ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, 2024-2025
Σ. ΤΟΥΜΠΗΣ

1η Ομάδα Ασκήσεων

1. **(Ενα σύνολο που δεν είναι πεδίο)** Έστω το σύνολο των αριθμών $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ για τους οποίους ορίζουμε $\oplus$ την πρόσθεση modulo 6 και $\odot$ τον πολλαπλασιασμό modulo 6. Δηλαδή, για να υπολογίσουμε την πρόσθεση (πολλαπλασιασμό) modulo 6 δύο στοιχείων προσθέτουμε (πολλαπλασιάζουμε) τα στοιχεία μεταξύ τους και κατόπιν λαμβάνουμε το υπόλοιπο της διαίρεσης με το 6. Είναι αυτό το σύνολο, εφοδιασμένο με αυτές τις πράξεις, πεδίο; Γιατί;

   Λύση: Το σύνολο δεν είναι πεδίο, διότι το 4 (που προφανώς δεν είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης) δεν έχει αντίστροφο. Πράγματι, παρατηρήστε πως

   $$4 \odot 0 = 0, \quad 4 \odot 1 = 4, \quad 4 \odot 2 = 2, \quad 4 \odot 3 = 0, \quad 4 \odot 4 = 4, \quad 4 \odot 5 = 2,$$

   επομένως δεν υπάρχει αριθμός που αν πολλαπλασιαστεί, modulo 6, με το 4 να δίνει μονάδα. Μπορείτε να βρείτε άλλους αριθμούς σε αυτό το σύνολο που δεν έχουν αντίστροφο;

2. **(Πρόσθεση αρχείων)** Δίνονται δύο σκληροί δίσκοι, έστω A και B, με χωρητικότητα 1 TB ο καθένας, εντελώς γεμάτοι με δεδομένα που δεν μπορούν να συμπιεστούν. Σας δίνεται και ένας τρίτος δίσκος, έστω C, κενός, της ίδιας χωρητικότητας. Πως μπορείτε να τον χρησιμοποιήσετε ώστε να μην χάσετε καθόλου δεδομένα των A, B, σε περίπτωση που χαθεί ένας (οποιοσδήποτε) από τους τρεις; Χρησιμοποιήστε πρόσθεση modulo 2 μεταξύ αντίστοιχων bits των δίσκων A και B.

   Λύση: Πρέπει να θέσουμε το n-οστό bit του δίσκου C ίσο με το άθροισμα modulo 2 των n-οστών bits των δίσκων A και B. Παρατηρήστε πως ισχύει το εξής:

A	B	$C = A \oplus B$	$A \oplus C$	$B \oplus C$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1

   Επομένως:

   (α΄) Αν χαθούν τα περιεχόμενα του δίσκου A, τα ανακτούμε προσθέτοντας τα αντίστοιχα bits των δίσκων B, C (δείτε την πέμπτη στήλη του άνω πίνακα, και παρατηρήστε ότι είναι ίδια με την πρώτη).

   (β΄) Αν χαθούν τα περιεχόμενα του δίσκου B, τα ανακτούμε προσθέτοντας τα αντίστοιχα bits των δίσκων B, C (δείτε την τέταρτη στήλη του άνω πίνακα και παρατηρήστε ότι είναι ίδια με τη δεύτερη).

   (γ΄) Αν χαθούν τα περιεχόμενα του δίσκου C, τότε συνεχίζουμε να διαθέτουμε τα πλήρη δεδομένα των δίσκων A, B.

3. **(Εύρεση supremum και infimum)** Προσδιορίστε τα supremum, infimum, maximum και minimum των ακόλουθων συνόλων:

   $$[0, 1), \quad (0, 1], \quad \mathbb{Q}, \quad \left\{1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \dots\right\}, \quad A = \{x : (x - \sqrt{2})(x - 3) \leq 0\}, \quad A \cap \mathbb{Q}.$$

   Λύση:

   (α΄) Προφανώς $\inf[0, 1) = \min[0, 1) = 0$ και $\sup[0, 1) = 1$. Όμως, δεν υπάρχει το $\max[0, 1)$ διότι το 1 δεν ανήκει στο $[0, 1)$.

(β΄) Ανάλογα, $\sup(0,1] = \max(0,1] = 1$ και $\inf(0,1] = 0$. όμως δεν υπάρχει το $\min(0,1]$ διότι το 0 δεν ανήκει στο σύνολο.

(γ΄) Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ούτε άνω, ούτε κάτω φραγμένο, άρα δεν έχει supremum, infimum, maximum ή minimum.

(δ΄) Παρατηρήστε ότι το ελάχιστο στοιχείο αυτού του συνόλου είναι το πρώτο, επομένως έχουμε

$$\inf\left\{1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{3},\ 1-\frac{1}{4},\dots\right\} = \min\left\{1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{3},\ 1-\frac{1}{4},\dots\right\} = \frac{1}{2}.$$

Από την άλλη, υπάρχουν στοιχεία του συνόλου αυθαίρετα κοντά στο 1, χωρίς όμως το 1 να ανήκει στο σύνολο. Άρα το σύνολο δεν έχει maximum, αλλά

$$\sup\left\{1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{3},\ 1-\frac{1}{4},\dots\right\} = 1.$$

(ε΄) Κατά τα γνωστά μας για τα τριώνυμα, το σύνολο μπορεί να γραφεί και ως $[\sqrt{2},3]$. Επομένως,

$$\inf A = \min A = \sqrt{2}, \qquad \sup A = \max A = 3.$$

(ς΄) Αυτό που αλλάζει σε αυτή την περίπτωση είναι ότι το $\sqrt{2}$ δεν ανήκει στο σύνολο. Επομένως, έχουμε μεν

$$\inf A\cap\mathbb{Q} = \sqrt{2}, \qquad \sup A\cap\mathbb{Q} = \max A\cap\mathbb{Q} = 3,$$

αλλά δεν υπάρχει το $\min A\cap\mathbb{Q}$.

4. **(Supremum υποσυνόλου)** Αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν για δύο *σύνολα* έχουμε $A\subset B$, τότε $\sup A < \sup B$.

   Λύση: Η πρόταση είναι λάθος. Πράγματι, έχουμε ότι $\{0,2\}\subset\{0,1,2\}$, όμως $\sup\{0,2\} = \sup\{0,1,2\} = 2$.

5. **(Αυθαίρετα κοντινά σύνολα)** Έστω δύο μη κενά σύνολα A και B τέτοια ώστε για κάθε $x\in A$ και $y\in B$ έχουμε $x\le y$, και επιπλέον για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχουν $x\in A$, $y\in B$, τέτοια ώστε $y-x<\epsilon$. Να δείξετε ότι υπάρχουν τα $\sup A$, $\inf B$ και μάλιστα είναι ίσα.

   Λύση: Καταρχάς, το A είναι μη κενό και φραγμένο άνω, από οποιοδήποτε $y\in B$ (που επίσης είναι μη κενό). Άρα, έχει supremum, από το Αξίωμα της Πληρότητας. Ομοίως, το B έχει infimum.

   Σχετικά με την ισότητα των $\sup A$, $\inf B$, θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Συγκεκριμένα, θα υποθέσουμε πρώτα πως $\sup A > \inf B$, και θα φτάσουμε σε άτοπο, και μετά θα υποθέσουμε ότι $\sup A < \inf B$, και θα φτάσουμε και πάλι σε άτοπο, οπότε το μόνο ενδεχόμενο είναι η ισότητα.

   Έστω, λοιπόν, πως $\sup A > \inf B$. Έστω $\epsilon>0$ η θετική ποσότητα $\epsilon = \sup A - \inf B$. Έστω το $\epsilon/2$. Γνωρίζουμε ότι, αφού το $\sup A$ είναι supremum του A, θα υπάρχει κάποιο x τέτοιο ώστε

$$\sup A - \epsilon/2 < x \Rightarrow \sup A - \frac{\sup A - \inf B}{2} < x \Rightarrow \frac{\sup A + \inf B}{2} < x.$$

   Ανάλογα, επειδή το $\inf B$ είναι infimum του B, θα υπάρχει κάποιο y τέτοιο ώστε

$$y < \inf B + \epsilon/2 \Rightarrow y < \inf B + \frac{\sup A - \inf B}{2} \Rightarrow y < \frac{\sup A + \inf B}{2}.$$

   Επομένως, $y<x$ που είναι άτοπο, διότι εξ υποθέσεως για κάθε ζεύγος x,y, άρα και για το συγκεκριμένο, θα πρέπει να έχουμε $y\ge x$.

   Έστω τώρα πως $\sup A < \inf B$. Έστω $\epsilon>0$ η θετική ποσότητα $\epsilon = \inf B - \sup A$. Έστω οποιοδήποτε $x\in A$ και ένα οποιοδήποτε $y\in B$. Θα έχουμε $x\le\sup A$ αφού το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A, και $y\ge\inf B$ διότι το $\inf B$ είναι κάτω φράγμα του B. Άρα, αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει

$$y - x \ge \inf B - \sup A = \epsilon.$$

Και αυτό είναι άτοπο, διότι θα έπρεπε, σύμφωνα με την υπόθεση, για το συγκεκριμένο $\epsilon > 0$ να υπάρχουν $y \in B, x \in A$ τέτοια ώστε $y - x < \epsilon$, όμως από τα άνω προκύπτει ότι για το συγκεκριμένο $\epsilon > 0$, ισχύει ότι $y - x \geq \epsilon$ για *κάθε* ζεύγος x, y.

6. **(Infimum αθροίσματος)** Έστω συναρτήσεις $f, g : B \to \mathbb{R}$ κάτω φραγμένες στο σύνολο B. Να δείξετε ότι
$$\inf\{f(x) + g(x) : x \in B\} \geq \inf\{f(x) : x \in B\} + \inf\{g(x) : x \in B\}.$$
Μπορείτε να βρείτε μια γενική περίπτωση όπου ισχύει η ισότητα?

Λύση: Παρατηρήστε πως
$$f(y) \geq \inf\{f(x) : x \in B\}$$
για κάθε $y \in B$, εξ ορισμού του $\inf\{f(x) : x \in B\}$. Ανάλογα,
$$g(y) \geq \inf\{g(x) : x \in B\}$$
για κάθε $y \in B$, και αν προσθέσουμε κατά μέλη,
$$f(y) + g(y) \geq \inf\{f(x) : x \in B\} + \inf\{g(x) : x \in B\}.$$
Άρα, η ποσότητα στα δεξιά είναι κάτω φράγμα όλων των $f(y) + g(y)$, και επομένως θα είναι μικρότερη ή ίση του *μέγιστου* κάτω φράγματος όλων των $f(y)+g(y)$, δηλαδή του $\inf\{f(y)+g(y) : y \in B\}$, επομένως προκύπτει το ζητούμενο.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Έστω πως ισχύει το ανάποδο, δηλαδή
$$\inf\{f(x) + g(x) : x \in B\} < \inf\{f(x) : x \in B\} + \inf\{g(x) : x \in B\}.$$
Έστω μάλιστα $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε
$$\inf\{f(x) + g(x) : x \in B\} + \epsilon = \inf\{f(x) : x \in B\} + \inf\{g(x) : x \in B\}.$$
Κατά τα γνωστά για το infimum, θα υπάρχει κάποιο x_1 τέτοιο ώστε
$$\begin{aligned}\inf\{f(x) + g(x) : x \in B\} &\leq f(x_1) + g(x_1) \\ &< \inf\{f(x) + g(x) : x \in B\} + \epsilon = \inf\{f(x) : x \in B\} + \inf\{g(x) : x \in B\}.\end{aligned}$$
Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί ξέρουμε πως
$$f(x_1) \geq \inf\{f(x) : x \in B\}, \qquad g(x_1) \geq \inf\{g(x) : x \in B\},$$
και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει πως
$$f(x_1) + g(x_1) \geq \inf\{f(x) : x \in B\} + \inf\{g(x) : x \in B\}.$$
Σχετικά με το τελευταίο ερώτημα, η ισότητα ισχύει, εκτός των άλλων, και οποτεδήποτε οι συναρτήσεις λαμβάνουν τις ελάχιστες τιμές τους και επιπλέον τις λαμβάνουν στο ίδιο σημείο x_0. Μπορείτε να βρείτε άλλες περιπτώσεις;

7. **(Άθροισμα άρτιας και περιττής συνάρτησης)** Αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Οποιαδήποτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα μιας περιττής και μιας άρτιας συνάρτησης.

Λύση: Η πρόταση είναι αληθής. Πράγματι, έστω οι συναρτήσεις
$$f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

οι οποίες είναι η μεν πρώτη άρτια και η δε δεύτερη περιττή αφού:

$$\begin{aligned} f_e(-x) &= \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = f_e(x), \\ f_o(-x) &= \frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -f_o(x). \end{aligned}$$

Όμως, έχουμε

$$f_e(x)+f_o(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = f(x),$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

8. **(Αύξουσα σύνθεση)** Να δείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι (γνησίως) αύξουσες, τότε είναι (γνησίως) αύξουσα και η σύνθεσή τους $f \circ g$ στο σύνολο όπου αυτή ορίζεται.

   Λύση: Στην περίπτωση συναρτήσεων f, g που είναι γνησίως αύξουσες, πολύ απλά παρατηρούμε πως

   $$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) < f(g(x_2)) \Rightarrow f \circ g(x_1) < f \circ g(x_2),$$

   άρα και η σύνθεση $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

   Η απόδειξη για την περίπτωση συναρτήσεων που είναι απλώς αύξουσες είναι ανάλογη:

   $$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) \leq f(g(x_2)) \Rightarrow f \circ g(x_1) \leq f \circ g(x_2),$$

   άρα και η σύνθεση $f \circ g$ είναι αύξουσα.

9. **(Φθίνουσα σύνθεση)** Να δείξετε ότι αν η f είναι (γνησίως) αύξουσα και η g είναι (γνησίως) φθίνουσα, τότε οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι (γνησίως) φθίνουσες στα σύνολα όπου αυτές ορίζονται.

   Λύση: Στην περίπτωση που η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα, παρατηρήστε πως

   $$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) > f(g(x_2)) \Rightarrow f \circ g(x_1) > f \circ g(x_2),$$

   επομένως η $f \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επιπλέον

   $$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) > g(f(x_2)) \Rightarrow g \circ f(x_1) > g \circ f(x_2),$$

   άρα και η $g \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα.

   Στην περίπτωση που η f είναι απλώς αύξουσα και η g είναι απλώς φθίνουσα, τότε ανάλογα έχουμε πως

   $$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) \geq g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) \geq f(g(x_2)) \Rightarrow f \circ g(x_1) \geq f \circ g(x_2),$$

   επομένως η $f \circ g$ είναι φθίνουσα, και επιπλέον

   $$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq (x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) \geq g(f(x_2)) \Rightarrow g \circ f(x_1) \geq g \circ f(x_2),$$

   άρα και η $g \circ f$ είναι φθίνουσα.

2η Ομάδα Ασκήσεων

10. **(Όριο απολύτου)** Να δείξετε, αποκλειστικά με χρήση του ορισμού του ορίου, ότι $\lim_{x\to 0}|x| = 0$.

Λύση: Έστω $\epsilon > 0$. Θέτουμε $\delta = \epsilon > 0$. Παρατηρήστε πως

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow 0 < |x| < \epsilon \Rightarrow 0 < |f(x) - 0| < \epsilon,$$

και επομένως εξ ορισμού $\lim_{x\to 0}|x| = 0$.

11. **(Ύπαρξη ορίου)** Αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x^2)$ τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Λύση: Η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει. Ο λόγος είναι ότι μπορεί η $f(x)$ να έχει διαφορετικά πλευρικά όρια στο 0, κάτι που κρύβει ο τετραγωνισμός του x. Σαν ένα συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα, εξετάστε την συνάρτηση Heaviside

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

για την οποία ξέρουμε ότι δεν έχει όριο $\lim_{x\to 0} u(x)$ στο 0. Όμως, το όριο $\lim_{x\to 0} u(x^2)$ υπάρχει. Πράγματι, η $u(x^2) = 1$, όπως προκύπτει αν πάρουμε τις περιπτώσεις $x > 0$, $x < 0$ και $x = 0$, επομένως $\lim_{x\to 0} u(x^2) = 1$.

