

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Σ. ΤΟΥΜΠΗΣ

ΟΜΑΔΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2025-2026

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. Περίληψη:

- (α') Υπάρχει μια ομάδα ασκήσεων για κάθε ένα κεφάλαιο του βιβλίου, και η καταληκτική ημερομηνία παράδοσής της θα είναι περίπου 5-10 μέρες μετά την ολοκλήρωση του κεφαλαίου.
- (β') Η καταληκτική ημέρα παράδοσης κάθε ομάδας ανακοινώνεται στο μάθημα και αναρτάται στην ατζέντα του eClass τουλάχιστον μια εβδομάδα νωρίτερα.
- (γ') Οι λύσεις μιας ομάδας ασκήσεων αναρτώνται στο eClass λίγες μέρες μετά την ημερομηνία παράδοσης της επόμενης ομάδας ασκήσεων.
- (δ') Οι βαθμολογίες αναρτώνται στο eClass, και αυξάνουν, υπό προϋποθέσεις, την τελική βαθμολογία.
- (ε') Αρκετές από τις ασκήσεις είναι αρκετά δύσκολες. Η τελική εξέταση θα είναι πιο βατή από αυτές.
- (ς') Διαβάζετε προσεκτικά τις λύσεις, όταν αυτές αναρτώνται.

2. Επίδραση στον τελικό βαθμό:

- (α') Οι ασκήσεις προσφέρουν bonus 2 (στις 10) μονάδων, **εφόσον ο βαθμός στην τελική εξέταση είναι προβιβάσιμος**, δηλαδή 5 και άνω.
- (β') Δεν χρειάζεται να παραδώσετε όλες τις ομάδες ασκήσεων για να πάρετε το bonus. Μπορείτε να παραδώσετε τις μισές για να πάρετε μια μονάδα (εφόσον βέβαια είναι σωστές), κ.ο.κ. Ομοίως, δεν απαιτείται να παραδώσετε όλες τις ασκήσεις μιας ομάδας.
- (γ') **Δεν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε, για να πάρετε το bonus, εργασίες παρελθόντων ετών.**

3. Παράδοση (γενικές οδηγίες):

- (α') Μπορείτε να παραδώσετε τις ομάδες σας μόνο ηλεκτρονικά, μέσω του εργαλείου των Εργασιών του eclass.
- (β') Μπορείτε να παραδώσετε τις ομάδες ακόμα και αν η εγγραφή σας στο ΟΠΑ δεν έχει γίνει ακόμα, στέλνοντάς τες με μήνυμα email στον διδάσκοντα (αφορά φοιτητές εκ μεταγραφής και συναφείς περιπτώσεις.)
- (γ') Απαγορεύεται η τμηματική παράδοση μιας ομάδας (για παράδειγμα, η μισή μια μέρα και η μισή κάποια άλλη μέρα).
- (δ') Πριν την παράδοση, γράψτε, ευανάγνωστα, οπωσδήποτε το όνομά σας, τον αριθμό της ομάδας ασκήσεων, και, αν έχετε, τον αριθμό μητρώου σας, πάνω δεξιά στην πρώτη σελίδα. (Οι φοιτητές των κατατακτηρίων και ορισμένοι προερχόμενοι από μεταγραφές δεν έχουν αριθμούς μητρώου. Για αυτούς αρκεί να υπάρχει το όνομά τους.)
- (ε') Μπορείτε να γράφετε με μολύβι ή/και με στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός κόκκινου.
- (ς') Μπορείτε να παραδώσετε την ομάδα σας οποτεδήποτε πριν την καταληκτική ημερομηνία παράδοσης.

4. Ηλεκτρονική παράδοση:

- (α') Η ηλεκτρονική παράδοση γίνεται αποκλειστικά μέσω του ειδικού εργαλείου του eClass, και ΟΧΙ με αποστολή email στο διδάσκοντα, με εξαίρεση άτομα που δεν έχουν ολοκληρώσει την εγγραφή τους.

- (β') Δεκτά είναι μόνο σκαναρισμένα (έστω και με κινητό τηλέφωνο) ή δακτυλογραφημένα έγγραφα (με χρήση MS WORD κτλ.), και όχι, για παράδειγμα, φωτογραφίες κακής ποιότητας.
- (γ') Αποφύγετε πάντως την δακτυλογράφηση των εργασιών. Μπορείτε να αξιοποιήσετε τον πεπερασμένο χρόνο σας πολύ καλύτερα.
- (δ') Παραδίδετε για κάθε εργασία **ένα μόνο ασυμπίεστο αρχείο PDF ή doc μεγέθους το πολύ 3MB** με ονομασία τον αριθμό μητρώου σας και τίποτα άλλο (π.χ. 3030666.pdf). Ιδιαίτερως, ΜΗΝ παραδίδετε αρχεία zip που περιέχουν πολλές φωτογραφίες.
- (ε') Μην αφήνετε σχόλια στο eClass μέσω του σχετικού εργαλείου, εκτός αν είναι απόλυτη ανάγκη.
- (ς') Προσοχή: ενδέχεται η δυνατότητα ηλεκτρονικής υποβολής των ασκήσεων μέσω του αντίστοιχου εργαλείου του eClass να ενεργοποιηθεί λίγες μόνο μέρες πριν την καταληκτική προθεσμία παράδοσης, και αρκετά μετά την ανακοίνωση αυτής της προθεσμίας.
- (ζ') Καταληκτική ώρα παράδοσης: **Παραδίδετε ηλεκτρονικά την ομάδα μέχρι τις 11:55μμ της ανακοινωμένης ημέρας παράδοσης.**
- (η') **ΔΕΝ ΘΑ ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΘΟΥΝ ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΠΟΥ ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΟΥΝ ΣΟΒΑΡΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΩ ΟΔΗΓΙΕΣ.**

5. Καθυστερήση στην παράδοση:

