

Κεφάλαιο 12

Διανύσματα

12.1 $\mathbb{R}^n$

Ορισμός 12.1. (Διανύσματα)

1. Ορίζουμε ως $\mathbb{R}^n$ το σύνολο των διατεταγμένων n -άδων

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ καλούνται διανύσματα. Τα x_i καλούνται συνιστώσες, στοιχεία, ή συντεταγμένες του $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

2. Ορίζουμε την ισότητα διανυσμάτων ως ισότητα κατά στοιχείο:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n.$$

3. Ορίζουμε την πρόσθεση διανυσμάτων ως:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \triangleq (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

4. Ορίζουμε το αντίθετο ενός διανύσματος ως:

$$-(x_1, x_2, \dots, x_n) \triangleq (-x_1, -x_2, \dots, -x_n).$$

5. Ορίζουμε την αφαίρεση διανυσμάτων ως:

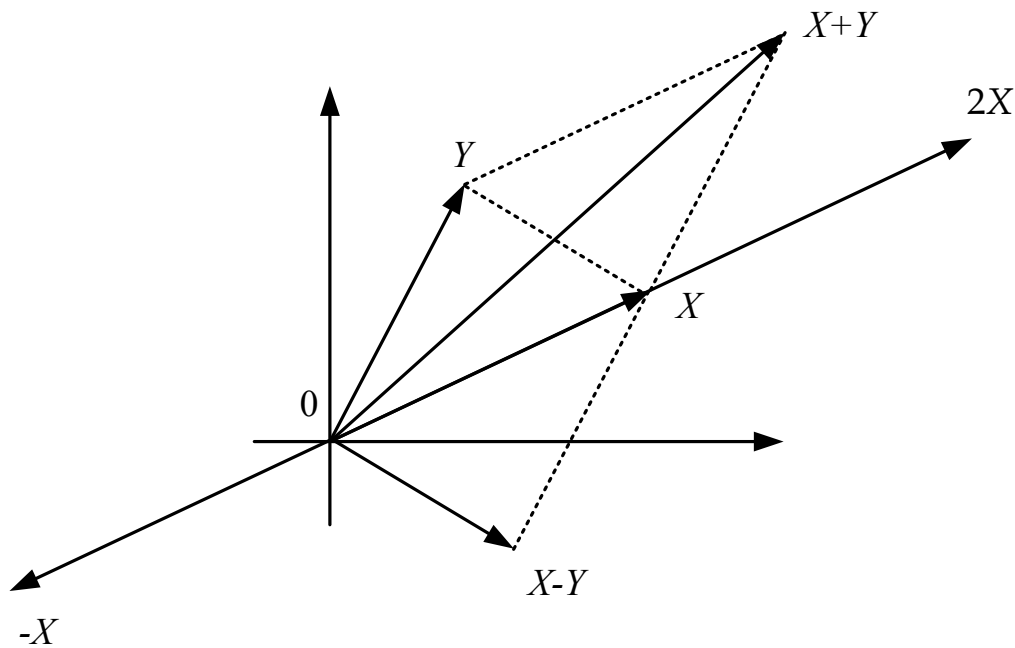
$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_n) - (y_1, y_2, \dots, y_n) &\triangleq (x_1, x_2, \dots, x_n) + [-(y_1, y_2, \dots, y_n)] \\ &= (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n). \end{aligned}$$

6. Ορίζουμε την πολλαπλασιασμό διανύσματος με πραγματικό c ως:

$$c(x_1, x_2, \dots, x_n) \triangleq (cx_1, cx_2, \dots, cx_n).$$

7. Ορίζουμε το μηδενικό διάνυσμα ως:

$$0 \triangleq (0, 0, \dots, 0).$$



Σχήμα 12.1: Γεωμετρική απεικόνιση πράξεων μεταξύ διανυσμάτων.

8. Δύο μη μηδενικά διανύσματα καλούνται παράλληλα αν

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

για κάποιο $\lambda \neq 0$. Αν $\lambda > 0$, τα διανύσματα καλούνται ομόρροπα. Αν $\lambda < 0$, τότε τα διανύσματα λέγονται αντίρροπα.

Παρατηρήσεις

1. Σχετικά με τους συμβολισμούς, παρατηρούμε τα εξής:

(α') Θα συμβολίζουμε συνήθως τα διανύσματα με κεφαλαίους λατινικούς χαρακτήρες. Για παράδειγμα:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad \dots$$

(β') Αν δεν διευκρινίζουμε τι συμβολίζει ακριβώς το 0 (δηλαδή το μηδενικό διάνυσμα ή το μηδέν), αυτό θα μπορεί να γίνει κατανοητό από τα συμφραζόμενα.

2. Σχετικά με την τιμή του n , παρατηρούμε τα εξής:

(α') Τα διανύσματα του $\mathbb{R}^1$ αντιστοιχούν 1 – 1 στα σημεία που βρίσκονται επί μιας ευθείας.

(β') Τα διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ αντιστοιχούν 1 – 1 στα σημεία επί ενός επιπέδου (εφόσον έχουμε ορίσει ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.)

(γ') Τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ αντιστοιχούν 1 – 1 στα σημεία του χώρου (εφόσον έχουμε ορίσει ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.)

(δ') Η γενική περίπτωση του αυθαίρετου n είναι πολύ χρήσιμη για πολλές εφαρμογές. Το n μπορεί να είναι:

- i. Ο αριθμός κάποιων μετρήσεων.
- ii. Ο αριθμός των παραμέτρων προς τις οποίες θέλουμε να κάνουμε κάποια βελτιστοποίηση.
- iii. Ο αριθμός των pixels σε μια εικόνα.
- iv. Ο αριθμός των στοιχείων σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα.
- v. Ο αριθμός των ζεύξεων σε ένα δίκτυο επικοινωνιών.
- vi. κ.τ.λ.

(ε') Πολλές από τις ιδιότητες των διανυσμάτων στο επίπεδο ($n = 2$) και στο χώρο ($n = 3$) προκύπτουν από ιδιότητες που μπορούμε να δείξουμε μια και καλή για αυθαίρετο n .

3. Για $n = 1, 2, 3$, η γεωμετρική ερμηνεία των εννοιών του Ορισμού 12.1 είναι:

- (α') Το διάνυσμα X αντιστοιχεί σε ένα σημείο του χώρου.
- (β') Το 0 αντιστοιχεί στην αρχή των αξόνων.
- (γ') Το διάνυσμα $X + Y$ αντιστοιχεί στην τέταρτη κορυφή του παραλληλογράμμου του οποίου οι άλλες κορυφές είναι τα X , Y , και 0.
- (δ') Το διάνυσμα $-X$ είναι το σημείο του χώρου που είναι συμμετρικό του X ως προς την αρχή των αξόνων.
- (ε') Τι εκφράζει το διάνυσμα cX ;
- (ε') Τι σημαίνει δύο διανύσματα να είναι παράλληλα;

Δείτε το Σχήμα 12.1. Οι άνω γεωμετρικές ερμηνείες είναι εξαιρετικά χρήσιμες και στη γενική περίπτωση για $n \neq 1, 2, 3$.

4. Παρά την τεράστια σημασία που έχει η ερμηνεία των διανυσμάτων ως σημεία στο χώρο, αυστηρώς τα έχουμε ορίσει ως διατεταγμένες n -άδες, και η θεωρία που θα αναπτύξουμε βασίζεται σε αυτό τον ορισμό, και όχι στη γεωμετρική μας διαίσθηση.

Θεώρημα 12.1. (Ιδιότητες διανυσμάτων) Έστω X, Y, Z αυθαίρετα διανύσματα και $a, b \in \mathbb{R}$. Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. (Αντιμεταθετική Ιδιότητα) $X + Y = Y + X$.
2. (Προσεταιριστική Ιδιότητα Πρόσθεσης Διανυσμάτων) $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$.
3. (Ουδέτερο Στοιχείο) $0 + X = X$.
4. (Αντίθετο Στοιχείο) Για κάθε X υπάρχει στοιχείο $Y = -X$ τέτοιο ώστε $X + Y = 0$.
5. (Επιμεριστική Ιδιότητα Πρόσθεσης Διανυσμάτων) $a(X + Y) = aX + aY$.
6. (Επιμεριστική Ιδιότητα Πρόσθεσης Πραγματικών) $(a + b)X = aX + bX$.
7. (Προσεταιριστική Ιδιότητα Πολλαπλασιασμού Πραγματικών) $a(bX) = (ab)X$.
8. (Ουδέτερο Στοιχείο Πολλαπλασιασμού) $1 \times X = X$.
9. (Η Παράλληλία είναι Μεταβατική) Αν τα X, Y είναι παράλληλα και τα Y, Z είναι παράλληλα, τότε είναι παράλληλα και τα X, Z .

Απόδειξη. Προφανής, και βασίζεται στη χρήση των αντίστοιχων ιδιοτήτων των πραγματικών. $\square$

Ορισμός 12.2. (Μήκος στον $\mathbb{R}^n$) Για κάθε διάνυσμα $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ στον $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε το μήκος ή νόρμα

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \triangleq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Παρατήρηση: Για $n \leq 3$ το μήκος του διανύσματος ταυτίζεται με την απόσταση του σημείου X από την αρχή των αξόνων. Το μήκος όμως είναι εξαιρετικά χρήσιμη έννοια και για $n > 3$.

Θεώρημα 12.2. (Ιδιότητες μήκους) Έστω $X, Y \in \mathbb{R}^n$ και $a \in \mathbb{R}$.

1. $\|X\| \geq 0$.
2. $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0$.
3. (Ιδιότητα Ομογένειας) $\|aX\| = |a|\|X\|$.

Απόδειξη. Προφανής. $\square$

Ορισμός 12.3. (Εσωτερικό γινόμενο) Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ως εξής:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Θεώρημα 12.3. (Βασικές ιδιότητες εσωτερικού γινομένου) Έστω $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$, και $a \in \mathbb{R}$. Το εσωτερικό γινόμενο έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. (Αντιμεταθετική) $X \cdot Y = Y \cdot X$.
2. (Προσεταιριστική) $(aX) \cdot Y = a(X \cdot Y)$.
3. (Επιμεριστική) $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$.
4. $\|X\| = \sqrt{X \cdot X} \Leftrightarrow \|X\|^2 = X \cdot X$.
5. $X \cdot X = 0 \Leftrightarrow X = 0$.

Απόδειξη. Προφανής. $\square$

Θεώρημα 12.4. (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

1. Για κάθε $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \|Y\| \Leftrightarrow \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}. \quad (12.1)$$

Η άνω ανισότητα εμφανίζεται με πολλές μορφές σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών, και είναι γνωστή ως Ανισότητα Cauchy-Schwarz.

2. Αν $X, Y \neq 0$ ισχύει ότι

$$X \cdot Y = \|X\| \|Y\| \Leftrightarrow X, Y \text{ ομόρροπα,}$$

3. Αν $X, Y \neq 0$ ισχύει ότι

$$X \cdot Y = -\|X\| \|Y\| \Leftrightarrow X, Y \text{ αντίρροπα,}$$

Απόδειξη. 1. Παρατηρούμε πως για οποιοδήποτε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \|X - \lambda Y\|^2 \geq 0 &\Leftrightarrow (X - \lambda Y) \cdot (X - \lambda Y) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow X \cdot X + \lambda^2 Y \cdot Y - 2\lambda X \cdot Y \geq 0 \Leftrightarrow \|Y\|^2 \lambda^2 + (-2X \cdot Y)\lambda + \|X\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Επειδή το άνω τριώνυμο δεν είναι ποτέ αρνητικό, δεν μπορεί η διακρίνουσα να είναι θετική. Άρα:

$$4(X \cdot Y)^2 - 4\|X\|^2 \leq 0 \Leftrightarrow |X \cdot Y| \leq \|X\| \|Y\|.$$

2. Έστω τώρα ότι τα $X, Y \neq 0$ είναι ομόρροπα, δηλαδή $X = \lambda Y$ για κάποιο $\lambda > 0$. Τότε:

$$X \cdot Y = X \cdot (\lambda Y) = \lambda(X \cdot X) = \lambda\|X\|^2 = \|X\| \|\lambda X\| = \|X\| \|Y\|.$$

Αντιστρόφως, έστω πως $X \cdot Y = \|X\| \|Y\|$. Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} \|X - \frac{\|X\|}{\|Y\|} Y\|^2 &= X \cdot X + \frac{\|X\|^2}{\|Y\|^2} Y \cdot Y - 2 \frac{\|X\|}{\|Y\|} X \cdot Y \\ &= \|X\|^2 + \|X\|^2 - 2\|X\|^2 = 0 \Rightarrow X = \frac{\|X\|}{\|Y\|} Y, \end{aligned}$$

δηλαδή τα X, Y είναι ομόρροπα, αφού $\frac{\|X\|}{\|Y\|} > 0$.

3. Έστω τώρα ότι τα X, Y είναι αντίρροπα, δηλαδή $X = \lambda Y$ για κάποιο $\lambda < 0$. Τότε:

$$X \cdot Y = X \cdot (\lambda Y) = \lambda(X \cdot X) = \lambda\|X\|^2 = -\|X\| \|\lambda X\| = -\|X\| \|Y\|.$$

Αντιστρόφως, έστω πως $X \cdot Y = -\|X\| \|Y\|$. Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} \|X + \frac{\|X\|}{\|Y\|} Y\|^2 &= X \cdot X + \frac{\|X\|^2}{\|Y\|^2} Y \cdot Y + 2 \frac{\|X\|}{\|Y\|} X \cdot Y \\ &= \|X\|^2 + \|X\|^2 - 2\|X\|^2 = 0 \Rightarrow X = -\frac{\|X\|}{\|Y\|} Y, \end{aligned}$$

δηλαδή τα X, Y είναι αντίρροπα.

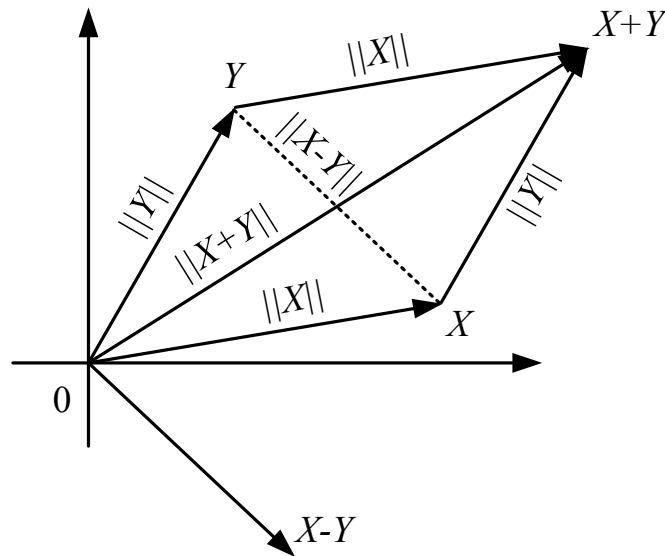
□

Θεώρημα 12.5. (Τριγωνική ανισότητα και νόμος του παραλληλογράμμου)

1.

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|. \quad (12.2)$$

(Η άνω είναι γνωστή ως τριγωνική ανισότητα, καθώς εκφράζει το γεγονός ότι το άθροισμα $\|X\| + \|Y\|$ των μηκών των δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μήκους $\|X + Y\|$ της τρίτης. Δείτε το Σχήμα 12.2. Και αυτή η ανισότητα εμφανίζεται σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών υπό διάφορες μορφές.)



Σχήμα 12.2: Σύμφωνα με την τριγωνομετρική ανισότητα, το άθροισμα $\|X\| + \|Y\|$ των μηκών των δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μήκους $\|X + Y\|$ της άλλης πλευράς. Σύμφωνα με τον νόμο του παραλληλογράμμου, το άθροισμα $\|X + Y\|^2 + \|X - Y\|^2$ των τετραγώνων των μηκών των δύο διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ισούται με το άθροισμα $2(\|X\|^2 + \|Y\|^2)$ των τετραγώνων των μηκών των τεσσάρων πλευρών του.

2. Όταν $X, Y \neq 0$, η τριγωνική ανισότητα ισχύει με ισότητα αν τα X, Y είναι ομόρροπα.

3.

$$\|X + Y\|^2 + \|X - Y\|^2 = 2(\|X\|^2 + \|Y\|^2). \quad (12.3)$$

(Η άνω ισότητα είναι γνωστή ως νόμος του παραλληλογράμμου, καθώς εκφράζει το γεγονός ότι το άθροισμα $2(\|X\|^2 + \|Y\|^2)$ των τετραγώνων των μηκών των τεσσάρων πλευρών ενός παραλληλογράμμου ισούται με το άθροισμα $\|X+Y\|^2 + \|X-Y\|^2$ των τετραγώνων των μηκών των διαγωνίων. Δείτε το Σχήμα 12.2. Και αυτή εμφανίζεται σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών υπό διάφορες μορφές.)

Απόδειξη. 1. Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} \|X + Y\|^2 &= (X + Y) \cdot (X + Y) = X \cdot X + Y \cdot Y + 2X \cdot Y \\ &= \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2X \cdot Y \leq \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2\|X\|\|Y\| \\ &= (\|X\| + \|Y\|)^2. \end{aligned}$$

Η ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

2. Έστω πως τα $X, Y \neq 0$ είναι ομόρροπα, δηλαδή υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $Y = \lambda X$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \|X + Y\| &= \|X + \lambda X\| = |1 + \lambda|\|X\| \\ &= \|X\| + \lambda\|X\| = \|X\| + \|\lambda X\| = \|X\| + \|Y\|. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε γνωστές ιδιότητες του μήκους. Επιπλέον, στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lambda > 0$.