12. **(Ύπαρξη ορίου)** Αποδείξτε την ακόλουθη ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ και $\lim_{x\to x_1} g(x) = x_0$, τότε $\lim_{x\to x_1} f(g(x)) = L$.

Λύση: Η ιδιότητα δεν ισχύει, και το πρόβλημα είναι η ενδεχόμενη έλλειψη συνέχειας της f στο x_0. Ένα απλό αντιπαράδειγμα είναι το

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = 0.$$

Παρατηρήστε πως

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0} f(g(x)) = \lim_{x\to 0} f(0) = 1.$$

13. **(Όριο αντίστροφης συνάρτησης)** Αποδείξτε την ακόλουθη ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, τότε και $\lim_{x\to x_0} 1/f(x) = 0$.

Λύση: Η πρόταση ισχύει. Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$. Θέτουμε $M = 1/\epsilon > 0$, και παρατηρούμε πως, από τον ορισμό του δοσμένου ορίου στο άπειρο, θα υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M \Rightarrow \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{M} = \epsilon \Rightarrow -\frac{1}{M} < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{M} \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| < \frac{1}{M} = \epsilon.$$

14. **(Όριο αντίστροφης συνάρτησης)** Αποδείξτε την ακόλουθη ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, τότε και $\lim_{x\to x_0} 1/f(x) = \infty$.

Λύση: Η δοσμένη πρόταση δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η μεν $f(x) = x$ συγκλίνει στο 0 καθώς $x \to 0$, όμως η $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x}$ έχει όρια

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty,$$

και επομένως δεν έχει όριο για $x \to 0$. Η μη ύπαρξη του ορίου ουσιαστικά οφείλεται στο ότι καθώς το $x \to x_0$, η συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να λαμβάνει ταυτοχρόνως και θετικές και αρνητικές τιμές.

15. **(Αύξουσα συγκλίνουσα συνάρτηση)** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα και υπάρχει το πεπερασμένο όριο $L = \lim_{x\to\infty} f(x)$, τότε είναι φραγμένη άνω.

    Λύση: Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση είναι φραγμένη άνω από το L. Πράγματι, έστω πως $f(x_0) > L$ για κάποιο x_0, και έστω πως $\epsilon = f(x_0) - L > 0$. Τότε, επειδή η συνάρτηση είναι αύξουσα, θα έχουμε

    $$x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) = L + \epsilon. \tag{1}$$

    Θα φτάσουμε σε άτοπο. Πράγματι, για το άνω $\epsilon > 0$, λόγω του δοσμένου ορίου θα υπάρχει κάποιο X τέτοιο ώστε

    $$x > X \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \Rightarrow f(x) < L + \epsilon.$$

    Αυτό, όμως, είναι άτοπο, γιατί αντιβαίνει την (1).

16. **(Όρια του $\cos x$ στο $\pm\infty$)** Να δείξετε, με χρήση του ορισμού του ορίου και όχι με γραφικά επιχειρήματα, ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\infty} \cos x$, $\lim_{x\to-\infty} \cos x$.

    Λύση: Καταρχάς, πρέπει να είναι διαισθητικά προφανές ότι το όριο δεν μπορεί να υπάρχει. Αιτία είναι οι "ταλαντώσεις" που κάνει το συνημίτονο για αυθαίρετα μεγάλα ορίσματα. Θα αποδείξουμε, αυστηρά, ότι δεν υπάρχει όριο με απαγωγή σε άτοπο. Έστω πως υπάρχει το όριο, έστω L, και έστω πως $L \geq 0$. Επιλέγουμε $\epsilon = \frac{1}{2}$. Για αυτό το ϵ, δεν υπάρχει X τέτοιο ώστε όποτε $x > X$ να έχουμε και $|f(x) - L| < \epsilon$, αφού για κάθε X υπάρχουν $x > X$ για τα οποία $\cos x = -1$, και επομένως, για αυτά τα x (αφού έχουμε υποθέσει $L \geq 0$),

    $$|\cos x - L| > \frac{1}{2}.$$

    επομένως, το όριο δεν μπορεί να είναι $L \geq 0$. Ανάλογα μπορούμε να αποκλείσουμε και την περίπτωση $L < 0$.

17. **(Ορισμός Ορίου)** Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to-4} \frac{17}{(x+4)^2} = \infty$ χρησιμοποιώντας τον **ορισμό** του αντίστοιχου ορίου.

    Λύση: Έστω $M > 0$. Παρατηρούμε πως

    $$f(x) > M \Leftrightarrow \frac{17}{(x+4)^2} > M \Leftrightarrow (x+4)^2 < \frac{17}{M} \Leftrightarrow |x+4| < \sqrt{\frac{17}{M}}.$$

    Επομένως, θέτουμε $\delta = \sqrt{\frac{17}{M}} > 0$ και παρατηρούμε πως

    $$|x - (-4)| < \delta \Rightarrow |x+4| < \sqrt{\frac{17}{M}} \Rightarrow f(x) > M.$$

    Αν, πάλι, $M < 0$, τότε για οποιοδήποτε $\delta > 0$, π.χ. για $\delta = 1$, ισχύει ότι $|x - (-4)| < \delta \Rightarrow f(x) > M$. Επομένως το όριο ισούται με ∞, σύμφωνα με τον σχετικό ορισμό.

18. **(Όριο)** Να υπολογίσετε την τιμή του ορίου

    $$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+7} - ax\right),$$

    όπου το $a \in \mathbb{R}$ είναι άγνωστη παράμετρος. Το όριο εξαρτάται από την τιμή του a, επομένως πρέπει να εξετάσετε διαφορετικές περιπτώσεις για την τιμή του a.

    Λύση: Παρατηρήστε πως

    $$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+7} - ax\right) = \lim_{x\to\infty} x \left(\sqrt{9 + \frac{7}{x^2}} - a\right).$$

Επομένως, αν $a > 3$ το όριο είναι $-\infty$, διότι η συνάρτηση εντός της παρένθεσης συγκλίνει σε ένα αρνητικό πραγματικό αριθμό. Αντίθετα, αν $a < 3$ το όριο είναι ∞, γιατί η συνάρτηση εντός της παρένθεσης συγκλίνει σε ένα θετικό πραγματικό αριθμό. Τέλος, στην περίπτωση που $a = 3$, το άνω όριο εμφανίζει απροσδιοριστία, αλλά ειδικά για αυτή την περίπτωση μπορούμε να γράψουμε

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+7}-3x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+7}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+7}+3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2+7}+3x\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{7}{\left(\sqrt{9x^2+7}+3x\right)} = 0.$$

Συνοψίζοντας,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+7}-ax\right) = \begin{cases} -\infty, & a > 3, \\ 0, & a = 3, \\ \infty, & a < 3. \end{cases}$$

19. **(Βηματική συνάρτηση)** Δίνεται η βηματική συνάρτηση

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Προσδιορίστε τα ακόλουθα όρια, ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν:

$$\lim_{x\to 0}\min\{u(x), u(-x)\}, \qquad \lim_{x\to 0} u(x^2), \qquad \lim_{x\to\infty} u\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \lim_{x\to 0} u\left(\frac{1}{x}\right).$$

Δεν χρειάζεται να επικαλεστείτε τον ορισμό του ορίου.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε ότι $\min\{u(x), u(-x)\} = 0$ για όλα τα x, επομένως $\lim_{x\to 0}\min\{u(x), u(-x)\} = 0$.

(β΄) Παρατηρούμε ότι

$$u(x^2) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

επομένως

$$\lim_{x\to 0} u(x^2) = 1.$$

(γ΄) Παρατηρούμε ότι $u\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, για $x > 0$, ενώ η συνάρτηση δεν ορίζεται για $x \leq 0$. Επομένως $\lim_{x\to 0} u\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

(δ΄) Παρατηρούμε ότι για $x > 0$ έχουμε $u\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, ενώ για $x < 0$ έχουμε $u\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, επομένως το δοσμένο όριο δεν υπάρχει, γιατί δεν ισούνται τα πλευρικά όρια.

20. **(Όρια)**

(α΄) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{\sqrt{x}},$$

όπου το *ακέραιο μέρος* $\lfloor x\rfloor$ του x είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος από τον x.

(β΄) Να βρείτε τιμές που μπορούν να πάρουν οι πραγματικές παράμετροι a, b ώστε να ισχύει

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{a\sin(x+b)}{x-\frac{\pi}{2}} = 10.$$

(Υπάρχουν πολλές σωστές απαντήσεις και αρκεί να βρείτε μια.)

(γ΄) Βρείτε *όλα* τα ζεύγη τιμών για τις παραμέτρους a, b ώστε να ισχύει

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{a\sin(x+b)}{x-\frac{\pi}{2}} = 10.$$

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x-\lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}},$$

και με χρήση του Κριτηρίου της Παρεμβολής προκύπτει πως

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-\lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}} = 0.$$

(β΄) Μια επιλογή είναι η $a = 10$, $b = -\frac{\pi}{2}$. Σε αυτή την περίπτωση, πράγματι

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{10\sin(x-\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} = 10,$$

χρησιμοποιώντας το γνωστό όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(γ΄) Αφού το όριο είναι πεπερασμένο και ο παρονομαστής μηδενίζεται για $x \to \frac{\pi}{2}$, θα πρέπει και ο αριθμητής να μηδενίζεται. Πρέπει, λοιπόν, $b = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, όπου $k \in \mathbb{Z}$. Για όλες αυτές τις τιμές του b, με χρήση του άνω όριο προκύπτει ότι πρέπει $a = 10$.

21. **(Όρια)** Να προσδιορίσετε τα παρακάτω όρια, εφόσον υπάρχουν:

(α΄) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{|\cos x|}{2}\right)^x$.

(β΄) $\lim_{x\to\infty} |\cos x|^x$.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$0 \leq \frac{|\cos x|}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \left(\frac{|\cos x|}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

και επειδή $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$, από το Κριτήριο της Παρεμβολής τελικά η συνάρτηση τείνει στο 0 καθώς $x \to \infty$.

(β΄) Σε αυτή την περίπτωση, παρατηρούμε πως για όλα τα $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, με $k \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση λαμβάνει την τιμή 0, ενώ για όλα τα $x = 2k\pi$, με $k \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση λαμβάνει την τιμή 1. Επομένως, το όριο δεν υπάρχει.

3η Ομάδα Ασκήσεων

22. **(Υπολογισμός ορίων)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

(α΄) $\lim_{x\to 0} \sin\sin x$.

(β΄) $\lim_{x\to 0} \cos\sin x$.

(γ΄) $\lim_{x\to 1} \tan\frac{x^2+1}{x^3+2}$.

Λύση:

(α΄) Η συνάρτηση του ημιτόνου είναι συνεχής, επομένως μπορούμε να περάσουμε το όριο εντός της, δύο φορές, και, πολύ απλά, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} \sin\sin x = \sin \lim_{x\to 0} \sin x = \sin\sin \lim_{x\to 0} x = \sin\sin 0 = \sin 0 = 0.$$

(β΄) Ανάλογα, αφού και η συνάρτηση του συνημιτόνου είναι συνεχής,

$$\lim_{x\to 0} \cos\sin x = \cos \lim_{x\to 0} \sin x = \cos\sin \lim_{x\to 0} x = \cos\sin 0 = \cos 0 = \pi/2.$$

(γ΄) Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να περάσουμε και πάλι το όριο εντός της εφαπτομένης, απλώς πρέπει να βεβαιωθούμε εκ των υστέρων ότι το όριο που δημιουργείται εντός της εφαπτομένης δεν ισούται με κάποια τιμή εκτός του πεδίου ορισμού της (σε όλες τις τιμές εντός του πεδίου ορισμού της, η εφαπτομένη είναι συνεχής συνάρτηση). Σε αυτή την περίπτωση, όπως προκύπτει, δεν υπάρχει τέτοιο πρόβλημα:

$$\lim_{x\to 1} \tan\frac{x^2+1}{x^3+2} = \tan \lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^3+2} = \tan\frac{1+1}{1+2} = \tan 2/3.$$

23. **(Κοινό πρόσημο σε ανοικτή γειτονιά)** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 με $f(x_0) > 0$ (εναλλακτικά, $f(x_0) < 0$), τότε υπάρχει μια ανοικτή γειτονιά I γύρω από το x_0 (δηλαδή ένα διάστημα της μορφής $I = (a, b)$ με $x_0 \in (a, b)$) τέτοιο ώστε $f(x) > 0$ (εναλλακτικά, $f(x) < 0$) παντού στο I.

Λύση: Υποθέτουμε ότι $f(x_0) > 0$. Η απόδειξη στην περίπτωση που $f(x_0) < 0$ είναι ανάλογη και παραλείπεται.

Έστω, λοιπόν, το $\epsilon = f(x_0) > 0$. Από τον ορισμό της συνέχειας έχουμε ότι για εκείνο το ϵ θα υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon = f(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) > -f(x_0) \Rightarrow f(x) > 0.$$

Επομένως, το ζητούμενο διάστημα είναι το $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

24. **(Ύπαρξη ριζών πολυωνύμων)** Να αποδείξετε ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

Λύση: Περιληπτικά, το αποτέλεσμα ισχύει γιατί για τα πολυώνυμα περιττού βαθμού συμβαίνει πάντα κάτι από τα δύο:

(α΄) Είτε λαμβάνουν πολύ αρνητικές τιμές καθώς το όρισμά τους λαμβάνει πολύ αρνητικές τιμές και πολύ θετικές τιμές καθώς το όρισμά τους λαμβάνει πολύ θετικές τιμές,

(β΄) είτε λαμβάνουν πολύ θετικές τιμές καθώς το όρισμά τους λαμβάνει πολύ αρνητικές τιμές και πολύ αρνητικές τιμές καθώς το όρισμά τους λαμβάνει πολύ θετικές τιμές.

Το τι από τα δύο συμβαίνει εξαρτάται από το συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου. Επειδή, επιπλέον, είναι και συνεχείς συναρτήσεις, θα πρέπει κάπου να μηδενίζονται.

Αναλυτικά, έστω

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

όπου $a_n \neq 0$ και n περιττός. Έστω, επίσης, πως $a_n > 0$. (Η απόδειξη για την περίπτωση $a_n < 0$ είναι ανάλογη και για αυτό παραλείπεται.) Όταν $x > 0$, μπορούμε να γράψουμε το $P(x)$ ως

$$P(x) = x^n \left[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right]. \tag{2}$$

Σχετικά με το όριο του $P(x)$ στο ∞, χρησιμοποιώντας την (2) έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} P(x) &= \left(\lim_{x\to\infty} x^n\right) \times \lim_{x\to\infty}\left[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right] \\
&= \left(\lim_{x\to\infty} x^n\right) \times \left[\lim_{x\to\infty} a_n + \lim_{x\to\infty}\frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \lim_{x\to\infty}\frac{a_1}{x^{n-1}} + \lim_{x\to\infty}\frac{a_0}{x^n}\right] \\
&= \left(\lim_{x\to\infty} x^n\right) \times [a_n + 0 + \cdots + 0] = \infty \times a_n = \infty.
\end{aligned}$$

Στα άνω, χρησιμοποιήσαμε τα γνωστά όρια

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x^n &= \infty, \qquad n \in \mathbb{N}^*, \\
\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n} &= 0, \qquad n \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

και το ότι $a_n > 0$. Επομένως, τελικά $\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$. Από τον ορισμό του ορίου άμεσα προκύπτει, λοιπόν, πως θα υπάρχει κάποιο b τέτοιο ώστε $P(b) > 0$. Πράγματι, έστω κάποιο $M > 0$, για παράδειγμα το $M = 1$. Θα υπάρχει κάποιο X τέτοιο ώστε $P(x) > M > 0$ για κάθε $x > X$, άρα και για το $b = X + 1$.