- (α') Μπορείτε να καθυστερήσετε την παράδοση των ομάδων ασκήσεων, χωρίς επίπτωση, βάσει του ακόλουθου κανόνα: Μπορείτε να καθυστερήσετε το πολύ ΤΡΕΙΣ ομάδες ασκήσεων, και να τις παραδώσετε όταν θα παραδίδετε και την επόμενη κάθε μιας από αυτές, αν οι ημερομηνίες παράδοσής τους διαφέρουν, ή την πρώτη που ακολουθεί με διαφορετική ημερομηνία παράδοσης, αν η ημερομηνία παράδοσής τους είναι κοινή. Επομένως, αν η ομάδα i έχει ημερομηνία παράδοσης την X_i και η ομάδα $i + 1$ έχει ημερομηνία παράδοσης την X_{i+1} , τότε μπορείτε να παραδώσετε την ομάδα i στην ημερομηνία X_{i+1} , εφόσον $X_{i+1} > X_i$, αλλιώς στο πρώτο $X_k > X_i$. ΟΜΩΣ, δεν μπορείτε να παραδώσετε μια ομάδα σε κάποια ημερομηνία $X_l > X_k > X_i$.
- (β') Μην ζητήσετε παράταση εκ των προτέρων: απλώς ο διορθωτής θα δει ότι παραδώσατε καθυστερημένα την ομάδα. Οι ομάδες ασκήσεων που παραδίδονται εκπρόθεσμα παραδίδονται όπως και οι άλλες.

6. Βαθμολόγηση:

- (α') Η βαθμολόγηση θα είναι πρόχειρη, λόγω έλλειψης ανθρώπινων πόρων.
- (β') Αν οι πράξεις που απαιτούνται για να προκύψει ένα αριθμητικό αποτέλεσμα είναι αρκετές, μπορείτε να δώσετε το εν λόγω αποτέλεσμα ως έκφραση που περιέχει παραγοντικά, συνδυασμούς, γινόμενα με πολλούς παράγοντες, αθροίσματα με πολλούς όρους, κτλ., χωρίς καμία βαθμολογική απώλεια.

7. Ανακοίνωση βαθμολογίας: Οι εργασίες θα διορθώνονται με καθυστέρηση τουλάχιστον ενός μήνα από την καταληκτική ημερομηνία παράδοσης. Η βαθμολογία θα αναρτάται περιοδικά στα έγγραφα του eClass. Αν έχετε ενστάσεις σχετικά με τη διόρθωση, στείλτε ένα αναλυτικό mail στον διδάσκοντα.

8. Συνεργασία:

- (α') Μπορείτε να συνεργαστείτε όσο θέλετε, και να ανταλλάξετε προφορικά ιδέες, ακόμα και λύσεις.
- (β') Αρκεί ο καθένας να γράψει μόνος του την λύση του, και να καταλαβαίνει τι γράφει.
- (γ') Εργασίες εμφανώς αντιγραμμένες θα μηδενίζονται, και **όλο το bonus του συγγραφέα τους θα τίθεται αμετάκλητα στο μηδέν**. Επομένως, άλλες εργασίες που έχει ήδη παραδώσει ή θα παραδώσει στο μέλλον δεν θα έχουν επίδραση στο τελικό του βαθμό.
- (δ') Απαγορεύεται να δείτε λύσεις ασκήσεων παλαιότερων ετών ή λύσεις των ιδίων ασκήσεων από το διαδίκτυο.

9. Σημαντικά σχόλια:

- (α') Προσπαθήστε να είστε κατά το δυνατόν σαφείς στις λύσεις σας. Δεν βοηθά μόνο τους διορθωτές, αλλά και εσάς να οργανώνετε τη σκέψη σας καλύτερα.
- (β') Ενημερώστε άμεσα τον διδάσκοντα σε περίπτωση εύρεσης λάθους είτε στις εκφωνήσεις είτε στις λύσεις.
- (γ') Ενημερώστε τον διδάσκοντα αν η παράδοση μιας ομάδας ασκήσεων συμπίπτει με την παράδοση ασκήσεων άλλων μαθημάτων του **ίδιου** εξαμήνου. (Ενδεχομένως να υπάρξει αλλαγή, αν η ύλη το επιτρέπει.)
- (δ') Για την εύρυθμη λειτουργία του μαθήματος, προσπαθήστε να τηρήσετε κατά το δυνατόν όλες τις άνω οδηγίες.
- (ε') **Βλέπετε το mail που σας έχει δώσει το ΟΠΑ (xx@auib.gr).** Το έχετε για να επικοινωνούν μαζί σας οι διδάσκοντες, εκτός των άλλων και όταν υπάρχει πρόβλημα με την παράδοση κάποιας εργασίας.

1η Ομάδα Ασκήσεων

1. **(Άθροισμα Minkowski)** Εκτός από την ένωση και την τομή, μπορούμε να ορίσουμε και το *άθροισμα* δύο συνόλων. Συγκεκριμένα, ορίζουμε το άθροισμα Minkowski $A + B$ δύο συνόλων A, B , ως το νέο σύνολο που αποτελείται από όλους τους αριθμούς z που μπορούν να γραφούν ως το άθροισμα $a + b$ ενός αριθμού a που ανήκει στο A και ενός αριθμού b που ανήκει στο B . Πιο συνοπτικά:

$$A + B \triangleq \{z \in \mathbb{R} : z = a + b, a \in A, b \in B\}.$$

Με δεδομένο τον άνω ορισμό, προσδιορίστε τα ακόλουθα αθροίσματα Minkowski:

$$(0, 1) + (0, 1), \quad (0, 1) + \mathbb{Z}, \quad \mathbb{N} + \mathbb{N}.$$

2. **(Επιμεριστική ιδιότητα)** Να αποδείξετε ότι η ένωση επιμερίζει την τομή και η τομή επιμερίζει την ένωση: για κάθε $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ότι δύο σύνολα A, B είναι ίσα αν και μόνο αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

3. **(Ιδιότητες πεδίου)** Αποδείξτε ότι ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες για κάθε $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Εννοείται ότι αν για κάποιο αριθμό εμφανίζεται ο αντίστροφός του, ο αριθμός αυτός είναι διάφορος του 0. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μόνο τα Αξιώματα Πεδίου και ιδιότητες που εμφανίζονται στις σημειώσεις σας και έχουν ήδη αποδειχθεί. Σε κάθε ισότητα ή ισοδυναμία που γράφετε, αναφέρετε το αξίωμα ή την ιδιότητα που χρησιμοποιείτε.