Έστω τώρα πως ισχύει η τριγωνική ανισότητα με ισότητα. Παρατηρώντας την απόδειξη της ανισότητας, βλέπουμε πως αυτό συνεπάγεται ότι $X \cdot Y = \|X\|\|Y\|$, δηλαδή, από το Θεώρημα 12.4, ότι τα X, Y είναι ομόρροπα.

3. Παρατηρήστε πως:

$$\begin{aligned} & \|X + Y\|^2 + \|X - Y\|^2 \\ &= (X + Y) \cdot (X + Y) + (X - Y) \cdot (X - Y) \\ &= X \cdot X + Y \cdot Y + 2X \cdot Y + X \cdot X + Y \cdot Y - 2X \cdot Y \\ &= 2X \cdot X + 2Y \cdot Y = 2\|X\|^2 + 2\|Y\|^2. \end{aligned}$$

□

Ορισμός 12.4. (Μοναδιαία και βασικά διανύσματα)

1. Ένα διάνυσμα P με μοναδιαίο μήκος $\|P\| = 1$ καλείται μοναδιαίο.
2. Οποιοδήποτε άθροισμα της μορφής $V = \sum_{i=1}^n x_i V_i$ όπου V_i αυθαίρετα n -διάστατα διανύσματα και $x_i \in \mathbb{R}$, καλείται γραμμικός συνδυασμός των x_i .
3. Ορίζουμε τα βασικά διανύσματα

$$\begin{aligned} E_1 &= (1, 0, \dots, 0), \\ E_2 &= (0, 1, \dots, 0), \\ &\dots \\ E_i &= (0, 0, \dots, 1, \dots, 0), \quad (\text{Το μη μηδενικό στοιχείο είναι στη θέση } i.) \\ &\dots \\ E_n &= (0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

Κάθε διάνυσμα $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των E_i ως εξής:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i E_i.$$

4. Αν $A \in \mathbb{R}^n$, $A \neq 0$, ορίζω ως το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του A το

$$\hat{A} = \frac{A}{\|A\|}.$$

Παρατήρηση: Παρατηρήστε ότι

$$\|X + Y\|^2 = (X + Y) \cdot (X + Y) = X \cdot X + Y \cdot Y + 2X \cdot Y = \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2(X \cdot Y).$$

Έστω $n = 2$ ή $n = 3$, $X, Y \neq 0$, και $\theta \in [0, \pi]$ η γωνία ανάμεσα στα διανύσματα. Από την άνω εξίσωση, προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$X \cdot Y = 0 \Leftrightarrow \|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \quad (12.4)$$

$$X \cdot Y > 0 \Leftrightarrow \|X + Y\|^2 > \|X\|^2 + \|Y\|^2 \Leftrightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad (12.5)$$

$$X \cdot Y < 0 \Leftrightarrow \|X + Y\|^2 < \|X\|^2 + \|Y\|^2 \Leftrightarrow \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \quad (12.6)$$

Παρατηρήστε ότι η εξίσωση $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2$ είναι το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Χρησιμοποιώντας την (12.4), δικαιολογούμαστε να κάνουμε τον ακόλουθο ορισμό, που ισχύει για κάθε n .

Ορισμός 12.5. (Ορθογωνιότητα στον $\mathbb{R}^n$) Δύο διανύσματα $X, Y \in \mathbb{R}^n$ καλούνται κάθετα ή ορθογώνια μεταξύ τους αν $X \cdot Y = 0$.

Παρατηρήσεις

1. Ο άνω ορισμός ισχύει ακόμα και αν $X = 0$ ή $Y = 0$. Βέβαια σε αυτές τις περιπτώσεις δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμος.
2. Ο άνω ορισμός ισχύει ακόμα και για $n \neq 2, 3$!
3. Ερώτηση: μπορεί ένα διάνυσμα να είναι κάθετο με τον εαυτό του, σύμφωνα με τον άνω ορισμό;

Θεώρημα 12.6. (Ανάλυση διανύσματος σε συνιστώσες) Έστω δύο διανύσματα $A \neq 0$ και $B \neq 0$. Μπορώ να αναλύσω το A σε δύο συνιστώσες:

$$A_{\parallel} = \left[\frac{A \cdot B}{\|B\|^2} \right] B, \quad A_{\perp} = A - A_{\parallel}.$$

Η πρώτη είναι παράλληλη στο B (εκτός αν είναι μηδενική, που συμβαίνει όταν τα A, B είναι κάθετα, δηλαδή $A \cdot B = 0$), και η δεύτερη είναι κάθετη στο B (και ενδεχομένως μηδενική). Δείτε το Σχήμα 12.3.

Απόδειξη. Κατ' αρχήν παρατηρήστε πως το $\left[\frac{A \cdot B}{\|B\|^2} \right] \in \mathbb{R}$. Προφανώς το άθροισμα των $A_{\parallel}, A_{\perp}$ μας κάνει το A , και επιπλέον το $A_{\parallel}$ είναι παράλληλο στο B (εκτός αν είναι μηδενικό). Για να δείξουμε ότι το $A_{\perp}$ είναι κάθετο στο B , απλώς παρατηρούμε πως:

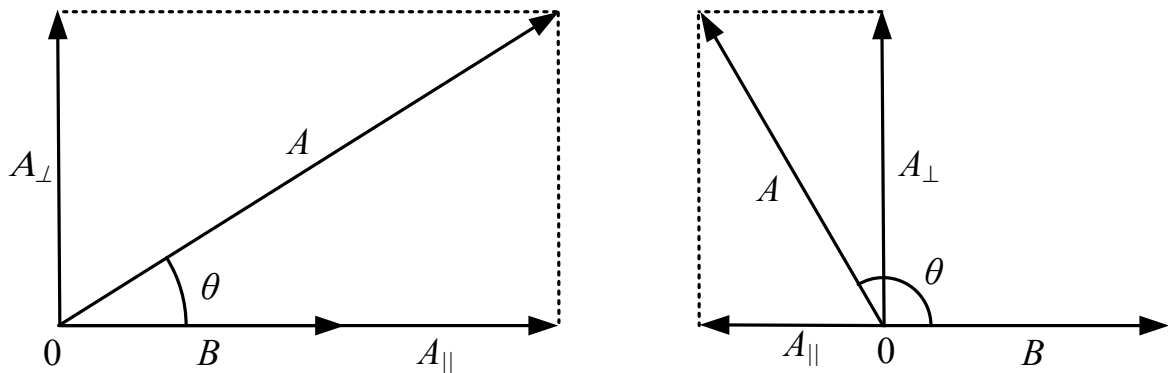
$$A_{\perp} \cdot B = (A - A_{\parallel}) \cdot B = A \cdot B - \frac{A \cdot B}{\|B\|^2} B \cdot B = A \cdot B - \frac{A \cdot B}{\|B\|^2} \|B\|^2 = 0.$$

□

Παρατήρηση: Για $n = 2$ και $n = 3$, για τη γωνία θ ανάμεσα στα A, B , έχουμε ότι:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \theta = \frac{\|A_{\parallel}\|}{\|A\|} = \frac{\frac{|A \cdot B| \|B\|}{\|B\|^2}}{\|A\|} = \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|},$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \Rightarrow \cos \theta = -\frac{\|A_{\parallel}\|}{\|A\|} = -\frac{\frac{|A \cdot B| \|B\|}{\|B\|^2}}{\|A\|} = \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|}.$$



Σχήμα 12.3: Ανάλυση ενός διανύσματος A σε μια παράλληλη και μια κάθετη συνιστώσα στο B .

Στην τελευταία ισότητα της πρώτης γραμμής χρησιμοποιήσαμε τις (12.4), (12.5), και στην τελευταία ισότητα της δεύτερης γραμμής χρησιμοποιήσαμε τις (12.4), (12.6). Άρα, σε κάθε περίπτωση,

$$\cos \theta = \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|}.$$

Παρατηρήστε ότι, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, η ποσότητα στα δεξιά έχει τιμή πάντοτε μέσα στο $[-1, 1]$. Άρα, μπορούμε να γενικεύσουμε την έννοια της γωνίας σε οποιαδήποτε διάσταση n ως εξής:

Ορισμός 12.6. (Γωνία μεταξύ διανυσμάτων) Έστω $A, B \in \mathbb{R}^n$ διάφορα του μηδενικού διανύσματος. Ορίζω τη γωνία ανάμεσά τους ως

$$\theta \triangleq \arccos \left(\frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|} \right),$$

από την οποία συνεπάγεται πως

$$\cos \theta = \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|}, \quad A \cdot B = \|A\| \|B\| \cos \theta.$$

Παρατήρηση: Από τον ορισμό του τόξου συνημιτόνου,

$$\arccos x \in [0, \pi] \quad \forall x \in [-1, 1],$$

άρα όπως ορίστηκε, η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων είναι πάντα θετική.

12.2 $\mathbb{R}^2$

Ορισμός 12.7. (Ευθεία)

1. Καλούμε ευθεία κάθε σύνολο σημείων της μορφής

$$L = \{(x, y) : (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(x_1, y_1), \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(x_0, y_0) + \lambda(x_1, y_1), \lambda \in \mathbb{R}\},$$

για κάποια (x_0, y_0) και $(x_1, y_1) \neq 0$.

2. Η διανυσματική εξίσωση

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(x_1, y_1) \Leftrightarrow \{x = x_0 + \lambda x_1, \quad y = y_0 + \lambda y_1\}$$

καλείται παραμετρική εξίσωση ευθείας, με παράμετρο λ .

3. Η ευθεία καλείται παράλληλη (κάθετη) σε κάθε (x_2, y_2) που είναι παράλληλο (κάθετο) στο (x_1, y_1) .

Παρατηρήσεις

1. Δείτε το Σχήμα 12.4 για μια γεωμετρική ερμηνεία της παραμετρικής εξίσωσης της ευθείας.
2. Προφανώς, μια ευθεία μπορεί να γραφεί με την άνω μορφή για πολλά διαφορετικά (x_0, y_0) και (x_1, y_1) . Μπορεί ναδειχθεί ότι όλα τα επιτρεπτά (x_1, y_1) είναι παράλληλα μεταξύ τους.

Ορισμός 12.8. (Παράλληλες ευθείες) Έστω οι ευθείες

$$L_a = \{(x_{a0}, y_{a0}) + \lambda(x_{a1}, y_{a1}), \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad (12.7)$$

$$L_b = \{(x_{b0}, y_{b0}) + \lambda(x_{b1}, y_{b1}), \lambda \in \mathbb{R}\}. \quad (12.8)$$

Αν οι ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, καλούνται παράλληλες, και τότε μπορούμε να δείξουμε ότι τα (x_{a1}, y_{a1}) και (x_{b1}, y_{b1}) είναι παράλληλα. Αντιστρόφως, αν τα (x_{a1}, y_{a1}) και (x_{b1}, y_{b1}) είναι παράλληλα τότε οι L_a και L_b είτε ταυτίζονται είτε είναι παράλληλες. Μπορεί επίσης ναδειχτεί ότι δύο ευθείες είτε ταυτίζονται, είτε είναι παράλληλες, είτε έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

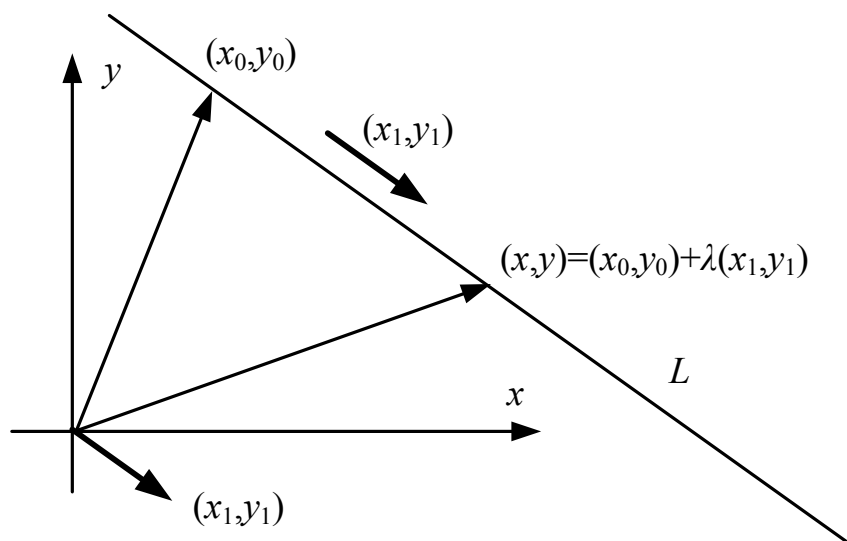
Ορισμός 12.9. (Κάθετες ευθείες) Δύο ευθείες καλούνται κάθετες αν μπορούν να γραφούν στη μορφή των εξισώσεων (12.7) και (12.8) με τα (x_{a1}, y_{a1}) , (x_{b1}, y_{b1}) κάθετα μεταξύ τους. Μπορεί ναδειχθεί ότι αν οι L_a, L_b είναι κάθετες και δίνονται από τις εξισώσεις (12.7) και (12.8), τότε τα (x_{a1}, y_{a1}) , (x_{b1}, y_{b1}) είναι αναγκαστικά κάθετα μεταξύ τους.

Θεώρημα 12.7. (Εξισώσεις ευθείας)

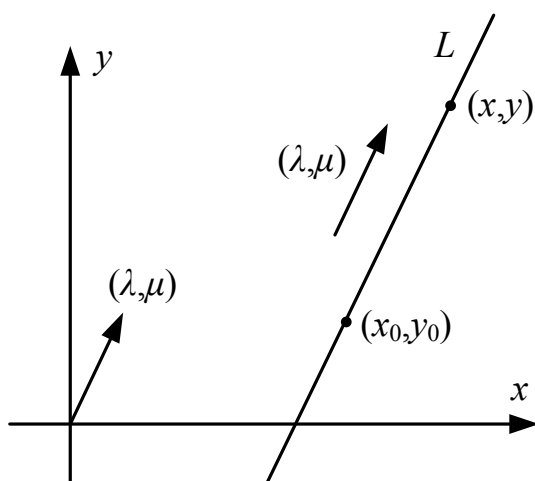
1. (Γενική εξίσωση ευθείας) Όλες οι ευθείες μπορούν να περιγραφούν από εξίσωση της μορφής

$$ax + by = c, \quad (12.9)$$

όπου $a \neq 0$ ή $b \neq 0$. Δηλαδή ένα σημείο $(x, y) \in L$ αν ικανοποιεί την (12.9) για κάποια a, b, c που αντιστοιχούν στην L .



Σχήμα 12.4: Γεωμετρική ερμηνεία της παραμετρικής εξίσωσης ευθείας.



Σχήμα 12.5: Ευθεία L διερχόμενη από σημείο (x_0, y_0) και παράλληλη σε διάνυσμα (λ, μ) .

(α') Αν $a = 0$, η άνω εξίσωση γίνεται $y = \frac{c}{b}$.

(β') Αν $a \neq 0$, η άνω εξίσωση γίνεται $x = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}y$.

(γ') Αν $b = 0$, η άνω εξίσωση γίνεται $x = \frac{c}{a}$.

(δ') Αν $b \neq 0$, η άνω εξίσωση γίνεται $y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$.

Τα a, b, c προφανώς δεν είναι μοναδικά για κάθε ευθεία L .

2. Η ευθεία L διερχόμενη από ένα σημείο (x_0, y_0) και παράλληλη σε διάνυσμα (λ, μ) μπορεί να περιγραφεί με την εξίσωση

$$\mu(x - x_0) - \lambda(y - y_0) = 0. \quad (12.10)$$

(Παρατηρήστε πως αν, για παράδειγμα, $\lambda \neq 0$ και $x \neq x_0$, η άνω εξίσωση γίνεται:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\mu}{\lambda}.$$

Δείτε το Σχήμα 12.5.)

3. Η ευθεία L διερχόμενη από το σημείο (x_0, y_0) και κάθετη στο διάνυσμα $(A, B) \neq 0$ μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση

$$Ax + By = Ax_0 + By_0. \quad (12.11)$$

(Παρατηρήστε πως αν το $(x, y) \in L$, τότε το $(x - x_0, y - y_0)$ είναι κάθετο στο (A, B) , δηλαδή

$$(x - x_0, y - y_0) \cdot (A, B) = 0 \Rightarrow Ax + By = Ax_0 + By_0.$$

Δείτε το Σχήμα 12.6.)

4. Η ευθεία L διερχόμενη από τα σημεία (x_0, y_0) και (x_1, y_1) μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση

$$(y - y_0)(x_1 - x_0) = (x - x_0)(y_1 - y_0). \quad (12.12)$$

(Παρατηρήστε ότι η εξίσωση είναι γραμμική, δηλαδή της μορφής της (12.9), και ικανοποιείται και στα δύο σημεία $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$. Δείτε το Σχήμα 12.7.)

