(Υπερβολικές τριγωνικές συναρτήσεις – ορισμός και βασικές ιδιότητες)** Το υπερβολικό ημίτονο $\sinh x$, το υπερβολικό συνημίτονο $\cosh x$, η υπερβολική εφαπτομένη $\tanh x$ και η υπερβολική συνεφαπτομένη $\coth x$, όλα με $x \in \mathbb{R}$, ορίζονται, αντιστοίχως, ως

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

(α') Να αποδείξετε ότι οι $\sinh x$, $\tanh x$, $\coth x$ είναι περιττές συναρτήσεις, ενώ η $\cosh x$ είναι άρτια.

(β') Να αποδείξετε τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x, \quad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x,$$

$$\sinh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 - \tanh^2 x}, \quad \cosh 2x = \frac{1 + \tanh^2 x}{1 - \tanh^2 x}, \quad \tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}.$$

Παρατηρήστε ότι όλες οι άνω ιδιότητες είναι ανάλογες αντίστοιχων ιδιοτήτων τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Αυτό δεν είναι τυχαίο, καθώς οι τριγωνομετρικές και οι υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις συνδέονται στενά, αλλά για να μελετήσουμε τη σχέση τους χρειαζόμαστε γνώσεις μιγαδικής ανάλυσης.

(Δεν έχουμε ακόμα ορίσει αυστηρά την εκθετική συνάρτηση e^x . Αυτό θα γίνει σε κατοπινό κεφάλαιο. Επειδή όμως η συνάρτηση αυτή, καθώς και η αντίστροφή της, $\log x$, του φυσικού λογαρίθμου, σας είναι γνωστές από το Λύκειο, θα τις δούμε πριν τον αυστηρό ορισμό τους σε αυτήν και σε ορισμένες ακόμα ασκήσεις. Θα συμβολίζουμε, επίσης, την εκθετική συνάρτηση και ως $\exp x$.)

Λύση:

(α') Παρατηρούμε απλώς πως

$$\begin{aligned}\sinh(-x) &= \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x, \\ \cosh(-x) &= \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x, \\ \tanh(-x) &= \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = -\frac{\sinh x}{\cosh x} = -\tanh x, \\ \coth(-x) &= \frac{1}{\tanh(-x)} = -\frac{1}{\tanh x} = -\coth x.\end{aligned}$$

(β') i.

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2) = 1.\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4} + \frac{(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} \\ &= \frac{1}{4}(e^{x+y} - e^{-x+y} + e^{x-y} - e^{-x-y} + e^{x+y} + e^{-x+y} - e^{x-y} - e^{-x-y}) \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \sinh(x+y).\end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4} + \frac{(e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} \\ &= \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{y-x} + e^{x-y} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{-x+y} - e^{x-y} + e^{-x-y}) \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \cosh(x+y).\end{aligned}$$

iv. Προκύπτει εφαρμόζοντας τη δεύτερη για $y = x$.

v. Προκύπτει εφαρμόζοντας την τρίτη για $y = x$.

vi.

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x = \frac{2 \sinh x \cosh x}{\cosh^2 x - \sinh^2 x} = \frac{2 \frac{\sinh x}{\cosh x}}{1 - \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)^2} = \frac{2 \tanh x}{1 - \tanh^2 x}.$$

vii.

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = \frac{\cosh^2 x + \sinh^2 x}{\cosh^2 x - \sinh^2 x} = \frac{1 + \tanh^2 x}{1 - \tanh^2 x}.$$

viii.

$$\tanh 2x = \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x} = \frac{\frac{2 \tanh x}{1 - \tanh^2 x}}{\frac{1 + \tanh^2 x}{1 - \tanh^2 x}} = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}.$$

3η Ομάδα Ασκήσεων

12. **(Ορια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια, ή να δείξετε ότι δεν υπάρχουν:

$$(\alpha') \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{(\sin 2x)(\sin 4x)}.$$

$$(\beta') \lim_{x \rightarrow \infty} \left[2x - x^3 \log \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right].$$

Λύση:

(α') Παρατηρούμε πως

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{(\sin 2x)(\sin 4x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{4x}{\sin 4x} \times \frac{e^{2x} - 2x - 1}{8x^2}.$$