$$(\alpha') \text{ Αν } xy = 0, \text{ τότε είτε το } x = 0, \text{ είτε το } y = 0, \text{ είτε } x = y = 0.$$

$$(\beta') \quad x(y - z) = xy - xz.$$

$$(\gamma') \quad (x + y)/z = x/z + y/z.$$

$$(\delta') \quad (x/y)/(z/w) = (xw)/(yz).$$

4. **(Εσωτερικό συνόλων)** Προσδιορίστε το εσωτερικό των παρακάτω συνόλων. Ποια από αυτά είναι ανοικτά;

$$(0, 1), \quad (0, 1], \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{R} - \mathbb{Z}.$$

5. **(Εύρεση supremum και infimum)** Προσδιορίστε τα supremum, infimum, maximum και minimum των ακόλουθων συνόλων:

$$[0, 1), \quad (0, 1], \quad \mathbb{Q}, \quad \left\{1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \dots\right\}, \quad A = \{x : (x - \sqrt{2})(x - 3) \leq 0\}, \quad A \cap \mathbb{Q}.$$

6. **(Ιδιότητα κλειστών συνόλων)** Να δείξετε ότι όλα τα κλειστά, μη κενά, φραγμένα άνω σύνολα (όχι απαραίτητα διαστήματα) έχουν μέγιστο στοιχείο.

2η Ομάδα Ασκήσεων

7. **(Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση)** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $B \subseteq A$ τότε για κάθε $x_1, x_2 \in B$, έχουμε

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

8. **(Γνήσια μονοτονία $\Rightarrow$ 1-1)** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη (δηλαδή γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα), τότε είναι 1-1. Το αντίστροφο ισχύει; Δηλαδή, αν η f είναι 1-1, τότε είναι και γνησίως μονότονη;

9. **(Infimum αθροίσματος)** Έστω συναρτήσεις $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$ κάτω φραγμένες στο σύνολο B . Να δείξετε ότι

$$\inf_{x \in B} \{f + g\} \geq \inf_{x \in B} \{f\} + \inf_{x \in B} \{g\}.$$

Μπορείτε να βρείτε μια γενική περίπτωση όπου ισχύει η ισότητα;

10. **(Φθίνουσα σύνθεση)** Να δείξετε ότι αν η f είναι αύξουσα και η g είναι φθίνουσα, τότε οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι φθίνουσες στα σύνολα όπου αυτές ορίζονται. Επαναλάβετε για την περίπτωση που οι δοσμένες συναρτήσεις είναι γνησίως μονότονες.

11. **(Υπερβολικές τριγωνικές συναρτήσεις – ορισμός και βασικές ιδιότητες)** Το υπερβολικό ημίτονο $\sinh x$, το υπερβολικό συνημίτονο $\cosh x$, η υπερβολική εφαπτομένη $\tanh x$ και η υπερβολική συνεφαπτομένη $\coth x$, όλα με $x \in \mathbb{R}$, ορίζονται, αντιστοίχως, ως

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

(α') Να αποδείξετε ότι οι $\sinh x$, $\tanh x$, $\coth x$ είναι περιττές συναρτήσεις, ενώ η $\cosh x$ είναι άρτια.

(β') Να αποδείξετε τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x, \quad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x,$$

$$\sinh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 - \tanh^2 x}, \quad \cosh 2x = \frac{1 + \tanh^2 x}{1 - \tanh^2 x}, \quad \tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}.$$

Παρατηρήστε ότι όλες οι άνω ιδιότητες είναι ανάλογες αντίστοιχων ιδιοτήτων τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Αυτό δεν είναι τυχαίο, καθώς οι τριγωνομετρικές και οι υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις συνδέονται στενά, αλλά για να μελετήσουμε τη σχέση τους χρειαζόμαστε γνώσεις μιγαδικής ανάλυσης.

(Δεν έχουμε ακόμα ορίσει αυστηρά την εκθετική συνάρτηση e^x . Αυτό θα γίνει σε κατοπινό κεφάλαιο. Επειδή όμως η συνάρτηση αυτή, καθώς και η αντίστροφή της, $\log x$, του φυσικού λογαρίθμου, σας είναι γνωστές από το Λύκειο, θα τις δούμε πριν τον αυστηρό ορισμό τους σε αυτήν και σε ορισμένες ακόμα ασκήσεις. Θα συμβολίζουμε, επίσης, την εκθετική συνάρτηση και ως $\exp x$.)

3η Ομάδα Ασκήσεων

12. **(Ορια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια, ή να δείξετε ότι δεν υπάρχουν:

$$(\alpha') \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{(\sin 2x)(\sin 4x)}.$$

$$(\beta') \lim_{x \rightarrow \infty} \left[2x - x^3 \log \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right].$$

13. **(Βηματική συνάρτηση)** Δίνεται η βηματική συνάρτηση

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Προσδιορίστε τα ακόλουθα όρια, ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \min\{u(x), u(-x)\}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} u(x^2), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} u\left(\frac{1}{x}\right).$$

Δεν χρειάζεται να επικαλεστείτε τον ορισμό του ορίου.

14. **(Ορια)**

(α') Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}},$$

όπου το ακέραιο μέρος $\lfloor x \rfloor$ του x είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος από τον x .