5. Η ευθεία εφαπτόμενη στη παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ στο σημείο (x_0, y_0) μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση:

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

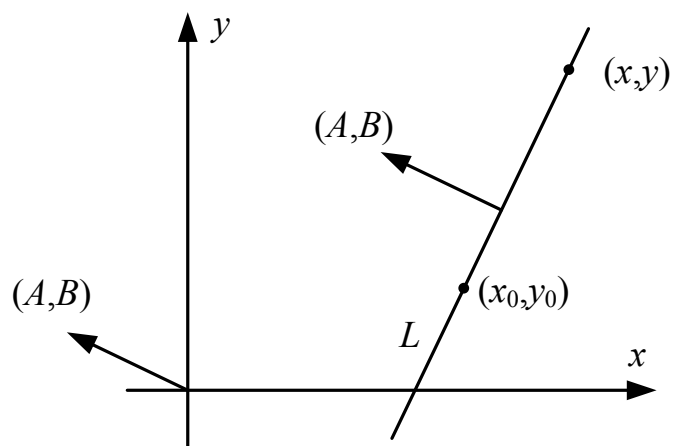
Απόδειξη. Παραλείπεται. □

Παράδειγμα 12.1. Έστω οι ευθείες

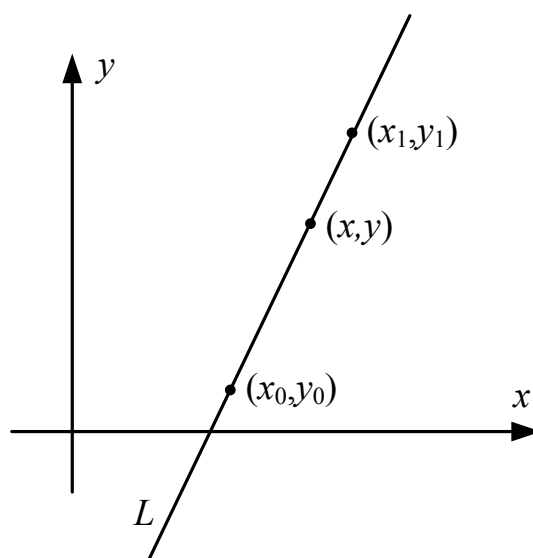
1. $x = 1$.

2. $x + 2y = 3$.

3. $2x - 5y = 0$.



Σχήμα 12.6: Ευθεία L διερχόμενη από σημείο (x_0, y_0) και κάθετη σε διάνυσμα (A, B) .



Σχήμα 12.7: Ευθεία L διερχόμενη από δύο σημεία (x_0, y_0) , (x_1, y_1) .

Παρατηρήστε ότι έχουν δοθεί στη μορφή $ax + by = c$. Θα δώσουμε περιγραφές τους στις μορφές (12.10), (12.11), (12.12), προσδιορίζοντας σε κάθε περίπτωση τα σχετικά διανύσματα. Έχουμε, κατά περίπτωση:

1.

$$x = 1 \Leftrightarrow 1(x - 1) - 0(y - k) = 0$$

Άρα, η ευθεία είναι παράλληλη στο $(0, 1)$, και διέρχεται από το $(1, k)$ για οποιοδήποτε k .

Επίσης,

$$x = 1 \Leftrightarrow 1x + 0y = 1 \times 1 + 0 \times k,$$

άρα η ευθεία είναι κάθετη στο $(1, 0)$, και διέρχεται από το $(1, k)$ για οποιοδήποτε k .

Τέλος,

$$x = 1 \Leftrightarrow (y - k)(1 - 1) = (x - 1) \times (l - k),$$

όπου $k, l \in \mathbb{R}$, και $k \neq l$. Άρα, μπορεί να περιγραφεί ως η ευθεία διέρχεται από τα σημεία $(1, k)$, $(1, l)$, για οποιαδήποτε k, l διάφορα μεταξύ τους.

2.

$$x + 2y = 3 \Leftrightarrow 1(x - 1) + 2(y - 1) = 0.$$

Άρα, η ευθεία είναι παράλληλη στο $(-2, 1)$, και διέρχεται από το $(1, 1)$.

Επίσης,

$$x + 2y = 3 \Leftrightarrow x + 2y = 1 \times 1 + 2 \times 1,$$

άρα η ευθεία είναι κάθετη στο $(1, 2)$, και διέρχεται από το $(1, 1)$.

Τέλος,

$$x + 2y = 3 \Leftrightarrow (y - 1)(3 - 1) = (x - 1)(0 - 1).$$

Άρα, η ευθεία μπορεί να περιγραφεί ως η ευθεία διέρχεται από τα σημεία $(1, 1)$, $(3, 0)$. (Αντί να προσπαθήσουμε απευθείας να φέρουμε την εξίσωση στη δεύτερη μορφή, θα μπορούσαμε απλώς να βρούμε δύο σημεία που ανήκουν σε αυτή, και να τα αντικαταστήσουμε στη γενική μορφή (12.12).)

3.

$$2x - 5y = 0 \Leftrightarrow 2(x - 0) - 5(y - 0) = 0.$$

Άρα, η ευθεία είναι παράλληλη στο $(5, 2)$, και διέρχεται από το $(0, 0)$.

Επίσης,

$$2x - 5y = 0 \Leftrightarrow 2x - 5y = 2 \times 0 - 5 \times 0.$$

άρα η ευθεία είναι κάθετη στο $(2, -5)$, και διέρχεται από το $(0, 0)$.

Τέλος,

$$2x - 5y = 0 \Leftrightarrow (y - 0)(10 - 0) = (x - 0)(4 - 0).$$

Άρα, η ευθεία μπορεί να περιγραφεί ως η ευθεία διέρχεται από τα σημεία $(0, 0)$, $(10, 4)$.

Παρατηρήστε ότι καμία από της άνω περιγραφές δεν είναι μοναδική.

Παράδειγμα 12.2. Θα απαντήσουμε τις ακόλουθες ερωτήσεις:

1. Ποιο είναι το σημείο τομής των ευθειών $x - 2y + 3 = 0$, $x + y - 3 = 0$;

2. Ποιο είναι το σημείο τομής των ευθειών $x - 2y + 5 = 0$, $-2x + 4y + 6 = 0$;
3. Ποιο είναι το σημείο τομής των ευθειών $x - 2y + 5 = 0$, $-2x + 4y - 10 = 0$;
4. Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στις ευθείες $5x + 2y = 1$ και $2x - 5y = 3$;
5. Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στις ευθείες $7x - 2y = 1$ και $-14x + 4y = k$, όπου k παράμετρος;
Έχουμε, για κάθε μια περίπτωση:
1. Το σημείο τομής πρέπει να ικανοποιεί ταυτόχρονα και τις δύο εξισώσεις. Λύνοντας λοιπόν το σύστημα 2×2 , προκύπτει τελικά πως το σημείο τομής είναι το $x = 1$, $y = 2$.
2. Το σημείο τομής πρέπει να ικανοποιεί ταυτόχρονα και τις δύο εξισώσεις. Το συγκεκριμένο σύστημα, όμως, δεν έχει λύση. Πράγματι, αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση με 2 και την προσθέσουμε στη δεύτερη, προκύπτει άτοπο. Ο λόγος είναι ότι οι δύο ευθείες που αντιστοιχούν σε αυτές τις εξισώσεις είναι παράλληλες.
3. Το σημείο τομής πρέπει να ικανοποιεί ταυτόχρονα και τις δύο εξισώσεις. Το συγκεκριμένο σύστημα, όμως, έχει άπειρες λύσεις. Πράγματι, η μία εξίσωση είναι πολλαπλάσιο της άλλης. Σε αυτή την περίπτωση, οι δύο περιγραφές που έχουμε αφορούν την ίδια ευθεία.
4. Παρατηρήστε ότι η πρώτη ευθεία έχει κάθετο διάνυσμα το $(5, 2)$ και η δεύτερη το $(2, -5)$. Επειδή το εσωτερικό γινόμενο $(5, 2) \cdot (2, -5) = 0$, προκύπτει τελικά ότι οι ευθείες είναι κάθετες.
5. Παρατηρήστε ότι και οι δύο ευθείες είναι κάθετες στο $(7, -2)$. Άρα, είτε είναι παράλληλες (αν $k \neq 1$), είτε ταυτίζονται (αν $k = 1$).

Ορισμός 12.10. (Ημιεπίπεδο) Ορίζουμε ως ημιεπίπεδο κάθε σύνολο της μορφής

$$C = \{(x, y) : (A, B)(x, y) = Ax + By \geq c\},$$

για κάποιο διάνυσμα $(A, B) \neq 0$ και κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Παρατηρήσεις

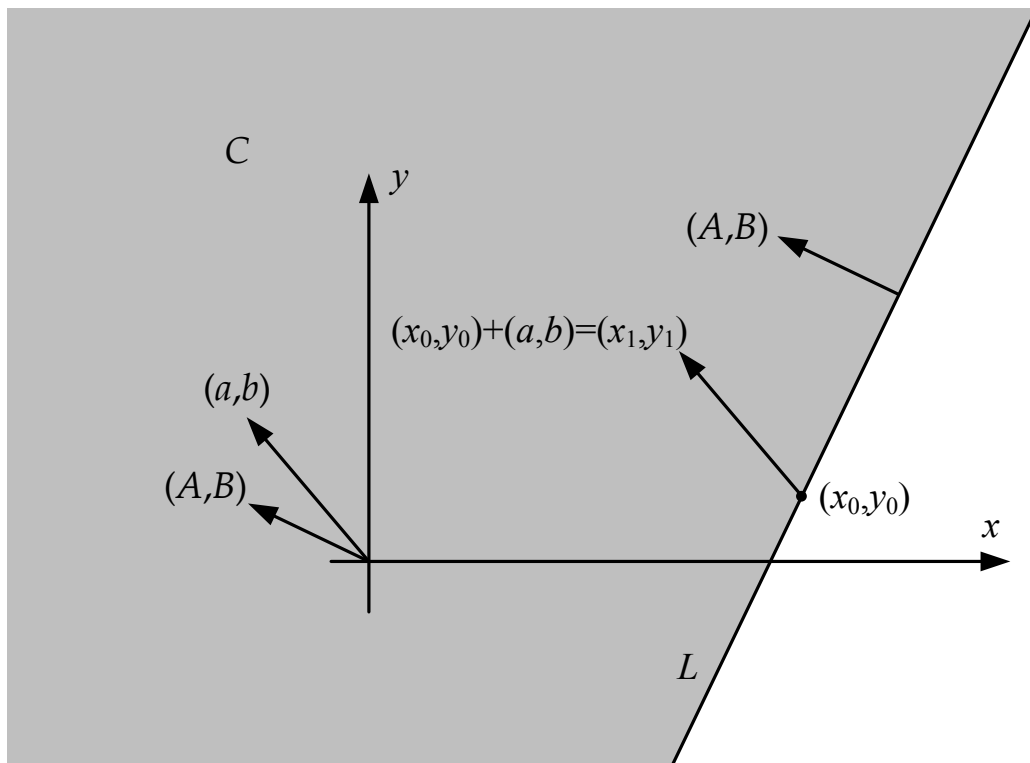
1. Το ημιεπίπεδο $C = \{(x, y) : (A, B)(x, y) = Ax + By \geq c\}$ είναι το σύνολο των σημείων που βρίσκεται είτε επί της ευθείας L με εξίσωση $Ax + By = c$, είτε στη μεριά της ευθείας προς την οποία δείχνει το κάθετο σε αυτή διάνυσμα (A, B) .

Πράγματι, έστω ένα σημείο $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, και έστω $(x_1, y_1) = (x_0, y_0) + (a, b)$ όπου $(x_0, y_0) \in L$, δηλαδή $Ax_0 + By_0 = c$. Τότε

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \in C &\Leftrightarrow A(x_0 + a) + B(y_0 + b) \geq c \Leftrightarrow (Ax_0 + By_0) + (A, B) \cdot (a, b) \geq c \\ &\Leftrightarrow (A, B) \cdot (a, b) \geq 0 \Leftrightarrow \|(A, B)\| \|(a, b)\| \cos \theta \geq 0 \Leftrightarrow \cos \theta \geq 0 \Leftrightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{aligned}$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζουν τα (a, b) , (A, B) . Αφού $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, το (a, b) δείχνει προς την ίδια μεριά με το (A, B) , ή το πολύ είναι κάθετο σε αυτό.

2. Για να προσδιορίσουμε τη θέση ενός ημιεπιπέδου $Ax + By \geq c$, μπορούμε να προσδιορίσουμε την ευθεία $Ax + By = c$, και κατόπιν να βρούμε από ποια μεριά της ικανοποιείται η ανισότητα, εξετάζοντας ένα σημείο εκτός της ευθείας.



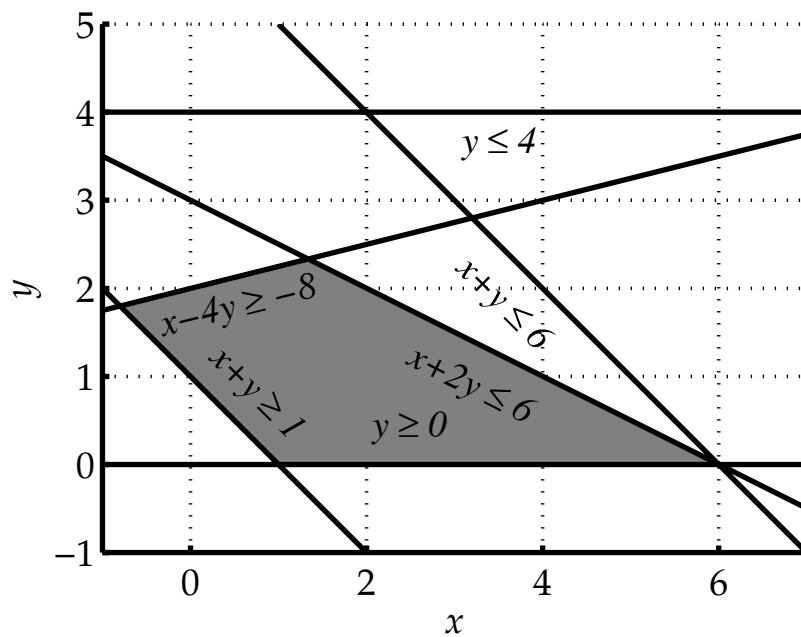
Σχήμα 12.8: Ημιεπίπεδο C με σύνορο ευθεία κάθετη σε διάνυσμα (A, B) και διερχόμενη από σημείο (x_0, y_0) .

Παράδειγμα 12.3. (Περίττες ανισότητες) Έστω το υποσύνολο

$$S = \{(x, y) : y \geq 0, x + y \geq 1, x + y \leq 6, y \leq 4, x - 4y \geq -8, x + 2y \leq 6\}$$

του $\mathbb{R}^2$ που περιγράφεται μέσω 6 ανισώσεων, δηλαδή ισοδύναμα ως τομή 6 ημιεπιπέδων. Πόσες από τις άνω ανισότητες μπορούν να αφαιρεθούν από την άνω περιγραφή χωρίς να αλλάξει το σύνολο;

Στο Σχήμα 12.9 εμφανίζεται σκιασμένο το σύνολο S , καθώς και κάθε ένα από τα 6 ημιεπίπεδα. Όπως φαίνεται από το σχήμα, τα ημιεπίπεδα που περιγράφονται μέσω των ανισώσεων $x + y \leq 6$, $y \leq 4$, μπορούν να αφαιρεθούν από την περιγραφή του S , χωρίς το S να αλλάξει.



Σχήμα 12.9: Το σύνολο S του Παραδείγματος 12.3.

12.3 $\mathbb{R}^3$

Ορισμός 12.11. (Επίπεδο)

1. Ορίζουμε ως επίπεδο κάθε σύνολο σημείων

$$P = \{(x, y, z) : (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda_1(x_1, y_1, z_1) + \lambda_2(x_2, y_2, z_2), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}, \quad (12.13)$$

όπου το διάνυσμα $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, και τα διανύσματα $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ είναι μη μηδενικά, και όχι παράλληλα.

2. Η διανυσματική εξίσωση

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda_1(x_1, y_1, z_1) + \lambda_2(x_2, y_2, z_2)$$

καλείται παραμετρική εξίσωση επιπέδου, με παραμέτρους $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

3. Ένα διάνυσμα V λέγεται παράλληλο στο P αν υπάρχουν λ_1, λ_2 ώστε

$$V = \lambda_1(x_1, y_1, z_1) + \lambda_2(x_2, y_2, z_2).$$

4. Ένα διάνυσμα V λέγεται κάθετο στο P αν το V είναι κάθετο σε όλα τα διανύσματα της μορφής $\lambda_1(x_1, y_1, z_1) + \lambda_2(x_2, y_2, z_2)$.