Σχετικά με το όριο του $P(x)$ στο $-\infty$, και πάλι χρησιμοποιώντας την (2) έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} P(x) &= \left(\lim_{x\to-\infty} x^n\right) \times \lim_{x\to-\infty}\left[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right] \\
&= \left(\lim_{x\to-\infty} x^n\right) \times \left[\lim_{x\to-\infty} a_n + \lim_{x\to-\infty}\frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \lim_{x\to-\infty}\frac{a_1}{x^{n-1}} + \lim_{x\to-\infty}\frac{a_0}{x^n}\right] \\
&= \left(\lim_{x\to-\infty} x^n\right) \times [a_n + 0 + \cdots + 0] = (-\infty) \times a_n = -\infty.
\end{aligned}$$

Στα άνω, χρησιμοποιήσαμε τα γνωστά όρια

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} x^n &= -\infty, \qquad n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}^*, \\
\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} &= 0, \qquad n \in \mathbb{N}^*
\end{aligned}$$

και το ότι $a_n > 0$. Επομένως, τελικά $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$. Από τον ορισμό του ορίου άμεσα προκύπτει, λοιπόν, παρόμοια με την προηγούμενη περίπτωση, πως θα υπάρχει κάποιο a τέτοιο ώστε $P(a) < 0$.

Τελικά, λοιπόν, $P(a) < 0$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ και $P(b) > 0$ για κάποιο $b \in \mathbb{R}$, άρα από το Θεώρημα του Bolzano προκύπτει πως θα υπάρχει κάποιο x_0 τέτοιο ώστε $P(x_0) = 0$.

25. **(Υλοποίηση Μεθόδου Διχοτόμησης)** Να υλοποιήσετε τη Μέθοδο της Διχοτόμησης σε μια γλώσσα προγραμματισμού της επιλογής σας, και κατόπιν να την εκτελέσετε για να εντοπίσετε μια ρίζα της συνάρτησης $f(x) = x - \cos x$, ξεκινώντας από το αρχικό διάστημα $[0, \pi]$ και εκτελώντας 20 επαναλήψεις. Να παραδώσετε στις λύσεις τον κώδικά σας και τα εξαγόμενα αποτελέσματα στη μορφή ενός πίνακα τεσσάρων στηλών ως εξής:

n	a	b	$f(m)$
1	0	3.141592653589793	1.570796326794897
2	0	1.570796326794897	0.078291382210901
3	0	0.785398163397448	-0.531180450812563
4	0.392699081698724	0.785398163397448	-0.242420989754459
5	0.589048622548086	0.785398163397448	-0.085787060389970
6	0.687223392972767	0.785398163397448	-0.004640347169852
7	0.736310778185108	0.785398163397448	0.036607387839811
8	0.736310778185108	0.760854470791278	0.015928352815780
9	0.736310778185108	0.748582624488193	0.005630132459280
10	0.736310778185108	0.742446701336650	0.000491415300264
11	0.736310778185108	0.739378739760879	-0.002075336486523
12	0.737844758972993	0.739378739760879	-0.000792178079270
13	0.738611749366936	0.739378739760879	-0.000150435742050
14	0.738995244563908	0.739378739760879	0.000170476193345
15	0.738995244563908	0.739186992162393	0.000010016828910
16	0.738995244563908	0.739091118363150	-0.000070210305791
17	0.739043181463529	0.739091118363150	-0.000030096950742
18	0.739067149913340	0.739091118363150	-0.000010040113991
19	0.739079134138245	0.739091118363150	-0.000000011655809
20	0.739085126250698	0.739091118363150	0.000005002583233

Πίνακας 1: Η εκτέλεση του Μεθόδου της Διχοτόμησης για την Άσκηση 25, και συγκεκριμένα για τη συνάρτηση $f(x) = x - \cos x$ με αρχικό διάστημα το $[a, b] = [0, \pi]$.

(α΄) Η πρώτη στήλη να δείχνει την επανάληψη.

(β΄) Η δεύτερη στήλη να δείχνει το αριστερό άκρο του τρέχοντος διαστήματος στην αρχή της επανάληψης,

(γ΄) Η τρίτη στήλη να δείχνει το δεξί άκρο του τρέχοντος διαστήματος στην αρχή της επανάληψης,

(δ΄) Η τέταρτη στήλη να δείχνει την τιμή της συνάρτησης στο μέσου του τρέχοντος διαστήματος στην αρχή της επανάληψης,

Λύση: Τα αποτελέσματα που εξάγει ο κώδικας, στη μορφή της εκφώνησης, εμφανίζονται στον Πίνακα 1. Παρατηρήστε ότι στην προτελευταία επανάληψη βρήκαμε μια τιμή για την συνάρτηση μικρότερη από αυτή της τελευταίας επανάληψης! Αυτό είναι κάτι που η μέθοδος επιτρέπει να συμβεί.

26. **(Άπειρες ρίζες)** Ισχύει η ακόλουθη πρόταση; Υπάρχει συνεχής συνάρτηση, που δεν είναι σταθερή σε κανένα διάστημα που είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, η οποία έχει άπειρες ρίζες σε φραγμένο κλειστό διάστημα.

Λύση: Η πρόταση είναι αληθής. Πράγματι, ένα παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x \sin \frac{1}{x}, & x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \end{cases}$$

η οποία προφανώς δεν είναι σταθερή.

Η συνέχεια της f στο $[-1, 1] \setminus \{0\}$ προκύπτει άμεσα από γνωστά θεωρήματα. Η συνέχεια της f στο 0 προκύπτει από το Κριτήριο της Παρεμβολής, παρατηρώντας πως

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 \Rightarrow \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|.$$

Πράγματι, αφού έχουμε $\lim_{x\to 0}|x| = \lim_{x\to 0} -|x|$, θα έχουμε και

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

άρα τελικά η f είναι παντού συνεχής στο $[-1,1]$.

Παρατηρήστε, επιπλέον, ότι η $f(x)$ μηδενίζεται σε άπειρα σημεία εντός του $[-1,1]$, και συγκεκριμένα σε όλα τα x για τα οποία ισχύει η $\frac{1}{x} = k\pi$, όπου $k \in \mathbb{Z}^*$, δηλαδή σε όλα τα

$$x = \frac{1}{k\pi}, \qquad k \in \mathbb{Z}^*.$$

Επομένως, η f ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις της εκφώνησης.

27. **(Συνέχεια Lipschitz φυσικών δυνάμεων)** Δείξτε ότι η $f(x) = x^n$, όπου $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, είναι Lipschitz συνεχής σε κάθε φραγμένο διάστημα και όχι Lipschitz συνεχής σε κάθε μη φραγμένο διάστημα. Χρησιμοποιήστε αποκλειστικά τον ορισμό της συνέχειας Lipschitz.

   Λύση: Καταρχάς, έστω ένα φραγμένο διάστημα I, και έστω $|x| \le M$ για κάθε $x \in I$, όπου $M > 0$. Το M είναι βέβαιο ότι υπάρχει, αφού το I είναι φραγμένο. Έστω τώρα $x, y \in M$. Παρατηρήστε πως

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x^n - y^n| = |x-y||x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}| \\ &\le |x-y|\left(|x|^{n-1} + |x|^{n-2}|y| + \cdots + |x||y|^{n-2} + |y|^{n-1}|\right) \\ &\le |x-y|(n-1)M^{n-1}. \end{aligned}$$

   Η πρώτη ισότητα προέκυψε χρησιμοποιώντας την γνωστή ταυτότητα

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

   Η πρώτη ανισότητα προέκυψε χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, και η δεύτερη παρατηρώντας ότι, εξ υποθέσεως, $|x|, |y| \le M$. Επομένως, πράγματι η $f(x)$ είναι Lipschitz συνεχής με $C = (n-1)M^{n-1}$. Παρατηρήστε ότι η ποσότητα αυτή ισούται με τη μέγιστη τιμή που λαμβάνει η απόλυτη τιμή της παραγώγου της δοσμένης συνάρτησης. Αυτό δεν είναι τυχαίο!

   Έστω, τώρα, ένα μη φραγμένο διάστημα, για παράδειγμα το (a, ∞). (Οι υπόλοιπες περιπτώσεις μη φραγμένων διαστημάτων αντιμετωπίζονται ανάλογα.) Έστω $x, y \in (a, \infty)$. Παρατηρήστε πως

$$|f(x) - f(y)| = |x^n - y^n| = |x-y||x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}|.$$

   Παρατηρήστε ότι το δεξί μέλος της άνω ισότητας μπορεί να γίνει ένα όσο μεγάλο πολλαπλάσιο της ποσότητας $|x-y|$ θέλουμε, αρκεί να επιλέξουμε αρκούντως μεγάλες τιμές για τα x, y. Επομένως, δεν μπορεί να φραχτεί από κάποιο $C|x-y|$, όπου $C \in \mathbb{R}$, και επομένως η συνάρτηση δεν είναι Lipschitz. (Αν δεν βρίσκετε το επιχείρημα αρκούντως αναλυτικό, υποθέστε ότι υπάρχει κάποιο C ώστε $|f(x) - f(y)| \le C|x-y|$, και καταλήξτε σε άτοπο επιλέγοντας αρκούντως μεγάλες τιμές των x, y.)

28. **(Συνέχεια Lipschitz συνημιτόνου)** Δείξτε ότι η $f(x) = A\cos(ax+b)$ όπου $A, a, b \in \mathbb{R}$, είναι Lipschitz συνεχής στο $\mathbb{R}$, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τον ορισμό της συνέχειας Lipschitz.

   Λύση: Έστω δύο οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |A\cos(ax_1+b) - A\cos(ax_2+b)| \\ &= A|\cos(ax_1+b) - \cos(ax_2+b)| \\ &= 2A\left|\sin\left(\frac{a(x_1+x_2)+2b}{2}\right)\sin\left(\frac{a(x_1-x_2)}{2}\right)\right| \\ &\le 2A\left|\sin\left(\frac{a(x_1-x_2)}{2}\right)\right| \le \frac{2Aa}{2}|x_1-x_2| = Aa|x_1-x_2|. \end{aligned}$$

Η πρώτη ισότητα προέκυψε με χρήση της τριγωνομετρικής ισότητας

$$\cos x - \cos y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right).$$

Η πρώτη ανισότητα προέκυψε από το ότι $|\sin x| \leq 1$, ενώ η δεύτερη από το ότι $|\sin x| \leq |x|$. Επομένως, η συνάρτηση $f(x)$ είναι πράγματι Lipschitz συνεχής, με $C = Aa$. Παρατηρήστε ότι η ποσότητα αυτή ισούται με τη μέγιστη τιμή που λαμβάνει η απόλυτη τιμή της παραγώγου της δοσμένης συνάρτησης.

4η Ομάδα Ασκήσεων

29. **(Συνάρτηση Dirichlet)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 f_D(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $a = 0$ αλλά πουθενά αλλού. Η συνάρτηση Dirichlet $f_D(x)$ ορίζεται ως εξής:

$$f_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Λύση: Σχετικά με το σημείο $a = 0$, έχουμε:

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 f_D(x) - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x f_D(x).$$

Όμως, εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι, αφού η $f_D(x)$ λαμβάνει τις τιμές 0 και 1, θα έχουμε

$$-|x| \leq x f_D(x) \leq |x|,$$

και με χρήση του Κριτηρίου της Παρεμβολής προκύπτει πως το παραπάνω όριο είναι ίσο με το 0, επομένως $g'(0) = 0$.

Σχετικά με τα υπόλοιπα σημεία $a \neq 0$, εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση $g(x)$ δεν είναι συνεχής σε κανένα από αυτά. Πράγματι, έστω κάποιο $a \neq 0$ ρητό. Τότε $g(a) = a^2$. Έστω πως η συνάρτηση $g(x)$ είναι συνεχής στο a. Έστω το $\epsilon = a^2/2 > 0$. Για αυτό το $\epsilon > 0$ θα υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x \in (a - \delta, a + \delta)$, τότε θα έχουμε και

$$|g(x) - g(a)| = |g(x) - a^2| < \epsilon = a^2/2 \Rightarrow g(x) > a^2 - a^2/2 = a^2/2 > 0.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι εντός του διαστήματος $(a - \delta, a + \delta)$ υπάρχουν και άρρητοι x, για τους οποίους $g(x) = x^2 f_D(x) = 0$. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $g(x)$ δεν μπορεί να είναι συνεχής σε άρρητα $a \neq 0$. Αφού, λοιπόν, η $g(x)$ δεν είναι συνεχής για $a \neq 0$, δεν μπορεί να είναι και παραγωγίσιμη για $a \neq 0$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

30. **(Χρήση ορισμού παραγώγου)** Υπολογίστε την παράγωγο της εφαπτομένης $\tan x$ με χρήση του ορισμού της παραγώγου και γνωστών τριγωνομετρικών ορίων, χωρίς να χρησιμοποιήσετε τύπο για την παράγωγο πηλίκου συναρτήσεων.

Λύση: Παρατηρούμε πως

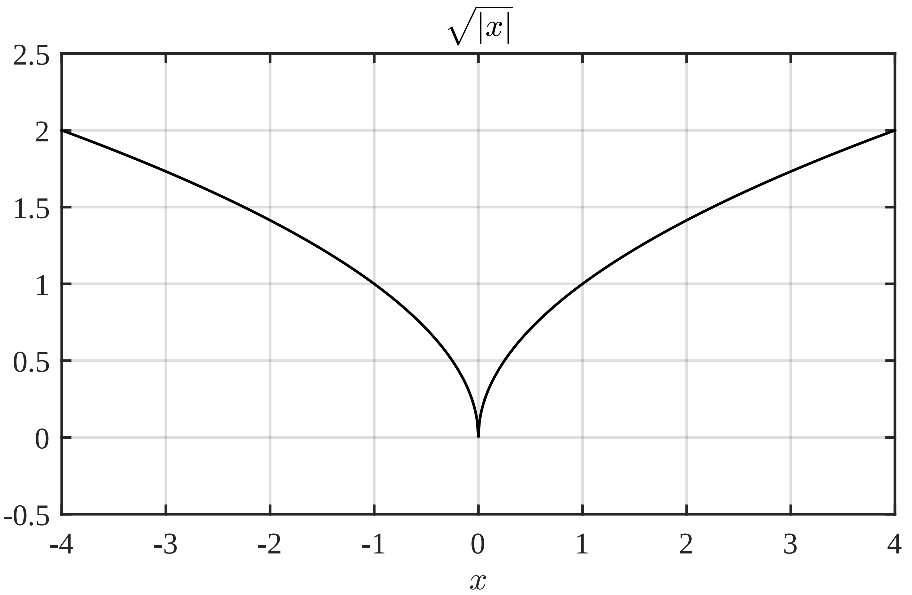
$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)\cos x - \sin x \cos(x+h)}{h\cos(x+h)\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x+h-x)}{h\cos(x+h)\cos x} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \times \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cos(x+h)\cos x} = 1 \times \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.
\end{aligned}$$

Στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

31. **(Χρήση ορισμού)** Υπολογίστε παντού την παράγωγο της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $f(x) = \sqrt{|x|}$ με χρήση του ορισμού της παραγώγου.

Λύση: Η δοσμένη συνάρτηση έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{|x|}$ της Άσκησης 31.

Έστω $x > 0$. Με χρήση του ορισμού έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|x+h|} - \sqrt{|x|}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{|x|}}. \end{aligned}$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι, επειδή $x > 0$, για τιμές του h αρκούντως κοντά στο 0, ισχύει $| + h| = x + h$.