15. **(Ορια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια, χρησιμοποιώντας ενδεχομένως άλλα γνωστά όρια, αλλά χωρίς να χρησιμοποιήσετε παραγωγίσεις:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{5} - \sqrt{x^2 + 2x + 5}}{\sqrt{x}} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + \tan x}{\sin x \cos x} \right).$$

16. **(Ορια)** Να προσδιορίσετε τα παρακάτω όρια, εφόσον υπάρχουν:

$$(\alpha') \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{|\cos x|}{2} \right)^x.$$

$$(\beta') \lim_{x \rightarrow \infty} |\cos x|^x.$$

17. **(Οριο ρητής συνάρτησης)** Να δείξετε, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τον ορισμό του ορίου, ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x}{x + 5} = 10.$$

18. **(Αύξουσες ακολουθίες)** Να δείξετε ότι αν μια ακολουθία a_n είναι αύξουσα, τότε είτε έχει πεπερασμένο όριο L είτε τείνει στο ∞ . (Υπόδειξη: υπάρχουν δύο περιπτώσεις, η περίπτωση η a_n να είναι φραγμένη άνω, οπότε το σύνολο τιμών της έχει supremum, και η περίπτωση η a_n να μην είναι φραγμένη άνω.)

19. **(Ορια ακολουθιών)** Να υπολογίσετε τα όρια των ακολουθιών

$$\frac{n \sin n^{10} + 20}{(n + 1)^2}, \quad n \sin \frac{1}{n^2}.$$

4η Ομάδα Ασκήσεων

20. (Κανόνας L'Hôpital)

(α') Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$$

(β') Έστω πως η συνάρτηση f έχει δεύτερη παράγωγο στο x . Να δείξετε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

21. (Πλευρικό Όριο) Δίνεται το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{t} e^{-t} dt}{x^a},$$

όπου a είναι μια πραγματική παράμετρος. Να υπολογίσετε την τιμή του ορίου, εφόσον υπάρχει, εξετάζοντας περιπτώσεις για την τιμή της παραμέτρου a .

22. (Συνεχής ρητή συνάρτηση) Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα I και λαμβάνει μόνο ρητές τιμές στο I , τότε είναι σταθερή στο I . Πριν προχωρήσετε στη λύση, βεβαιωθείτε ότι έχετε κατανοήσει την γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος.

23. (Εύρεση ρίζας) Να δείξετε ότι αν το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $f : [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $(2, 2)$ και $(4, 1)$, τότε υπάρχει κάποιο x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{x_0}{2}$.

24. (Αντίστροφη υπερβολικού ημίτονου) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση του υπερβολικού ημίτονου

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}$ και έχει πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$. Επίσης, να δείξετε ότι η αντίστροφή της είναι η

$$\operatorname{arcsinh} y = \log \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right), \quad y \in \mathbb{R},$$

όπου $\log x$ είναι ο φυσικός λογάριθμος του x . Κατόπιν, σχεδιάστε και τις δύο συναρτήσεις.

25. (Υλοποίηση Μεθόδου Διχοτόμησης) Να υλοποιήσετε τη Μέθοδο της Διχοτόμησης σε μια γλώσσα προγραμματισμού της επιλογής σας. Το πρόγραμμα που θα υλοποιήσετε θα πρέπει να δέχεται ως εισόδους:

(α') Ένα αρχικό διάστημα στο οποίο είναι γνωστό ότι υπάρχει μια ρίζα.

(β') Το μέγιστο επιτρεπτό σφάλμα στη θέση της ρίζας.

(γ') Την μέγιστη επιτρεπτή απόλυτη τιμή της συνάρτησης στο σημείο που επιστρέφεται ως εκτίμηση της ρίζας.

Η συνάρτηση $f(x)$ της οποίας αναζητείται η ρίζα μπορεί να δίνεται είτε σαν όρισμα (προτιμότερο), είτε να υλοποιείται εντός του προγράμματος (αν δεν ξέρετε πως να την περάσετε στην συνάρτηση ως όρισμα).

Το πρόγραμμα πρέπει να παρέχει ως έξοδο την εκτίμηση για τη ρίζα, καθώς και να εκτυπώνει ενδιάμεσα αποτελέσματα, σε επτά στήλες, με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών στοιχείων, όπως και στο Παράδειγμα του βιβλίου, ως εξής:

(α') Η πρώτη στήλη να δείχνει την επανάληψη n .

(β') Η δεύτερη στήλη να δείχνει το αριστερό άκρο a του τρέχοντος διαστήματος στην αρχή της επανάληψης.

(γ') Η τρίτη στήλη να δείχνει το δεξί άκρο b του τρέχοντος διαστήματος στην αρχή της επανάληψης.

- (δ') Η τέταρτη στήλη να δείχνει το μέσο m του τρέχοντος διαστήματος στην αρχή της επανάληψης.
- (ε') Η πέμπτη στήλη να δείχνει την τιμή $f(a)$.
- (ζ') Η έκτη στήλη να δείχνει την τιμή $f(b)$.
- (ζ') Η έβδομη στήλη να δείχνει την τιμή $f(m)$.

26. **(Αριθμητικός υπολογισμός ρίζας της συνάρτησης $f(x) = 2 \cos x - x$)** Χρησιμοποιήστε το πρόγραμμα που αναπτύξατε στην προηγούμενη άσκηση, με τέτοιες παραμέτρους εισόδου ώστε να εκτελούνται τουλάχιστον 10 επαναλήψεις και με αρχικό διάστημα το $[1, 3]$, προκειμένου να προσδιορίσετε την θετική ρίζα της εξίσωσης $2 \cos x = x$. (Πόσες ρίζες έχει η συνάρτηση;)

5η Ομάδα Ασκήσεων

27. **(Εφαπτόμενη και συνεφαπτόμενη)** Να δείξετε ότι

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

με χρήση του ορισμού της παραγώγου και γνωστών τριγωνομετρικών ορίων.

28. **(Παράγωγος)** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{\cos(\frac{1}{x})}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Να υπολογίσετε την παράγωγό της στη θέση $x = 0$.

29. **(Ορια)** Έστω συνάρτηση $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $|g(x)| \leq M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $M \in \mathbb{R}$ σταθερά. Έστω επίσης η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2 g(x)$. Να δείξετε ότι:

(α') Η $f(x)$ είναι συνεχής στο 1.

(β') Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 1.

(γ') Η δεύτερη παράγωγος $f''(x)$ της $f(x)$ μπορεί να μην υπάρχει στο 1 για κάποιες $g(x)$. (Δώστε παράδειγμα $g(x)$ για την οποία δεν υπάρχει η $f''(x)$).