Παρατηρήσεις

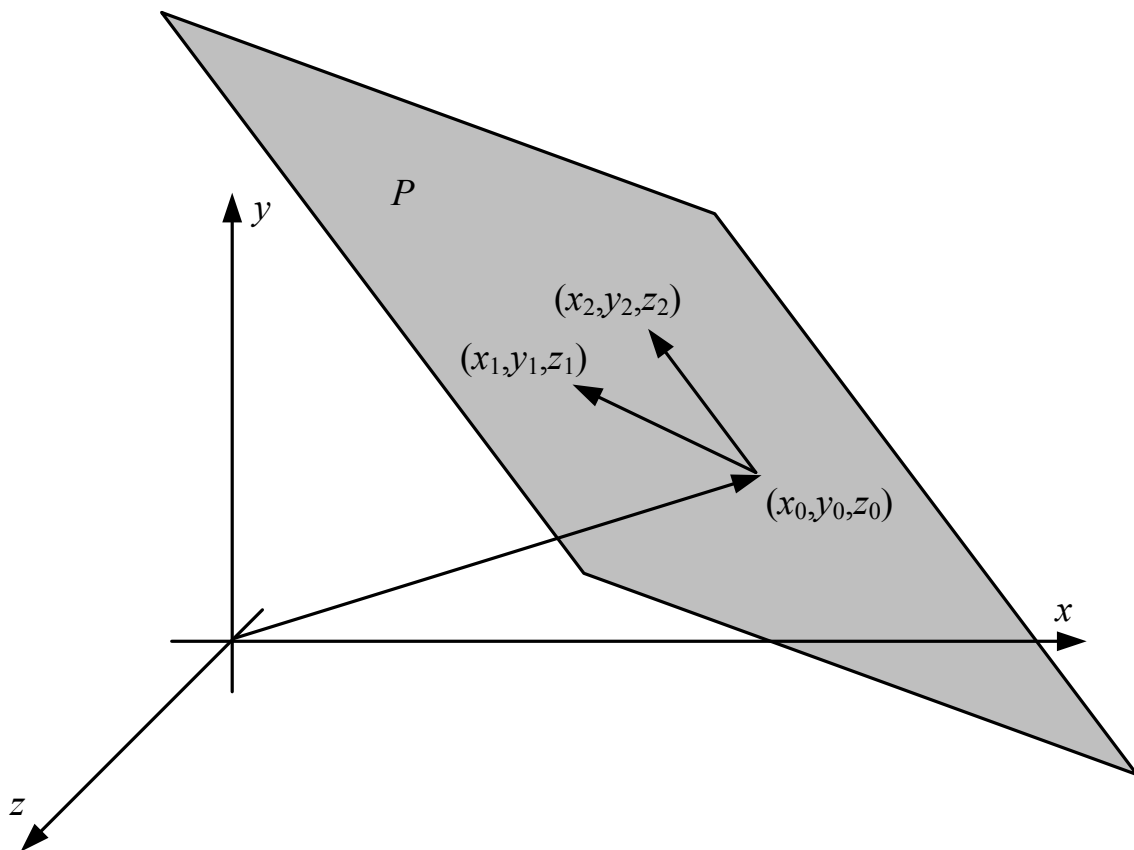
1. Στην περιγραφή (12.13) το σημείο (x_0, y_0, z_0) ανήκει στο επίπεδο, και τα διανύσματα $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ είναι παράλληλα σε αυτό. Δείτε το Σχήμα 12.10.

2. $P = \text{«plane»}$.
3. Γιατί τα (x_1, y_1, z_1) και (x_2, y_2, z_2) πρέπει να είναι μη μηδενικά και όχι παράλληλα;
4. Τι γίνεται αν $(x_0, y_0, z_0) = 0$;

Θεώρημα 12.8. (Τομές επιπέδου) Δύο επίπεδα είτε ταυτίζονται, είτε τέμνονται κατά μήκος μιας ευθείας, είτε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, οπότε και λέγονται παράλληλα.

Απόδειξη. Παραλείπεται.

□



Σχήμα 12.10: Ορισμός ενός επιπέδου P στον $\mathbb{R}^3$ βάσει ενός διανύσματος (x_0, y_0, z_0) που ανήκει σε αυτό και δύο διανυσμάτων (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) παράλληλων σε αυτό.

Θεώρημα 12.9. (Εξισώσεις επιπέδου)

1. (Γενική εξίσωση επιπέδου) Κάθε επίπεδο P μπορεί να περιγραφεί από μια εξίσωση της μορφής

$$ax + by + cz = d, \quad (12.14)$$

όπου τα a, b, c δεν είναι όλα μηδέν.

2. Το επίπεδο που περιγράφεται από την (12.13), δηλαδή το επίπεδο στο οποίο ανήκει το (x_0, y_0, z_0) και στο οποίο είναι παράλληλα τα (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , περιγράφεται από την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (12.15)$$

ή, ισοδύναμα,

$$(x - x_0)(y_1 z_2 - y_2 z_1) - (y - y_0)(x_1 z_2 - x_2 z_1) + (z - z_0)(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0.$$

(Παρατηρήστε πως το (x, y, z) ανήκει στο επίπεδο αν το $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , δηλαδή

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda_1(x_1, y_1, z_1) + \lambda_2(x_2, y_2, z_2),$$

για κάποια $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, το οποίο ισχύει αν η άνω ορίζουσα είναι 0. Δείτε το Σχήμα 12.10.)

3. Το επίπεδο που διέρχεται από τα μη συνευθειακά σημεία

$$(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2),$$

μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0, \quad (12.16)$$

ή ισοδύναμα

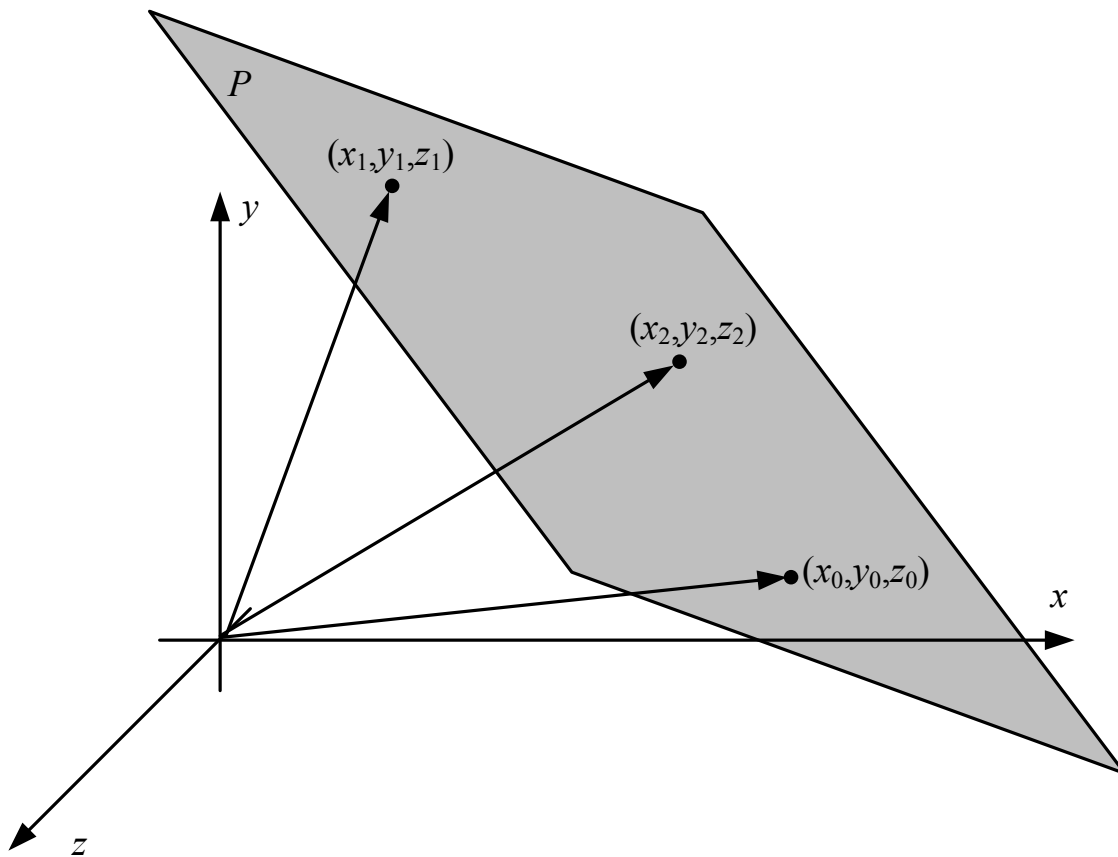
$$\begin{aligned} (x - x_0) [(y_1 - y_0)(z_2 - z_0) - (y_2 - y_0)(z_1 - z_0)] \\ - (y - y_0) [(x_1 - x_0)(z_2 - z_0) - (x_2 - x_0)(z_1 - z_0)] \\ + (z - z_0) [(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)] = 0. \end{aligned}$$

(Παρατηρήστε ότι η εξίσωση μπορεί να έρθει στη μορφή (12.14), και επιπλέον ικανοποιείται και για τα τρία σημεία. Δείτε το Σχήμα 12.11.)

4. Το επίπεδο που διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0, z_0) και είναι κάθετο στο (μη μηδενικό) διάνυσμα (A, B, C) μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση

$$\begin{aligned} (A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow Ax + By + Cz &= Ax_0 + By_0 + Cz_0. \end{aligned} \quad (12.17)$$

(Παρατηρήστε πως αν το (x, y, z) ανήκει στο επίπεδο, το $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ είναι κάθετο στο (A, B, C) , δηλαδή $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (A, B, C) = 0$.) Δείτε το Σχήμα 12.12.)



Σχήμα 12.11: Ορισμός ενός επιπέδου P στον $\mathbb{R}^3$ βάσει τριών διανυσμάτων (x_0, y_0, z_0) , (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) που ανήκουν σε αυτό.

Παράδειγμα 12.4. Έστω το επίπεδο που διέρχεται από τα σημεία $x_0 = (1, 0, 0)$, $x_1 = (0, 1, 0)$, $x_2 = (0, 0, 1)$. Θα δώσουμε για το επίπεδο αυτό περιγραφές στις μορφές (12.14), (12.15), (12.16), (12.17) του Θεωρήματος 12.9.

Καταρχήν, αφού μας δίνονται τρία σημεία του επιπέδου, η περιγραφή της μορφής (12.16) είναι η

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

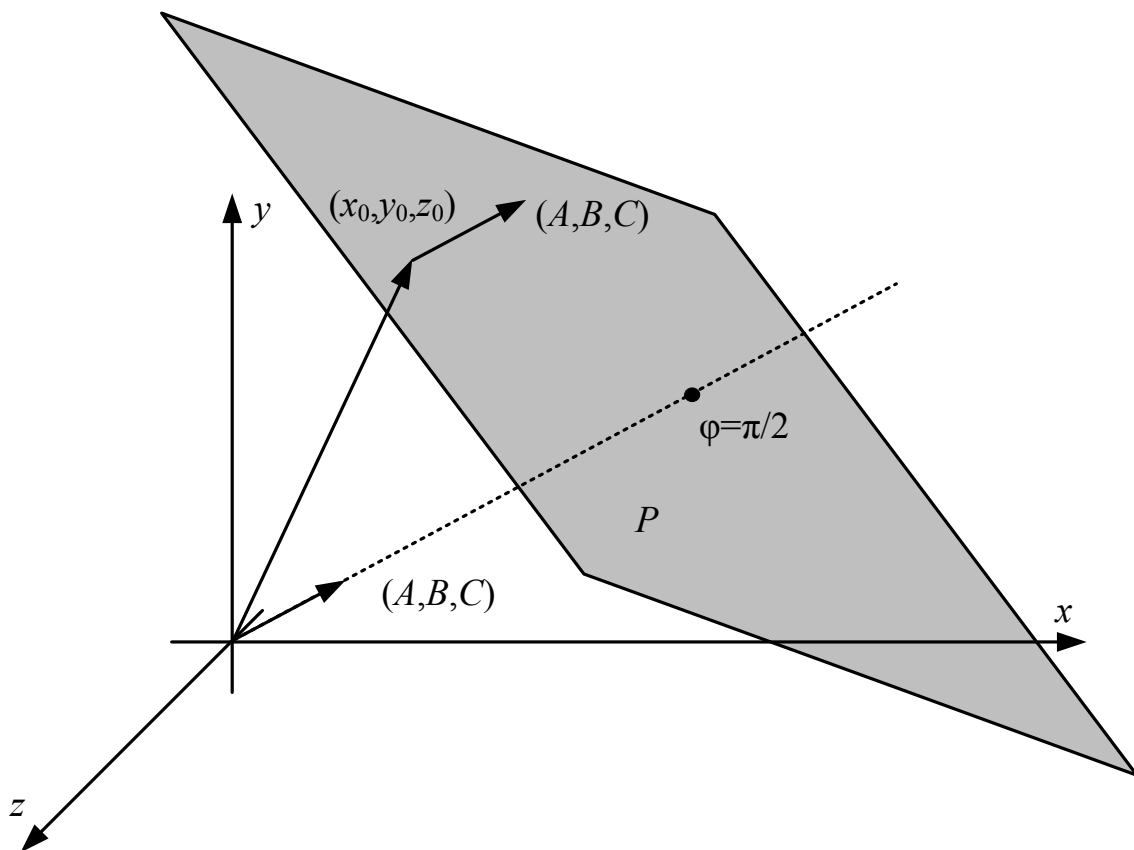
ή ισοδύναμα, εκτελώντας τις πράξεις στην ορίζουσα, στη μορφή της (12.14),

$$x + y + z = 1.$$

Παρατηρούμε πως το επίπεδο είναι παράλληλο στα $x_1 - x_0 = (-1, 1, 0)$ και $x_2 - x_0 = (-1, 0, 1)$. Άρα το επίπεδο έχει την ακόλουθη περιγραφή της μορφής (12.15):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Η περιγραφή ταυτίζεται με την περιγραφή της μορφής της μορφής (12.16) που έχουμε ήδη βρει.



Σχήμα 12.12: Ορισμός ενός επιπέδου P στον $\mathbb{R}^3$ βάσει ενός διανύσματος (x_0, y_0, z_0) που ανήκει σε αυτό και ενός διανύσματος (A, B, C) κάθετου σε αυτό.

Τέλος, παρατηρούμε πως η

$$\begin{aligned} x + y + z = 1 &\Leftrightarrow 1 \times (x - 1) + 1 \times (y - 0) + 1 \times (z - 0) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \times x + 1 \times y + 1 \times z = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times 0, \end{aligned}$$

που είναι της μορφής (12.17). Άρα, το επίπεδο διέρχεται από το $(1, 0, 0)$ και είναι κάθετο στο $(1, 1, 1)$. (Παρατηρήστε πως το $(1, 1, 1)$ είναι κάθετο και στα δύο διανύσματα $(-1, 1, 0)$ και $(-1, 0, 1)$ που ξέρουμε πως είναι παράλληλα στο επίπεδο.)

Παράδειγμα 12.5. Θα υπολογίσουμε την γωνία ανάμεσα στα επίπεδα $7x + 6y + 2 = 7$ και $3x - 2y + 4 = 2$.

Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, τα δύο επίπεδα είναι κάθετα στα δύο διανύσματα $(7, 6, 2)$, $(3, -2, 4)$, αντίστοιχα. Άρα, η γωνία που θα σχηματίζουν τα δύο επίπεδα θα είναι ίση με θ , όπου

$$\begin{aligned} (7, 6, 2) \cdot (3, -2, 4) &= \|(7, 6, 2)\| \|(3, -2, 4)\| \cos \theta \\ \Rightarrow \theta &= \arccos \frac{(7, 6, 2) \cdot (3, -2, 4)}{\|(7, 6, 2)\| \|(3, -2, 4)\|} \simeq 1.2296. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι δύο επίπεδα που τέμνονται σχηματίζουν μια οξεία και μια αμβλεία γωνία, με άθροισμα μεταξύ τους π . Η άνω μέθοδος μας έδωσε την οξεία, αν είχαμε επιλέξει τα διανύσματα $(7, 6, 2)$, $-(3, -2, 4) = (-3, 2, -4)$, θα είχαμε λάβει την αμβλεία.

Παράδειγμα 12.6. (Απόσταση ανάμεσα σε σημείο και επίπεδο) Θα υπολογίσουμε την απόσταση ανάμεσα στο σημείο (x_0, y_0, z_0) και το επίπεδο $Ax + By + Cz = D$. Θα βρούμε επίσης έκφραση για την προβολή του σημείου (x_0, y_0, z_0) στο επίπεδο, δηλαδή το σημείο (x_1, y_1, z_1) πάνω στο επίπεδο που απέχει ελάχιστα από το (x_0, y_0, z_0) .

