ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΔΟΣΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ
Σ. ΤΟΥΜΠΗΣ

ΟΜΑΔΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2017-2018

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. Περίληψη:

   (α΄) Η καταληκτική ημερομηνία παράδοσης κάθε ομάδας θα είναι περίπου 7 μέρες μετά την ολοκλήρωση της αντίστοιχης ύλης.

   (β΄) Η καταληκτική ημέρα παράδοσης κάθε ομάδας ανακοινώνεται στο μάθημα και αναρτάται στην ατζέντα του eClass τουλάχιστον μια εβδομάδα νωρίτερα.

   (γ΄) Μετά την διόρθωσή τους, οι ομάδες θα επιστρέφονται.

   (δ΄) Οι λύσεις μιας ομάδας ασκήσεων αναρτώνται στο eClass λίγες μέρες μετά την ημερομηνία παράδοσης της επόμενης ομάδας ασκήσεων.

   (ε΄) Οι βαθμολογίες αναρτώνται στο eClass, και αυξάνουν, υπό προϋποθέσεις, την τελική βαθμολογία.

2. Επίδραση στον τελικό βαθμό:

   (α΄) Οι ασκήσεις προσφέρουν bonus 2 (στις 10) μονάδων, **εφόσον ο βαθμός στην τελική εξέταση είναι προβιβάσιμος**, δηλαδή 5 και άνω.

   (β΄) Δεν χρειάζεται να παραδώσετε όλες τις ομάδες ασκήσεων για να πάρετε το bonus. Μπορείτε να παραδώσετε τις μισές για να πάρετε μια μονάδα (εφόσον βέβαια είναι σωστές), κ.ο.κ. Ομοίως, δεν απαιτείται να παραδώσετε όλες τις ασκήσεις μιας ομάδας.

   (γ΄) **Δεν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε, για να πάρετε το bonus, εργασίες παρελθόντων ετών.**

3. Παράδοση (γενικές οδηγίες):

   (α΄) Πρέπει να παραδώσετε τις ασκήσεις ιδιοχείρως.

   (β΄) Απαγορεύεται η τμηματική παράδοση μιας ομάδας (για παράδειγμα, η μισή μια μέρα και η μισή κάποια άλλη μέρα, ή η μισή ηλεκτρονικά και η μισή ιδιοχείρως).

   (γ΄) Πριν την παράδοση, γράψτε, ευανάγνωστα, οπωσδήποτε το όνομά σας, τον αριθμό της ομάδας ασκήσεων, και, αν έχετε, τον αριθμό μητρώου σας, πάνω δεξιά στην πρώτη σελίδα.

   (δ΄) Μπορείτε να γράφετε με μολύβι ή/και με στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός κόκκινου.

   (ε΄) Μπορείτε να παραδώσετε την ομάδα σας οποτεδήποτε πριν την καταληκτική ημερομηνία παράδοσης.

   (ς΄) Χρησιμοποιείτε κόλλες μεγέθους περίπου Α4, χωρίς ξέφτια λόγω σκισίματος από τετράδιο. **Συρράψτε τις κόλλες**, και μην τις παραδώσετε εντός πλαστικού διάφανου φακέλου, ντοσιέ, κτλ., ή πιασμένες με συνδετήρα, ή τυλιγμένες/τσαλακωμένες μαζί, κ.ο.κ.

   (ζ΄) Μην παραδίδετε πολλές ομάδες ασκήσεων συρραμμένες μαζί (π.χ., την ομάδα 4, που παραδίδετε καθυστερημένη, συρραμμένη με την ομάδα 5), ή πολύ περισσότερο, στο ίδιο φύλλο. (Ο λόγος για αυτό τον κανόνα είναι ότι οι ομάδες ενδέχεται να διορθωθούν από διαφορετικούς διορθωτές.)

   (η΄) Τόπος παράδοσης: Παραδίδετε τις εργασίες (με αυτή τη σειρά προτίμησης) Α) στην αρχή ή στο τέλος των διαλέξεων (όχι κατά τη διάρκειά τους!), ή Β) στο ταχυδρομικό κουτί του διδάσκοντα (βρίσκεται έξω από το γραφείο του) ή Γ) στον ίδιο το διδάσκοντα σε ώρες γραφείου. Μπορείτε να δώσετε τις εργασίες σας σε κάποιον άλλο για να τις παραδώσει.

   (θ΄) **Παραδίδετε ιδιοχείρως την ομάδα μέχρι τις 17:00μμ της ανακοινωμένης ημέρας παράδοσης.**

4. Αλλαγές στην ημέρα παράδοσης:

   (α΄) Σε περίπτωση που η καταληκτική ημέρα παράδοσης μιας ομάδας ασκήσεων είναι ημέρα διάλεξης και η διάλεξη ακυρωθεί ή αναβληθεί, η υποβολή της ομάδας μετατίθεται αυτόματα για την ημέρα της επόμενης διάλεξης, χωρίς να προηγηθεί ανακοίνωση από τον διδάσκοντα.

(β΄) Μπορείτε να καθυστερήσετε την παράδοση των ομάδων ασκήσεων, χωρίς επίπτωση, βάσει του ακόλουθου κανόνα: Μπορείτε να καθυστερήσετε το πολύ ΔΥΟ ομάδες ασκήσεων, και να τις παραδώσετε όταν θα παραδίδατε και την επόμενη κάθε μιας από αυτές, αν οι ημερομηνίες παράδοσής τους διαφέρουν, ή την πρώτη που ακολουθεί με διαφορετική ημερομηνία παράδοσης, αν η ημερομηνία παράδοσής τους είναι κοινή. Επομένως, αν η ομάδα i έχει ημερομηνία παράδοσης την X_i και η ομάδα $i+1$ έχει ημερομηνία παράδοσης την X_{i+1}, τότε μπορείτε να παραδώσετε την ομάδα i στην ημερομηνία X_{i+1}, εφόσον $X_{i+1} > X_i$, αλλιώς στο πρώτο $X_k > X_i$. ΟΜΩΣ, δεν μπορείτε να παραδώσετε μια ομάδα σε κάποια ημερομηνία $X_l > X_k > X_i$.

(γ΄) Μην ζητήσετε παράταση εκ των προτέρων: απλώς ο διορθωτής θα δει ότι παραδώσατε καθυστερημένα την ομάδα. Οι ομάδες ασκήσεων που παραδίδονται εκπρόθεσμα παραδίδονται όπως και οι άλλες.

5. Διόρθωση:

(α΄) Η διόρθωση θα είναι πρόχειρη, λόγω έλλειψης ανθρώπινων πόρων.

(β΄) Αν οι πράξεις που απαιτούνται για να προκύψει ένα αριθμητικό αποτέλεσμα είναι αρκετές, μπορείτε να δώσετε το εν λόγω αποτέλεσμα ως έκφραση που περιέχει παραγοντικά, συνδυασμούς, γινόμενα με πολλούς παράγοντες, αθροίσματα με πολλούς όρους, κτλ., χωρίς καμία βαθμολογική απώλεια.

(γ΄) Όλες οι ομάδες ασκήσεων έχουν την ίδια βαρύτητα. Όχι όμως και όλες οι ασκήσεις σε μια ομάδα.

6. Επιστροφή διορθωμένων εργασιών και ανακοίνωση βαθμολογίας:

(α΄) Οι εργασίες θα διορθώνονται με καθυστέρηση τουλάχιστον ενός μήνα από την καταληκτική ημερομηνία παράδοσης.

(β΄) Αν έχετε ενστάσεις σχετικά με τη διόρθωση, ελάτε με την διορθωμένη ομάδα σας σε ώρες γραφείου του διδάσκοντα.

(γ΄) Αν δεν μπορείτε να βρείτε την βαθμολογία της εργασίας σας στο σχετικό έγγραφο, αναζητήστε τη στις διορθωμένες, και δώστε τη στον διδάσκοντα σε ώρες γραφείου. Αν δεν υπάρχει στις διορθωμένες (και μόνο τότε) ενημερώστε τον διδάσκοντα.