Έστω τώρα πως $x < 0$. Με παρόμοια βήματα έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|x+h|} - \sqrt{|x|}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{-x-h} - \sqrt{-x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{-x-h} - \sqrt{-x})(\sqrt{-x-h} + \sqrt{-x})}{h(\sqrt{-x-h} + \sqrt{-x})} = \lim_{h\to 0} \frac{-x-h+x}{h(\sqrt{-x-h} + \sqrt{-x})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(\sqrt{-x-h} + \sqrt{-x})} = -\frac{1}{2\sqrt{-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{|x|}}. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που $x = 0$, έχουμε

$$\frac{\sqrt{|h|} - \sqrt{|0|}}{h} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{h}}, & h > 0, \\ \frac{\sqrt{-h}}{-|h|} = \frac{\sqrt{-h}}{-\sqrt{|h|}\sqrt{|h|}} = \frac{\sqrt{-h}}{-\sqrt{-h}\sqrt{-h}} = -\frac{1}{\sqrt{-h}}, & h > 0. \end{cases}$$

Επομένως,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{|h|} - \sqrt{|0|}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty,$$

και

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{|h|} - \sqrt{|0|}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{-\sqrt{-h}} = -\infty.$$

Τα άνω πλευρικά όρια προκύπτουν εύκολα από τον ορισμό του ορίου.

Συγκεντρωτικά,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{|x|}}, & x > 0, \\ -\frac{1}{2\sqrt{|x|}}, & x < 0, \end{cases} \qquad f'(0^+) = \infty, \qquad f'(0^-) = -\infty.$$

32. **(Υπαρξη δεύτερης παραγώγου)** Αποδείξτε την ακόλουθη ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη παντού στο $\mathbb{R}$ τότε πρέπει να έχει και δεύτερη παράγωγο, επίσης παντού στο $\mathbb{R}$.

    Λύση: Η πρόταση είναι λάθος. Το πρόβλημα είναι να βρούμε μια τέτοια συνάρτηση, καθώς οι συναρτήσεις που συνήθως εξετάζουμε έχουν αυτή την ιδιότητα. Ας εξετάσουμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x \leq 0. \end{cases}$$

    Εύκολα μπορούμε να δείξουμε πως η πρώτη παράγωγος της είναι η

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0, \\ -2x, & x < 0, \end{cases}$$

    δηλαδή η $f(x) = |x|$, η οποία δεν είναι, με τη σειρά της, παραγωγίσιμη στο 0.

33. **(Ανισότητα παραγώγων)** Έστω συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε $f(a) = g(a)$ και $f'(x) \geq g'(x)$ παντού σε ένα διάστημα $I = [a, b]$ ή $I = [a, \infty)$. Να δείξετε ότι $f(x) \geq g(x)$ παντού στο I.

    Λύση: Ορίζουμε τη συνάρτηση $h : I \to \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - g(x)$. Παρατηρήστε πως $h'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0$ παντού στο I, επομένως η h είναι αύξουσα στο I, επομένως, για κάθε $x \in I$, έχουμε

$$h(a) \leq h(x) \Rightarrow f(a) - g(a) \leq h(x) \Rightarrow 0 \leq f(x) - g(x) \Rightarrow f(x) \geq g(x),$$

    και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

34. **(Κριτήριο ακρότατου)** Αποδείξτε την ακόλουθη ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν $f'(x_0) = 0$, τότε η συνάρτηση $f(x)$ έχει τοπικό ακρότατο στο x_0.

    Λύση: Η πρόταση δεν ισχύει. Παρατηρήστε, για παράδειγμα, ότι για την συνάρτηση $f(x) = x^3$ έχουμε $f'(0) = 0$, αλλά η συνάρτηση δεν έχει ακρότατο στο 0.

35. **(Γνησίως μονότονη συνάρτηση $\Rightarrow$ θετική παράγωγος)** Αποδείξτε την ακόλουθη ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b), τότε $f'(x) > 0$ παντού στο (a, b).

    Λύση: Η πρόταση είναι λάθος. Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(x) = x^3$$

    είναι μεν γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$, έχει όμως μηδενική παράγωγο στο 0.

36. **(Υπολογισμοί αόριστων ολοκληρωμάτων)** Υπολογίστε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

    (α΄) $\int x^2 \sin x \, dx$.

    (β΄) $\int x^2 \cos x \, dx$.

Λύση: Καταρχάς, θα υπολογίσουμε με ολοκλήρωση κατά παράγοντες τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\int x\sin x\,dx, \qquad \int x\cos x\,dx.$$

Σχετικά με το πρώτο ολοκλήρωμα, έχουμε

$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= \int x(-\cos x)'\,dx = -x\cos x - \int x'(-\cos x)'\,dx\\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

Εντελώς ανάλογα, έχουμε για το δεύτερο ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= \int x(\sin x)'\,dx = x\sin x - \int x'(\sin x)\,dx\\ &= x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε πως:

$$\begin{aligned}\int x^2\sin x\,dx &= \int x^2(-\cos x)'\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx\\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C,\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\int x^2\cos x\,dx &= \int x^2(\sin x)'\,dx = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx\\ &= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.\end{aligned}$$

37. **(Αόριστο Ολοκλήρωμα)** Να υπολογίσετε το ακόλουθο αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int x^2\arctan x\,dx.$$

Ακολούθως, παραγωγίστε το αποτέλεσμα για να επαληθεύσετε ότι είναι σωστό. Δίνεται ότι $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\begin{aligned}\int x^2\arctan x\,dx &= \int \left(\frac{x^3}{3}\right)'\arctan x\,dx = \frac{x^3}{3}\arctan x - \int \frac{x^3}{3(x^2+1)}\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{1}{3}\int x\left(\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\right)dx\\ &= \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{1}{3}\int x\,dx + \frac{1}{6}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\int \left(\log(1+x^2)\right)'\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\log(1+x^2) + C.\end{aligned}$$

Πράγματι, με παραγώγιση παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\log(1+x^2) + C\right)' &= x^2\arctan x + \frac{x^3}{3(1+x^2)} - \frac{x}{3} + \frac{2x}{6(1+x^2)}\\ &= x^2\arctan x + \frac{x^3 - x - x^3 + x}{3(1+x^2)} = x^2\arctan x.\end{aligned}$$

5η Ομάδα Ασκήσεων

38. **(Υπολογισμός τιμών της εφαπτόμενης)** Υπολογίστε προσεγγιστικά τις τιμές $\tan x$ για τις ακόλουθες τιμές του x:

$$\pi/4 - 0.1, \quad \pi/4 - 0.01, \quad \pi/4 - 0.001, \quad \pi/4, \quad \pi/4 + 0.001, \quad \pi/4 + 0.01, \quad \pi/4 + 0.1.$$

Χρησιμοποιήστε μόνο την τιμή της $\tan x$ και της παραγώγου της στη θέση $x_0 = \pi/4$. Συγκρίνετε, με χρήση ενός αναλυτικού πίνακα, τις τιμές που βρήκατε με τις ακριβείς.

Λύση: Για την συνάρτηση $f(x) = \tan x$ έχουμε $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Επομένως, αν $x_0 = \pi/4$, έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &\simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \tan \pi/4 + \frac{x - x_0}{\cos^2 \pi/4} \\ &= 1 + \frac{x - x_0}{1/2} = 1 + 2(x - x_0), \end{aligned}$$

ενώ το σφάλμα στην άνω προσέγγιση ισούται με

$$E(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \tan x - 1 - 2(x - x_0).$$

Με αντικατάσταση των δοσμένων τιμών στα άνω, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας:

x	$f(x) = \tan x$	$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$	$x - x_0$	$E(x)$
$\pi/4 - 0.1$	0.8176	0.8	-0.1	0.0176
$\pi/4 - 0.01$	0.9802	9.98	-0.01	1.9737×10^{-4}
$\pi/4 - 0.0001$	0.9980	0.9980	-0.001	1.9973×10^{-6}
$\pi/4$	1	1	0	0
$\pi/4 + 0.001$	1.0020	1.0020	0.001	2.0027×10^{-6}
$\pi/4 + 0.01$	1.0202	1.02	0.01	2.0270×10^{-4}
$\pi/4 + 0.1$	1.2230	1.2	0.1	0.0230

39. **(Απροσδιοριστίες $0/0$)** Παρατηρήστε ότι τα ακόλουθα όρια εμφανίζουν, και τα τρία, απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^4}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2}.$$

Να υπολογίσετε τα άνω όρια ή να δείξετε ότι δεν υπάρχουν. Να χρησιμοποιήσετε γνωστά τριγωνομετρικά όρια και τον ορισμό του ορίου, αλλά όχι παραγώγους.

Λύση: Σχετικά με το πρώτο όριο, παρατηρούμε πως

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \to 0} \sin x = 1 \times 0 = 1.$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γνωστό τριγωνομετρικό όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{3}$$

Σχετικά με το δεύτερο όριο, παρατηρήστε πως

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = 1 \times \infty = \infty.$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε και πάλι το γνωστό όριο (3) και το, επίσης γνωστό, όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Σχετικά με το τρίτο όριο, παρατηρήστε πως

$$\frac{\sin x}{x^2} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x}.$$

Από τους δύο όρους του γινόμενου, ο πρώτος έχει όριο το 1, ενώ ο δεύτερος είναι γνωστό ότι δεν έχει όριο. Επομένως, δεν έχει όριο και το γινόμενό τους. Πράγματι, αν είχε όριο, τότε περνώντας τον πρώτο όρο στο αριστερό μέλος της εξίσωσης, δηλαδή γράφοντας

$$\left(\frac{\sin x}{x^2}\right) \times \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-1} = \frac{1}{x},$$

προκύπτει άτοπο, διότι το αριστερό μέλος έχει όριο, ως πηλίκο δύο συναρτήσεων που έχουν όριο και η δεύτερη δεν έχει όριο το 0, ενώ το δεξί μέλος δεν έχει όριο.

40. **(Χρήση Κανόνα L'Hôpital)** Να υπολογίσετε το ακόλουθο όριο με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x + \sin^2 x + \sin x}{x^3 + x^2 + x}.$$

Λύση: Παρατηρούμε πως τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής έχουν όριο το 0, επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τον Κανόνα του L'Hôpital, και έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x + \sin^2 x + \sin x}{x^3 + x^2 + x} &= \lim_{x\to 0} \frac{3\sin^2 x \cos x + 2\sin x \cos x + \cos x}{3x^2 + 2x + 1} \\ &= \frac{3 \times 0 \times 1 + 2 \times 0 \times 1 + 1}{3 \times 0^2 + 2 \times 0 + 1} = 1. \end{aligned}$$

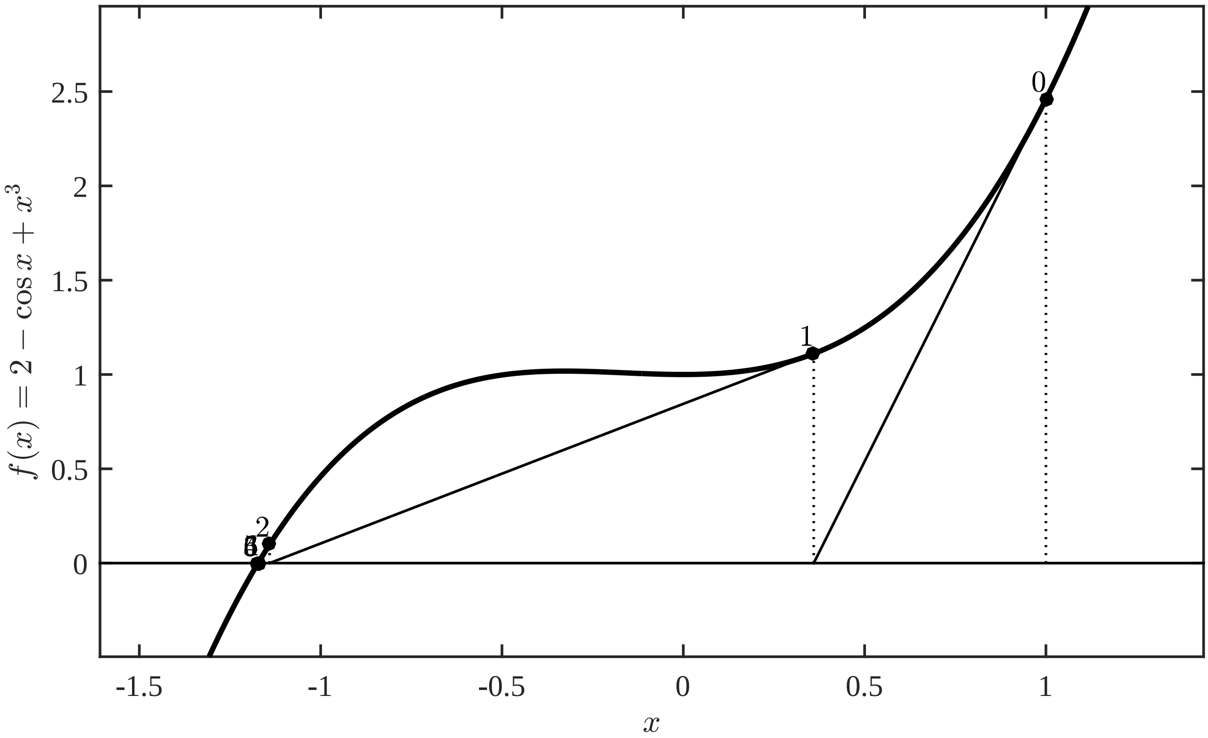
41. **(Κυρτή σύνθεση)** Έστω η συνάρτηση $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, κυρτή στο $[a, b]$. Έστω η συνάρτηση $g : [c, d] \to \mathbb{R}$, αύξουσα και κυρτή στο $[c, d]$, με $h([a, b]) \subseteq [c, d]$. Να δείξετε ότι η σύνθεση $g \circ h$ είναι κυρτή παντού στο $[a, b]$. Μην υποθέσετε παραγωγισιμότητα των g, h!

Λύση: Εφαρμόζουμε τον ορισμό της κυρτότητας. Έστω x_0, x_1 εντός του πεδίου ορισμού $[a, b]$ της σύνθεσης, και έστω $\theta \in [0, 1]$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} g \circ h((1-\theta)x_0 + \theta x_1) &= g(h((1-\theta)x_0 + \theta x_1)) \leq g((1-\theta)h(x_0) + \theta h(x_1)) \\ &\leq (1-\theta)g(h(x_0)) + \theta g(h(x_1)) = (1-\theta)g \circ h(x_0) + \theta g \circ h(x_1). \end{aligned}$$

Η πρώτη και η τελευταία ισότητα προκύπτουν εξ ορισμού της σύνθεσης. Η πρώτη ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η h είναι κυρτή, επομένως το όρισμα εντός της g αυξάνει, και το ότι η g είναι αύξουσα, επομένως, αφού αυξάνει το όρισμά της, θα αυξάνει και η g. Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από την κυρτότητα της g. Επομένως, από τον ορισμό της κυρτότητας προκύπτει ότι η $g \circ h$ είναι κυρτή.

42. **(Υλοποίηση Μεθόδου Νεύτωνα)** Υλοποιήστε τη Μέθοδο του Νεύτωνα σε μια γλώσσα προγραμματισμού της προτίμησής σας. Η ρουτίνα που θα δημιουργήσετε πρέπει, κατ' ελάχιστον, να επιστρέφει αριθμητικά δεδομένα για κάθε επανάληψη της μεθόδου και την τελική εκτίμηση για τη ρίζα της δοσμένης συνάρτησης, δεν είναι όμως απαραίτητο να παράγει κάποιο σχήμα. Τα ορίσματα εισόδου πρέπει να περιλαμβάνουν τουλάχιστον το αρχικό σημείο όπου υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης και τη ζητούμενη ακρίβεια, η οποίο ορίζεται ως το απόλυτο της διαφοράς μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών που υπολογίζει η ρουτίνα. (Επομένως, η ρουτίνα θα διακόπτεται όταν το απόλυτο της διαφοράς μεταξύ δύο διαδοχικών εκτιμήσεων της ρίζας γίνει μικρότερο την δοσμένη ακρίβεια.) Δεν χρειάζεται να δίνεται ως όρισμα η συνάρτηση της οποία ζητείται η ρίζα και η παράγωγός της. Επομένως, μπορείτε για κάθε συνάρτηση της οποίας τη ρίζα θέλετε να υπολογίσετε να τροποποιείτε ανάλογα τον κώδικά σας. Πρέπει να παραδώσετε τον κώδικά σας τυπωμένο (όχι χειρόγραφο)



Σχήμα 2: Η εκτέλεση της Μεθόδου του Νεύτωνα για την συνάρτηση $f(x) = 2 - \cos x + x^3$ της Άσκησης 43.