Πράγματι, αν το (x_0, y_0, z_0) ανήκει στο επίπεδο, τότε η ζητούμενη απόσταση είναι 0, και το (x_0, y_0, z_0) είναι η προβολή του εαυτού του. Έστω τώρα πως δεν ανήκει στο επίπεδο. Παρατηρήστε πως το $(x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$ είναι κάθετο στο επίπεδο, άρα παράλληλο στο (A, B, C) , άρα υπάρχει μη μηδενικό λ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) - (x_0, y_0, z_0) &= \lambda(A, B, C) \\ \Rightarrow A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) &= \lambda(A^2 + B^2 + C^2) \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{D - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)}{A^2 + B^2 + C^2}. \end{aligned}$$

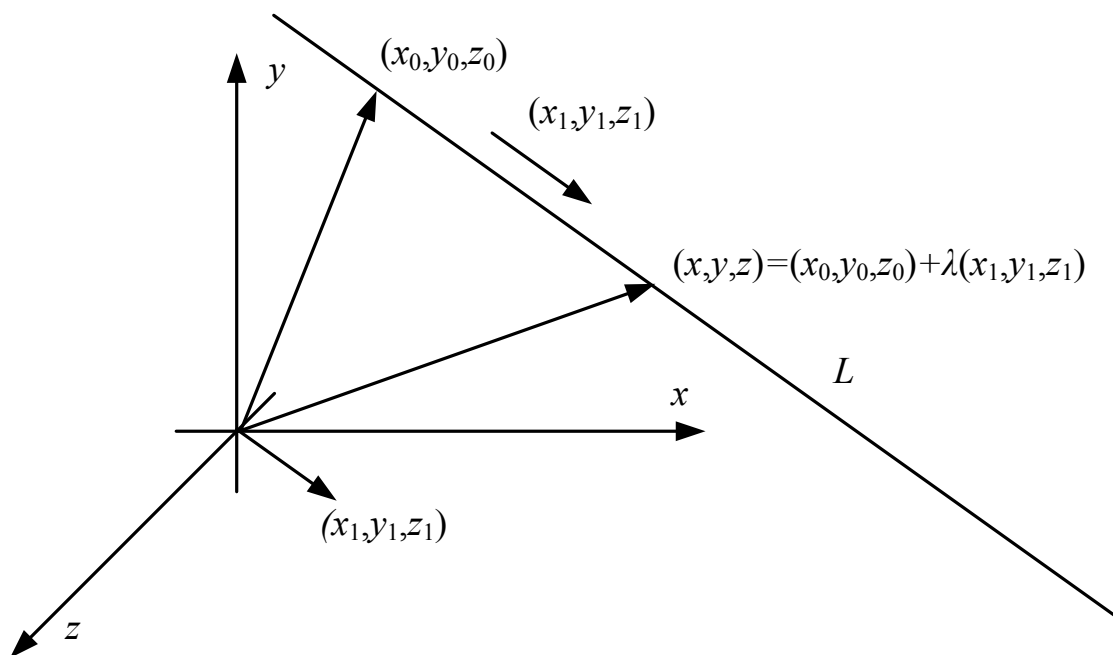
Η πρώτη συνεπαγωγή προέκυψε παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο με το (A, B, C) . Η δεύτερη προέκυψε παρατηρώντας πως το (x_1, y_1, z_1) ανήκει στο επίπεδο. Άρα τελικά το ζητούμενο σημείο είναι το

$$(x_1, y_1, z_1) = (x_0, y_0, z_0) + \frac{(A, B, C)}{\|(A, B, C)\|^2} (D - Ax_0 - By_0 - Cz_0),$$

ενώ η απόσταση είναι ίση με

$$\|(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)\| = \frac{|D - Ax_0 - By_0 - Cz_0|}{\|(A, B, C)\|}.$$

Παρατηρήστε ότι οι τύποι αυτοί ισχύουν και αν ανήκει το σημείο στο επίπεδο, συνεπώς είναι γενικοί.



Σχήμα 12.13: Γεωμετρική ερμηνεία της παραμετρικής εξίσωσης ευθείας στο χώρο

Ορισμός 12.12. (Ευθεία στο χώρο)

1. Ορίζουμε ως ευθεία στο $\mathbb{R}^3$ κάθε σύνολο της μορφής

$$L = \{(x, y, z) : (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(x_1, y_1, z_1), \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad (12.18)$$

όπου $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ και το (x_1, y_1, z_1) είναι μη μηδενικό.

2. Η διανυσματική εξίσωση

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(x_1, y_1, z_1)$$

$$\Leftrightarrow \{x = x_0 + \lambda x_1, \quad y = y_0 + \lambda y_1, \quad z = z_0 + \lambda z_1\}$$

καλείται παραμετρική εξίσωση ευθείας, με παράμετρο λ .

3. Η ευθεία καλείται παράλληλη (κάθετη) σε κάθε (x_2, y_2, z_2) που είναι παράλληλο (κάθετο) στο (x_1, y_1, z_1) .

Παρατηρήσεις

1. Προφανώς, μια ευθεία μπορεί να γραφεί με την άνω μορφή για πολλά διαφορετικά (x_0, y_0, z_0) και (x_1, y_1, z_1) . Μπορεί ναδειχθεί ότι όλα τα επιτρεπτά (x_1, y_1, z_1) είναι παράλληλα μεταξύ τους.
2. Η ευθεία που περιγράφεται από την (12.18) διέρχεται από το (x_0, y_0, z_0) και είναι παράλληλη στο (x_1, y_1, z_1) .

Ορισμός 12.13. (Παράλληλες ευθείες) Δύο ευθείες

$$\begin{aligned} L_a &= \{(x_{a0}, y_{a0}, z_{a0}) + \lambda(x_{a1}, y_{a1}, z_{a1}), \lambda \in \mathbb{R}\}, \\ L_b &= \{(x_{b0}, y_{b0}, z_{b0}) + \lambda(x_{b1}, y_{b1}, z_{b1}), \lambda \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

καλούνται παράλληλες αν είναι παράλληλα τα (x_{a1}, y_{a1}, z_{a1}) και (x_{b1}, y_{b1}, z_{b1}) .

Θεώρημα 12.10. (Εξισώσεις ευθείας)

1. Η ευθεία που δημιουργείται από την τομή δύο επιπέδων ικανοποιεί και τις δύο εξισώσεις τους. Για παράδειγμα, η ευθεία που διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0, z_0) και είναι η τομή επιπέδων κάθετων στα (a_1, b_1, c_1) , (a_2, b_2, c_2) δίνεται από τις εξισώσεις

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2.$$

2. Η ευθεία που περιγράφεται από την (12.18), δηλαδή η ευθεία που διέρχεται από το (x_0, y_0, z_0) και είναι παράλληλη στο (x_1, y_1, z_1) , περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{x - x_0}{x_1} &= \frac{y - y_0}{y_1} = \frac{z - z_0}{z_1}, \quad \text{αν } x_1, y_1, z_1 \neq 0, \\ \frac{x - x_0}{x_1} &= \frac{y - y_0}{y_1}, \quad z = z_0, \quad \text{αν } x_1, y_1 \neq 0, z_1 = 0, \\ y &= y_0, \quad z = z_0, \quad \text{αν } x_1 \neq 0, y_1 = z_1 = 0. \end{aligned}$$

(Οι περιπτώσεις που παραλείπονται είναι ανάλογες με κάποιες εκ των άνω.)

Απόδειξη. Παραλείπεται. □

Ορισμός 12.14. (Ευθεία παράλληλη σε επίπεδο) Μια ευθεία είτε περιέχεται εξ' ολοκλήρου σε ένα επίπεδο, είτε το τέμνει σε ακριβώς ένα σημείο, είτε δεν το τέμνει σε κανένα σημείο, οπότε και καλείται παράλληλη σε αυτό.

Ορισμός 12.15. (Κατευθύνοντα συνημίτονα) Έστω $P = (x, y, z)$ μη μηδενικό διάνυσμα, και έστω $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ οι γωνίες που σχηματίζει με τα μοναδιαία διανύσματα, επί των αξόνων x, y, z αντίστοιχα. Τα συνημίτονά τους καλούνται κατευθύνοντα συνημίτονα. Παρατηρούμε πως

$$P \cdot (1, 0, 0) = \|P\| \|(1, 0, 0)\| \cos \theta_1 \Rightarrow \cos \theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

και ομοίως έχουμε:

$$\cos \theta_2 = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \theta_3 = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Παράδειγμα 12.7. Θα δείξουμε ότι η ευθεία $x = 1 + t, y = 3 + t, z = 4 - t$ είναι παράλληλη στο επίπεδο $x + 2y + 3z = 4$.

Πράγματι, έστω ότι η ευθεία δεν είναι παράλληλη. Άρα υπάρχει κάποιο t τέτοιο ώστε το αντίστοιχο σημείο της ευθείας να ανήκει στο επίπεδο. Συνεπώς, θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση, και με αντικατάσταση προκύπτει ότι

$$(1+t) + 2(3+t) + 3(4-t) = 4 \Leftrightarrow 1+6+12+(1+2-3)t = 4 \Rightarrow 19 = 4.$$

Φτάνουμε σε άτοπο, άρα δεν υπάρχει t για το οποίο η ευθεία να περνά από το επίπεδο, και τελικά η ευθεία είναι παράλληλη.

Ένας άλλος τρόπος είναι ο εξής: Καταρχήν, παρατηρούμε ότι η ευθεία είναι παράλληλη στο διάνυσμα $(1, 1, -1)$. Επίσης, το σημείο $(1, 0, 1)$ ανήκει στο επίπεδο, ενώ η ευθεία που διέρχεται από εκείνο το σημείο και προκύπτει από την αρχική με μια απλή μετατόπιση είναι η $x = 1+t$, $y = 0+t$, $z = 1-t$. Με αντικατάσταση στον τύπο του επιπέδου, προκύπτει ότι η συγκεκριμένη ευθεία ανήκει στο επίπεδο για κάθε t . Άρα, η αρχική ευθεία, από την οποία η νέα ευθεία έχει προκύψει με μετατόπιση, είναι παράλληλη στο επίπεδο.

Άλλος τρόπος επίλυσης είναι να υπολογίσουμε την απόσταση κάθε σημείου της ευθείας από το επίπεδο και να δούμε ότι η απόσταση παραμένει σταθερή καθώς κινούμαστε επί της ευθείας. Δείτε, σχετικά, το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 12.8. Θα υπολογίσουμε το σημείο τομής των ευθειών L_1, L_2 , που περιγράφονται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} L_1: & \quad x = 5+t, \quad y = 1-2t, \quad z = 7t, \\ L_2: & \quad x = 6-t, \quad y = -1+t, \quad z = 7+3t, \end{aligned}$$

και ακολούθως το επίπεδο στο οποίο ανήκουν και οι δύο.

Καταρχήν παρατηρήστε πως δεν είναι απαραίτητο δύο ευθείες στο χώρο να τέμνονται. Για να τέμνονται οι συγκεκριμένες, είναι απαραίτητο να υπάρχουν δύο παράμετροι, t_1, t_2 , τέτοιες ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} (5+t_1, 1-2t_1, 7t_1) &= (6-t_2, -1+t_2, 7+3t_2) \\ \Leftrightarrow \{5+t_1 &= 6-t_2, \quad 1-2t_1 = -1+t_2, \quad 7t_1 = 7+3t_2\} \end{aligned}$$

Το άνω σύστημα τριών εξισώσεων με δύο αγνώστους, εύκολα προκύπτει πως έχει λύση, τα $t_1 = 1, t_2 = 0$, άρα οι εξισώσεις έχουν σημείο τομής το $(6, -1, 7)$. Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, το επίπεδο που διέρχεται από το σημείο $(x_0, y_0, z_0) = (6, -1, 7)$ και είναι παράλληλο στα $(1, -2, 7)$ και $(-1, 1, 3)$ περιγράφεται από την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x-6 & y+1 & z-7 \\ 1 & -2 & 7 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-6)(-6-7) - (y+1)(3+7) + (z-7)(1-2) \\ \Leftrightarrow 13x + 10y + z = 75.$$

Κεφάλαιο 13

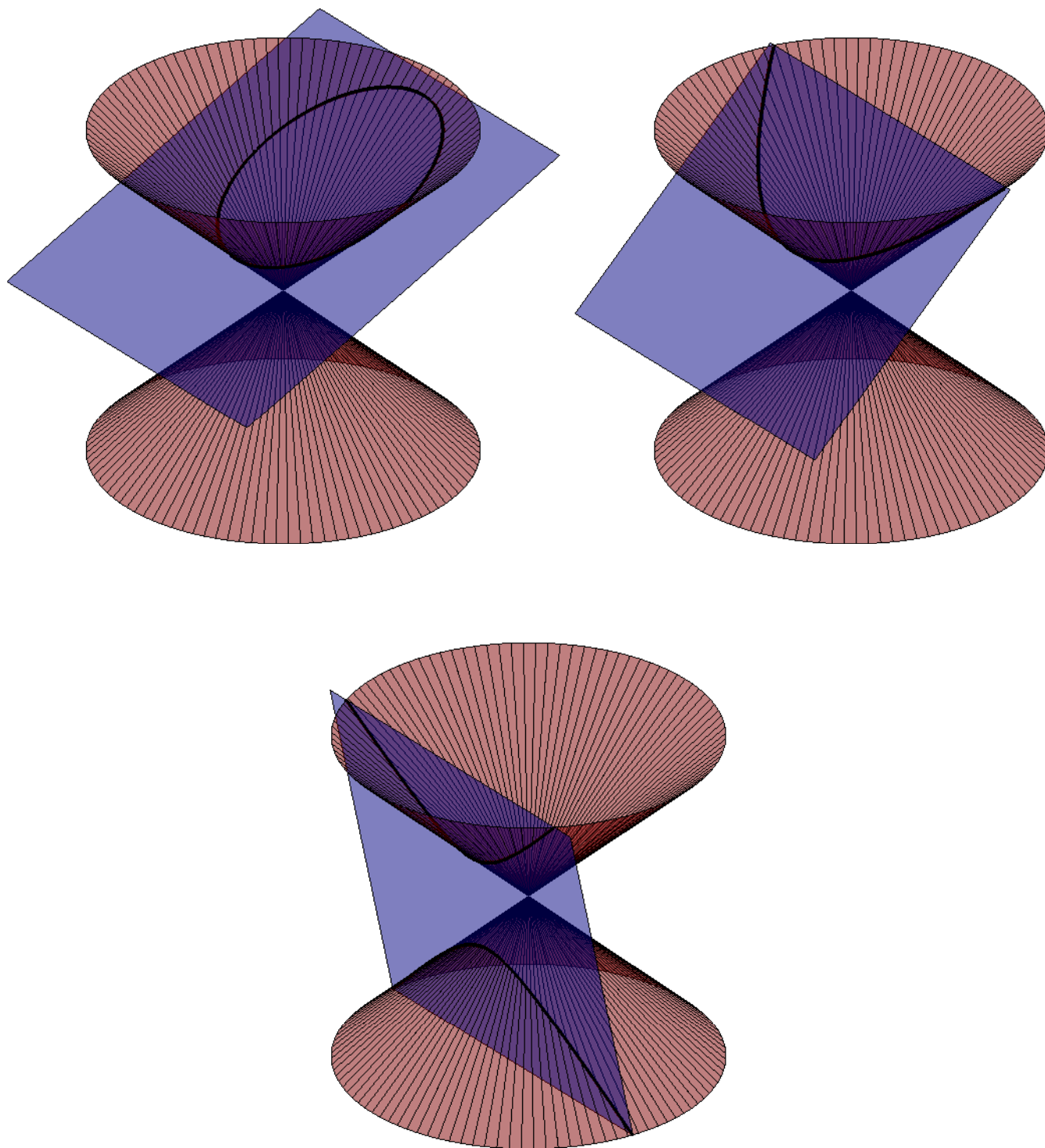
Κωνικές Τομές

13.1 Κωνικές Τομές

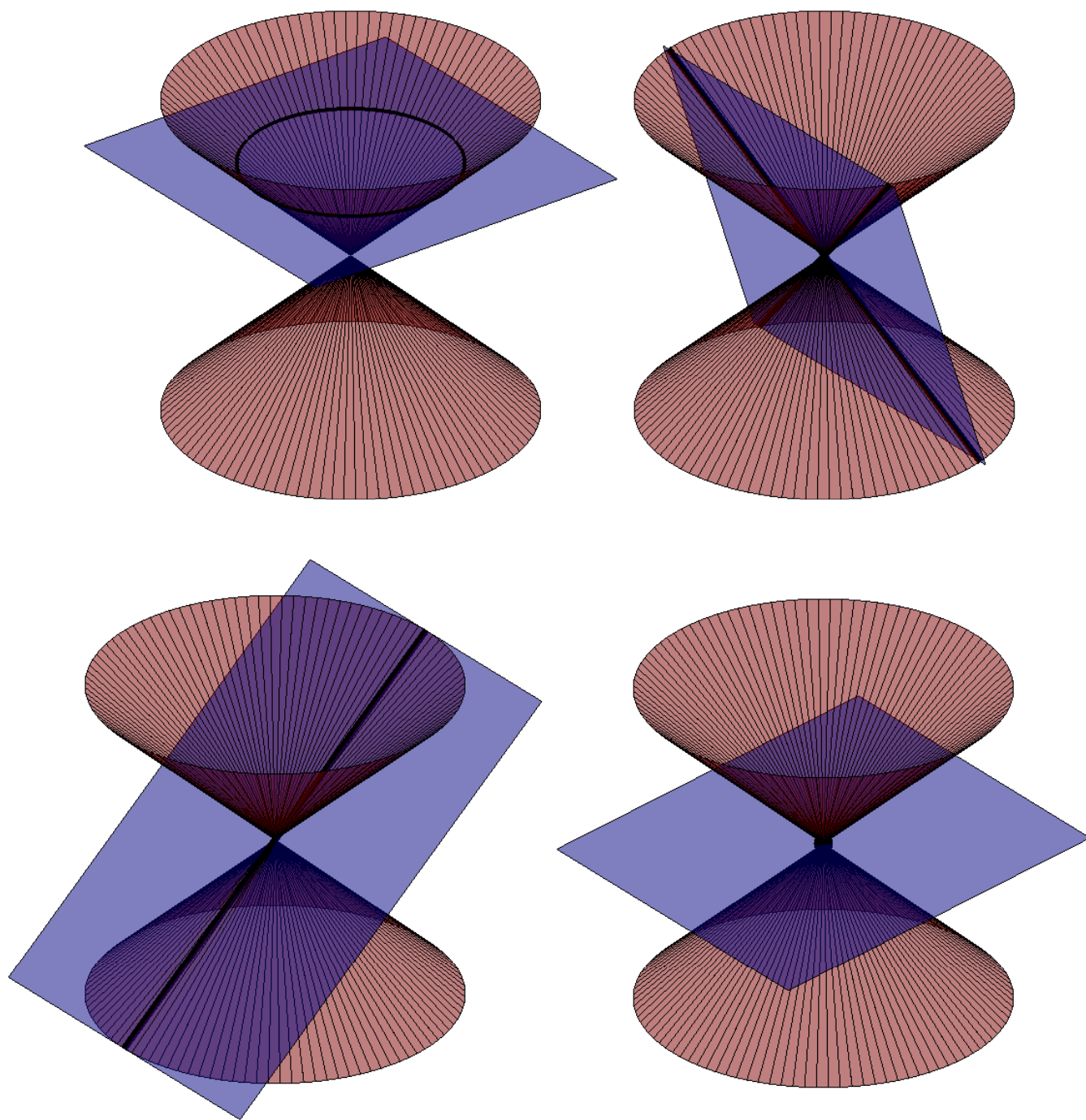
«Ορισμός» Καλούμε κωνική τομή την τομή ενός (διπλού ορθού κυκλικού) κώνου με ένα επίπεδο.