7. Συνεργασία:

(α΄) Μπορείτε να συνεργαστείτε όσο θέλετε, και να ανταλλάξετε προφορικά ιδέες, ακόμα και λύσεις.

(β΄) Αρκεί ο καθένας να γράψει μόνος του την λύση του, και να καταλαβαίνει τι γράφει.

(γ΄) Εργασίες εμφανώς αντιγραμμένες θα μηδενίζονται, και **όλο το bonus του συγγραφέα τους θα τίθεται αμετάκλητα στο μηδέν.** Επομένως, άλλες εργασίες που έχει ήδη παραδώσει ή θα παραδώσει στο μέλλον δεν θα έχουν επίδραση στο τελικό του βαθμό.

(δ΄) Απαγορεύεται να δείτε λύσεις ασκήσεων παλαιοτέρων ετών ή λύσεις των ίδιων ασκήσεων από το διαδίκτυο.

8. Σημαντικά σχόλια:

(α΄) Προσπαθήστε να είστε κατά το δυνατόν σαφείς στις λύσεις σας. Δεν βοηθά μόνο τους διορθωτές, αλλά και εσάς να οργανώνετε τη σκέψη σας καλύτερα.

(β΄) Ενημερώστε άμεσα τον διδάσκοντα σε περίπτωση εύρεσης λάθους είτε στις εκφωνήσεις είτε στις λύσεις.

(γ΄) Ενημερώστε τον διδάσκοντα αν η παράδοση μιας ομάδας ασκήσεων συμπίπτει με την παράδοση ασκήσεων άλλων μαθημάτων του **ίδιου** εξαμήνου. (*Ενδεχομένως* να υπάρξει αλλαγή, αν η ύλη το επιτρέπει.)

(δ΄) Για την εύρυθμη λειτουργία του μαθήματος, προσπαθήστε να τηρήσετε κατά το δυνατόν όλες τις άνω οδηγίες.

(ε΄) **Βλέπετε το dias mail σας.** Το έχετε για να επικοινωνούν μαζί σας οι διδάσκοντες, εκτός των άλλων και όταν υπάρχει πρόβλημα με την παράδοση κάποιας εργασίας.

1η Ομάδα Ασκήσεων

1. **(Ανισότητα Bonferroni)** Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε δύο ενδεχόμενα A, B, ισχύει η ανισότητα

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

Ακολούθως να δείξετε ότι, πιο γενικά,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - (n-1).$$

2. **(5 μπάλες από 60)** Επιλέγουμε διαδοχικά χωρίς επανάθεση 5 μπάλες από μια κάλπη με 60 μπάλες αριθμημένες $1, \ldots, 60$. Έστω ότι οι ενδείξεις τους είναι $k_1, k_2, \ldots, k_5$, με την σειρά με την οποία εξάγονται.

   (α΄) Ποια η πιθανότητα να ισχύει $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5$;

   (β΄) Ποια η πιθανότητα να ισχύει $k_5 > \max\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$;

3. **(Δώρα)** 6 άτομα ανταλλάσσουν δώρα εντελώς τυχαία. Ποια η πιθανότητα ένα τουλάχιστον από τα άτομα να λάβει το δικό του δώρο;

4. **(Ζευγαρώματα)** Ζευγάρωμα των στοιχείων του συνόλου $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ λέμε κάθε σύνολο της μορφής

$$\{\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}, \ldots \{a_{2n-1}, a_{2n}\}\},$$

όπου $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ είναι τα στοιχεία του $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ (σε ένα ζευγάρωμα, δεν έχει σημασία η σειρά των ζευγαριών, ούτε υπάρχει σειρά μέσα σε κάθε ζευγάρι, για αυτό και πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε άγκιστρα και όχι παρενθέσεις). Να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών ζευγαρωμάτων του $\{1, 2, \ldots, 2n\}$.

Σαν εφαρμογή του άνω αποτελέσματος, εξετάστε το εξής πρόβλημα: Έχουμε n ξυλάκια και σπάμε το καθένα από αυτά σε ένα μικρό και ένα μεγάλο κομμάτι. Τα $2n$ κομμάτια που προκύπτουν ζευγαρώνονται τυχαία και δημιουργούνται n καινούργια ξυλάκια. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

   (α΄) Κάθε κομμάτι ζευγαρώνεται με εκείνο με το οποίο ήταν πριν συγκολλημένο.

   (β΄) Κάθε μεγάλο κομμάτι ζευγαρώνεται με μικρό κομμάτι.

5. **(Τουρνουά)** Σε ένα τουρνουά καλαθοσφαίρισης συμμετέχουν 8 ομάδες Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Θ. Το τουρνουά διεξάγεται σε τρεις γύρους, σύμφωνα με το Σχήμα 1. Κάθε αγώνας έχει νικητή και χαμένο (δεν υπάρχουν ισοπαλίες) και ο νικητής προκρίνεται στον επόμενο γύρο. Οι ομάδες τοποθετούνται στις θέσεις 1 έως 8 με κλήρωση, χωρίς προτίμηση στο αποτέλεσμα. Παρατηρήστε ότι διεξάγεται μόνο μια κλήρωση, στην αρχή του τουρνουά, και ότι θα γίνουν ακριβώς 7 αγώνες. Όλες οι ομάδες είναι ισοδύναμες, και επομένως τα 2 αποτελέσματα ενός αγώνα είναι ισοπίθανα. Υποθέτοντας πως η κλήρωση δεν έχει γίνει ακόμα, απαντήστε τα ακόλουθα:

   (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα οι ομάδες Α,Β να παίξουν μεταξύ τους στον τελικό γύρο;

   (β΄) Ποια είναι η πιθανότητα οι ομάδες Α,Β να παίξουν μεταξύ τους σε οποιονδήποτε από τους τρεις γύρους;

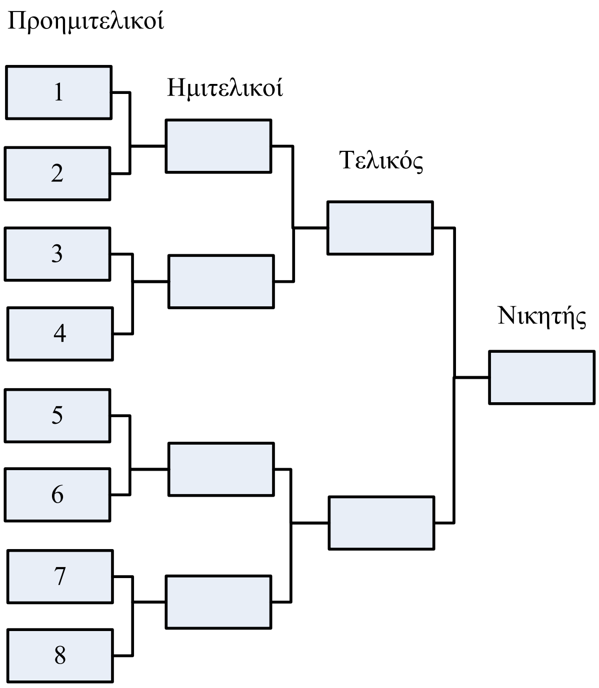
   (γ΄) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η κλήρωση στον πρώτο γύρο, αν δεν μας νοιάζει η σειρά που παίζουν οι ομάδες σε ένα αγώνα, σε οποιοδήποτε στάδιο του διαγωνισμού;

6. **(Survivor)** Δύο ομάδες, η A και η B, δίνουν διαδοχικούς αγώνες που λήγουν με τη νίκη της ομάδας A με πιθανότητα p ή τη νίκη της ομάδας B με πιθανότητα $1-p$, ανεξάρτητα από τους άλλους αγώνες. Νικά η ομάδα που θα κάνει πρώτη 10 νίκες. Να γράψετε ένα σύστημα εξισώσεων που μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα να κερδίσει η ομάδα A, χρησιμοποιώντας δεσμευμένες πιθανότητες. ΜΗΝ λύσετε το σύστημα.