30. **(Παράγωγος της $\operatorname{arccot}(y)$)** Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης της αντίστροφης συνεφαπτομένης, που ορίζεται στο βιβλίο είναι η

$$(\operatorname{arccot} y)' = -\frac{1}{1+y^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

31. **(Συνέχεια Lipschitz)** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(α') Να υπολογίσετε την παράγωγο της f παντού στο $\mathbb{R}$ και να δείξετε ότι η παράγωγος είναι συνεχής παντού στο $\mathbb{R}$.

(β') Είναι η f Lipschitz συνεχής σε όλα τα φραγμένα διαστήματα της μορφής $[-M, M]$, όπου $M > 0$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

32. **(Αόριστα Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

(α') $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx.$

(β') $\int \frac{1}{x(\log x)^p} dx$, όπου η παράμετρος $p \in \mathbb{R}$.

33. **(Αόριστα Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \int (\sin 2t)(\cos t) dt.$$

34. **(Αόριστο ολοκλήρωμα)** Υπολογίστε το ακόλουθο αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int \cos^3 x \sin^7 x dx.$$

Κατόπιν, κάνετε επαλήθευση του αποτελέσματος παραγωγίζοντας.

6η Ομάδα Ασκήσεων

35. **(Όρια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

$$(\alpha') \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - e^{-x})}{\log(\cos x)},$$

$$(\beta') \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan \left(\sqrt{x + x^2} - \sqrt{x} \right).$$

36. **(Όριο)** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{2}} - 1}{x^{\frac{1}{4}} - 1}$.

37. **(Μικρό όμικρον)** Στην Πληροφορική συχνά χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό: αν $f(n)$ και $g(n)$ είναι δύο θετικές ακολουθίες, τότε γράφουμε $f(n) = o(g(n))$ αν ισχύει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, δηλαδή αν για μεγάλες τιμές του n , η ακολουθία $f(n)$ είναι πολύ μικρότερη της ακολουθίας $g(n)$. Παρατηρήστε ότι το $o(\cdot)$ ΔΕΝ εκφράζει κάποια άγνωστη συνάρτηση, αλλά είναι ένας απλός συμβολισμός, με τον οποίο μπορούμε να γράψουμε συνοπτικά μια σχέση μεταξύ δύο ακολουθιών.

Για κάθε μια από τις ακόλουθες προτάσεις, είτε αποδείξτε ότι είναι σωστή, είτε δώστε ένα αντιπαράδειγμα που να δείχνει ότι είναι λάθος:

(α') Αν $f(n)$ είναι ένα πολυώνυμο του n και $g(n) = e^n$, τότε $f(n) = o(g(n))$.

(β') Αν $f_1(n) = o(g(n))$ και $f_2(n) = o(g(n))$, τότε και $f_1(n)f_2(n) = o(g(n))$.

(γ') Αν $f(n) = o(g(n))$ και $g(n) = o(h(n))$, τότε και $f(n) = o(h(n))$.

38. **(Ιδιότητα κυρτών συναρτήσεων)** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα I , τότε είναι αδύνατο να βρεθούν τρία σημεία $x_0 < x_1 < x_2$ εντός του I τέτοια ώστε $f(x_1) > f(x_0)$ και $f(x_1) > f(x_2)$.

39. **(Υπολογισμός των τιμών της $x^{\frac{1}{3}}$)** Συμπληρώστε έναν πίνακα όπως αυτόν του Παραδείγματος 6.1, πάλι για την συνάρτηση $x^{\frac{1}{3}}$, αλλά τώρα εξετάστε για το x τις τιμές 20, 26, 26.5, 27, 27.5, 28, 34.

40. **(Υλοποίηση Μεθόδου Νεύτωνα)** Υλοποιήστε τη Μέθοδο του Νεύτωνα σε μια γλώσσα προγραμματισμού της προτίμησής σας, χρησιμοποιώντας, ως βάση, τον ψευδοκώδικα αυτής της παραγράφου. Τα ορίσματα εισόδου του προγράμματος που θα δημιουργήσετε πρέπει να περιλαμβάνουν τουλάχιστον το αρχικό σημείο όπου υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης και της παραγώγου της, το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων, και την ανοχή E_f στην τιμή της συνάρτησης. (Επομένως, το πρόγραμμα θα διακόπτεται είτε όταν βρεθεί x_n με $|f(x_n)| \leq E_f$, είτε όταν ολοκληρωθεί το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων.) Είναι επιθυμητό, αλλά όχι απαραίτητο, να δίνονται ως ορίσματα και η συνάρτηση της οποίας ζητείται η ρίζα καθώς και η παράγωγός της. Επομένως, αν δεν γνωρίζετε πώς να δίνετε συναρτήσεις ως ορίσματα, μπορείτε για κάθε συνάρτηση της οποίας τη ρίζα θέλετε να υπολογίσετε να τροποποιείτε ανάλογα τον κώδικά σας. Το πρόγραμμα θα πρέπει να επιστρέφει ένα πίνακα όπως αυτούς των παραδειγμάτων αυτής της παραγράφου, με ακρίβεια τουλάχιστον 8 δεκαδικών ψηφίων για κάθε επανάληψη της μεθόδου, δεν είναι όμως απαραίτητο να παράγει κάποιο σχήμα.

41. **(Τέσσερις ρίζες)** Χρησιμοποιήστε την υλοποίηση της προηγούμενης άσκησης για να βρείτε και τις τέσσερις ρίζες του ακόλουθου πολυωνύμου:

$$f(x) = x^4 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$$

Πρέπει να εντοπίσετε 4 αρχικά σημεία x_0 τα οποία οδηγούν σε κάθε μία από τις ρίζες, εκτελώντας δοκιμαστικές εκτελέσεις του προγράμματος για διάφορα αρχικά σημεία. Σε κάθε περίπτωση, εκτελέστε 9 επαναλήψεις θέτοντας $E_f = 0$, και σχολιάστε την ταχύτητα σύγκλισης.