Όμως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

επομένως και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x} = 1.$$

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{8x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - 2}{16x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{2x}}{16} = \frac{1}{4}.$$

Επομένως τελικά

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{(\sin 2x)(\sin 4x)} = \frac{1}{4}.$$

(β') Παρατηρούμε πως

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \log \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \times \left(\frac{1}{x^2} \right)' = 1.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[2x - x^3 \log \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right] &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[2 - x^2 \log \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right] \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} x \right) \times \lim_{x \rightarrow \infty} \left[2 - x^2 \log \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right] = \infty \times (2 - 1) = \infty. \end{aligned}$$

13. **(Βηματική συνάρτηση)** Δίνεται η βηματική συνάρτηση

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Προσδιορίστε τα ακόλουθα όρια, ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \min\{u(x), u(-x)\}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} u(x^2), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} u\left(\frac{1}{x}\right).$$

Δεν χρειάζεται να επικαλεστείτε τον ορισμό του ορίου.

Λύση:

(α') Παρατηρούμε ότι $\min\{u(x), u(-x)\} = 0$ για όλα τα x , επομένως $\lim_{x \rightarrow 0} \min\{u(x), u(-x)\} = 0$.

(β') Παρατηρούμε ότι

$$u(x^2) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x^2) = 1.$$

(γ') Παρατηρούμε ότι $u\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, για $x > 0$, ενώ η συνάρτηση δεν ορίζεται για $x \leq 0$. Επομένως $\lim_{x \rightarrow 0} u\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

(δ') Παρατηρούμε ότι για $x > 0$ έχουμε $u\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, ενώ για $x < 0$ έχουμε $u\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, επομένως το δοσμένο όριο δεν υπάρχει, γιατί δεν ισούνται τα πλευρικά όρια.

14. (Όρια)

(α') Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}},$$

όπου το ακέραιο μέρος $\lfloor x \rfloor$ του x είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος από τον x .

Λύση:

(α') Παρατηρούμε πως

$$0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x - \lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}},$$

και με χρήση του Κριτηρίου της Παρεμβολής προκύπτει πως

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}} = 0.$$

15. (Όρια) Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια, χρησιμοποιώντας ενδεχομένως άλλα γνωστά όρια, αλλά χωρίς να χρησιμοποιήσετε παραγωγίσεις:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{5} - \sqrt{x^2 + 2x + 5}}{\sqrt{x}} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + \tan x}{\sin x \cos x} \right).$$

Λύση:

(α')

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{x^2 + 2x + 5}}{\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5 - x^2 - 2x - 5}{\sqrt{x}(\sqrt{5} + \sqrt{x^2 + 2x + 5})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{5} + \sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \frac{0}{2\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

(β')

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + \tan x}{\sin x \cos x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \frac{1 + \frac{\tan x}{x}}{\cos x} \right) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x}}{\cos x} \right) = 1 \times \frac{1 + 1 \times 1}{1} = 2. \end{aligned}$$

16. (Όρια) Να προσδιορίσετε τα παρακάτω όρια, εφόσον υπάρχουν:

(α') $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{|\cos x|}{2} \right)^x.$

(β') $\lim_{x \rightarrow \infty} |\cos x|^x.$

Λύση:

(α') Παρατηρούμε πως

$$0 \leq \frac{|\cos x|}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \left(\frac{|\cos x|}{2} \right)^x \leq \left(\frac{1}{2} \right)^x,$$

και επειδή $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^x = 0$, από το Κριτήριο της Παρεμβολής τελικά η συνάρτηση τείνει στο 0 καθώς $x \rightarrow \infty$.

(β') Σε αυτή την περίπτωση, παρατηρούμε πως για όλα τα $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, με $k \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση λαμβάνει την τιμή 0, ενώ για όλα τα $x = 2k\pi$, με $k \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση λαμβάνει την τιμή 1. Επομένως, το όριο δεν υπάρχει.