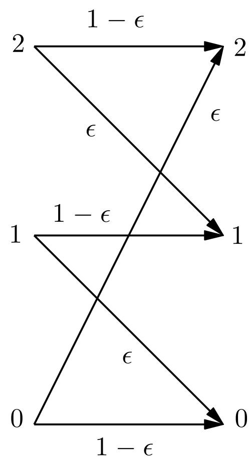
7. **(Τριαδικό Κανάλι)** Στο Σχήμα 2 έχουμε σχεδιάσει ένα μαθηματικό μοντέλο για το τριαδικό κανάλι επικοινωνίας. Σε αυτό το κανάλι, δεν μεταδίδουμε μόνο δύο σύμβολα, όπως γίνεται συνήθως (το 0 και το 1), αλλά τρία, το 0, το 1, και το 2. Τα σύμβολα εισόδου 0, 1, 2 εμφανίζονται με πιθανότητες $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{2}$ αντιστοίχως, και μεταδίδονται μέσω του καναλιού. Δυστυχώς, στο κανάλι γίνονται σφάλματα, λόγω θορύβου. Συγκεκριμένα, με πιθανότητα $1-\epsilon$ μεταδίδεται το σωστό σύμβολο, και με πιθανότητα ϵ κάποιο λάθος, όπως φαίνεται στο σχήμα.

   (α΄) Βρείτε τις πιθανότητες με τις οποίες εμφανίζονται τα σύμβολα στην έξοδο.

   (β΄) Έστω ότι παρατηρήσαμε 1 στην έξοδο. Ποια είναι η πιθανότητα η είσοδος να ήταν 0; 1; 2;



Σχήμα 1: Το τουρνουά της Άσκησης 5.



Σχήμα 2: Άσκηση 7.

8. **(Στίγμα)** Από το σύνολο κάποιου πληθυσμού, το 1% των ατόμων έχει το γενετικό στίγμα κάποιας εν μέρει κληρονομικής ασθένειας. Αν και οι δύο γονείς έχουν το στίγμα, κάθε παιδί τους έχει πιθανότητα 50% να έχει το στίγμα. Αν μόνο ένας από τους δύο γονείς έχει το στίγμα, κάθε παιδί τους έχει πιθανότητα 2% να έχει το στίγμα. Αν δεν έχει το στίγμα κανένας από τους δύο, τότε δεν το έχει και το παιδί. Υποθέτουμε ότι η κληρονομικότητα είναι ανεξάρτητη από παιδί σε παιδί είτε έχουν οι γονείς το στίγμα είτε όχι, και ότι οι γονείς έχουν το στίγμα ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο. (Παρατηρήστε ότι το τελευταίο μπορεί αν μην ισχύει σε αντίστοιχες πραγματικές περιπτώσεις, καθώς ζεύγη ατόμων που έχουν και οι δύο το στίγμα μπορεί να αποθαρρύνονται από το να κάνουν παιδιά.)

   (α΄) Ποια η πιθανότητα τα δύο παιδιά ενός ζευγαριού στο οποίο μόνο ο ένας γονιός έχει το στίγμα, να έχουν και τα δύο το στίγμα;

   (β΄) Αν δεν γνωρίζουμε τίποτα για τους γονείς, ποια η πιθανότητα τα δύο παιδιά ενός τυχαίου ζευγαριού να έχουν και τα δύο το στίγμα;

   (γ΄) Αντίστροφα, δεδομένου ότι διαπιστώνουμε πως και τα δύο παιδιά ενός ζευγαριού έχουν το στίγμα, ποια η πιθανότητα ακριβώς ένας γονιός (οποιοσδήποτε από τους δύο) να έχει το στίγμα; Ποια η πιθανότητα να έχουν το στίγμα και οι δύο;

2η Ομάδα Ασκήσεων

9. **(Κολοκύθες)** Κάθε εβδομάδα, ένα μανάβης έχει X πελάτες που ζητούν να αγοράσουν μια κολοκύθα, εφόσον έχουν μείνει απούλητες κολοκύθες, όπου η Τ.Μ. X έχει την ακόλουθη συνάρτηση μάζας πιθανότητας:

$$p_X(x) = \frac{9-x}{10}, \quad x = 5, 6, 7, 8.$$

Στην αρχή της εβδομάδας ο μανάβης αγοράζει κολοκύθες προς 2 ευρώ τη μια, ενώ κατά τη διάρκεια της εβδομάδας τις πουλά προς 4 ευρώ τη μία. Στο τέλος της εβδομάδας ο μανάβης πετά όσες κολοκύθες του έχουν απομείνει. Αν ο μανάβης θέλει να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο ΚΑΘΑΡΟ κέρδος του, πόσες κολοκύθες πρέπει να αγοράσει στην αρχή της εβδομάδας; *(Υπόδειξη: υπολογίστε τα αναμενόμενα καθαρά κέρδη του μανάβη αν αγοράσει στην αρχή της εβδομάδας x κολοκύθες, με $x = 5, 6, 7, 8$, και συγκρίνετέ τα.)*

10. **(Magic: The Gathering)** Έχουμε ένα σετ από 60 διαφορετικές κάρτες Magic: The Gathering, εκ των οποίων η μια είναι η Firefly και άλλη μια η Magmasaur. Έστω το ακόλουθο πείραμα: επιλέγω στην τύχη 2 κάρτες από τις 60, χωρίς επανάθεση, και χωρίς κάποια προτίμηση στον συνδυασμό των καρτών που θα επιλέξω.

Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

(α΄) Ποια είναι η πιθανότητα στην επιλογή μου να υπάρχει η Firefly;

(β΄) Ποια είναι η πιθανότητα η επιλογή μου να αποτελείται από την Firefly **και** την Magmasaur;

(γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα η επιλογή μου να περιλαμβάνει την Firefly **ή** την Magmasaur (και ενδεχομένως και τις δύο);

(δ΄) Δώστε ένα τύπο (χωρίς να κάνετε τις πράξεις) που να δίνει **επακριβώς** την πιθανότητα να βρω την Firefly ακριβώς 5 φορές αν επαναλάβω το πείραμα 100 φορές, και τα επαναλαμβανόμενα πειράματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

11. **(Πίτσες και μακαρονάδες)** Ένας οικοδεσπότης ετοιμάζεται να υποδεχτεί 20 καλεσμένους για φαγητό. Κάθε καλεσμένος με την άφιξή του θα θελήσει να φάει πίτσα με πιθανότητα $p = 0.6$ και μακαρονάδα με πιθανότητα $1-p = 0.4$, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Ο οικοδεσπότης, προκειμένου να μην χρονοτριβήσουν, παραγγέλνει από πριν 16 πίτσες και 12 μακαρονάδες. Ποια είναι η πιθανότητα να μην μπορούν να φάνε όλοι το φαγητό της επιλογής τους;

12. **(Κυνήγι Χήνας)** Δύο κυνηγοί, ο A και ο B, κυνηγούν χήνες με τον ακόλουθο τρόπο: οι χήνες εμφανίζονται διαδοχικά, και όποτε εμφανίζεται μια, την πυροβολούν και οι δύο ταυτόχρονα. Ο A πετυχαίνει την χήνα με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, ενώ ο B την πετυχαίνει με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Τα αποτελέσματα των πυροβολισμών είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Η χήνα σκοτώνεται αν την πετύχει έστω ένας, και επιζεί αν αστοχήσουν και οι δύο. Επειδή οι πυροβολισμοί είναι ταυτόχρονοι, αν η χήνα σκοτωθεί κανείς από τους A και B δεν είναι σίγουρος ότι όντως την πέτυχε.