42. **(Κυρτή σύνθεση)** Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτές συναρτήσεις. Δείξτε ότι αν η g είναι αύξουσα, τότε και η σύνθεση $g \circ f$ είναι κυρτή.
43. **(Ιδιότητα Κυρτών Συναρτήσεων)** Να δείξετε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της κυρτότητας συνάρτησης, ότι αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτή, τότε είναι κυρτή και η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(ax + b)$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Μην υποθέσετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

7η Ομάδα Ασκήσεων

44. **(Απόδειξη Λήμματος 7.2)** Να αποδείξετε το Λήμμα 7.2. Μπορείτε να αποδείξετε το ζητούμενο υποθέτοντας, καταρχάς, ότι $P' = P \cup \{q\}$, όπου $q \notin P$, και κατόπιν γενικεύοντας.
45. **(Εμβαδόν τριγώνου)** Να επαναλάβετε τη μεθοδολογία του Παραδείγματος 7.4 προκειμένου να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, a]$ με ολοκλήρωμα $a^2/2$.
46. **(Ανισότητα Cauchy-Schwarz)** Να δείξετε ότι η ανισότητα Cauchy-Schwarz (Παράδειγμα 7.7) ισχύει με ισότητα αν για τις δύο συναρτήσεις f, g έχουμε ότι η μια είναι πολλαπλάσιο της άλλης στο διάστημα $[a, b]$. Είναι αναγκαία αυτή η συνθήκη ώστε να ισχύει η ισότητα;
47. **(Περίπου μηδενική συνάρτηση)** Να δείξετε ότι αν $\int_a^b g^2 = 0$, τότε για κάθε f ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ θα έχουμε $\int_a^b fg = 0$. Βεβαιωθείτε ότι αντιλαμβάνεστε την φυσική ερμηνεία αυτής της ιδιότητας.

8η Ομάδα Ασκήσεων

48. **(Ορισμένα Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα ορισμένα ολοκληρώματα:

(α') $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x) e^x dx.$

(β') $\int_{-1}^1 \log \left(\frac{x+10}{x+100} \right) dx.$

49. **(Ορισμένο Ολοκλήρωμα)** Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_{-1}^1 \frac{e^x - e^{-x}}{100 + \cos(x^2 \cos x)} dx.$

50. **(Όριο)** Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\int_1^h \sqrt{x}(2 + \cos x) dx}{h}.$$

51. **(Ορισμένα ολοκληρώματα I)**

(α') Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{88}}{(\cos x)^{88} + (\sin x)^{88}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{88}}{(\cos x)^{88} + (\sin x)^{88}} dx,$$

κάνοντας μια απλή αντικατάσταση της μεταβλητής ολοκλήρωσης. Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε τα άνω ολοκληρώματα.

(β') Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του προηγούμενου σκέλους (ακόμα και αν δεν το έχετε αποδείξει), να δείξετε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{88}}{(\cos x)^{88} + (\sin x)^{88}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

52. **(Αόριστα Ολοκληρώματα I)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

(α') $\int \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} dx.$ Δίνεται ότι $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$

(β') $\int (\arcsin x)^2 dx.$ Δοκιμάστε την αντικατάσταση $y = \arcsin x.$

(γ') $\int \frac{1}{x^2 - 7x + 10} dx.$

(δ') $\int \arctan x dx.$

53. **(Ορισμένα Ολοκληρώματα II)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

(α') $\int t^2 \cos t dt.$

(β') $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} t^2 \cos t dt.$

(γ') $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} t^2 \tan t dt.$ (Υπόδειξη: δεν μπορεί να υπολογιστεί παράγouσα για την ολοκληρωτέα συνάρτηση.)

54. **(Όρια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

(α') $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}.$

(β') $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\int_1^h \sqrt{x} \log x dx}{h^2}.$

$$(\gamma') \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

$$(\delta') \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

55. **(Όρια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια, εφόσον υπάρχουν:

$$(\alpha') \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} \cos x \right) \right)}{x^2}.$$

$$(\beta') \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + x)^{\frac{1}{x^3}}.$$

9η Ομάδα Ασκήσεων

56. **(Φράγματα)**

(α') Να δείξετε ότι

$$\int_1^{10} \sqrt{x} e^{-x} dx \leq 9e^{-1}.$$

(Υπόδειξη: υπολογίστε το μέγιστο της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$).

(β') Να δείξετε ότι το ακόλουθο καταχρηστικό ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο. ΔΕΝ χρειάζεται να υπολογίσετε την ακριβή του τιμή.

$$\int_1^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx.$$

57. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα)**

(α') Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx.$$

(Υπόδειξη: ποια είναι η παράγωγος της $\tan x$;))

(β') Να προσδιορίσετε της τιμή του καταχρηστικού ολοκληρώματος

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos^2 x}.$$

58. **(Καταχρηστικά Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα καταχρηστικά ολοκληρώματα, ή να δείξετε ότι δεν υπάρχουν:

$$(\alpha') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 1}.$$

$$(\beta') \int_1^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^p} dx.$$

Η πραγματική σταθερά $p > 1$.

59. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα)**

(α') Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{x+5}{\sqrt{9-x^2}} dx$. Δοκιμάστε ολοκλήρωση με αντικατάσταση χρησιμοποιώντας μια τριγωνομετρική συνάρτηση.

(β') Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^3 \frac{x+5}{\sqrt{9-x^2}} dx.$$

60. **Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα**

(α') Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \left(\frac{x}{e^x} - \frac{\log x}{x} \right) dx$. (Υπόδειξη: μπορείτε να σπάσετε το ολοκλήρωμα σε δύο μέρη και να τα υπολογίσετε χωριστά.)

(β') Να υπολογίσετε την τιμή του καταχρηστικού ολοκληρώματος $\int_0^\infty \left(\frac{x}{e^x} - \frac{\log x}{x} \right) dx$, ή να αποδείξετε ότι το καταχρηστικό ολοκλήρωμα δεν ορίζεται.

61. **(Ολοκληρώματα)**

(α') Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x \log x \, dx$ και κατόπιν να επαληθεύσετε ότι βρήκατε το σωστό αποτέλεσμα παραγωγίζοντας.