Παρατηρήσεις

1. Στο Σχήμα 13.1 έχουμε σχεδιάσει τις τρεις μη τετριμμένες περιπτώσεις κωνικών τομών, δηλαδή τις
 - (α') Έλλειψη.
 - (β') Παραβολή.
 - (γ') Υπερβολή.
2. Στο Σχήμα 13.2 έχουμε σχεδιάσει τις τέσσερις τετριμμένες περιπτώσεις κωνικών τομών:
 - (α') Κύκλος.
 - (β') Δύο ευθείες.
 - (γ') Μία ευθεία.
 - (δ') Ένα σημείο.
3. Βεβαιωθείτε ότι έχετε καταλάβει πως δημιουργείται η κάθε περίπτωση.
4. Ο άνω ορισμός είναι ο αρχαιότερος, αλλά όχι ο πρακτικότερος για τις ανάγκες μας. Στις επόμενες παραγράφους θα δούμε κάποιους πιο πρακτικούς ορισμούς.



Σχήμα 13.1: Οι τρεις μη τετριμμένες περιπτώσεις κωνικών τομών: έλλειψη, παραβολή, και υπερβολή αντίστοιχα.



Σχήμα 13.2: Οι τέσσερις τετριμμένες περιπτώσεις κωνικών τομών: κύκλος, δύο ευθείες, μια ευθεία, και ένα σημείο αντίστοιχα.

13.2 Αλλαγή Συντεταγμένων

Παράδειγμα 13.1. Έστω ένα χωριό όπου ζουν χριστιανοί και μουσουλμάνοι. Οι μεν χριστιανοί κανονίζουν τις συναντήσεις τους ορίζοντας τις συντεταγμένες συνάντησής τους βάσει ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων με αρχή των αξόνων την εκκλησία του χωριού και με τον άξονα των x προς την ανατολή. Οι δε μουσουλμάνοι κανονίζουν τις συναντήσεις τους ορίζοντας τις συντεταγμένες συνάντησής τους βάσει ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων με αρχή των αξόνων το τζαμί του χωριού και με τον άξονα των x προς τη Μέκκα. Αν ένας χριστιανός και ένα μουσουλμάνος θέλουν να συναντηθούν, και ο χριστιανός δώσει τις συντεταγμένες της συνάντησης στο δικό του σύστημα συντεταγμένων στον μουσουλμάνο, πως ο μουσουλμάνος θα βρει το σημείο συνάντησης στο δικό του σύστημα συντεταγμένων; Το ακόλουθο θεώρημα απαντά αυτό το ερώτημα (και αρκετά άλλα, πρακτικότερα).

Θεώρημα 13.1. (Αλλαγή συντεταγμένων) Έστω τα δύο συστήματα συντεταγμένων xy και uv του Σχήματος 13.3. Η αρχή των αξόνων του συστήματος uv βρίσκεται στη θέση (x_0, y_0) (ως προς το σύστημα xy) και το σύστημα uv είναι περιστραμμένο κατά γωνία θ ως προς το xy . (Η γωνία θ είναι προσημασμένη: αν είναι θετική (αρνητική) είναι αντίθετη (σύμφωνη) με τη φορά του ρολογιού.)

1. Αν ένα σημείο P έχει συντεταγμένες (x, y) στο σύστημα συντεταγμένων xy , τότε έχει συντεταγμένες (u, v) στο σύστημα συντεταγμένων uv που δίνονται από τον μετασχηματισμό

$$\begin{cases} u = (x - x_0) \cos \theta + (y - y_0) \sin \theta, \\ v = -(x - x_0) \sin \theta + (y - y_0) \cos \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}. \quad (13.1)$$

2. Αν ένα σημείο P έχει συντεταγμένες (u, v) στο σύστημα uv , τότε έχει συντεταγμένες (x, y) στο σύστημα xy που δίνονται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό

$$\begin{cases} x = x_0 + u \cos \theta - v \sin \theta, \\ y = y_0 + u \sin \theta + v \cos \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (13.2)$$

3. Στην ειδική περίπτωση που $\theta = 0$, οι μετασχηματισμοί μπορούν να γραφούν ως

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + u \\ y_0 + v \end{pmatrix}. \quad (13.3)$$

Απόδειξη. Δείτε το Σχήμα 13.4. Παρατηρήστε πως

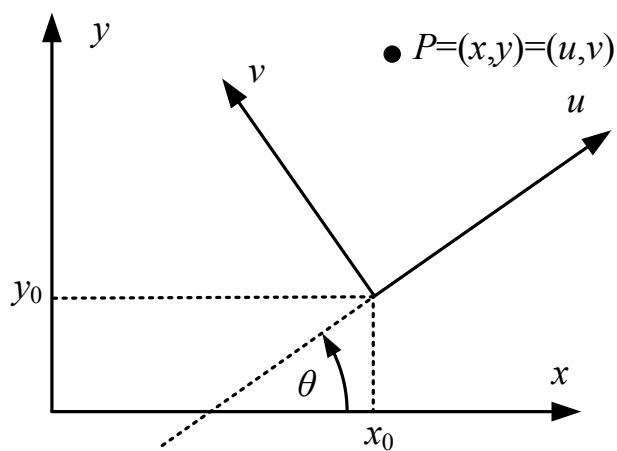
$$x = x_0 + r \cos(\theta + \phi) = x_0 + r \cos \phi \cos \theta - r \sin \phi \sin \theta$$

$$\Rightarrow x = x_0 + u \cos \theta - v \sin \theta.$$

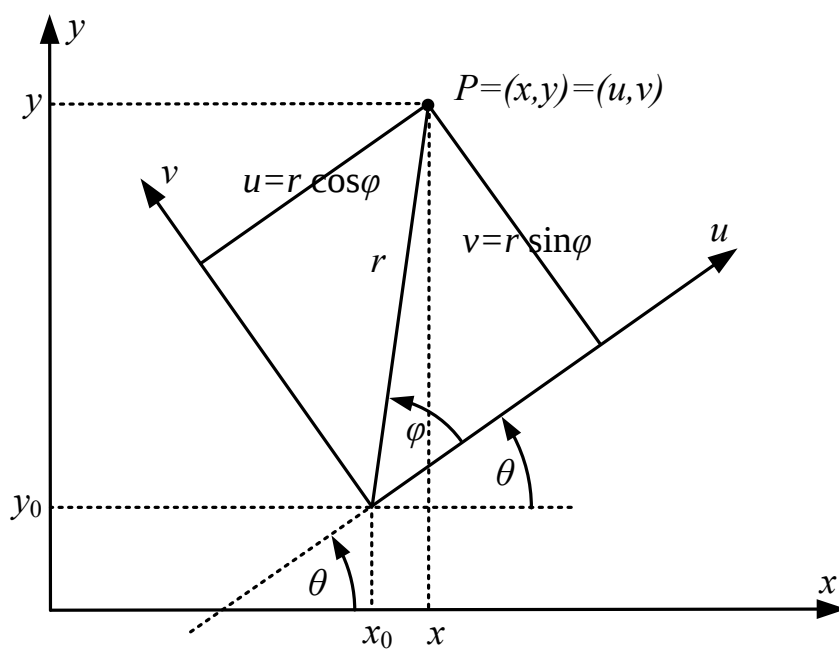
Επιπλέον,

$$y = y_0 + r \sin(\theta + \phi) = y_0 + r \cos \phi \sin \theta + r \sin \phi \cos \theta$$

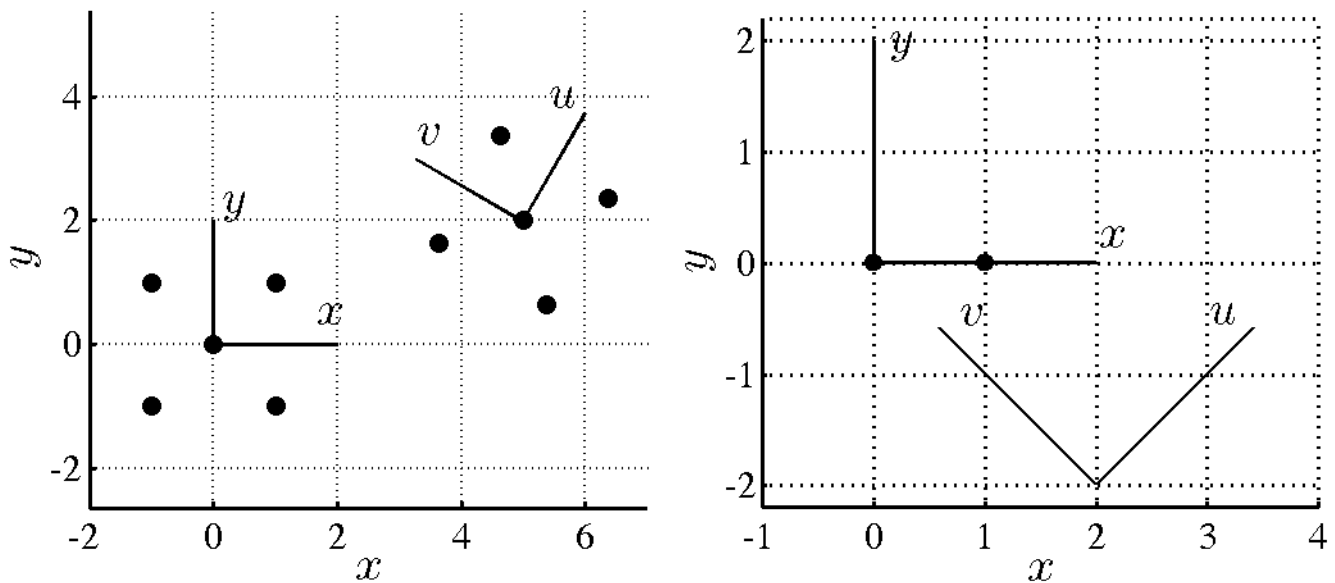
$$\Rightarrow y = y_0 + u \sin \theta + v \cos \theta,$$



Σχήμα 13.3: Τα συστήματα συντεταγμένων xy και uv .



Σχήμα 13.4: Απόδειξη των εξισώσεων αλλαγής συντεταγμένων.



Σχήμα 13.5: Οι άξονες συντεταγμένων της Άσκησης 13.2.

άρα βρήκαμε τον μετασχηματισμό $(u, v) \rightarrow (x, y)$.

Για να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό $(x, y) \rightarrow (u, v)$, αρκεί να λύσουμε το σύστημα 2×2 ως προς u, v . $\square$

Παράδειγμα 13.2. Θα απαντήσουμε τα ακόλουθα ερωτήματα:

1. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$, και $(-1, 1)$ (ως προς το αρχικό σύστημα συντεταγμένων xy) σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων, uv , με κέντρο το σημείο $(5, 2)$, και περιστραμμένο σε σχέση με το αρχικό, xy , κατά γωνία $\pi/3$. Τα σημεία έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 13.5 (αριστερά).
2. Να βρεθούν οι συντεταγμένες, στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων, xy των σημείων που στο άνω, νέο σύστημα συντεταγμένων uv έχουν συντεταγμένες $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$, $(-1, 1)$. Τα σημεία εμφανίζονται στο Σχήμα 13.5 (αριστερά).
3. Να βρεθεί ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων uv βάσει του οποίου τα σημεία $(0, 0)$ και $(1, 0)$ (ως προς το xy) απεικονίζονται στα $(0, 2\sqrt{2})$ και $(\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2)$ (ως προς το uv).

Έχουμε, κατά περίπτωση:

1. Θα εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό (13.1) όπου $x_0 = 5$, $y_0 = 2$, και $\theta = \pi/3$, και x, y τις δοσμένες συντεταγμένες, κατά περίπτωση. Με απλή αντικατάσταση, προκύπτει τελικά πως τα σημεία, σε συντεταγμένες uv , με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων, είναι τα $(-4.23, 3.33)$, $(-2.86, 2.96)$, $(-4.59, 1.96)$, $(-3.86, 4.69)$, και $(-5.59, 3.69)$.
2. Θα εφαρμόσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό (13.2) με τα x_0, y_0, θ ως άνω, και u, v τις δοσμένες συντεταγμένες, κατά περίπτωση. Με απλή αντικατάσταση, προκύπτει τελικά πως οι αρχικές συντεταγμένες, στο σύστημα xy , είναι οι $(5, 2)$, $(4.63, 3.36)$, $(6.36, 2.36)$, $(5.36, 0.63)$, $(3.63, 1.63)$.

3. Σε αυτή την περίπτωση, μας είναι άγνωστα τα x_0, y_0 , και θ , και για να τα υπολογίσουμε θα χρησιμοποιήσουμε τις (13.1) για τα δύο σημεία που δίνονται. Πράγματι, από το πρώτο ζεύγος συντεταγμένων μας δίνεται:

$$0 = (0 - x_0) \cos \theta + (0 - y_0) \sin \theta \Rightarrow x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta = 0 \quad (13.4)$$

και

$$2\sqrt{2} = -(0 - x_0) \sin \theta + (0 - y_0) \cos \theta \Rightarrow x_0 \sin \theta - y_0 \cos \theta = 2\sqrt{2}, \quad (13.5)$$

ενώ από το δεύτερο ζεύγος συντεταγμένων μας δίνεται:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}/2 &= (1 - x_0) \cos \theta + (0 - y_0) \sin \theta \\ &\Rightarrow x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta = \cos \theta - \sqrt{2}/2 \end{aligned} \quad (13.6)$$

και

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2}/2 &= -(1 - x_0) \sin \theta + (0 - y_0) \cos \theta \\ &\Rightarrow x_0 \sin \theta - y_0 \cos \theta = \sin \theta + 3\sqrt{2}/2. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Από τις (13.4) και (13.6) προκύπτει ότι $\cos \theta = \sqrt{2}/2$, ενώ από τις (13.5), (13.7) προκύπτει ότι $\sin \theta = \sqrt{2}/2$, άρα τελικά $\theta = \pi/4$. Με δεδομένη την τιμή του θ , από την (13.4) προκύπτει πως $x_0 = -y_0$, και τη (13.5) πως $x_0 = 2$, άρα $y_0 = -2$. Τα σημεία, οι αρχικοί άξονες, και οι νέοι άξονες εμφανίζονται στο Σχήμα 13.5 (δεξιά).

Παρατηρήσεις

1. Αν ένας γεωμετρικός τόπος περιγράφεται από την εξίσωση $f(x, y) = 0$ στο σύστημα συντεταγμένων (x, y) , τότε αντικαθιστώντας τα x, y με χρήση της (13.2) μπορούμε να καταλήξουμε σε μια άλλη εξίσωση $g(u, v) = 0$ που περιγράφει τον γεωμετρικό τόπο στο σύστημα συντεταγμένων uv .

Ειδικά όταν τα δύο συστήματα είναι παράλληλα μεταξύ τους, δηλαδή $\theta = 0$, τότε ισχύει η ειδική περίπτωση (13.3) και η περιγραφή του γεωμετρικού τόπου $f(x, y) = 0$ στο σύστημα συντεταγμένων uv είναι η $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(u + x_0, v + y_0) = 0$.

Για παράδειγμα, αφού ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R περιγράφεται από την εξίσωση

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

ο ίδιος κύκλος στο σύστημα συντεταγμένων uv με κέντρο $(x_0, y_0) = (1, -2)$ και άξονες παράλληλους στους αρχικούς περιγράφεται από την εξίσωση

$$(u + 1)^2 + (v - 2)^2 = R^2.$$

Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να ξεκινήσουμε από μια εξίσωση γεωμετρικού τόπου στο σύστημα uv και να καταλήξουμε σε μια εξίσωση στο σύστημα xy για τον ίδιο τόπο.

2. Έστω πως μας δίνεται ένας γεωμετρικός τόπος $f(x, y) = 0$ και έστω πως θέλουμε να τον μετατοπίσουμε κατά x_0 επί του άξονα των x , κατά y_0 επί του άξονα των y , και να τον περιστρέψουμε κατά γωνία θ . Παρατηρήστε ότι ο νέος (μετατοπισμένος) γεωμετρικός τόπος περιγράφεται από την εξίσωση $f(u, v) = 0$ όπου τα u, v δίνονται από την (13.1).

Ειδικά όταν ο γεωμετρικός τόπος $f(x, y) = 0$ μεταφέρεται χωρίς περιστροφή, δηλαδή $\theta = 0$, τότε ισχύει η ειδική περίπτωση (13.3) και ο νέος γεωμετρικός τόπος είναι ο $f(u, v) = 0 \Leftrightarrow f(x - x_0, y - y_0) = 0$.