(α΄) Από τις χήνες που εμφανίζονται, τι ποσοστό γλιτώνει, και τι ποσοστό χτυπιέται και από τους δύο;

(β΄) Με δεδομένο ότι μια χήνα έχει χτυπηθεί, ποια είναι η πιθανότητα ότι την πέτυχε ο A μόνο;

(γ΄) Αν εμφανιστούν συνολικά 100 χήνες, ποια είναι η πιθανότητα να επιβιώσουν ακριβώς 10;

(δ΄) Αν έχουν εμφανιστεί 5 χήνες και έχουν όλες επιβιώσει, ποια είναι η πιθανότητα η πρώτη που θα σκοτωθεί να είναι η 8η;

13. **(Λαχειοφόρος αγορά)** Σε μια λαχειοφόρο αγορά υπάρχουν 10 λαχνοί, εκ των οποίων κερδίζουν οι δύο, από ένα δώρο ο καθένας (τα δύο δώρα είναι πανομοιότυπα). Δύο άτομα αγοράζουν από δύο λαχνούς ο καθένας. Έστω $X, Y \in \{0, 1, 2\}$ το πλήθος των δώρων που κερδίζει ο καθένας.

(α΄) Να υπολογίσετε την από κοινού μάζα πιθανότητας $p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y)$, για κάθε $x \in \{0, 1, 2\}$, $y \in \{0, 1, 2\}$. Αποτυπώστε τη σε ένα πίνακα 3×3.

(β΄) Βάσει του προηγούμενου σκέλους, ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου A να πάρουν και τα δύο δώρα οι δύο διαγωνιζόμενοι; Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου B ένας (οποιοσδήποτε) από τους δύο να πάρει και τα δύο δώρα; Επίσης, υπολογίστε τις μάζες $p_X(x)$, $p_Y(y)$, τις μέσες τιμές $E(X)$, $E(Y)$, και την συνδιακύμανση $\mathrm{COV}(X, Y)$.

Δώστε όλα τα αποτελέσματα σε μορφή απλών κλασμάτων.

14. **(Το πρόβλημα του συλλέκτη κουπονιών)** Υποθέτουμε ότι υπάρχουν n είδη διαφορετικών κουπονιών, και κάθε φορά που κάποιος αγοράζει ένα κουπόνι, αυτό μπορεί να είναι ισοπίθανα οποιοδήποτε από τα n διαφορετικά είδη. Ποια είναι η μέση τιμή του αριθμού κουπονιών που πρέπει να αγοράσει κανείς ώστε να έχει συλλέξει ένα κουπόνι από κάθε είδος;

15. **(Η μέθοδος του ανεμιστήρα)** Ένας διδάσκων διορθώνει γραπτά τελικών εξετάσεων Πιθανοτήτων με τη μέθοδο του ανεμιστήρα. Συγκεκριμένα, αφήνει κάθε γραπτό μπροστά από ένα ανεμιστήρα. Το γραπτό πέφτει στο πάτωμα σε απόσταση X από τον διδάσκοντα, που μοντελοποιείται ως Τ.Μ. με την ακόλουθη πυκνότητα:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{v} e^{-x/v}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Η τιμή v είναι μια παράμετρος που εξαρτάται από την ένταση του ανεμιστήρα. Αν $X \geq 10$, τότε ο βαθμός Y που λαμβάνει ο φοιτητής είναι 10. Αλλιώς, ο βαθμός που λαμβάνει ο φοιτητής είναι το ακέραιο μέρος $\lfloor X \rfloor$ του X, δηλαδή ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος του X. Επομένως, δεν επιτρέπονται ημιακέραιοι βαθμοί. Ο φοιτητής περνά το μάθημα αν πάρει βαθμό 5 και άνω.

(α΄) Αν ο διδάσκων θέλει να περάσει ακριβώς το 10% των φοιτητών, πόση πρέπει να είναι η τιμή του v;

(β΄) Να δώσετε μια μαθηματική έκφραση για την πιθανότητα $P(Y = k)$, για κάθε ένα $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

16. **(Delivery)** Είστε στο σπίτι σας και εσείς και οι καλεσμένοι σας έχετε παραγγείλει κοτόπουλο από το εστιατόριο Α και πίτσα από το εστιατόριο Β. Θεωρήστε ότι δώσατε και τις δύο παραγγελίες την ίδια χρονική στιγμή. Ο χρόνος παράδοσης είναι τυχαίος και ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 30 για το εστιατόριο Α και την εκθετική κατανομή με παράμετρο 20 για το εστιατόριο Β. (Οι χρόνοι αυτοί θεωρήστε ότι είναι ανεξάρτητοι.)

(α΄) Πόσο θα περιμένετε κατά μέσο όρο μέχρι να αρχίσετε το γεύμα σας; Για λόγους ευγένειας αρχίζετε το γεύμα μόλις παραδοθούν και οι δύο παραγγελίες. *(Υπόδειξη: εάν X_A, X_B οι χρόνοι παράδοσης από τα εστιατόρια Α και Β αντίστοιχα, πρώτα βρείτε τη συνάρτηση κατανομής της* $\max(X_A, X_B)$*, έπειτα την πυκνότητα και τέλος υπολογίστε τη μέση τιμή.)*

(β΄) Εάν δεν περιμένετε και τις δύο παραγγελίες για να αρχίσετε το γεύμα, πόσος κατά μέσο όρο χρόνος θα περάσει μέχρι να φάνε οι «τυχεροί» των οποίων η παραγγελία παραδίδεται πρώτη;

17. **(Δύο εξετάσεις)** Ένας υποψήφιος για εισαγωγή σε μια στρατιωτική σχολή πρέπει να δώσει δύο εξετάσεις, μια φυσικών ικανοτήτων και μια νοητικών ικανοτήτων. Έστω X, Y τα αποτελέσματα στις δύο εξετάσεις, όπου, λόγω κανονικοποίησης, δίνεται ότι $0 \leq X, Y \leq \pi/2$. Έστω πως η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας των δύο εξετάσεων είναι η ακόλουθη:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos(x - y), & 0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{αλλού}. \end{cases}$$

(α΄) Υπολογίστε τις περιθώριες πυκνότητες $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

(β΄) Είναι οι X, Y, ανεξάρτητες;

(γ΄) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(\pi/4 \leq X, Y \leq \pi/2)$.

18. **(Wololo)** Κάθε μοναχός έχει την ικανότητα να προσηλυτίζει έναν ιππότη μετά από κατήχηση διάρκειας X η οποία είναι συνεχής Τ.Μ. με πυκνότητα

$$f_X(x) = \begin{cases} (x - 2)/2, & x \in [2, 4], \\ 0, & x \notin [2, 4]. \end{cases}$$

(α΄) Ποια είναι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F_X(x)$ και η μέση τιμή $E(X)$ της X;

(β΄) Πέντε μοναχοί επιχειρούν να προσηλυτίσουν ένα ιππότη, και οι χρόνοι κατήχησης που απαιτούνται για τον καθένα είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και ακολουθούν την πυκνότητα του προηγούμενου σκέλους. Οι κατηχήσεις και των 5 ξεκινάνε ταυτόχρονα. Έστω Y ο χρόνος μεταξύ της έναρξης της κατήχησης και του πρώτου προσηλυτισμού. Ποια είναι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας του Y;

19. **(Καρέκλες)** Στο πανηγύρι του Σωτήρος του Ζυγοβιστίου ο έφορος της εκκλησίας φροντίζει για την προμήθεια καρεκλών. Ο έφορος γνωρίζει ότι υπάρχουν 1000 Ζυγοβιστινοί, καθένας εκ των οποίων θα επισκεφθεί το πανηγύρι ανεξάρτητα από τους άλλους, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Πόσες καρέκλες πρέπει να προμηθευτεί ο έφορος, ώστε η πιθανότητα να έχουν όλοι όσοι έρθουν καρέκλα να υπερβαίνει το 99%; Αρκεί να δώσετε μια μαθηματική έκφραση, χωρίς να υπολογίσετε ακριβή τιμή.

20. **(Καρπούζια)** Ένα ανοιχτό φορτηγάκι μπορεί να αντέξει συνολικά 3000 κιλά φορτίου πριν πάθει βλάβη. Το βάρος κάθε καρπουζιού από μια καλλιέργεια είναι Τ.Μ. με μέση τιμή 15 κιλά και τυπική απόκλιση 1 κιλό. Έστω N_0 το μέγιστο πλήθος των καρπουζιών που μπορούμε να φορτώσουμε στο φορτηγάκι ώστε η πιθανότητα να υπερβεί το βάρος τους τα 3000 κιλά να είναι μικρότερη από 10^{-4}. Βρείτε μια συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί το N_0. Η συνθήκη μπορεί να εμφανίζει τη συνάρτηση $\Phi(\cdot)$.