43. **(Αριθμητικό παράδειγμα)** Χρησιμοποιήστε την υλοποίηση της Άσκησης 42 για να εντοπίσετε μια ρίζα της συνάρτησης $f(x) = 2 - \cos x + x^3$ με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων. Παραδώστε την έξοδο του προγράμματός σας τυπωμένη.

    Λύση: Τα αριθμητικά δεδομένα που προκύπτουν με χρήση του κώδικα της Άσκησης 42 είναι τα ακόλουθα:

n	$x(n)$	$f(x(n))$	$f'(x(n))$
0	1.000000000000000	2.459697694131860	3.841470984807897
1	0.359699004923015	1.110536256841587	0.740142639412997
2	-1.140736448603007	0.098657650020360	2.994898148938707
3	-1.173678353507293	-0.003528641742777	3.210383151160293
4	-1.172579219361419	-0.000004018593081	3.203072256222498
5	-1.172577964755603	-0.000000000005232	3.203063915985184
6	-1.172577964753970	0	3.203063915974326

    Στον άνω πίνακα, n είναι η επανάληψη, $x(n)$ είναι η εκτίμηση της ρίζας στο τέλος της επανάληψης n, $f(x(n))$ είναι η τιμή της συνάρτησης στη θέση $x(n)$, και $f'(x(n))$ είναι η τιμή της παραγώγου της συνάρτησης στη θέση $x(n)$. Ειδικά για την περίπτωση $n = 0$, το $x(0)$ είναι η προσέγγιση για την ρίζα που δίνουμε ως είσοδο στη ρουτίνα. Επομένως, σε αυτή την περίπτωση ξεκινήσαμε τις επαναλήψεις από το σημείο $x(0) = 1$. Παρατηρήστε ότι η επιθυμητή ακρίβεια στη θέση της ρίζας επιτυγχάνεται μετά από 5 επαναλήψεις. Η εκτέλεση της μεθόδου απεικονίζεται γραφικά στο Σχήμα 2.

44. **(Κανόνας L'Hôpital)**

    (α΄) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$$

(β΄) Έστω πως η συνάρτηση f έχει δεύτερη παράγωγο στο x. Να δείξετε ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x).$$

Λύση:

(α΄) Με διπλή εφαρμογή του Κανόνα του L'Hôpital, έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{x\sin x}\right)&\\ =\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.&\end{aligned}$$

(β΄)

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}\\ =\;&\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)(h')+(-h)'f'(x-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)+f'(x)-f(x-h)}{2h}\\ =\;&\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)+f'(x)-f'(x-h)}{2h}\\ =\;&\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{2h}+\lim_{h\to 0}\frac{f'(x)-f'(x-h)}{2h}=\frac{f''(x)}{2}+\lim_{t\to 0}\frac{f'(x)-f'(x+t)}{-2t}\\ =\;&\frac{f''(x)}{2}+\frac{f''(x)}{2}=f''(x).\end{aligned}$$

Η πρώτη εξίσωση προκύπτει με εφαρμογή του Κανόνα του L'Hôpital. Η πέμπτη εξίσωση προέκυψε κάνοντας την αντικατάσταση $t=-h$.

6η Ομάδα Ασκήσεων

45. **(Μη ολοκληρώσιμη συνάρτηση)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1], \\ -\frac{1}{2}, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [-1, 1]. \end{cases}$$

δεν είναι ολοκληρώσιμη, υπολογίζοντας το κάτω και το άνω ολοκλήρωμά της.

Λύση: Έστω μια οποιαδήποτε διαμέριση

$$P = \{p_0 = -1, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n = 1\}$$

του διαστήματος $[-1, 1]$. Σε κάθε υποδιάστημα της διαμέρισης, θα υπάρχει ένας ρητός, όπου η συνάρτηση θα είναι ίση με $\frac{1}{2}$, και ένας άρρητος, στον οποίο συνάρτηση θα είναι $-\frac{1}{2}$. Επομένως, για κάθε διαμέριση P, έχουμε,

$$\begin{aligned} L(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(p_i - p_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right) \times (p_i - p_{i-1}) = \left(-\frac{1}{2}\right) \times (1 - (-1)) = -1, \\ U(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(p_i - p_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right) \times (p_i - p_{i-1}) = \left(\frac{1}{2}\right) \times (1 - (-1)) = 1. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\underline{\int_a^b} f = \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} L(f, P) = -1, \qquad \overline{\int_a^b} f = \inf_{P \in \mathcal{P}[c,b]} U(f, P) = 1,$$

και αφού το κάτω και το άνω ολοκλήρωμα διαφέρουν, η συνάρτηση δεν είναι ολοκληρώσιμη.

46. **(Μετατόπιση συνάρτησης)** Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Να δείξετε, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τον ορισμό του ολοκληρώματος, ότι αν είναι ολοκληρώσιμη η $f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη και η $f(x - c)$ στο διάστημα $[a + c, b + c]$, με

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x - c)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Λύση: Παρατηρήστε ότι για κάθε διαμέριση

$$P = \{p_0 = a, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n = b\}$$

της f στο διάστημα $[a, b]$ μπορούμε να δημιουργήσουμε μια νέα διαμέριση, P', για την $f(x - c)$ στο διάστημα $[a + c, b + c]$, μετατοπίζοντας τα σημεία της P δεξιά κατά c:

$$P' = P + c = \{p'_0 = p_0 + c,\ p'_1 = p_1 + c, \dots, p'_{n-1} = p_{n-1} + c,\ p'_n = t_n + c\}.$$

Η σχέση αυτή, μεταξύ διαμερίσεων της αρχικής και την μετατοπισμένης συνάρτησης, είναι $1 - 1$. Παρατηρήστε ότι τα κάτω και άνω αθροίσματα, $L(f, P)$ και $U(f, P)$, της αρχικής συνάρτησης και αρχικής διαμέρισης, ταυτίζονται με τα κάτω και άνω αθροίσματα, $L(f(x - c), P + c)$ και $U(f(x - c), P + c)$, της μετατοπισμένης συνάρτησης και της μετατοπισμένης διαμέρισης:

$$L(f(x - c), P + c) = L(f(x), P), \qquad U(f(x - c), P + c) = U(f(x), P).$$

Επομένως, θα πρέπει να έχουμε

$$\underline{\int_{a+c}^{b+c}} f(x - c)\, dx = \sup_{P \in \mathcal{P}[a+c,b+c]} L(f(x - c), P + c) = \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} L(f(x), P + c) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Με εντελώς ανάλογο τρόπο, έχουμε

$$\overline{\int_{a+c}^{b+c}} f(x-c)\,dx = \inf_{P\in\mathcal{P}[a+c,b+c]} U(f(x-c), P+c) = \inf_{P\in\mathcal{P}[a,b]} U(f(x), P) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Αφού, λοιπόν, έχουμε

$$\underline{\int_{a+c}^{b+c}} f(x-c)\,dx = \overline{\int_{a+c}^{b+c}} f(x-c)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

θα έχουμε και

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

47. **(Ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης)** Να δείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$ και επιπλέον $f \geq 0$ σε αυτό το διάστημα και $\int_a^b f = 0$, τότε υποχρεωτικά $f = 0$ παντού στο $[a,b]$.

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Έστω πως υπάρχει κάποιο x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) > 0$. Έστω πως το x_0 είναι εσωτερικό στο $[a,b]$. (Οι περιπτώσεις $x_0 = a$ και $x_0 = b$ αντιμετωπίζονται ανάλογα.) Έστω $\epsilon = f(x_0)/2$. Από τον ορισμό της συνέχειας κατά Cauchy, προκύπτει πως υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq [a,b]$ και για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ να ισχύει

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \Rightarrow f(x) - f(x_0) > -f(x_0)/2 \Rightarrow f(x) > f(x_0)/2.$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} f(x_0)/2, & x \in (x_0-\delta, x_0+\delta), \\ 0, & x \in [a,b] \setminus (x_0-\delta, x_0+\delta). \end{cases}$$

Παρατηρήστε πως, παντού στο $[a,b]$, έχουμε $g(x) \leq f(x)$, επομένως,

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow 2\delta f(x_0)/2 \leq \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Η τελευταία ανισότητα προκύπτει διότι $\delta > 0$ και $f(x_0) > 0$. Επομένως, έχουμε άτοπο, και θα πρέπει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

48. **(Ολοκλήρωμα γινόμενου)** Να αποδείξετε ότι ισχύει η ακόλουθη ισότητα, ή να βρείτε αντιπαράδειγμα:

$$\int_a^b fg = \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b g\right).$$

Θεωρήστε ότι όλα τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στην παραπάνω ισότητα υπάρχουν.

Λύση: Η ισότητα εμφανίζεται πολύ συχνά σε γραπτά τελικών εξετάσεων. Δυστυχώς, δεν ισχύει. Σαν αντιπαράδειγμα, εξετάστε την περίπτωση $a = 0$, $b = 2$, με συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x \leq 2, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

για τις οποίες το μεν αριστερό σκέλος είναι 0, το δε δεξί σκέλος 1.

49. **(Ανισότητα Cauchy-Schwarz)** Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες. Να αποδείξετε την ακόλουθη ανισότητα, γνωστή ως ανισότητα των Cauchy-Schwarz.

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \left[\int_a^b f^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b g^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

(Υπόδειξη: εξετάστε το τριώνυμο $\int_a^b (f+\theta g)^2$ του θ.)

Λύση: Ακολουθούμε την υπόδειξη, και παρατηρούμε πως

$$\int (f+\theta g)^2 = \int (f^2+\theta^2 g^2 + 2\theta f g) = \theta^2 \int g^2 + 2\theta \int fg + \int f^2.$$

Το άνω τριώνυμο είναι πάντα μεγαλύτερο ή ίσο από το μηδέν, αφού ισούται με το ολοκλήρωμα μιας ποσότητας που επίσης είναι μεγαλύτερη ή ίση από το 0, επομένως δεν μπορεί να έχει θετική διακρίνουσα Δ, διότι σε αυτή την περίπτωση θα λάμβανε τόσο θετικές, όσο και αρνητικές τιμές, κατά τα γνωστά από τη θεωρία για τα τριώνυμα. Επομένως,

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 4\left(\int fg\right)^2 - 4\left(\int f^2\right)\left(\int g^2\right) \leq 0,$$

από την οποία προκύπτει άμεσα η ζητούμενη ανισότητα.

50. **(Περίπου μηδενική συνάρτηση)** Να δείξετε ότι αν $\int_a^b g^2 = 0$, τότε για κάθε f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ θα έχουμε $\int_a^b fg = 0$. Βεβαιωθείτε ότι αντιλαμβάνεστε την φυσική ερμηνεία αυτής της ιδιότητας.

Λύση: Η ιδιότητα προκύπτει εύκολα με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz.

Πράγματι, καταρχάς, ισχύει το ακόλουθο:

$$\int_a^b fg \leq \left[\int_a^b f^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b g^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Επιπλέον, έστω δύο συναρτήσεις f, g. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz για τις f, $-g$, προκύπτει πως

$$\int_a^b f(-g) \leq \left[\int_a^b f^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b (-g)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow -\int_a^b fg \leq \left[\int_a^b f^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b g^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow \int_a^b fg \geq -\left[\int_a^b f^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b g^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

το οποίο, σε συνδυασμό με την αρχική ανισότητα Cauchy Schwarz, δίνει

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \left[\int_a^b f^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b g^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Στην ειδική περίπτωση που $\int_a^b g^2 = 0$, η άνω αυτόματα δίνει και

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq 0 \Rightarrow \int_a^b fg = 0.$$

Η εξήγηση του αποτελέσματος είναι η ακόλουθη: αφού $\int g^2 = 0$, η συνάρτηση g είναι σχεδόν παντού μηδενική, και επομένως αν πολλαπλασιαστεί με μια άλλη συνάρτηση f, το γινόμενό τους θα είναι επίσης σχεδόν παντού 0, και επομένως θα έχει μηδενικό ολοκλήρωμα.

7η Ομάδα Ασκήσεων

51. **(Γενίκευση του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Λογισμού)** Έστω συνάρτηση $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Έστω παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f_1, f_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ με $f_1([c, d]), f_2([c, d]) \subseteq (a, b)$. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (c, d)$ έχουμε

$$\left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} G(t)\, dt \right)' = G(f_2(x)) f_2'(x) - G(f_1(x)) f_1'(x).$$

Επίσης, να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος, εξετάζοντας τι θα συμβεί αν το x μεταβληθεί κατά μια πολύ μικρή ποσότητα Δx.

Λύση: Έστω $c \in (a, b)$ και έστω η συνάρτηση $H(x) = \int_c^x G(t)\, dt$ για την οποία $H'(x) = G(x)$, από το Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού. Παρατηρήστε πως:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} G(t)\, dt \right)' &= \left(\int_{c}^{f_2(x)} G(t)\, dt - \int_{c}^{f_1(x)} G(t)\, dt \right)' \\
&= (H(f_2(x)) - H(f_1(x)))' = H'(f_2(x)) f_2'(x) - H'(f_1(x)) f_1'(x) \\
&= G(f_2(x)) f_2'(x) - G(f_1(x)) f_1'(x)).
\end{aligned}$$

Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα της αλυσίδας για την παραγώγιση.

Μια γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος είναι η ακόλουθη: αν το x μεταβληθεί κατά ένα μικρό Δx, το δεξί άκρο του ολοκληρώματος θα αυξηθεί περίπου κατά $f_2'(x)\Delta x$, και επομένως το ολοκλήρωμα θα αυξηθεί περίπου κατά το εμβαδόν $G(f_2(x)) f_2'(x)\Delta x$. Παρομοίως, το αριστερό άκρο του ολοκληρώματος θα αυξηθεί περίπου κατά $f_1'(x)\Delta x$, και επομένως το ολοκλήρωμα θα *μειωθεί* περίπου κατά το εμβαδόν $G(f_1(x)) f_1'(x)\Delta x$. Επομένως, η καθαρή αύξηση του εμβαδού θα είναι περίπου

$$G(f_2(x)) f_2'(x)\Delta x - G(f_1(x)) f_1'(x)\Delta x,$$

και διαιρώντας με το Δx λαμβάνουμε τον ρυθμό μεταβολής του ολοκληρώματος με το x, δηλαδή την παράγωγό του ως προς x. Παρατηρήστε ότι αυτό που βρίσκουμε ταυτίζεται με τη λύση της άσκησης.

52. **(Ολοκλήρωμα περιττής συνάρτησης)** Έστω ολοκληρώσιμη $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ περιττή. Να δείξετε ότι $\int_{-a}^{a} f = 0$.

Λύση: Παρατηρούμε πως

$$\int_0^a f(x)\, dx = -\int_0^{-a} f(-t)\, dt = \int_0^{-a} f(t)\, dt = -\int_{-a}^0 f(x)\, dx.$$

Η πρώτη ισότητα προέκυψε με την αλλαγή μεταβλητής $t = -x$. Η δεύτερη χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $f(x)$ είναι περιττή. Επομένως

$$\int_{-a}^a f(x)\, dx = \int_{-a}^0 f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx = \int_{-a}^0 f(x)\, dx - \int_{-a}^0 f(x)\, dx = 0,$$

και αποδείχθηκε το ζητούμενο.