Για παράδειγμα, αφού ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R περιγράφεται από την εξίσωση

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

ο κύκλος με ακτίνα R και κέντρο το $(x_0, y_0) = (1, -2)$ είναι ο

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = R^2.$$

13.3 Παραβολή

Ορισμός 13.1. (Παραβολή) Ο γεωμετρικός τόπος P των σημείων που ισαπέχουν από μια ευθεία d (που καλείται διευθετούσα) και ένα σημείο F (που καλείται εστία) καλείται παραβολή. Το σημείο V που βρίσκεται ανάμεσα στην διευθετούσα και την εστία καλείται κορυφή της παραβολής. Η ευθεία που είναι κάθετη στη διευθετούσα και διέρχεται από την εστία καλείται άξονας της παραβολής.

Θεώρημα 13.2. (Κανονικές μορφές παραβολής) Έστω $p > 0$.

1. Η παραβολή με εστία το σημείο $F = (p, 0)$ και διευθετούσα την ευθεία $x = -p$ έχει κορυφή το σημείο $(0, 0)$, άξονα την ευθεία $y = 0$, και εξίσωση

$$y^2 = 4px.$$

2. Η παραβολή με εστία το σημείο $F = (-p, 0)$ και διευθετούσα την ευθεία $x = p$ έχει κορυφή το σημείο $(0, 0)$, άξονα την ευθεία $y = 0$, και εξίσωση

$$y^2 = -4px.$$

3. Η παραβολή με εστία το σημείο $F = (0, p)$ και διευθετούσα την ευθεία $y = -p$ έχει κορυφή το σημείο $(0, 0)$, άξονα την ευθεία $x = 0$, και εξίσωση

$$x^2 = 4py.$$

4. Η παραβολή με εστία το σημείο $F = (0, -p)$ και διευθετούσα την ευθεία $y = p$ έχει κορυφή το σημείο $(0, 0)$, άξονα την ευθεία $x = 0$, και εξίσωση

$$x^2 = -4py.$$

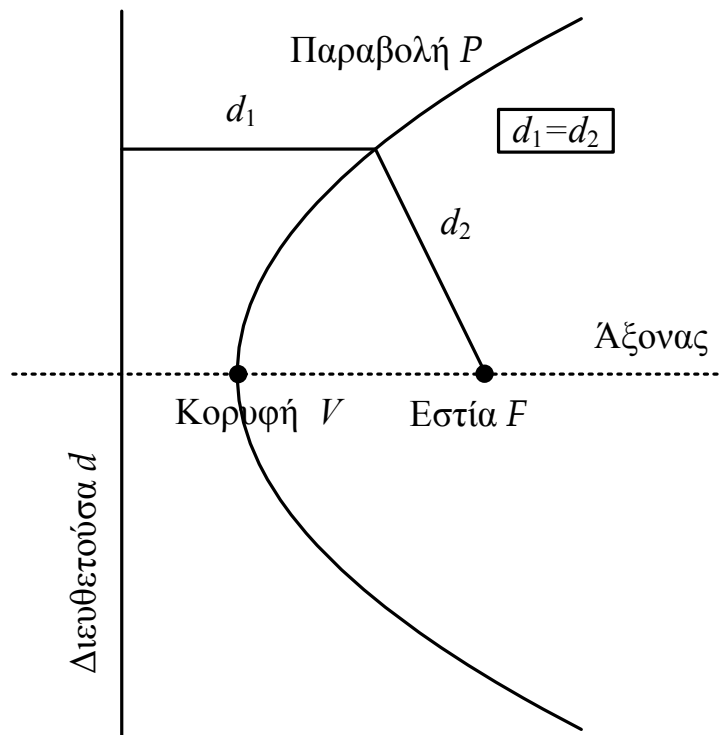
Οι άνω παραβολές (και ιδιαίτερα η πρώτη) καλούνται συχνά κανονικές μορφές.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την πρώτη περίπτωση. Οι άλλες προκύπτουν παρόμοια. Είναι προφανές ότι η κορυφή και ο άξονας είναι αυτοί που δίνονται. Σχετικά με την εξίσωση που δίνεται, έστω ένα σημείο (x, y) της παραβολής. Η απόσταση του d_1 από τη διευθετούσα είναι ίση με την απόσταση του d_2 από την εστία, άρα:

$$\begin{aligned} d_1 = d_2 &\Leftrightarrow \sqrt{(x+p)^2 + 0^2} = \sqrt{(p-x)^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2px + p^2 = p^2 - 2xp + y^2 + x^2 \Leftrightarrow y^2 = 4px. \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση: Ακόμα και οι παραβολές που δεν είναι σε κανονική μορφή, μπορούν να έρθουν σε κανονική μορφή με μια αλλαγή συντεταγμένων σε ένα σύστημα συντεταγμένων uv με κέντρο την κορυφή της παραβολής και τον άξονα u ή v να ταυτίζεται με τον άξονα της παραβολής. Γνωρίζοντας τη σχέση που έχουν τα συστήματα uv και xy , μπορούμε να βρούμε την εξίσωση της στο σύστημα xy . Δείτε το ακόλουθο παράδειγμα.



Σχήμα 13.6: Παραβολής και βασικά χαρακτηριστικά.

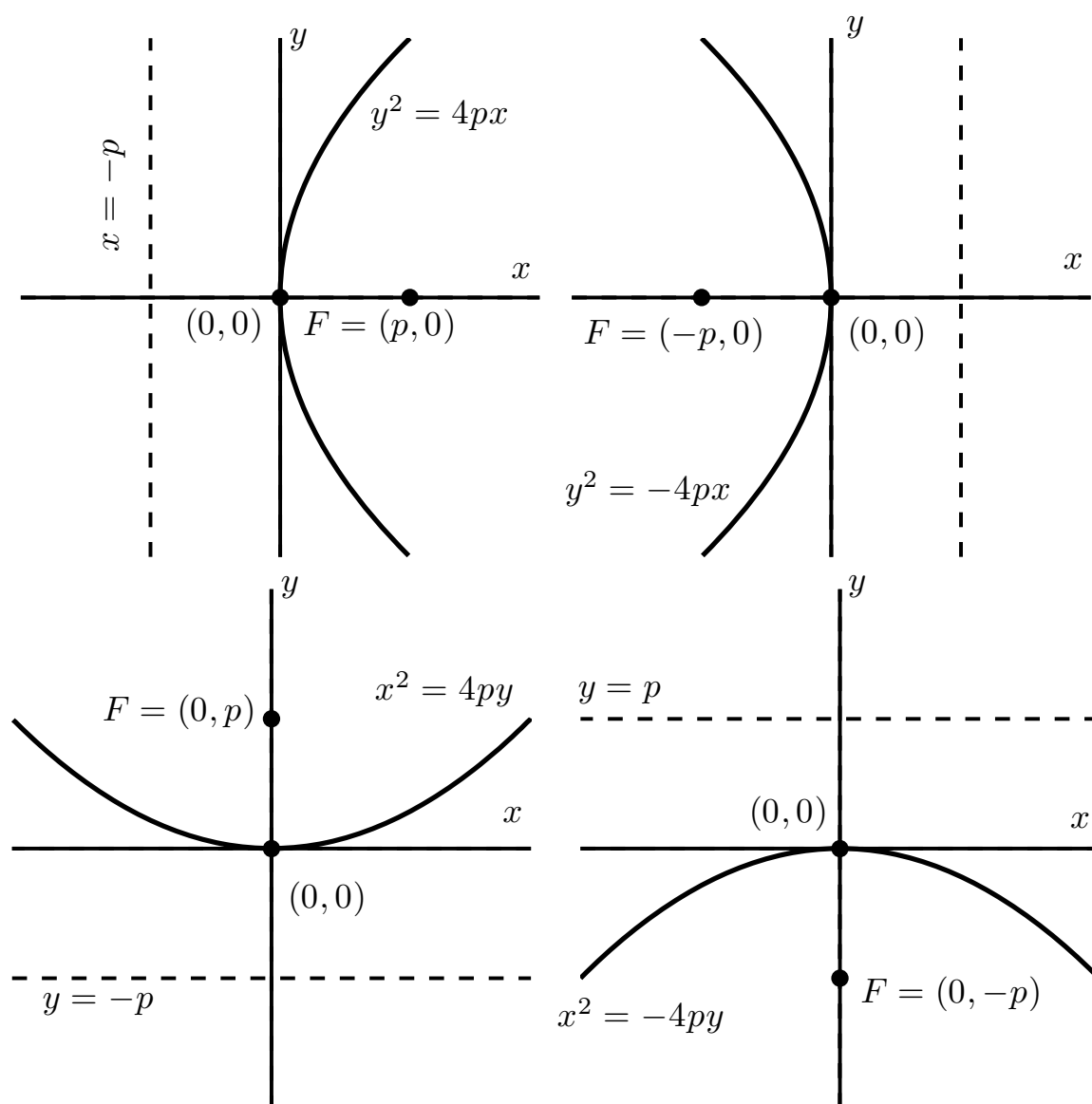
Παράδειγμα 13.3. Θα βρούμε την εξίσωση παραβολής με εστία στο $(4, 3)$ και διευθετούσα την $y + 1 = 0$. Παρατηρούμε καταρχήν ότι η κορυφή της παραβολής βρίσκεται στο μισό της απόστασης της εστίας από την διευθετούσα, δηλαδή στο σημείο $(4, 1)$. Αφού η διευθετούσα είναι παράλληλη στον άξονα των x , ο άξονάς της είναι παράλληλος στον άξονα των y . Έστω λοιπόν το σύστημα uv με κέντρο στη θέση $(4, 1)$ και με άξονες x, u παράλληλους και y, v παράλληλους. Οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων είναι οι

$$\{x = 4 + u, \quad y = 1 + v\} \Leftrightarrow \{u = x - 4, \quad v = y - 1\}.$$

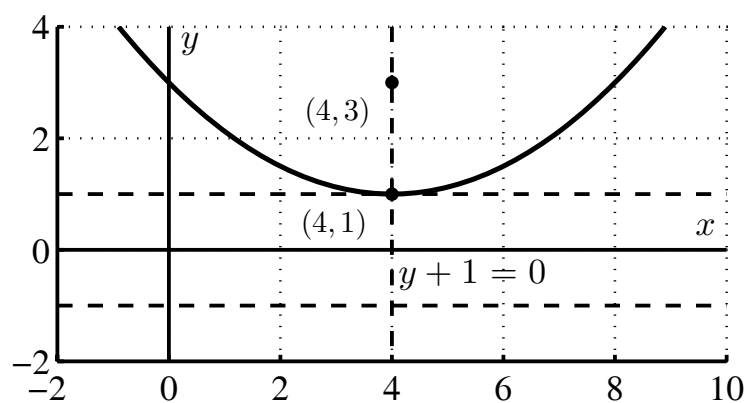
Στο σύστημα uv η παραβολή έχει κανονική μορφή με εξίσωση $4pv = u^2$. Μένει ο προσδιορισμός του p . Παρατηρούμε πως p είναι η απόσταση ανάμεσα στην κορυφή και την εστία, άρα $p = 2$ και τελικά η εξίσωση είναι η

$$8v = u^2 \Leftrightarrow 8(y - 1) = (x - 4)^2.$$

Η παραβολή έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 13.8.



Σχήμα 13.7: Οι τέσσερις κανονικές μορφές της παραβολής και οι εξισώσεις τους.



Σχήμα 13.8: Η παραβολή του Παραδείγματος 13.3.

13.4 Έλλειψη

Ορισμός 13.2. (Έλλειψη) Ο γεωμετρικός τόπος P των σημείων για τα οποία το άθροισμα $d_1 + d_2$ των αποστάσεων τους d_1 και d_2 από δύο εστίες F_1 και F_2 είναι σταθερό καλείται έλλειψη. Η ευθεία που διέρχεται από τις δύο εστίες καλείται μεγάλος άξονας. Το σημείο O που βρίσκεται στο μέσο του ευθυγράμμου τμήματος F_1F_2 καλείται κέντρο της έλλειψης. Η ευθεία που διέρχεται από το κέντρο και είναι κάθετη στον μεγάλο άξονα καλείται μικρός άξονας. Τα σημεία A_1 και A_2 όπου τέμνεται ο μεγάλος άξονας με την έλλειψη και B_1 και B_2 όπου τέμνεται ο μικρός άξονας με την έλλειψη καλούνται κορυφές. Έστω $2a \triangleq |A_1A_2| = d_1 + d_2$. Ορίζουμε την εκκεντρότητα της έλλειψης ως τον ϵ για τον οποίο η απόσταση ανάμεσα στις εστίες F_1, F_2 , ισούται με $|F_1F_2| = 2a\epsilon$. Το $|A_1A_2|$ καλείται μήκος του μεγάλου άξονα και το $|B_1B_2|$ καλείται μήκος του μικρού άξονα.

Παρατηρήσεις

1. Περίπτωση $\epsilon = 0$: Οι εστίες ταυτίζονται, και λαμβάνουμε κύκλο.
2. Περίπτωση $\epsilon = 1$: Οι εστίες ταυτίζονται με τις κορυφές, και η έλλειψη εκφυλίζεται ευθύγραμμο τμήμα ανάμεσα στις εστίες.
3. Περίπτωση $\epsilon > 1$: Ο γεωμετρικός τόπος είναι το κενό σύνολο (γιατί;).
4. Περίπτωση $0 < \epsilon < 1$: Η μόνη μη τετριμμένη.

Θεώρημα 13.3. (Εξισώσεις έλλειψης)

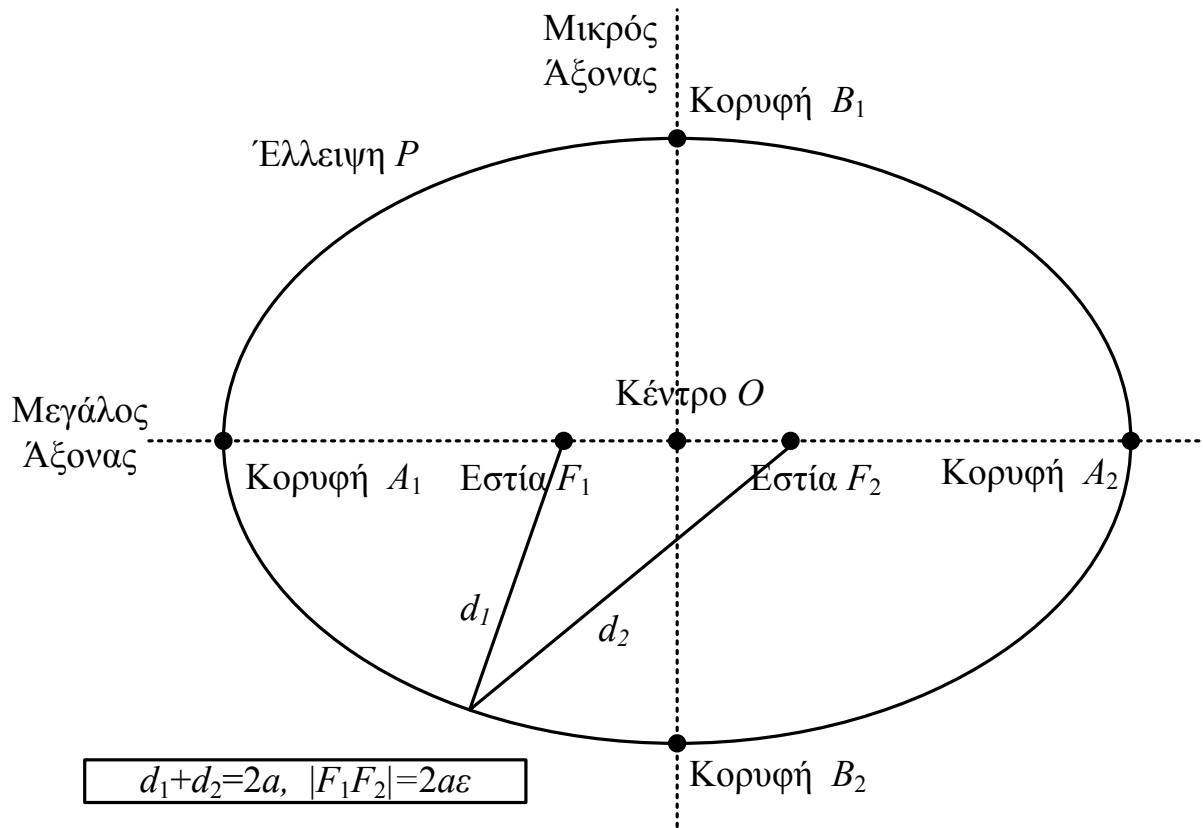
1. Η έλλειψη με κορυφές του μεγάλου άξονα τα $A_1 = (-a, 0)$ και $A_2 = (a, 0)$ και εστίες τα $F_1 = (-a\epsilon, 0)$, $F_2 = (a\epsilon, 0)$, όπου $0 < \epsilon < 1$, έχει κορυφές του μικρού άξονα τα $B_1 = (0, b)$, $B_2 = (0, -b)$, όπου $b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$, κέντρο το $(0, 0)$, μήκη μεγάλου και μικρού άξονα $|A_1A_2| = 2a$ και $|B_1B_2| = 2b$ αντίστοιχα, και εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - \epsilon^2)} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2. Η έλλειψη με κορυφές του μεγάλου άξονα τα $A_1 = (0, a)$ και $A_2 = (0, -a)$ και με εστίες τα $F_1 = (0, a\epsilon)$, $F_2 = (0, -a\epsilon)$, όπου $0 < \epsilon < 1$, έχει κορυφές του μικρού άξονα τα $B_1 = (-b, 0)$, $B_2 = (b, 0)$, όπου $b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$, κέντρο το $(0, 0)$, μήκη μεγάλου και μικρού άξονα $|A_1A_2| = 2a$ και $|B_1B_2| = 2b$ αντίστοιχα, και εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2(1 - \epsilon^2)} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Οι άνω ελλείψεις (και ειδικά η πρώτη) καλούνται συχνά κανονικές μορφές.