3η Ομάδα Ασκήσεων

21. **(Δεσμευμένη πιθανότητα)** Έστω συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X, Y με από κοινού πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}, & 0 < x, y < \infty, \\ 0, & \text{αλλού}. \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X > 1|Y = y)$.

22. **(Έλλειψη μνήμης)** Έστω τυχαία μεταβλητή X, κατανεμημένη εκθετικά, με παράμετρο λ:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(α΄) Βρείτε την $F_X(x|X > t)$. Πως ακριβώς διαφέρει η $F_X(x|X > t)$ από την $F_X(x)$?

(β΄) Βρείτε την $f_X(x|X > t)$.

(γ΄) Δείξτε ότι $P(X > t + x|X > t) = P(X > x)$. Εξηγήστε γιατί αυτή η ιδιότητα αποκαλείται η ιδιότητα της *έλλειψης μνήμης*.

23. **(Εξαρτημένες γκαουσιανές μεταβλητές)** Έστω η από κοινού κατανομή πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y

$$f_{X,Y}(x,y) = c\, e^{-(x^2+2xy+2y^2)}, \quad x, y \in R,$$

όπου $c > 0$ γνωστή σταθερά. Προσδιορίστε τη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $f_{X|Y}(x|y)$. Ποια κατανομή προκύπτει? Είναι οι X, Y ανεξάρτητες? *(Υπόδειξη: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+y)^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.)*

24. **(Υπολογισμός δεσμευμένων πυκνοτήτων)** Η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y είναι

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{αλλού}. \end{cases}$$

(α΄) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πυκνότητα πιθανότητας $f_{X|Y}(x,y)$, για $0 < x, y < 1$.

(β΄) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πυκνότητα πιθανότητας $f_{Y|X}(y,x)$, για $0 < x, y < 1$.

(γ΄) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P\left[\frac{1}{3} < Y \leq \frac{1}{2}|X \simeq \frac{2}{3}\right]$.

(δ΄) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες?

25. **(Υπολογισμός δεσμευμένων μαζών)** Βρείτε τις δεσμευμένες συναρτήσεις μάζας πιθανότητας της Y δεδομένου ότι $X = -1$, για τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις.

	X		
Y	-1	0	1
-1	$1/6$	0	$1/6$
0	0	$1/3$	0
1	$1/6$	0	$1/6$

	X		
Y	-1	0	1
-1	$1/9$	$1/9$	$1/9$
0	$1/9$	$1/9$	$1/9$
1	$1/9$	$1/9$	$1/9$

	X		
Y	-1	0	1
-1	0	0	$1/3$
0	0	$1/3$	0
1	$1/3$	0	0

26. **(n ταμίες)** Ένας πελάτης μπαίνει σε ένα κατάστημα και εξυπηρετείτε από τον ταμεία I, όπου $I = i$ με πιθανότητα p_i και $i = 1, \ldots, n$. Ο χρόνος που χρειάζεται ο ταμίας i για να ολοκληρώσει την εξυπηρέτηση είναι μια εκθετικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή με παράμετρο (ρυθμό) α_i.

(α΄) Βρείτε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου T που χρειάζεται ένας πελάτης για να εξυπηρετηθεί *(Υπόδειξη: Θα έχει τη μορφή αθροίσματος)*.

(β΄) Βρείτε την $E[T]$ και την $\mathrm{VAR}[T]$. *(Υποδείξεις: Δεν χρειάζεστε το προηγούμενο σκέλος. Η τιμή της $E[T]$ είναι διαισθητικά προφανής. Για τον υπολογισμό της $\mathrm{VAR}[T]$, χρησιμοποιήστε τη σχέση $\mathrm{VAR}[T] = E[T^2] - (E[T])^2$.)*

27. **(Τυχαία μεταβλητή με παράμετρο άλλη τυχαία μεταβλητή)** Ο αριθμός των ελαττωμάτων N σε ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα VLSI είναι τυχαία μεταβλητή Poisson με παράμετρο R. Η παράμετρος R, με τη σειρά της, είναι τυχαία μεταβλητή Γάμμα, με παραμέτρους α και λ. (Συνεπώς, κατά τα γνωστά για την κατανομή Γάμμα, $E[R] = \frac{\alpha}{\lambda}$, $E[R^2] = \frac{\alpha}{\lambda^2} + \frac{\alpha^2}{\lambda^2}$.)

(α΄) Να βρεθεί η συνάρτηση μάζας πιθανότητας του αριθμού των ελαττωμάτων N.

(β΄) Χρησιμοποιήστε γνωστές σχέσεις για την υπό συνθήκη μέση τιμή για να υπολογίσετε τις $E[N]$ και $\mathrm{Var}[N]$. *(Υπόδειξη:* $\mathrm{VAR}[N] = E[N^2] - (E[N])^2$*.)*

28. **(Άλλη μια τυχαία μεταβλητή με παράμετρο μια άλλη τυχαία μεταβλητή)** Η διάρκεια ζωής X μιας συσκευής είναι εκθετικά κατανεμημένη με μέση τιμή $\frac{1}{R}$. Υποθέτουμε ότι λόγω μη προβλέψιμων ανωμαλιών στην διαδικασία παραγωγής, η παράμετρος R είναι επίσης τυχαία, και ακολουθεί την κατανομή Γάμμα.

    (α΄) Βρείτε την από κοινού πυκνότητα πιθανότητας των X και R.

    (β΄) Βρείτε την πυκνότητα πιθανότητα της X.

    (γ΄) Βρείτε τη μέση τιμή και την διασπορά της X, χωρίς να κάνετε χρήση του προηγούμενου σκέλους.

29. **(Άθροισμα με τυχαίο αριθμό τυχαίων όρων)** Έστω η ακολουθία ανεξάρτητων πραγματικών τυχαίων μεταβλητών $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$, που ακολουθούν την ίδια κατανομή πιθανότητας. Έστω η μη αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή N, που είναι ανεξάρτητη των $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$Z = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

    Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[Z]$ και τη διασπορά $\mathrm{VAR}[Z]$ συναρτήσει των $E[X_1]$, $E[N]$, $\mathrm{VAR}[X_1]$, $\mathrm{VAR}[N]$.

30. **(Poisson τυχαίες μεταβλητές Bernoulli)** Θεωρούμε μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}$, όπου $n = 1, 2, \ldots$, με την ίδια συνάρτηση μάζας πιθανότητας Bernoulli, δηλαδή

$$P(X_n = 1) = p = 1 - P(X_n = 0), \quad 0 < p < 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

    και την τυχαία μεταβλητή N που ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ, και είναι ανεξάρτητη των $\{X_n,\ n = 1, 2, ...\}$. Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές

$$Y \triangleq \sum_{i=1}^{N} X_i, \quad Z \triangleq N - Y.$$

    Προσδιορίστε τις συναρτήσεις μάζας πιθανότητας των Y και Z. Ποιες κατανομές προκύπτουν?

4η Ομάδα Ασκήσεων

31. **(Τυχαίος Περίπατος σε Γράφο)** Ένα σωματίδιο εκτελεί τυχαίο περίπατο στις κορυφές ενός συνεκτικού γράφου. Για απλότητα, υποθέτουμε ότι κάθε ζεύγος κορυφών συνδέεται με το πολύ μια ακμή, και πως μια κορυφή δεν είναι ποτέ συνδεδεμένη με τον εαυτό της. Όταν το σωματίδιο είναι σε μια ακμή, επιλέγει την επόμενη που θα επισκεφτεί ανάμεσα σε όλες τις γειτονικές, με ίσες πιθανότητες. Έστω $N < \infty$ ο συνολικός αριθμός κορυφών. Συμβολίζουμε τις κορυφές με τους ακεραίους $1, 2, \ldots, N$. Αν υποθέσουμε ότι ο συνολικός αριθμός ακμών είναι η, και πως όλες οι προϋποθέσεις ύπαρξης στατικής κατανομής ικανοποιούνται, τότε να δειχθεί ότι η στατική κατανομή δίνεται από την εξίσωση $\pi_i = \frac{d_i}{2\eta}$, $i = 1, \ldots, N$, όπου d_i είναι ο βαθμός της κορυφής i, δηλαδή ο αριθμός των γειτονικών κορυφών της.