53. **(Ολοκλήρωμα άρτιας συνάρτησης)** Έστω ολοκληρώσιμη $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ άρτια. Να δείξετε ότι $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$.

Λύση: Παρατηρούμε πως

$$\int_0^a f(x)\, dx = -\int_0^{-a} f(-t)\, dt = -\int_0^{-a} f(t)\, dt = \int_{-a}^0 f(x)\, dx.$$

Η πρώτη ισότητα προέκυψε με την αλλαγή μεταβλητής $t = -x$. Η δεύτερη χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $f(x)$ είναι άρτια. Επομένως,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

54. **(Υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις)** Ορίζουμε τις υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις υπερβολικό ημίτονο $\sinh x$, υπερβολικό συνημίτονο $\cosh x$, υπερβολική εφαπτόμενη $\tanh x$, και υπερβολική συνεφαπτομένη $\coth x$, ως

$$\sinh x = \frac{\exp x - \exp(-x)}{2}, \quad \cosh x = \frac{\exp x + \exp(-x)}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Οι άνω συναρτήσεις καλούνται τριγωνομετρικές λόγω της ομοιότητας που έχουν πολλές από τις ιδιότητές τους με αντίστοιχες ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Υπολογίστε τις παραγώγους των άνω συναρτήσεων, και εκφράστε τες χρησιμοποιώντας αποκλειστικά άλλες υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Λύση: Καταρχάς, παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned}
(\sinh x)' &= \left(\frac{\exp x - \exp(-x)}{2}\right)' = \frac{\exp x + \exp(-x)}{2} = \cosh x, \\
(\cosh x)' &= \left(\frac{\exp x + \exp(-x)}{2}\right)' = \frac{\exp x - \exp(-x)}{2} = \sinh x.
\end{aligned}$$

Σχετικά με την παράγωγο της υπερβολικής εφαπτόμενης, παρατηρούμε καταρχάς πως

$$\begin{aligned}
(\tanh x)' &= \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{(\sinh x)' \cosh x - (\cosh x)' \sinh x}{\cosh^2 x} \\
&= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε, όμως, πως επιπλέον

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{\exp x + \exp(-x)}{2}\right)^2 - \left(\frac{\exp x - \exp(-x)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\exp 2x + \frac{1}{4}\exp(-2x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\exp 2x - \frac{1}{4}\exp(-2x) + \frac{1}{2} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

επομένως, τελικά,

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

Σχετικά με την παράγωγο της υπερβολικής συνεφαπτομένης, ανάλογα έχουμε

$$\begin{aligned}
(\coth x)' &= \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)' = \frac{(\cosh x)' \sinh x - (\sinh x)' \cosh x}{\sinh^2 x} \\
&= -\frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}.
\end{aligned}$$

Συγκεντρωτικά,

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad (\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

Παρατηρήστε ότι υπάρχουν πολύ παρόμοιες ιδιότητες για τις (απλές, μη υπερβολικές) τριγωνομετρικές συναρτήσεις!

55. **(Καταχρηστικό ολοκλήρωμα της $x^n e^{-x}$)** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λύση: Έστω, καταρχάς, $n > 1$. Παρατηρήστε πως

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx &= \lim_{a\to\infty}\int_0^a x^n e^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a x^n(-e^{-x})'\,dx \\
&= \lim_{a\to\infty}\left[x^n e^{-x}\right]_0^a + \lim_{a\to\infty} n\int_0^a x^{n-1}e^{-x}\,dx \\
&= \lim_{a\to\infty}\left[a^n e^{-a} - 0\right] + n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx \\
&= n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx.
\end{aligned}$$

Στην πέμπτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το όριο

$$\lim_{a\to\infty}\frac{a^n}{e^a} = 0,$$

που προκύπτει εφαρμόζοντας τον κανόνα του L'Hôpital n φορές.

Επιπλέον, ειδικά για την περίπτωση $n = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x}\,dx &= \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a \left(-e^{-x}\right)'\,dx \\
&= \lim_{a\to\infty}\left[e^{-x}\right]_a^0 = \lim_{a\to\infty}(1 - e^{-a}) = 1.
\end{aligned}$$

Είμαστε, πλέον, έτοιμοι να αποδείξουμε, χρησιμοποιώντας επαγωγή, πως

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!, \tag{4}$$

όπου το n παραγοντικό $n!$ ορίζεται ως

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1,$$

για φυσικούς $n > 1$. Επίσης, $0! = 1$. Παρατηρούμε πως η ισότητα (4) ισχύει για το $n = 0$, όπως έχουμε ήδη αποδείξει. Έστω πως ισχύει για ένα οποιοδήποτε n. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n + 1$. Πράγματι,

$$\int_0^\infty x^{n+1}e^{-x}\,dx = (n+1)\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = (n+1)n! = (n+1)!,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

56. **(Ζεύγος καταχρηστικών ολοκληρωμάτων)** Να υπολογίσετε το ζεύγος καταχρηστικών ολοκληρωμάτων

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx, \qquad \int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx.$$

Λύση: Σχετικά με το πρώτο καταχρηστικό ολοκλήρωμα, παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx &= \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}\sin x\,dx = \lim_{a\to\infty}\left[-\frac{e^{-x}}{2}(\cos x + \sin x)\right]_0^a \\
&= \lim_{a\to\infty}\left[-\frac{e^{-a}}{2}(\cos a + \sin a) + \frac{1}{2}(1+0)\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lim_{a\to\infty} e^{-a}(\cos a + \sin a) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Το όριο προκύπτει παρατηρώντας ότι η συνάρτηση e^{-a} τείνει στο 0 καθώς $a \to \infty$ ενώ η συνάρτηση $\cos a + \sin a$ είναι φραγμένη. Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ένα γνωστό αόριστο ολοκλήρωμα (μπορείτε να το αποδείξετε;).

Σχετικά με το δεύτερο καταχρηστικό ολοκλήρωμα, παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx &= \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}\cos x\,dx = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x)\right]_0^a \\
&= \lim_{a\to\infty}\left[\frac{e^{-a}}{2}(\sin a - \cos a) - \frac{1}{2}(0-1)\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lim_{a\to\infty} e^{-a}(\sin a - \cos a) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Το όριο προκύπτει παρόμοια με την προηγούμενη περίπτωση. Και πάλι, στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ένα γνωστό αόριστο ολοκλήρωμα (μπορείτε να το αποδείξετε;).

57. **(Καταχρηστικό ολοκλήρωμα της $\log x$)** Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα του λογαρίθμου, $\int_0^\infty \log x\,dx$.

Λύση: Παρατηρούμε ότι το δοσμένο ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό για δύο λόγους. Πρώτον, διότι η συνάρτηση $\log x$ τείνει στο $-\infty$ καθώς το $x \to 0^+$, και δεύτερον επειδή το διάστημα ολοκλήρωσης εκτείνεται στο άπειρο. Επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\int_0^\infty \log x\,dx = \int_0^1 \log x\,dx + \int_1^\infty \log x\,dx,$$

εφόσον δεν προκύπτει απροσδιοριστία.

Παρατηρούμε, επίσης, πως

$$(x(\log x - 1))' = \log x.$$

Σχετικά με το πρώτο ολοκλήρωμα, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \log x\,dx &= \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \log x\,dx = \lim_{a\to 0^+}\left[x(\log x - 1)\right]_a^1 \\
&= \lim_{a\to 0^+}\left[1\times(\log 1 - 1) - a\log a + a\right] = -1 - \lim_{a\to 0^+} a\log a + \lim_{a\to 0^+} a \\
&= -1 - \lim_{a\to 0^+} a\log a.
\end{aligned}$$

Σχετικά με το όριο που προέκυψε, έχουμε

$$\lim_{a\to 0^+} a\log a = \lim_{t\to\infty}\frac{\log(1/t)}{t} = -\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t} = -\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t} = 0.$$

Η τρίτη ισότητα προέκυψε με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital. Επομένως, τελικά έχουμε

$$\int_0^1 \log x\,dx = -1.$$

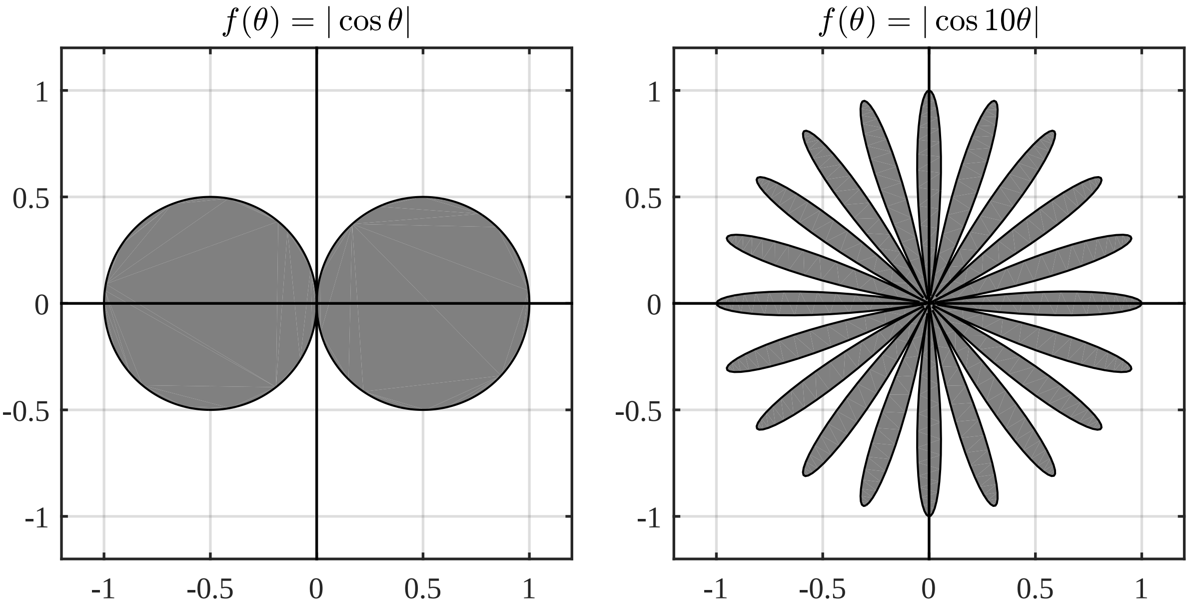
Σχετικά με το δεύτερο ολοκλήρωμα, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \log x\,dx &= \lim_{a\to\infty}\int_1^a \log x\,dx = \lim_{a\to\infty}\left[x(\log x - 1)\right]_1^a \\
&= \lim_{a\to\infty}\left[a(\log a - 1)\right] - \left[1\times(\log 1 - 1)\right] \\
&= \lim_{a\to\infty}\left[a(\log a - 1)\right] + 1 = \infty.
\end{aligned}$$

Το άνω όριο ισούται με ∞, διότι και οι δύο παράγοντες της συνάρτησης $a(\log a - 1)$, δηλαδή το a και το $(\log a - 1)$, τείνουν στο ∞ καθώς $x \to \infty$.

Επομένως, τελικά

$$\int_0^\infty \log x\,dx = \infty.$$



Σχήμα 3: Το χωρίο της Άσκησης 58 για $k = 1$ και για $k = 10$. Το εμβαδόν του χωρίου είναι το ίδιο, ανεξάρτητα της τιμής του k.

8η Ομάδα Ασκήσεων

58. **(Λουλουδάκι)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου

$$R = \{(r, \theta) : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le |\cos k\theta/2|\},$$

όπου $k \in \mathbb{N}^*$. Τι παρατηρείτε? Μπορείτε να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος?

Λύση: Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, το εμβαδόν του χωρίου είναι

$$\begin{aligned} A(R) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\cos k\theta/2|^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2(k\theta/2)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos k\theta}{2}\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos k\theta\, d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4k}\int_0^{2\pi} (\sin k\theta)'\, d\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4k}\left[\sin 2k\pi - \sin 0\right] = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε πως το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από το k. Στο Σχήμα 3 έχουμε σχεδιάσει το χωρίο για δύο διαφορετικές τιμές του k, και συγκεκριμένα τις $k = 1$ και $k = 10$. Τα δύο χωρία έχουν το ίδιο εμβαδόν! Ένας τρόπος να δικαιολογηθεί το αποτέλεσμα είναι να παρατηρήσουμε ότι, ανεξάρτητα από την τιμή του k, το ποσοστό των γωνιών για τις οποίες η συνάρτηση είναι εντός οποιουδήποτε εύρους είναι σταθερό. Σκεφτείτε ότι μπορούμε να κόψουμε το ένα σχήμα σε ένα πολύ μεγάλο πλήθος απειροστών κυκλικών τομέων, καθένας εκ των οποίων αντιστοιχεί σε απειροστή γωνία, και να τους αναδιατάξουμε δημιουργώντας το άλλο σχήμα. Αυτό μπορεί να συμβεί διότι τα κομμάτια της κάθε ακτίνας εμφανίζονται στη σωστή αναλογία.

59. **(Περιστροφή περί τον άξονα των x)** Να προσδιορίσετε τον όγκο που δημιουργείται αν περιστρέψουμε το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = |\cos kx|$ μεταξύ των σημείων $x = 0$ και $x = 2\pi$ περί τον άξονα των x. Το $k \in \mathbb{N}^*$. Τι παρατηρείτε? Μπορείτε να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος?

Λύση: Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, ο όγκος ισούται με

$$\begin{aligned} V(s) &= \pi \int_0^{2\pi} |\cos(kx/2)|^2\, dx = \pi \int_0^{2\pi} \cos^2(kx/2)\, dx \\ &= \pi \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos kx}{2}\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} dx + \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} \cos kx\, dx \\ &= \pi^2 + \frac{\pi}{2k}\int_0^{2\pi} (\sin kx)'\, dx = \pi^2 + \frac{\pi}{2k}(\sin 2k\pi - \sin 0) = \pi^2. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από το k. Μια γεωμετρική ερμηνεία είναι ότι ανεξάρτητα από την τιμή του k, το ποσοστό των x επί του άξονα στο οποίο η συνάρτηση βρίσκεται σε κάποιο (οποιοδήποτε) εύρος τιμών παραμένει σταθερό. Φανταστείτε το εξής: Αν πάρουμε το στερεό και το κόψουμε σε ένα πολύ μεγάλο πλήθος από κυκλικές φέτες, μια για κάθε τιμή του x, και πάχους dx η κάθε μια, δεν θα μπορούμε, βλέποντας τα κομμάτια, να μαντέψουμε ποιο είναι το αρχικό k, και θα μπορούμε να αναδιατάξουμε τα κομμάτια για να πάρουμε το στερεό που αντιστοιχεί σε οποιοδήποτε k.

60. **(Περιστροφή περί τον άξονα των y)** Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται αν περιστρέψουμε το χωρίο μεταξύ των γραφημάτων των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = x^2$ μεταξύ του $x = 0$ και το $x = 1$ περί τον άξονα των y.

Λύση: Στο συγκεκριμένο διάστημα η συνάρτηση $f(x)$ είναι μεγαλύτερη της συνάρτησης $g(x)$. Επομένως, μπορούμε να υπολογίσουμε

(α΄) τον όγκο V_1 που δημιουργείται από την περιστροφή (γύρω από τον άξονα των y) του χωρίου μεταξύ του γραφήματος της $f(x)$ και του άξονα των x στο διάστημα $[0, 1]$.

(β΄) τον όγκο V_2 που δημιουργείται από την περιστροφή (γύρω από τον άξονα των y) του χωρίου μεταξύ του γραφήματος της $g(x)$ και του άξονα των x στο διάστημα $[0, 1]$.

και το τελικό αποτέλεσμα θα ισούται με $V = V_1 - V_2$.