(β') Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x \log^2 x \, dx$ και κατόπιν να επαληθεύσετε ότι βρήκατε το σωστό αποτέλεσμα παραγωγίζοντας.

(γ') Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα $\int_0^\infty x \log x \, dx$

62. **(Καταχρηστικά Ολοκληρώματα ΙΙΙ)** Για κάθε ένα από τα παρακάτω ολοκληρώματα, να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό που θα υπολογίσετε, ή ότι τείνει στο $\pm\infty$, ή ότι δεν συμβαίνει τίποτα από τα δύο.

$$\int_0^\infty e^{x^2} \, dx, \quad \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} \, dx, \quad \int_0^\infty \left(\cos^2 x - \frac{1}{2} \right) \, dx.$$

63. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα Ρητής Συνάρτησης)** Να υπολογίσετε το ακόλουθο καταχρηστικό ολοκλήρωμα:

$$\int_0^2 \frac{2x-7}{x^2-7x+10} \, dx.$$

Εξηγήστε γιατί το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό.

10η Ομάδα Ασκήσεων

64. **(Διαφορική Εξίσωση)** Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'(x) + (\log x)y(x) = e^{-x \log x}(x+4).$$

65. **(Διαφορική εξίσωση)** Να βρείτε τη γενική λύση της ακόλουθης διαφορικής εξίσωσης:

$$xy'(x) = 3y(x) + x^5 \cos(2x) - x^4 + x^3,$$

όπου $x > 0$.

66. **(Διαφορικές Εξισώσεις)** Να υπολογίσετε τις γενικές λύσεις των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων.

$$(α') \quad y'(x) + (\cos^2 x)y(x) = (\cos 2x)e^{-\frac{x}{2}}$$

$$(β') \quad y(x) \left(\sqrt{y^2(x) + 2} \right) y'(x) = e^x.$$

67. **(Διαφορική Εξίσωση)** Δίνεται η διαφορική εξίσωση (ΔΕ)

$$y'(x)(\cos x)^2 y(x) \sqrt{1 - y^2(x)} = 1,$$

όπου $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(α') Να βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ, στη μορφή μιας μη διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιούν όλες οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την άνω διαφορική εξίσωση σε διαστήματα που ανήκουν στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, και μόνο αυτές.

(β') Να βρείτε την λύση της ΔΕ που διέρχεται από το σημείο $(0, \frac{1}{2})$.

(γ') Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του προηγούμενου σκέλους;

68. **(Διαφορική Εξίσωση I)** Να προσδιορίσετε τη γενική λύση της ακόλουθης διαφορικής εξίσωσης, όπου $x > 0$ και $y(x) \neq 0$:

$$2y'(x)y(x) \sin(y^2(x)) = x \log x.$$

69. **(Διαφορική Εξίσωση III)** Να υπολογίσετε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$(\tan x)y'(x) + y(x) = \sin^2 x$$

στο διάστημα $(0, \pi/2)$. Ακολουθώντας, να βρείτε τις τιμές που μπορεί να λάβει το όριο των ειδικών λύσεων καθώς $x \rightarrow 0^+$.

70. **(Κορωνοϊός)** Έστω πως η διάδοση του κορωνοϊού σε μια χώρα περιγράφεται με την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$y'(x) = y^2(x)(1 - y(x)),$$

όπου x ο χρόνος και $y(x) \in [0, 1]$ είναι το ποσοστό του πληθυσμού που έχει μολυνθεί.

(α') Βρείτε συντελεστές A, B, C , για τους οποίους, για κάθε x , ισχύει

$$\frac{1}{x^2(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x}.$$

(β') Βρείτε μια εξίσωση για τη γενική λύση της άνω ΔΕ. Δεν χρειάζεται να λύσετε την εξίσωση που θα βρείτε ως προς τη γενική λύση. Αναφέρετε τις παραδοχές που κάνατε.

(γ') Υπάρχουν λύσεις της άνω ΔΕ που δεν περιλαμβάνονται στην άνω γενική λύση, λόγω των παραδοχών που έχετε κάνει;

71. **(Διαφορική Εξίσωση VI)**

(α') Να βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) + (\cos x)y(x) = e^{-\sin x} \log x,$$

στο διάστημα $x > 0$.

(β') Ποιο είναι το όριο των ειδικών λύσεων της άνω ΔΕ καθώς $x \rightarrow \infty$;

11η Ομάδα Ασκήσεων

72. **(Πολύωνυμα Taylor)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα πολύωνυμα Taylor:

(α') Για τη συνάρτηση $f(x) = e^{e^x}$ περί το 0, και με $n = 3$.

(β') Για τη συνάρτηση $f(x) = e^{\cos x}$ περί το 0, και με $n = 3$.

(γ') Για τη συνάρτηση $f(x) = x^5 - x^2 + x$ περί το 0, και με $n = 3$.

(δ') Για τη συνάρτηση $f(x) = x^5 - x^2 + x$ περί το 1, και με $n = 3$.

Σχεδιάστε, αν θέλετε με χρήση υπολογιστή, και στις 4 περιπτώσεις, τόσο την αρχική συνάρτηση, όσο και το ζητούμενο πολύωνυμο Taylor.