32. **(Φιδάκι)** Το παιχνίδι «Φιδάκι» (στα αγγλικά «Snakes and Ladders») παίζεται ως εξής: έχουμε ένα ταμπλό από n διαδοχικά τετράγωνα αριθμημένα ως $1, \ldots, n$. Ο παίχτης τοποθετεί αρχικά το πιόνι του στο τετράγωνο 1 και σε κάθε γύρο ρίχνει ένα ζάρι. Αν φέρει j και είναι στη θέση i, μετακινεί το πιόνι του στη θέση $i + j$. Υπάρχουν όμως οι ακόλουθες εξαιρέσεις:

    (α΄) Αν η θέση $i + j$ ενώνεται με ένα φιδάκι με μια θέση $k < i + j$, τότε το πιόνι αυτόματα μεταφέρεται στη θέση k. Άρα τα φιδάκια μας δυσκολεύουν να προχωρήσουμε μπροστά.

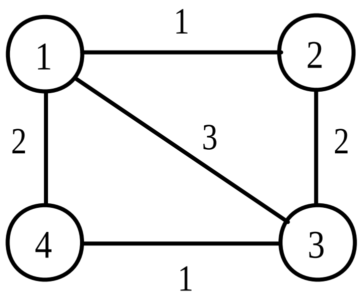
    (β΄) Αν η θέση $i + j$ ενώνεται με μια σκάλα με μια θέση $k > i + j$, τότε το πιόνι αυτόματα μεταφέρεται στη θέση k. Άρα οι σκάλες βοηθούν να προχωρήσουμε μπροστά.

    (γ΄) Αν είμαστε στη θέση $i > n - 6$, τότε αν φέρουμε ζαριά j τέτοια ώστε $i + j \geq n$, μεταφερόμαστε στη θέση n.

    Το παιχνίδι τελειώνει όταν φτάσουμε στη θέση n. Αν παίζουν k παίκτες, κερδίζει όποιος φτάσει στη θέση n με τις λιγότερες ζαριές.

    Παράδειγμα ενός ταμπλό παιχνιδιού είναι το ταμπλό του Σχήματος 3. (Στο συγκεκριμένο ταμπλό, οι θέσεις 43, 52, 16, και 59 περιέχουν διακοσμητικές ζωγραφιές που δεν επηρεάζουν το παιχνίδι.)

Σχήμα 3: Άσκηση 32.



Σχήμα 4: Άσκηση 34.

(α΄) Εξηγήστε γιατί το παιχνίδι μπορεί να μοντελοποιηθεί ως αλυσίδα Markov.

(β΄) Ποιά είναι η αλυσίδα Markov που αντιστοιχεί στο ταμπλώ του Σχήματος 3? (Δώστε μερικές ενδεικτικές τιμές του πίνακα μεταβάσεων.) Ποιές είναι οι κλάσεις από τις οποίες αποτελείται η συγκεκριμένη αλυσίδα? Είναι μεταβατικές ή επαναληπτικές?

(γ΄) Να υλοποιήσετε πρόγραμμα που θα λαμβάνει ως είσοδο ένα ταμπλώ και να υπολογίζει την κατανομή του αριθμού των ζαριών X που χρειάζεται ένας παίκτης για να τελειώσει. Σχεδιάστε την κατανομή για το ταμπλώ του Σχήματος 3.

33. **(Δεσμευμένη πιθανότητα για την παρελθούσα κατάσταση)** Μια αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου έχει τις τρεις καταστάσεις $0, 1, 2$, και πίνακα μεταβάσεων

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Μετά από την εκτέλεση ενός πολύ μεγάλου αριθμού μεταβάσεων, παρατηρούμε την αλυσίδα και την βρίσκουμε στην κατάσταση 1. Ποιά είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι η αλυσίδα ήταν στην κατάσταση 2 κατά την προηγούμενη χρονική στιγμή? *(Υπόδειξη: πρέπει να υπολογισθεί το* $\lim_{n\to\infty} P(X_{n-1} = 2|X_n = 1)$*.)*

34. **(Αλυσίδες Markov πάνω σε γράφους)**

(α΄) Έστω ο γράφος του Σχήματος 4, πάνω στον οποίο υποθέτουμε ότι κινείται ένα άτομο ως εξής: όταν βρίσκεται σε ένα κόμβο επιλέγει τον επόμενο κόμβο που θα επισκεφτεί ανεξάρτητα από που ήταν πριν, και με πιθανότητα ανάλογη του βάρους της ακμής που ενώνει τους δύο κόμβους. Για παράδειγμα, αν το άτομο βρίσκεται στον κόμβο 2, αποκλείεται να επισκεφτεί τον κόμβο 4, ενώ η πιθανότητα να επισκεφτεί τον κόμβο 3 είναι διπλάσια της πιθανότητας να επισκεφτεί τον κόμβο 1. Να καταγράψετε τον πίνακα μεταβάσεων της διακριτής αλυσίδας Markov που δημιουργείται. Έχει η αλυσίδα μόνιμη κατάσταση? Αν ναι, υπολογίστε τις οριακές πιθανότητες π_i. *(Υπόδειξη: για να μειώσετε τις πράξεις που απαιτούνται, παρατηρήστε ότι, λόγω συμμετρίας, ορισμένες οριακές πιθανότητες πρέπει να είναι ίσες μεταξύ τους.)*

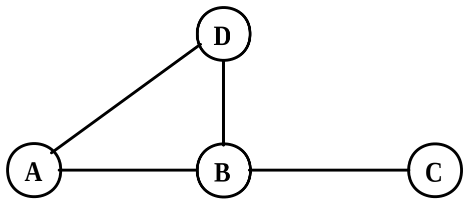
(β΄) Μπορείτε να γενικεύσετε το αποτέλεσμά σας για *οποιονδήποτε* γράφο όπου δύο κόμβοι i, j συνδέονται με ακμή βάρους w_{ij}, εφόσον αυτός ο γράφος ικανοποιεί τις συνθήκες για να έχει οριακές πιθανότητες? *(Υπόδειξη: το ευκολότερο είναι να μαντέψετε το αποτέλεσμα, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο σκέλος για έμπνευση, και κατόπιν να το επαληθεύσετε.)*

35. **(Υπολογισμός οριακών πιθανοτήτων)** Δίνεται ο παρακάτω πίνακας μετάβασης μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας διακριτού χρόνου τριών καταστάσεων:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Ικανοποιούνται οι συνθήκες για την ύπαρξη οριακών πιθανοτήτων? Εξηγήστε. Μακροπρόθεσμα, τι ποσοστό του χρόνου βρίσκεται η αλυσίδα σε κάθε μία από τις τρεις καταστάσεις?

36. **(Απλό σιδηροδρομικό δίκτυο)** Οι τέσσερεις πόλεις A, B, C, D, ενώνονται μέσω σιδηρόδρομου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5, και εξυπηρετούνται από ένα τρένο. Κάθε πρωί, σε οποιαδήποτε πόλη και αν βρίσκεται, το τρένο επιλέγει



Σχήμα 5: Άσκηση 36

τυχαία και ισοπίθανα μία από τις γραμμές που εγκαταλείπουν την πόλη και την χρησιμοποιεί για να επισκεφθεί μια από τις γειτονικές πόλεις, όπου και διανυκτερεύει. Υποθέτωντας ότι το τρένο ακολουθεί αυτό τον κανόνα εδώ και πολλές μέρες, να υπολογισθεί η πιθανότητα το τρένο να βρεθεί σήμερα στην πόλη D.