Επομένως:

$$\begin{aligned} V_1 &= 2\pi \int_0^1 x f(x)\, dx = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{x}\, dx = 2\pi \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5/2}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{5}, \\ V_2 &= 2\pi \int_0^1 x g(x)\, dx = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^2\, dx = 2\pi \int_0^1 x^3\, dx = 2\pi \int_0^1 \left(\frac{x^4}{4}\right)'\, dx = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \\ V &= V_1 - V_2 = \frac{4\pi}{5} - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{10}. \end{aligned}$$

61. **(Μήκος έλλειψης)** Να δώσετε μια έκφραση για το μήκος της έλλειψης που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε σε κλειστή μορφή το ολοκλήρωμα που προκύπτει. (Αν το καταφέρετε, έχετε κάνει λάθος.)

Λύση: Παρατηρήστε ότι

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Leftrightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Επομένως, η έλλειψη ισούται με την ένωση των γραφημάτων των δύο συναρτήσεων

$$y_{1,2}(x) = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad x \in [-a, a].$$

Τα δύο αυτά γραφήματα μπορούν να γραφτούν ως καμπύλες με την ακόλουθη παραμετρική μορφή:

$$x(t) = t, \qquad y(t) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - t^2}, \qquad -a \le t \le a,$$
$$x(t) = t, \qquad y(t) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - t^2}, \qquad -a \le t \le a,$$

επομένως το μήκος της έλλειψης είναι ίσο με

$$\begin{aligned} L &= 2\int_{-a}^{a} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = 2\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \left[\frac{b}{a} \cdot \frac{-2t}{2\sqrt{a^2 - t^2}}\right]^2}\, dt \\ &= 2\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \frac{b^2 t^2}{a^2(a^2 - t^2)}}\, dt = 4\int_{0}^{a} \sqrt{\frac{a^4 + (b^2 - a^2)t^2}{a^4 - a^2 t^2}}\, dt. \end{aligned}$$

Η πρώτη ισότητα προέκυψε από τον γνωστό τύπο για το μήκος καμπύλης, και λόγω συμμετρίας, από την οποία προκύπτει ότι οι δύο καμπύλες έχουν το ίδιο μήκος. Η τέταρτη ισότητα προκύπτει από το ότι η αρχική ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι άρτια.

Καταρχάς, παρατηρήστε ότι το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό, αφού ο παρονομαστής μηδενίζεται καθώς το $t \to a$. Αυτό οφείλεται στο ότι η παράγωγος των παραπάνω συναρτήσεων $y_{1,2}(x)$ απειρίζεται, κατ' απόλυτο τιμή, για $x \to a$.

Δυστυχώς, το ολοκλήρωμα που προκύπτει δεν μπορεί να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή. Ανήκει, μάλιστα στην κατηγορία των λεγόμενων **ελλειπτικών ολοκληρωμάτων**, που καλούνται ελλειπτικά ακριβώς επειδή εμφανίζονται στον υπολογισμό του μήκους της έλλειψης.

62. **(Μήκος παραβολής)** Να υπολογίσετε το μήκος της παραβολής που περιγράφεται από την εξίσωση $y = ax^2$ μεταξύ των σημείων $(0,0)$ και $(1,a)$.

Λύση: Περιγράφουμε την παραβολή ως το ίχνος της καμπύλης

$$x(t) = t, \qquad y(t) = at^2, \qquad 0 \le t \le 1,$$

οπότε το ζητούμενο μήκος δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$l(C) = \int_0^1 \sqrt{((t)')^2 + ((at^2)')^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + (2at)^2}\, dt.$$

Θέτουμε $x = 2at$, και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} l(C) &= \frac{1}{2a}\int_0^{2a} \sqrt{1 + x^2}\, dx = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2}\log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\right]_0^{2a} \\ &= \frac{1}{4a}\left[2a\sqrt{1 + 4a^2} + \log\left(2a + \sqrt{4a^2 + 1}\right)\right]. \end{aligned}$$

63. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα Ι)** Να υπολογίστε το ακόλουθο καταχρηστικό ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx.$$

Λύση: Το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό για δύο λόγους: δεν ορίζεται η ολοκληρωτέα συνάρτηση στο κάτω άκρο ολοκλήρωσης, και επιπλέον το άνω άκρο ολοκλήρωσης είναι το ∞. Επομένως, καταρχάς:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx = \int_{0+}^{1} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx + \int_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx.$$

Σχετικά με τα επιμέρους ολοκληρώματα, έχουμε

$$\int_{0^+}^{1} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx = \lim_{h\to 0^+} \int_h^1 \left(e^{-\frac{1}{x}}\right)' dx = \lim_{h\to 0^+} \left[e^{-1} - e^{-\frac{1}{h}}\right] = e^{-1},$$

και

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx = \lim_{h\to \infty} \int_1^h \left(e^{-\frac{1}{x}}\right)' dx = \lim_{h\to \infty} \left[e^{-\frac{1}{h}} - e^{-1}\right] = 1 - e^{-1},$$

και επομένως

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx = e^{-1} + 1 - e^{-1} = 1.$$

64. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα ΙΙ)**

(α΄) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3}\, dx.$$

Υπόδειξη: υπολογίστε τα $A, B \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$.

(β΄) Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 4x + 3}\, dx.$$

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} = \frac{1}{x^2 - 4x + 3} \Leftrightarrow A(x-3) + B(x-1) = 1$$
$$\Leftrightarrow A = -B, -3A - B = 1 \Leftrightarrow B = \frac{1}{2},\ A = -\frac{1}{2}.$$

Επομένως,

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{2} \log \frac{|x-3|}{|x-1|} + C.$$

(β΄) Το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό λόγω του μηδενισμού του παρονομαστή στο $x = 1$. Επομένως,

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}\, dx = \int_0^{1^-} \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}\, dx + \int_{1^+}^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}\, dx.$$

Ακολούθως, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_0^{1^-} \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}\, dx &= \lim_{h\to 1^-} \left[\frac{1}{2} \log \frac{|x-3|}{|x-1|}\right]_0^h = \lim_{h\to 1^-} \left[\frac{1}{2} \log \frac{|h-3|}{|h-1|} - \frac{1}{2}\log 3\right] = \infty, \\
\int_{1^+}^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}\, dx &= \lim_{h\to 1^+} \left[\frac{1}{2} \log \frac{|x-3|}{|x-1|}\right]_h^2 = \lim_{h\to 1^+} \left[\frac{1}{2} \log 1 - \frac{1}{2} \log \frac{|h-3|}{|h-1|}\right] = \infty,
\end{aligned}$$

επομένως έχουμε απροσδιοριστία $\infty - \infty$ και το ολοκλήρωμα δεν ορίζεται.

65. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα III)** Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx.$$

Παρατηρήστε πως το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό και επειδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση τείνει στο ∞ στο αριστερό άκρο ολοκλήρωσης, αλλά και γιατί το άλλο άκρο ολοκλήρωσης είναι το ∞.

Λύση: Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, γράφουμε

$$\int_0^\infty \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$$

και πρέπει να υπολογίσουμε και τα δύο επί μέρους καταχρηστικά ολοκληρώματα. Επίσης, παρατηρούμε πως

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = \int \left(-e^{\frac{1}{x}}\right)'\,dx = -e^{\frac{1}{x}} + C.$$

Επομένως, για το πρώτο καταχρηστικό ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = \lim_{h\to 0^+}\int_h^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = \lim_{h\to 0^+}\left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_h^1 = -e + \lim_{h\to 0^+} e^{\frac{1}{h}} = \infty.$$

Σχετικά με το δεύτερο ολοκλήρωμα, έχουμε

$$\int_1^\infty \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_1^h \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = \lim_{h\to\infty}\left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^h = -1 + e.$$

Επομένως,

$$\int_0^\infty \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = \infty - 1 + e = \infty.$$

66. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα IV)**

(α΄) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx.$$

(Υπόδειξη: ποια είναι η παράγωγος της $\tan x$*;)*

(β΄) Να προσδιορίσετε της τιμή του καταχρηστικού ολοκληρώματος

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos^2 x}.$$

Λύση:

(α΄) Θα χρησιμοποιήσουμε παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx &= \int x(\tan x)'\,dx = x\tan x - \int \tan x\,dx \\ &= x\tan x + \int (\log|\cos x|)'\,dx = x\tan x + \log|\cos x| + C.\end{aligned}$$

(β΄) Παρατηρούμε πως το προβληματικό άκρο είναι το δεξί, όπου μηδενίζεται ο παρανομαστής, επομένως:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx &= \lim_{h\to(\pi/2)^-} [x\tan x + \log(\cos x)]_0^h \\ &= \lim_{h\to(\pi/2)^-} [h\tan h + \log(\cos h)] = \lim_{h\to(\pi/2)^-} (h\tan h)\left[1 + \frac{\log(\cos h)}{h\tan h}\right].\end{aligned}$$

Όμως, με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital

$$\lim_{h\to(\pi/2)^-} \frac{\log(\cos h)}{h\tan h} = \lim_{h\to(\pi/2)^-} \frac{-\sin h}{\cos h(\tan h + \frac{h}{\cos^2 h})} = -\lim_{h\to(\pi/2)^-} \frac{\sin h}{\sin h + \frac{h}{\cos h}} = -\frac{1}{1+\infty} = 0,$$

επομένως το καταχρηστικό ολοκλήρωμα είναι ∞.

9η Ομάδα Ασκήσεων

67. **(Διαφορική Εξίσωση 1)** Να βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) + (\log x + 1)y(x) = \frac{x^{-x}}{1+x^2}$$

στο διάστημα $(0, \infty)$. Ακολούθως, να βρείτε την ειδική λύση που ικανοποιεί την επιπλέον συνθήκη $y(1) = 2$.

Λύση: Παρατηρούμε πως η ΔΕ είναι γραμμική πρώτης τάξης, και πως

$$(x \log x)' = (x)' \log x + x(\log x)' = \log x + 1.$$

Επομένως, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την ΔΕ με την $\exp(x \log x) = x^x$, και έχουμε

$$y'(x) + (\log x + 1)y(x) = \frac{x^{-x}}{1+x^2} \Leftrightarrow x^x y'(x) + x^x(\log x + 1)y(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\Leftrightarrow (x^x y(x))' = (\arctan x)' \Leftrightarrow x^x y(x) = \arctan x + C \Leftrightarrow y(x) = \frac{\arctan x + C}{x^x},$$

όπου $C \in \mathbb{R}$.

Σχετικά με τη ζητούμενη ειδική λύση, θα έχουμε

$$2 = \frac{\arctan 1 + C}{1^1} \Rightarrow 2 = \frac{\pi}{4} + C \Rightarrow C = 2 - \frac{\pi}{4},$$

επομένως η ζητούμενη ειδική λύση είναι η

$$y(x) = \frac{\arctan x + 2 - \pi/4}{x^x}.$$

68. **(Διαφορική Εξίσωση 2)** Να βρείτε όλες τις λύσεις της ΔΕ

$$y'(x)y(x) + x = 0$$

στο διάστημα $(-10, 10)$. Κατόπιν, να σχεδιάσετε τις λύσεις, και να προσδιορίσετε αυτές που διέρχονται από το σημείο $(0, 10)$ και το σημείο $(0, 5)$, αν υπάρχουν.

Λύση: Παρατηρούμε πως η ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών, και επομένως έχουμε

$$y'(x)y(x) = -x \Leftrightarrow ydy = -xdx \Leftrightarrow \int y\,dy = -\int x\,dx$$
$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow y(x) = \pm\sqrt{C - x^2}.$$

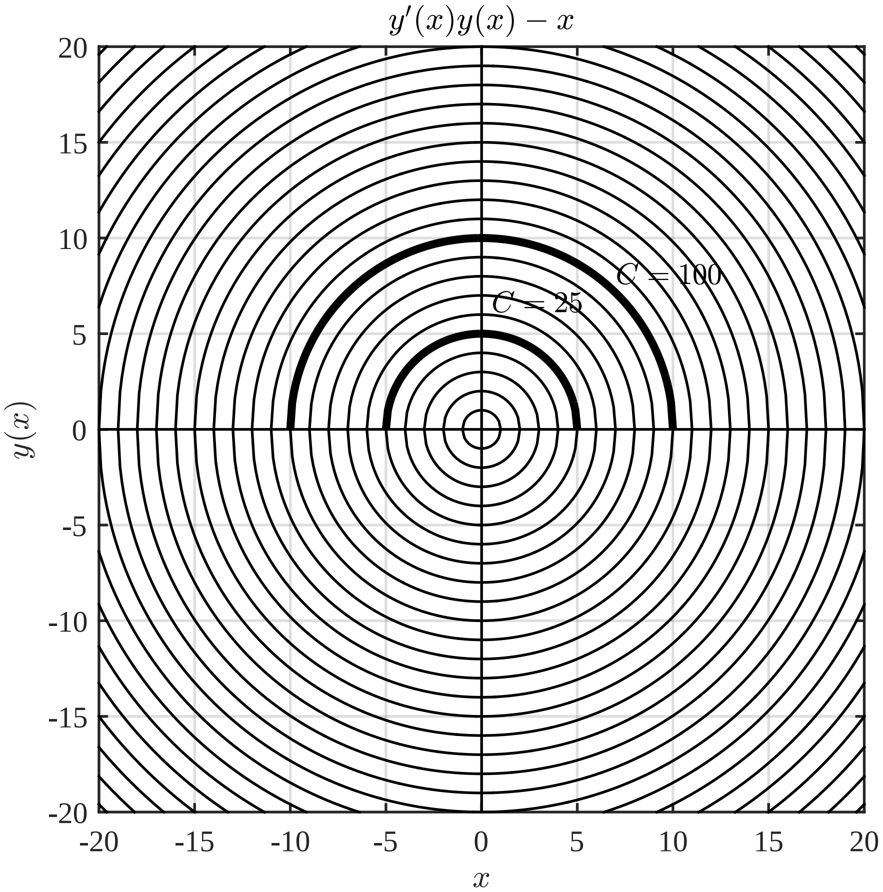
Το C πρέπει να είναι τέτοιο ώστε να ορίζεται η $y(x)$ παντού στο $(-10, 10)$. Προκύπτει, λοιπόν, πως η γενική λύση είναι όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$y(x) = \pm\sqrt{C - x^2}, \qquad C \geq 100.$$

Προφανώς κάθε λύση θα πρέπει να είναι αποκλειστικά θετική ή αποκλειστικά αρνητική, προκειμένου να είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη). Παρατηρήστε ότι οι λύσεις είναι ημικύκλια ακτίνας C.

Σχετικά με την ειδική λύση που διέρχεται από το σημείο $(0, 10)$, θα χρησιμοποιήσουμε το θετικό πρόσημο, και έχουμε

$$10 = \sqrt{C - 0^2} \Rightarrow C = 100,$$



Σχήμα 4: Η γενική λύση της Άσκησης 68. Τα ημικύκλια άνω του άξονα των x προκύπτουν από τις λύσεις με θετικό πρόσημο, ενώ τα ημικύκλια κάτω του άξονα των x προκύπτουν με αρνητικό πρόσημο. Οι ειδικές λύσεις για $C = 100$ και $C = 25$ εμφανίζονται τονισμένες. Η ειδική λύση που αντιστοιχεί στο $C = 100$ ορίζεται μόνο στο $(-10, 10)$. Η ειδική λύση που αντιστοιχεί στο $C = 25$ ορίζεται μόνο στο $(-5, 5)$ και όχι σε όλο το $(-10, 10)$, όπως ζητά η άσκηση.

επομένως η λύση είναι η

$$y(x) = \pm\sqrt{100 - x^2}.$$

Σχετικά με την ειδική λύση που διέρχεται από το $(0, 5)$, πρέπει και πάλι να χρησιμοποιηθεί το θετικό πρόσημο, αλλά τώρα έχουμε

$$5 = \sqrt{C - 0^2} \Rightarrow C = 25,$$

που δεν είναι επιτρεπτή τιμή του C. Ουσιαστικά, για να μπορεί μια λύση να περάσει από το σημείο $(0, 5)$ και να ικανοποιεί την δοσμένη ΔΕ, θα πρέπει να συναντήσει τον άξονα των x εντός του διαστήματος $(-10, 10)$ και επομένως δεν μπορεί να ορίζεται παντού σε αυτό. Δείτε το Σχήμα 4 για να καταλάβετε το πρόβλημα που υπάρχει.