73. **(Υπολογισμός $\sin x$)** Στην άσκηση αυτή πρέπει να δημιουργήσετε ένα πρόγραμμα (σε γλώσσα προγραμματισμού της προτίμησής σας) το οποίο θα υπολογίζει τιμές της συνάρτησης $f(x) = \sin x$ για οποιοδήποτε $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. (Η τιμή του ημιτόνου σε άλλα σημεία μπορεί να υπολογιστεί από αυτά με χρήση της περιοδικότητας του ημιτόνου.) Το πρόγραμμα πρέπει να δέχεται ως είσοδο πρώτον μια τιμή x στο άνω διάστημα και δεύτερον ένα μέγιστο επιτρεπτό σφάλμα E , και κατόπιν να υπολογίζει το $\sin x$ μέσω του πολωνύμου Taylor $P_n(x)$ του ημιτόνου γύρω από το $x_0 = 0$, προσθέτοντας τόσους όρους στο πολώνυμο ώστε εγγυημένα το σφάλμα, δηλαδή η απόλυτη τιμή $|R_n(x)|$ του υπολοίπου $R_n(x)$, να είναι μικρότερο του E . Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον ακόλουθο τύπο που δίνει ένα άνω φράγμα στην τιμή του σφάλματος:

$$|R_n| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (1)$$

Το πρόγραμμα πρέπει να παρέχει ως έξοδο την τιμή για το $\sin x$ που υπολόγισε, το άνω φράγμα για το σφάλμα και τα ακόλουθα, ως γραφικές παραστάσεις της τάξης n του πολωνύμου Taylor:

- (α') Την τιμή του πολωνύμου $P(x)$ στη θέση x .
- (β') Το υπόλοιπο $R_n(x)$ (θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε τη ρουτίνα που παρέχει η ίδια η γλώσσα προγραμματισμού για το ημίτονο).
- (γ') Το άνω φράγμα στο σφάλμα που δίνει ο τύπος (1).

Εξηγήστε γιατί ισχύει ο τύπος (1). Κατόπιν, τρέξτε το πρόγραμμά σας για την τιμή $x = 1$ και $E = 10^{-6}$ και τυπώστε την έξοδο του προγράμματος.

74. **(Υπολογισμός $\exp x$)** Επαναλάβετε την Άσκηση 73 αλλά για την συνάρτηση $f(x) = \exp x$ με $x \in (-\infty, 0)$, $x_0 = 0$, και σε δύο σημεία: το $x = -1$ και το $x = -40$. Εξηγήστε γιατί ισχύει ο τύπος (1) και σε αυτή την περίπτωση. Τι παρατηρείτε;

12η Ομάδα Ασκήσεων

75. **(Σειρές)** Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν:

- (α') $\sum (n^3 + 7n + \cos n) e^{-n}$.
- (β') $\sum (3^n + (-2)^n)/(4^n)$.

76. **(Σειρές)**

- (α') Να αποδείξετε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει χρησιμοποιώντας το κριτήριο του ολοκληρώματος.
- (β') Να προσδιορίσετε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$ συγκλίνει ή αποκλίνει.
- (γ') Να προσδιορίσετε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20n+5}{n^{3n}}$ συγκλίνει ή αποκλίνει.

77. **(Σειρές)** Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή όχι:

- (α') $\sum \frac{\cos(1/n)}{\cos(1/n) + 1}$.
- (β') $\sum \frac{\sin^2(\frac{1}{n})}{\sin^2(\frac{1}{n}) + \cos^2(\frac{1}{n})}$.

78. **(Σειρές)** Να αποφανθείτε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν, και αν συγκλίνουν να υπολογίσετε την πραγματική τους τιμή.

- (α') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(8 + \log(n+1))}$. (Υπόδειξη: μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το Κριτήριο του Ολοκληρώματος.)

$$(\beta') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}. \text{ (Υπόδειξη: υπολογίστε τα πρώτα 3-4 μερικά αθροίσματα.)}$$

79. **(Σειρές)** Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή όχι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log n}{1+2\log n}\right)^n.$$

Υπόδειξη: πρέπει δηλαδή να προσδιορίσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια ακολουθιών, χωρίς να προσδιορίσετε την τιμή τους.

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^K \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right), \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^K \left(\frac{\log n}{1+2\log n}\right)^n.$$

80. **(Σειρές)** Να προσδιορίσετε αν αποκλίνουν ή συγκλίνουν οι ακόλουθες σειρές:

$$(\alpha') \sum \frac{\cos(1/n)}{\cos(1/n) + 1}.$$

$$(\beta') \sum \frac{n^2 \log n + n \cos n}{n^{4-1/n}}.$$

$$(\gamma') \sum \frac{1}{n^5 - n^3 + 2}.$$

$$(\delta') \sum \exp\left(-\frac{1+n^2 \log n}{n}\right).$$

$$(\epsilon') \sum \sin(e^{-n}).$$

$$(\zeta') \sum \frac{(n+1)e^{5n+1}}{n!}.$$

$$(\eta') \sum \frac{e^n + \log n}{(n^2 + 2)e^n + 10}.$$

81. **(Μέθοδος Euler)** Υλοποιήστε τη Μέθοδο του Euler σε γλώσσα προγραμματισμού της επιλογής σας. Η ρουτίνα που θα δημιουργήσετε θα λύνει αριθμητικά διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

υλοποιώντας τον ψευδοκώδικα της Παραγράφου 10.5 ή ισοδύναμο, πάντως με τα ίδια ορίσματα εισόδου. Κατ' εξαίρεση η συνάρτηση f μπορεί να δίνεται είτε ως όρισμα στη ρουτίνα (προτιμότερο), είτε να υλοποιείται εντός της ρουτίνας (αν δεν ξέρετε πως να περνάτε συναρτήσεις ως ορίσματα άλλων συναρτήσεων). Η έξοδος πρέπει να δίνεται με ακρίβεια τουλάχιστον 4 δεκαδικών ψηφίων, και πρέπει να περιλαμβάνει ένα πίνακα με τρεις στήλες, μια στήλη για την επανάληψη i , μια στήλη για την τιμή του $x(i)$ στο οποίο υπολόγισε η ρουτίνα προσεγγιστικά την τιμή της συνάρτησης για εκείνη την επανάληψη, και τέλος μια στήλη για την προσεγγιστική τιμή $y(i)$.

82. **(Εφαρμογή μεθόδου Euler)** Χρησιμοποιήστε την ρουτίνα της προηγούμενης άσκησης για να υπολογίσετε αριθμητικά τη λύση της ΔΕ

$$y' = y(1 - y),$$

με αρχικές συνθήκες $x_0 = 0$, $y_0 = 0.5$. Εκτελέστε 10 επαναλήψεις με βήμα $\Delta x = 0.5$, και άλλες 10 επαναλήψεις με βήμα $\Delta x = -0.5$.