37. **(Διπλά Στοχαστικοί Πίνακες)** Ένας πίνακας μεταβάσεων **P** καλείται **διπλά στοχαστικός** αν το άθροισμα όλων των *στηλών* του ισούται με τη μονάδα, δηλαδή

$$\sum_i P_{ij} = 1, \;\; \forall j.$$

(α΄) Έστω αδιαχώριστη απεριοδική αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων $M+1$, έστω $0, 1, 2, \ldots, M$. Να δείξετε ότι αν ο πίνακας μεταβάσεων που την περιγράφει είναι διπλά στοχαστικός, τότε οι οριακές της πιθανότητες είναι όλες ίσες μεταξύ τους.

(β΄) Σαν ειδική περίπτωση του άνω σκέλους, έστω το εξής πρόβλημα: Ρίχνουμε διαδοχικά ένα δίκαιο ζάρι, και προσθέτουμε τα αποτελέσματα. Έστω X_n οι διαδοχικές ζαριές και $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ τα διαδοχικά αθροίσματα, όπου $n = 1, 2, \ldots$. Κατασκευάστε κατάλληλη αλυσίδα Markov, ορίζοντας πλήρως τις καταστάσεις της και τον πίνακα μεταβάσεων της, και χρησιμοποιήστε τη για να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} P[Y_n = \text{πολλαπλάσιο του } 13].$$

(γ΄) Αν το ζάρι δεν ήταν δίκαιο, αλλά είχαμε ότι

$$P(X_i = l) = p_l, \;\; l = 1, \ldots, 6, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

θα άλλαζε το αποτέλεσμα? Πότε και γιατί? Απαντήστε αυτό το σκέλος μόνο διαισθητικά, χωρίς πράξεις.

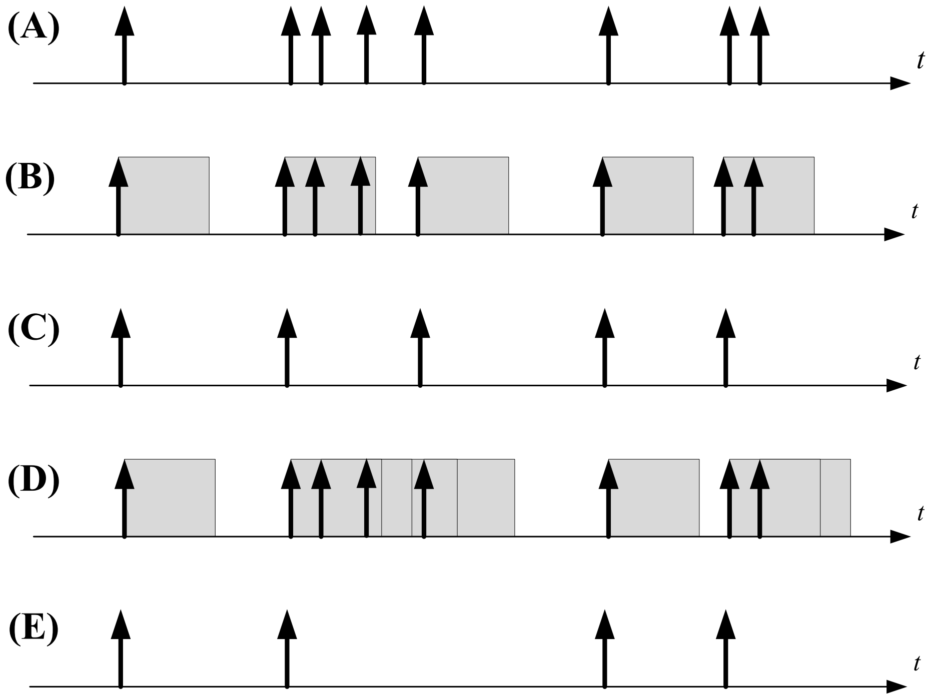
38. **(«ο διαιτητής κ. Δαρμένος»)** Κάθε φορά που μια ομάδα ποδοσφαίρου κερδίζει ένα παιχνίδι, κερδίζει και το επόμενο με πιθανότητα 0.8, λόγω ανεβασμένης ψυχολογίας. Αν το χάσει, κερδίζει το επόμενο με πιθανότητα 0.4, λόγω πεσμένης ψυχολογίας. Στα παιχνίδια που τελικά χάνει, γίνονται επεισόδια με πιθανότητα 0.8, ενώ σε αυτά που κερδίζει, γίνονται επεισόδια με πιθανότητα 0.1. Σε τι ποσοστό παιχνιδιών γίνονται επεισόδια?

5η Ομάδα Ασκήσεων

39. **(Μεταμόσχευση Νεφρού)** Δύο ασθενείς A και B χρειάζονται μεταμόσχευση νεφρού. Αν δεν λάβουν νέο νεφρό, ο ασθενής A θα αποβιώσει μετά από χρόνο εκθετικά κατανεμημένο με μέση τιμή $\frac{1}{\mu_A}$, και ο ασθενής B θα αποβιώσει μετά από εκθετικά κατανεμημένο χρόνο με μέση τιμή $\frac{1}{\mu_B}$. Διαθέσιμα νεφρά έρχονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Έχει αποφασισθεί ότι το πρώτο νεφρό θα δοθεί στον A, εκτός αν αποβιώσει, οπότε το πρώτο νεφρό παίρνει ο B. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες επιβίωσης των A και B.

40. **(Χαρακτηριστική συνάρτηση και συνδιακύμανση στην διαδικασία Poisson)** Έστω $\{N(t),\; t \geq 0\}$ τυχαία διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων $\lambda > 0$. Υπολογίστε τη χαρακτηριστική συνάρτηση $E[e^{i\theta N(t)}]$, όπου $t \geq 0$, i η φανταστική μονάδα, και $\theta \in \mathbf{R}$, και τη συνδιακύμανση COV$[N(t_1), N(t_2)]$, όπου $t_1, t_2 \geq 0$. *(Υπόδειξη: υποθέστε ότι $t_1 \leq t_2$, και χρησιμοποιήστε την ανεξαρτησία των αφίξεων που συμβαίνουν σε διακριτά διαστήματα.)*

41. **(Μετρητής Geiger)** Ένας μετρητής Geiger χρησιμοποιείται για την παρατήρηση μιας πηγής ραδιενέργειας που εκπέμπει σωμάτια άλφα, Τα σωμάτια εκπέμπονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Ο ανιχνευτής παράγει μια (ηχητική) ένδειξη για κάθε σωμάτιο που ανιχνεύει. Λόγω της λειτουργίας του ανιχνευτή, για ένα διάστημα μετά την ανίχνευση του σωμάτιου, ο ανιχνευτής είναι «τυφλός», οπότε και να έρθει ένα σωμάτιο, δεν θα το ανιχνεύσει. Όταν όμως ο ανιχνευτής δεν έχει τυφλωθεί, ανιχνεύει πάντα κάθε σωμάτιο που θα εκπέμψει η πηγή. Ένα παράδειγμα της λειτουργίας φαίνεται στο Σχήμα 6: Στο (A) φαίνεται μια σειρά από αφίξεις σωματιδίων, στο (B) φαίνονται οι «τυφλές» περίοδοι του ανιχνευτή με γκρίζο, και στο (C) φαίνεται η διαδικασία των ηχητικών ενδείξεων.



Σχήμα 6: Άσκηση 41.

(α´) Έχει η διαδικασία των ενδείξεων ανεξάρτητα διαστήματα? Έχει η διαδικασία των ενδείξεων στατικά διαστήματα? Είναι η διαδικασία Poisson? Εξηγήστε με λίγα λόγια.

(β´) Ποια είναι η πυκνότητα πιθανότητας του χρόνου μεταξύ των αφίξεων των ηχητικών ενδείξεων?

(γ´) Τι ποσοστό του χρόνου το χρόνου είναι ο ανιχνευτής τυφλός?