17. **(Οριο ρητής συνάρτησης)** Να δείξετε, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τον ορισμό του ορίου, ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x}{x+5} = 10.$$

Λύση: Έστω $\epsilon > 0$. Παρατηρούμε πως

$$\left| \frac{10x}{x+5} - 10 \right| < \epsilon \Leftrightarrow \left| \frac{10x - 10x - 50}{x+5} \right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{50}{|x+5|} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{|x+5|}{50} > \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow |x+5| > \frac{50}{\epsilon}. \quad (1)$$

Θέτουμε $M = \max\{-5, \frac{50}{\epsilon} - 5\}$. Παρατηρούμε πως

$$x > M \Rightarrow x > -5 \Rightarrow x+5 > 0 \Rightarrow |x+5| = x+5. \quad (2)$$

Επομένως,

$$x > M \Rightarrow x > \frac{50}{\epsilon} - 5 \Rightarrow x+5 > \frac{50}{\epsilon} \Rightarrow |x+5| > \frac{50}{\epsilon} \Rightarrow \left| \frac{10x}{x+5} - 10 \right| < \epsilon.$$

Η τρίτη συνεπαγωγή ισχύει λόγω της (2). Η τελευταία συνεπαγωγή ισχύει λόγω της ακολουθίας ισοδυναμιών (1). Επομένως, πράγματι ισχύει το δοσμένο όριο.

18. **(Αύξουσες ακολουθίες)** Να δείξετε ότι αν μια ακολουθία a_n είναι αύξουσα, τότε είτε έχει πεπερασμένο όριο L είτε τείνει στο ∞ . (Υπόδειξη: υπάρχουν δύο περιπτώσεις, η περίπτωση η a_n να είναι φραγμένη άνω, οπότε το σύνολο τιμών της έχει supremum, και η περίπτωση η a_n να μην είναι φραγμένη άνω.)

Λύση: Έστω το σύνολο $A = \{a_n\}$ των τιμών που λαμβάνει η ακολουθία a_n . Υπάρχουν δύο ενδεχόμενα.

Το πρώτο ενδεχόμενο είναι η ακολουθία να είναι φραγμένη άνω. Σε αυτή την περίπτωση, από το Αξίωμα της Πληρότητας προκύπτει πως υπάρχει το supremum του συνόλου A , έστω $L = \sup A$. Σε αυτή την περίπτωση, το L είναι όριο της ακολουθίας. Πράγματι, έστω οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Θα υπάρξει, τότε, από γνωστή ιδιότητα του supremum, ένα $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_k > L - \epsilon$. Επειδή όμως η a_n είναι αύξουσα, τότε έχουμε ότι για κάθε $n > k$ θα ισχύει $a_n \geq a_k > L - \epsilon \Rightarrow a_n > L - \epsilon$. Ταυτόχρονα, όμως, $a_n \leq L$, αφού το L είναι supremum, άρα και $a_n < L + \epsilon$. Άρα, τελικά, για το συγκεκριμένο $\epsilon > 0$ βρήκαμε ένα k τέτοιο ώστε για κάθε $n > k$ θα έχουμε

$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon,$$

άρα τελικά $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Το δεύτερο ενδεχόμενο είναι η ακολουθία a_n να μην είναι φραγμένη άνω. Σε αυτή την περίπτωση, θα δείξουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Πράγματι, έστω ένα οποιοδήποτε $M \in \mathbb{R}$. Αφού η a_n δεν είναι φραγμένη άνω, θα υπάρξει κάποιο k τέτοιο ώστε $a_k > M$. Όμως, επειδή η a_n είναι αύξουσα, για κάθε $n > k$ θα έχουμε επίσης, $a_n \geq a_k > M$. Άρα, από τον ορισμό του άπειρου ορίου, προκύπτει πως $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

19. **(Ορια ακολουθιών)** Να υπολογίσετε τα όρια των ακολουθιών

$$\frac{n \sin n^{10} + 20}{(n+1)^2}, \quad n \sin \frac{1}{n^2}.$$

Λύση:

(α') Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n^{10} + 20}{(n+1)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n^{10} + 20}{n^2 + 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sin n^{10}}{n} + \frac{20}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n^{10}}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20}{n^2}}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{0 + 0}{1 + 0 + 0} = 0. \end{aligned}$$

(β') Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 \sin \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} h \frac{\sin h^2}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin h^2}{h^2} = 0 \times 1 = 0. \end{aligned}$$