69. **(Διαφορική Εξίσωση 3)** Να βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) + (1 + 1/x)y(x) = 1$$

στο διάστημα $(0, \infty)$. Ακολούθως, να βρείτε την ειδική λύση που ικανοποιεί την επιπλέον συνθήκη $y(1) = 0$.

Λύση: Παρατηρούμε πως η ΔΕ είναι γραμμική πρώτης τάξης, και πως

$$(x + \log x)' = 1 + \frac{1}{x}.$$

Επομένως, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την ΔΕ με την $\exp(x + \log x) = x \exp x$, και έχουμε

$$\begin{aligned} y'(x) + (1 + 1/x)y(x) = 1 &\Leftrightarrow xe^x y'(x) + (x+1)e^x y(x) = xe^x \Leftrightarrow (xe^x y(x))' = xe^x \\ &\Leftrightarrow (xe^x y(x))' = ((x-1)e^x)' \Leftrightarrow xe^x y(x) = (x-1)e^x + C \\ &\Leftrightarrow xe^x y(x) = (x-1)e^x + C \Leftrightarrow y(x) = \frac{xe^x - e^x + C}{xe^x} \Leftrightarrow y(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{C}{xe^x}. \end{aligned}$$

όπου $C \in \mathbb{R}$.

Σχετικά με τη ζητούμενη ειδική λύση, θα έχουμε

$$0 = 1 - \frac{1}{1} + \frac{C}{1 \cdot e^1} \Rightarrow C = 0,$$

επομένως η ζητούμενη ειδική λύση είναι η

$$y(x) = 1 - \frac{1}{x}.$$

70. **(Διαφορικές Εξισώσεις)** Να βρείτε τις γενικές λύσεις των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων

(α΄)

$$y'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}(y(x) - 1) = 0.$$

(β΄)

$$y'(x) = x^2 e^{x - y(x)}.$$

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε ότι η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική πρώτης τάξης και πως:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = \sqrt{x^2+2} + C.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} y'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}(y(x) - 1) = 0 &\Leftrightarrow y'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} y(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} \\ &\Leftrightarrow e^{\sqrt{x^2+2}} y'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} e^{\sqrt{x^2+2}} y(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} e^{\sqrt{x^2+2}} \\ &\Leftrightarrow \left(y(x) e^{\sqrt{x^2+2}}\right)' = \left(e^{\sqrt{x^2+2}}\right)' \Leftrightarrow y(x) = 1 + Ce^{-\sqrt{x^2+2}}. \end{aligned}$$

(β΄) Παρατηρούμε πως η ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών, επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$y'(x) = x^2 e^{x - y(x)} \Leftrightarrow e^{y(x)} dy = x^2 e^x dx \Leftrightarrow \int e^y dy = \int x^2 e^x \, dx.$$

Όμως,

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2xe^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x(e^x)' \, dx = x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x \, dx) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C,$$

επομένως

$$\int e^y dy = \int x^2 e^x \, dx \Leftrightarrow e^{y(x)} = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C \Leftrightarrow y(x) = \log\left((x^2 - 2x + 2)e^x + C\right).$$

71. **(Διαφορική Εξίσωση)**

(α΄) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{\cos x}\, dx$ στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. *(Υπόδειξη: μπορείτε να πολλαπλασιάσετε αριθμητή και παρονομαστή με το* $\cos x$*.)*

(β΄) Να προσδιορίσετε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) + \frac{2}{\cos x} y(x) = 1 - \sin x$$

στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$\int \frac{1}{\cos x}\, dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}\, dx = \int \frac{du}{1 - u^2},$$

όπου θέσαμε $u = \sin x$, επομένως $du = \cos x dx$. Ακολούθως, παρατηρούμε πως

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} \Leftrightarrow 1 = A + Au + B - Bu \Leftrightarrow A = B = \frac{1}{2}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{1-u^2} &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{1-u} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u} = \frac{1}{2}\log|1+u| - \frac{1}{2}\log|1-u| \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+u}{1-u}\right| = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) + C.\end{aligned}$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι $\sin x \in (-1, 1)$ στο δοσμένο ανοικτό διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(β΄) Η ΔΕ είναι γραμμική πρώτης τάξης. Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, θα πολλαπλασιάσουμε με

$$\exp\left[2 \times \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)\right] = \frac{1+\sin x}{1-\sin x}.$$

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned}y'(x) + \frac{2}{\cos x}y(x) = 1 - \sin x &\Leftrightarrow \frac{1+\sin x}{1-\sin x}y'(x) + \frac{2(1+\sin x)}{\cos x(1-\sin x)}y(x) = 1 + \sin x \\ &\Leftrightarrow \left(y(x)\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)' = (x - \cos x)' \Leftrightarrow y(x) = \frac{(x - \cos x + C)(1-\sin x)}{1+\sin x}.\end{aligned}$$

72. **(Διαφορική Εξίσωση)** Δίνεται η ακόλουθη διαφορική εξίσωση, όπου $a \in (1, \infty)$ είναι μια παράμετρος.

$$y'(x) + (a + \log x)y(x) = e^{-x\log x}.$$

Να υπολογίσετε τη γενική της λύση.

Λύση: Η ΔΕ είναι γραμμική πρώτης τάξης, επομένως καταρχάς υπολογίζουμε το ακόλουθο ολοκλήρωμα:

$$\int (a + \log x)\, dx = ax + \int x' \log x\, dx = ax + x\log x - \int 1\, dx = (a-1)x + x\log x + C.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}y'(x) + (a+\log x)y(x) = e^{-x\log x} &\Leftrightarrow e^{(a-1)x + x\log x}y'(x) + (a+\log x)e^{(a-1)x+x\log x}y(x) = e^{(a-1)x} \\ \Leftrightarrow \left[e^{(a-1)x+x\log x}y(x)\right]' = e^{(a-1)x} &= \left[\frac{e^{(a-1)x}}{a-1}\right]' \Leftrightarrow y(x) = \left[\frac{e^{(a-1)x}}{a-1} + C\right]e^{-(a-1)x - x\log x} \\ &\Leftrightarrow y(x) = \frac{x^{-x}}{a-1} + Cx^{-x}e^{-(a-1)x}.\end{aligned}$$

10η Ομάδα Ασκήσεων

73. **(Σειρές 1)** Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή όχι:

$$\sum \frac{1}{2n + n\sin 3n}, \quad \sum \frac{1}{2n^2 + n^2 \sin^2 3n}, \quad \sum \frac{n!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n)}, \quad \sum \frac{(2n)!}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdots (3n)}.$$

Λύση:

(α΄) Παρατηρήστε πως

$$\frac{1}{2n + n\sin 3n} \geq \frac{1}{3n}.$$

Επομένως, από το κριτήριο της σύγκρισης, με δεδομένο ότι αποκλίνει η $\sum \frac{1}{n}$, θα αποκλίνει και η δοσμένη σειρά.

(β΄) Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε

$$\frac{1}{2n^2 + n^2 \sin^2 3n} \leq \frac{1}{n^2},$$

και με δεδομένο ότι η σειρά $\sum \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο της σύγκρισης προκύπτει ότι θα συγκλίνει και η δοσμένη.

(γ΄) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του λόγου:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) \cdot (2n+2)} \times \left[\frac{n!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}\right]^{-1} = \frac{n+1}{2n+2} \to \frac{1}{2},$$

επομένως η σειρά συγκλίνει.

(δ΄) Και πάλι θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του λόγου. Σε αυτή την περίπτωση, όμως,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2(n+1))!}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n) \cdot (3n+3)} \times \left[\frac{(2n)!}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)}\right]^{-1} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{3n+3} \to \frac{4}{3},$$

επομένως σε αυτή την περίπτωση, η σειρά αποκλίνει.

74. **(Σειρές 2)**

(α΄) Για κάθε θετικό ακέραιο $k \in \mathbb{Z}$, να προσδιορίσετε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$ συγκλίνει ή αποκλίνει.

(β΄) Για κάθε πραγματικό αριθμό $p \in \mathbb{R}$ να προσδιορίσετε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$ συγκλίνει ή αποκλίνει.

(Υπόδειξη: εξετάστε τις χαρακτηριστικές περιπτώσεις $k = 1$, $k = 2$, και $p = -1$.)

Λύση:

(α΄) Καταρχήν, παρατηρούμε ότι για $k = 1$, η σειρά γίνεται η $\sum_{n=1}^{\infty}(n!)$, η οποία αποκλίνει αφού οι όροι της τείνουν στο άπειρο και όχι στο 0, όπως απαιτεί το αναγκαίο κριτήριο του Cauchy για συγκλίνουσες σειρές. Για $k = 2$, παρατηρούμε πως

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \times \left[\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right]^{-1} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to \frac{1}{4}.$$

Επομένως, από το κριτήριο του λόγου, η σειρά συγκλίνει για $k = 2$. Επίσης, επειδή για κάθε θετικό $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$k_1 > k_2 \Rightarrow \frac{(n!)^2}{(k_1 n)!} < \frac{(n!)^2}{(k_2 n)!},$$

από το κριτήριο της σύγκρισης προκύπτει ότι η σειρά θα συγκλίνει και για κάθε $k > 2$.

Άρα, τελικά η σειρά αποκλίνει για $k = 1$ και συγκλίνει για κάθε $k \geq 2$.

(β΄) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του ολοκληρώματος. Διακρίνουμε περιπτώσεις. Έστω καταρχήν πως $p=-1$. Σε αυτή την περίπτωση

$$\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{2}\left[\log(1+x^2)\right]'\,dx = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\log(1+x^2) - \frac{1}{2}\log(1+0) = \infty.$$

Άρα, από το κριτήριο του ολοκληρώματος, για $p=-1$ η σειρά αποκλίνει.
Επίσης, επειδή έχουμε, για $n>1$,

$$p>-1 \Rightarrow n(1+n^2)^p > n(1+n^2)^{-1},$$

από το κριτήριο της σύγκρισης προκύπτει ότι αφού δεν έχουμε σύγκλιση για $p=-1$, δεν θα έχουμε σύγκλιση και για $p>-1$.
Τέλος, για την περίπτωση $p<-1$ έχουμε, επίσης με χρήση του κριτηρίου του ολοκληρώματος, ότι

$$\begin{aligned}\int_1^\infty x(1+x^2)^p\,dx &= \int_1^\infty \frac{1}{2(p+1)}\left[(1+x^2)^{p+1}\right]'\,dx = \left[\frac{(1+x^2)^{p+1}}{2(p+1)}\right]_1^\infty \\ &= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{(1+x^2)^{p+1}}{2(p+1)}\right] - \frac{2^{p+1}}{2(p+1)} = -\frac{2^{p+1}}{2(p+1)}.\end{aligned}$$

Αφού το ολοκλήρωμα συγκλίνει, θα συγκλίνει και η σειρά. Επομένως, η σειρά συγκλίνει για $p<-1$ και αποκλίνει για $p\geq -1$.

75. **(Όριο και σειρά I)**

(α΄) Υπολογίστε το ακόλουθο όριο:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^{x+1/x}\right)/\left(x+1/x\right)^x.$$

(β΄) Χρησιμοποιώντας το άνω σκέλος, βρείτε αν η ακόλουθη σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει:

$$\sum\left(n^{n+1/n}\right)/\left(n+1/n\right)^n.$$

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^{x+1/x}}{(x+1/x)^x} &= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x}{x+1/x}\right]^x \lim_{x\to\infty}x^{1/x} = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x^2+1}\right]^x \lim_{x\to\infty}x^{1/x} \\ &= \lim_{x\to\infty}\left[1-\frac{1}{x^2+1}\right]^x \lim_{x\to\infty}x^{1/x} \\ &= \lim_{x\to\infty}\exp\left[x\log\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)\right]\lim_{x\to\infty}\exp\left[\frac{\log x}{x}\right] \\ &= \exp\left[\lim_{x\to\infty}x\log\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)\right]\exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}\right].\end{aligned}$$

(Εννοείται πως τα άνω ισχύουν εφόσον υπάρχουν όλα τα όρια που εμφανίζονται.) Για το πρώτο από τα όρια που καλούμαστε να υπολογίσουμε, παρατηρήστε πως, με χρήση του κανόνα L'Hôpital, έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x\log\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\log(1-\frac{1}{x^2+1})}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1-1/(1+x^2)}\right)\frac{2x}{(x^2+1)^2}(-x^2) \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{2x^3(x^2+1)}{x^2(x^2+1)^2}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{2x}{x^2+1}\right) = 0,\end{aligned}$$

ενώ για το δεύτερο όριο έχουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Συνδυάζοντας τα άνω, προκύπτει τελικά πως

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{x+1/x}}{(x+1/x)^x} = \exp(0)\exp(0) = 1.$$

(β΄) Από το προηγούμενο σκέλος προκύπτει ότι οι όροι της σειράς συγκλίνουν στη μονάδα. Όμως, απαραίτητη προϋπόθεση προκειμένου να συγκλίνει η σειρά είναι οι όροι να τείνουν στο μηδέν. Άρα, η σειρά αποκλίνει. (Και για την ακρίβεια, τείνει στο άπειρο.)

76. **(Σειρά)** Για ποιες θετικές τιμές της παραμέτρου $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η ακόλουθη σειρά;

$$\sum \frac{x^n}{n(10^n+20)}.$$

Λύση: Έστω $a_n = \frac{x^n}{n(10^n+20)}$. Παρατηρούμε πως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)(10^{n+1}+20)}}{\frac{x^n}{n(10^n+20)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(10^n+20)x}{10(n+1)(10^n+2)} = \frac{x}{10}.$$

Επομένως, από το Κριτήριο του Λόγου έχουμε ότι αν $x < 10$ η σειρά συγκλίνει, και αν $x > 10$ η σειρά αποκλίνει. Ειδικά για την περίπτωση $x = 10$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Κριτήριο της Σύγκρισης με την αρμονική σειρά $\sum \frac{1}{n}$, που γνωρίζουμε ότι αποκλίνει. Συγκεκριμένα, θέτουμε $b_n = \frac{1}{n}$ και παρατηρούμε πως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{10^n+20} = 1,$$

επομένως για $x = 10$ η σειρά αποκλίνει.

77. **(Σειρές)** Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν:

(α΄) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}.$

(β΄) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ όπου

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n/2}, & \text{n άρτιος,} \\ \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}, & \text{n περιττός.} \end{cases}$$

(Υπόδειξη: γράψτε τους πρώτους 5-6 όρους της σειράς. Τι παρατηρείτε;)

(γ΄) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+\cos n}{e^n}.$

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως $\frac{1}{(\log n)^n} \leq \frac{1}{(\log 2)^n}$, Επειδή όμως $\log 2 > 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)^n}$ συγκλίνει, ως γεωμετρική. Επομένως, θα συγκλίνει και η δοσμένη, ως μικρότερή της.

(β΄) Παρατηρούμε πως
$$\sum_{i=1}^{n} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$
Παρατηρήστε ότι η δοσμένη σειρά περιλαμβάνει όλους τους όρους της αρμονικής σειράς, που είναι γνωστό ότι αποκλίνει. Επομένως, τα μερικά αθροίσματα της δοσμένης σειράς μπορούν να γίνουν αυθαίρετα μεγάλα, όπως ακριβώς και της αρμονικής σειράς, επομένως και η δοσμένη σειρά αποκλίνει.

(γ΄) Θα εφαρμόσουμε το Κριτήριο του Λόγου:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^3 + \cos(n+1)}{n^3 + \cos n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e} \times \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 + \frac{\cos(n+1)}{n^3}}{1 + \frac{\cos n}{n^3}} = \frac{1}{e} \times 1 < 1.$$
Επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία η δοσμένη σειρά συγκλίνει.