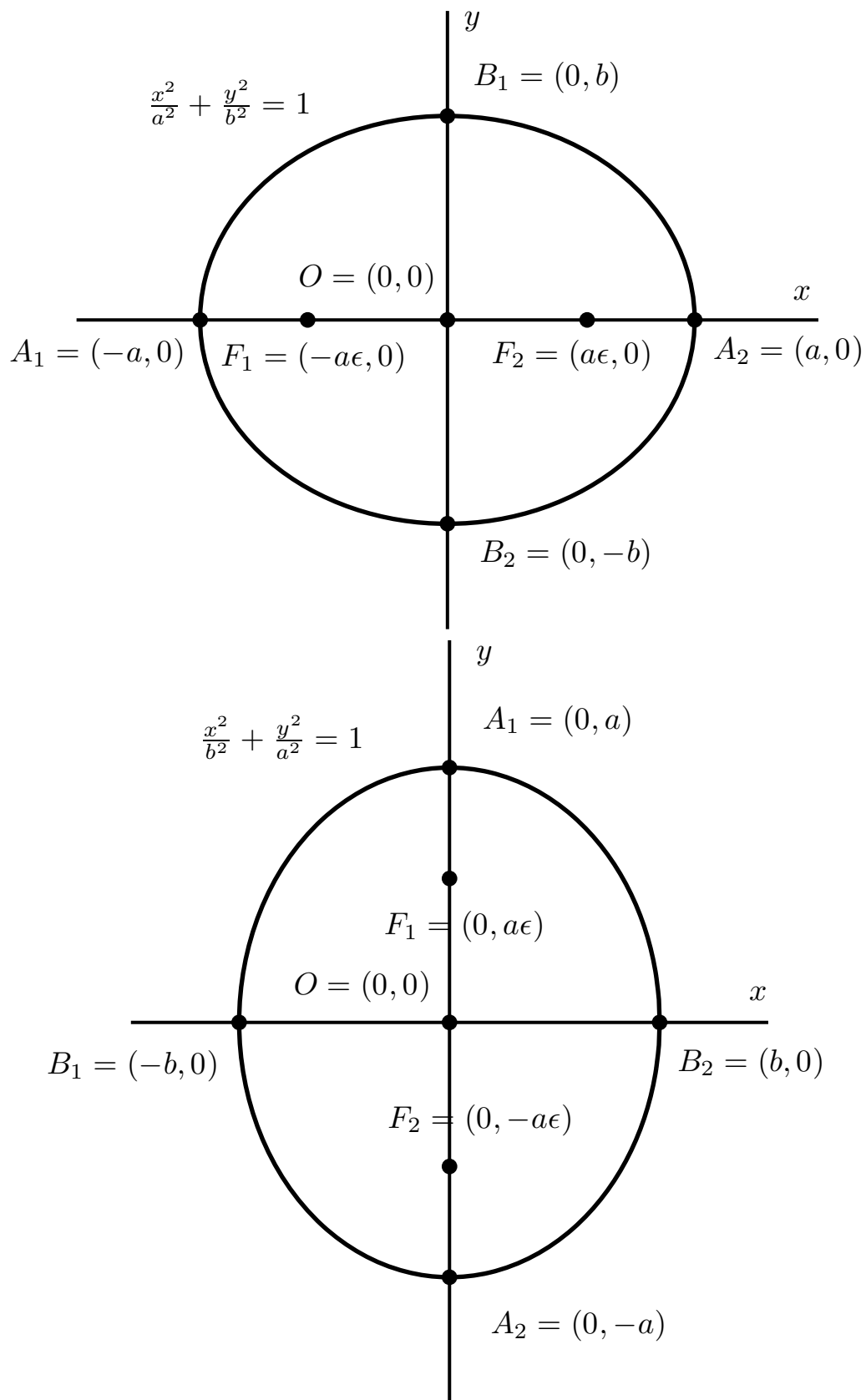
Σχήμα 13.9: Έλλειψη και βασικά χαρακτηριστικά.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την πρώτη περίπτωση. Η δεύτερη προκύπτει ανάλογα. Ένα σημείο (x, y) θα ανήκει στην έλλειψη αν

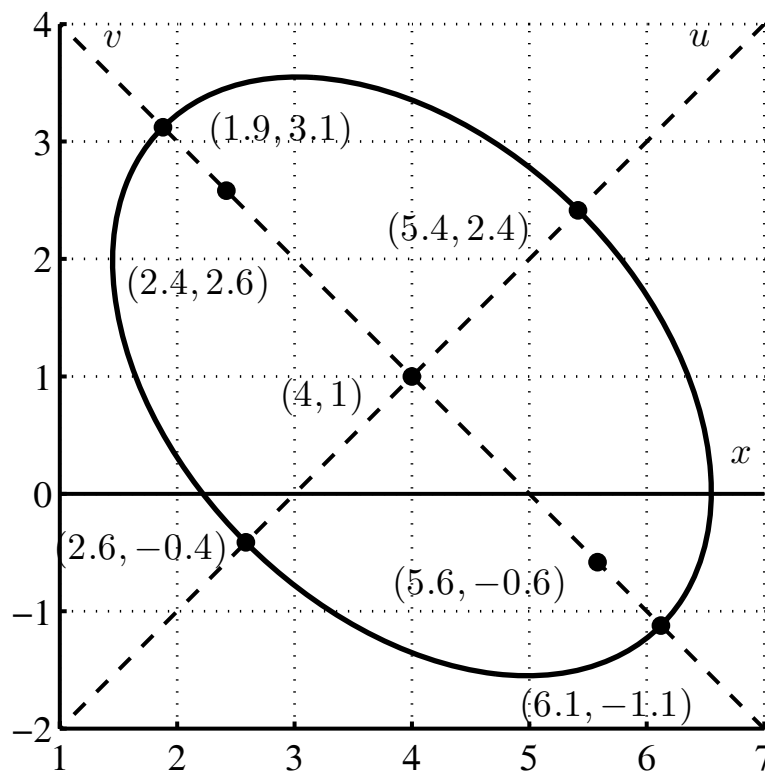
$$\begin{aligned}
 d_1 + d_2 = 2a &\Leftrightarrow \sqrt{(x + a\epsilon)^2 + y^2} + \sqrt{(x - a\epsilon)^2 + y^2} = 2a \\
 &\Leftrightarrow (x + a\epsilon)^2 + y^2 + (x - a\epsilon)^2 + y^2 + 2\sqrt{[(x + a\epsilon)^2 + y^2][(x - a\epsilon)^2 + y^2]} = 4a^2 \\
 &\Leftrightarrow [(x + a\epsilon)^2 + y^2 + (x - a\epsilon)^2 + y^2 - 4a^2]^2 = 4[(x + a\epsilon)^2 + y^2][(x - a\epsilon)^2 + y^2] \\
 &\Leftrightarrow (x + a\epsilon)^4 + (x - a\epsilon)^4 + 4y^4 + 16a^4 + 2(x + a\epsilon)^2(x - a\epsilon)^2 + 4(x + a\epsilon)^2y^2 \\
 &\quad - 8(x + a\epsilon)^2a^2 + 4(x - a\epsilon)^2y^2 - 8(x - a\epsilon)^2a^2 - 16a^2y^2 \\
 &\quad = 4(x + a\epsilon)^2(x - a\epsilon)^2 + 4y^4 + 4y^2(x - a\epsilon)^2 + 4y^2(x + a\epsilon)^2 \\
 &\Leftrightarrow (x + a\epsilon)^4 + (x - a\epsilon)^4 + 16a^4 - 2(x + a\epsilon)^2(x - a\epsilon)^2 - 8(x + a\epsilon)^2a^2 - 8(x - a\epsilon)^2a^2 - 16a^2y^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow [(x + a\epsilon)^2 - (x - a\epsilon)^2]^2 - 8a^2[-2a^2 + (x + a\epsilon)^2 + (x - a\epsilon)^2 + 2y^2] = 0 \\
 &\Leftrightarrow 16a^2x^2\epsilon^2 + 16a^4 - 16a^2x^2 - 16a^4\epsilon^2 - 16a^2y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(a^2\epsilon^2 - a^2) - a^2y^2 = a^4(\epsilon^2 - 1) \\
 &\Leftrightarrow x^2(1 - \epsilon^2) + y^2 = a^2(1 - \epsilon^2) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - \epsilon^2)} = 1.
 \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση: Οι ελλείψεις που δεν είναι σε κανονική μορφή, μπορούν να έρθουν σε κανονική μορφή με μια αλλαγή συντεταγμένων σε ένα κατάλληλα επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων uv . Γνωρίζοντας



Σχήμα 13.10: Οι δύο κανονικές μορφές της έλλειψης και οι εξισώσεις τους.



Σχήμα 13.11: Η έλλειψη του Παραδείγματος 13.4.

τη σχέση που έχουν τα συστήματα uv και xy , μπορούμε να βρούμε την εξίσωση τους στο σύστημα xy . Δείτε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 13.4. Θα βρούμε την εξίσωση που περιγράφει την έλλειψη με κέντρο το σημείο $(4, 1)$, με μήκη αξόνων $2a = 6$ και $2b = 4$, και με τον μικρό άξονα να βρίσκεται υπό γωνία $\pi/4$ σε σχέση με τον άξονα των x . Η έλλειψη περιγράφεται από την εξίσωση

$$\frac{u^2}{b^2} + \frac{v^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{9} = 1,$$

όπου το σύστημα συντεταγμένων βρίσκεται με κέντρο το σημείο $(x_0, y_0) = (4, 1)$, και υπό γωνία, σε σχέση με τον άξονα των x , ίση με $\theta = \pi/4$. Άρα

$$\begin{aligned} u &= (x - x_0) \cos \theta + (y - y_0) \sin \theta = (x - 4)\sqrt{2}/2 + (y - 1)\sqrt{2}/2, \\ v &= -(x - x_0) \sin \theta + (y - y_0) \cos \theta = -(x - 4)\sqrt{2}/2 + (y - 1)\sqrt{2}/2. \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση του άνω μετασχηματισμού στην αρχική εξίσωση, προκύπτει

$$\begin{aligned} 9 \left((x - 4)\sqrt{2}/2 + (y - 1)\sqrt{2}/2 \right)^2 + 4 \left(-(x - 4)\sqrt{2}/2 + (y - 1)\sqrt{2}/2 \right)^2 &= 36 \\ \Leftrightarrow 13x^2 + 13y^2 + 10xy - 114x - 66y + 189 &= 0. \end{aligned}$$

13.5 Υπερβολή

Ορισμός 13.3. (Υπερβολή) Ο γεωμετρικός τόπος P των σημείων για τα οποία η απόλυτη διαφορά $|d_1 - d_2|$ των αποστάσεων τους d_1 και d_2 από δύο εστίες F_1 και F_2 (εννοείται με $F_1 \neq F_2$) είναι σταθερή (και εννοείται θετική) καλείται υπερβολή. Η ευθεία που διέρχεται από τις δύο εστίες καλείται άξονας. Το σημείο O που βρίσκεται στο μέσο του ευθυγράμμου τμήματος F_1F_2 καλείται κέντρο. Τα σημεία A_1 και A_2 όπου τέμνεται ο άξονας με την υπερβολή καλούνται κορυφές. Έστω $2a \triangleq |d_1 - d_2| = |A_1A_2|$. Ορίζουμε την εκκεντρότητα της υπερβολής ως τον αριθμό ϵ για τον οποίο η απόσταση ανάμεσα στις εστίες F_1, F_2 , ισούται με $|F_1F_2| = 2a\epsilon$.

Παρατηρήσεις

1. Περίπτωση $\epsilon = 0$: Αδύνατο διότι εξ υποθέσεως $F_1 \neq F_2$.
2. Περίπτωση $\epsilon < 1$: Από την τριγωνική ανισότητα, προκύπτει πως ο γεωμετρικός τόπος είναι το κενό σύνολο. (Πως ακριβώς;)
3. Περίπτωση $\epsilon = 1$: Οι εστίες ταυτίζονται με τις κορυφές, και η έλλειψη εκφυλίζεται σε δύο ημιευθείες.
4. Περίπτωση $\epsilon > 1$: Η μόνη μη τετριμμένη.

Θεώρημα 13.4. (Εξισώσεις υπερβολής)

1. Η υπερβολή με κορυφές τα σημεία $A_1 = (-a, 0)$ και $A_2 = (a, 0)$ και εστίες τα σημεία $F_1 = (-a\epsilon, 0)$, $F_2 = (a\epsilon, 0)$, όπου $\epsilon > 1$, έχει εξίσωση

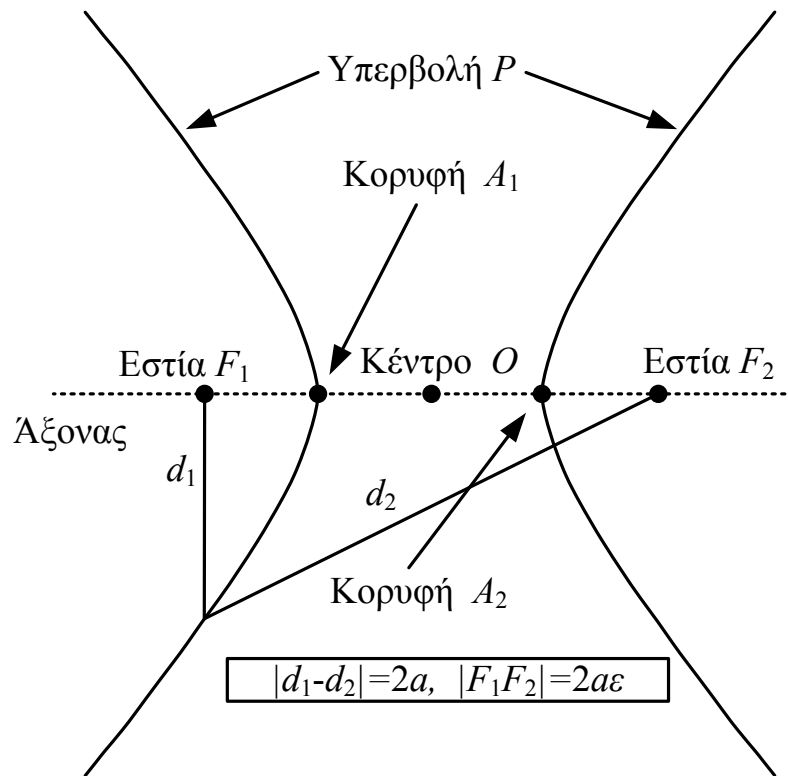
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(\epsilon^2 - 1)} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2. Η υπερβολή με κορυφές τα σημεία $A_1 = (0, a)$ και $A_2 = (0, -a)$ και εστίες τα σημεία $F_1 = (0, a\epsilon)$, $F_2 = (0, -a\epsilon)$, όπου $\epsilon > 1$, έχει εξίσωση

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2(\epsilon^2 - 1)} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Στις άνω, $b \triangleq a\sqrt{\epsilon^2 - 1}$. Οι άνω υπερβολές (και ιδιαίτερα η πρώτη) καλούνται συχνά κανονικές μορφές.

Απόδειξη. Όπως και η αντίστοιχη για την περίπτωση της έλλειψης. □



Σχήμα 13.12: Υπερβολή και βασικά χαρακτηριστικά.

Παρατήρηση: Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, οι υπερβολές που δεν είναι σε κανονική μορφή, μπορούν να έρθουν σε κανονική μορφή με μια αλλαγή συντεταγμένων σε ένα κατάλληλα επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων uv . Γνωρίζοντας τη σχέση που έχουν τα συστήματα uv και xy , μπορούμε να βρούμε την εξίσωση τους στο σύστημα xy . Δείτε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 13.5. Θα βρούμε την εξίσωση υπερβολής με κέντρο το $(-2, -4)$ με τον άξονα να βρίσκεται υπό γωνία $\frac{\pi}{6}$ σε σχέση με τον άξονα των x , και παραμέτρους $a = 3$, $b = 2$.

Παρατηρούμε πως η υπερβολή περιγράφεται από την εξίσωση

$$\frac{u^2}{9} - \frac{v^2}{4} = 1,$$

όπου το σύστημα αξόνων uv βρίσκεται υπό γωνία $\theta = \pi/6$ σε σχέση με το σύστημα αξόνων xy και με κέντρο το $(x_0, y_0) = (-2, -4)$. Άρα μπορώ να εφαρμόσω τον μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} u &= (x - x_0) \cos \theta + (y - y_0) \sin \theta = (x + 2)\sqrt{3}/2 + (y + 4)/2, \\ v &= -(x - x_0) \sin \theta + (y - y_0) \cos \theta = -(x + 2)/2 + (y + 4)\sqrt{3}/2. \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση του άνω μετασχηματισμού στην αρχική εξίσωση, προκύπτει

$$\begin{aligned} 4((x + 2)\sqrt{3}/2 + (y + 4)/2)^2 - 9(-(x + 2)/2 + (y + 4)\sqrt{3}/2)^2 &= 36 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 23y^2 + 26\sqrt{3}xy + (12 + 104\sqrt{3})x + (-184 + 52\sqrt{3})y &= -208\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Η υπερβολή έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 13.14.