(δ´) Απαντήστε το προηγούμενο ερώτημα, κάνοντας όμως την ακόλουθη τροποποίηση στο μοντέλο του ανιχνευτή: Όταν ο ανιχνευτής είναι τυφλός και έχουμε άφιξη σωματίου, ο χρόνος παραμονής σε αυτή την κατάσταση επεκτείνεται. Ο ανιχνευτής παύει να είναι τυφλός μόνο όταν το τελευταίο σωμάτιο που παράχθηκε από την πηγή ήταν πριν από χρόνο T. Ουσιαστικά, κάθε άφιξη σωματίου ξεκινά τη δικιά της τυφλή περίοδο. Παράδειγμα της λειτουργίας του ανιχνευτή σε αυτή την περίπτωση φαίνεται στο Σχήμα 6. Συγκεκριμένα, αν στο (A) φαίνεται ένα παράδειγμα αφίξεων, στο (D) φαίνονται με γκρίζο οι τυφλές περίοδοι, και στο (E) φαίνονται οι ηχητικές ενδείξεις.

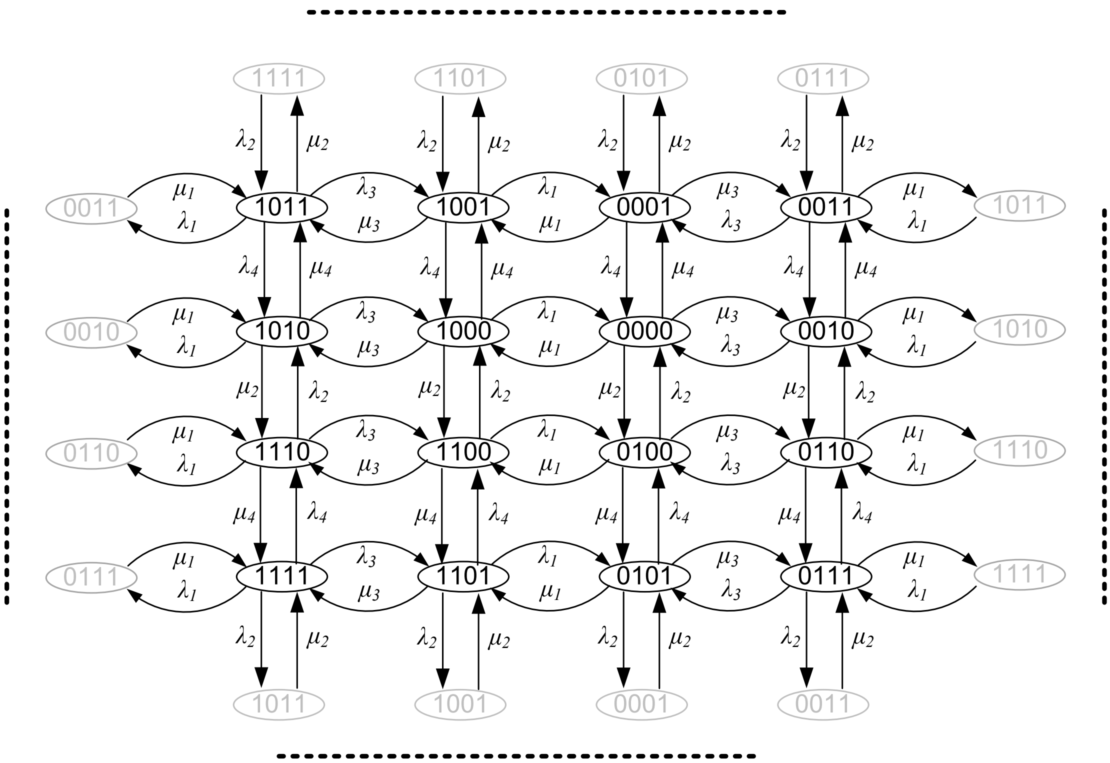
42. **(Τέσσερις Μηχανές)** Τέσσερις μηχανές έχουν τοποθετηθεί σε ένα εργοστάσιο, και λειτουργούν με τον ακόλουθο τρόπο. Η μηχανή i λειτουργεί για χρόνο εκθετικά κατανεμημένο με ρυθμό λ_i, και αφού παύσει να λειτουργεί μπαίνει σε μια κατάσταση επιδιόρθωσης που κρατά επίσης εκθετικό χρόνο, με ρυθμό μ_i. Οι διαδικασίες αυτές για τις 4 μηχανές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Έστω $X_i(t) = 1$ όταν λειτουργεί η μηχανή i και $X_i(t) = 0$ όταν δεν λειτουργεί.

(α´) Σε ποιο ποσοστό του χρόνου λειτουργεί κάθε μια από τις μηχανές? Σε ποιο ποσοστό του χρόνου λειτουργούν ταυτοχρόνως όλες?

(β´) Έστω
$$\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(t), X_4(t)).$$
Εξηγήστε γιατί η διαδικασία είναι αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου. Δείξτε γραφικά την αλυσίδα σε ένα διάγραμμα καταστάσεων, όπου θα φαίνονται όλες οι καταστάσεις και οι ρυθμοί μετάβασης. Βρείτε μια απλή έκφραση για τις οριακές πιθανότητες.

(γ´) Είναι η άνω αλυσίδα αντιστρέψιμη στο χρόνο?

43. **(Ελληνική πιάτσα ταξί)** Σε μια πιάτσα ταξί έρχονται ταξί με ρυθμό μ και πελάτες με ρυθμό λ. Όταν ένα ταξί έρθει και δεν βρει πελάτη να περιμένει, αναχωρεί. Όταν ένα ταξί έρθει και βρει πελάτες, παίρνει τον πρώτο στην ουρά και



Σχήμα 7: Άσκηση 42

μέχρι άλλους 3 πελάτες που έχουν τον ίδιο προορισμό με τον πρώτο πελάτη. Κάθε ένας από τους υπόλοιπους πελάτες έχει τον ίδιο προορισμό με τον πρώτο στην ουρά πελάτη με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τους άλλους πελάτες. Δεν υπάρχει περιορισμός στο πόσοι πελάτες μπορεί να περιμένουν στην πιάτσα.

(α΄) Να μοντελοποιήσετε το σύστημα ως μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου, δείχνοντας τις πιθανότητες μετάβασης.

(β΄) Μπορείτε να μαντέψετε ποια είναι η συνθήκη ώστε να υπάρχει στατική κατανομή; Στα επόμενα σκέλη, να θεωρήσετε την στατική κατανομή γνωστή.

(γ΄) Στην στατική κατανομή, πόσοι πελάτες περιμένουν κατά μέσο όρο στην ουρά όταν έρχεται ένα ταξί;

(δ΄) Πόσο χρόνο κάνει κατά μέσο όρο ένας πελάτης για να μπει σε ταξί;

(ε΄) Τι ποσοστό των ταξί φεύγουν με k πελάτες, όπου $k = 0, 1, 2, 3$;

44. **(Διάδοση κουτσομπολιών)** Σε ένα χωριό με N κατοίκους κάθε ζεύγος κατοίκων συναντάται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, ανεξάρτητα από όλα τα άλλα ζεύγη. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ένας κάτοικος μαθαίνει ένα κουτσομπολιό. Από κει και πέρα, όποτε ένας κάτοικος που ξέρει το κουτσομπολιό συναντά ένα κάτοικο που δεν το ξέρει, του το μεταφέρει.

(α΄) Το μοντέλο των συναντήσεων απλοποιεί την άσκηση, αλλά είναι προβληματικό. Εξηγήστε γιατί και δώστε αντιπαραδείγματα που δείχνουν ότι το μοντέλο είναι κακό.

(β΄) Να μοντελοποιήσετε το πλήθος $X(t)$ των κατοίκων που ξέρουν το κουτσομπολιό ως μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου, προσδιορίζοντας τους ρυθμούς μετάβασης.

(γ΄) Υπάρχει στατική κατανομή; Γιατί;

(δ΄) Να δώσετε μια έκφραση για τον μέσο χρόνο που θα χρειαστεί για να μάθουν όλοι οι κάτοικοι του χωριού το κουτσομπολιό.

45. **(Πληθυσμός Σκύλων)** Ο πληθυσμός των σκύλων που ζουν με μια οικογένεια ανθρώπων ακολουθεί το ακόλουθο μοντέλο: ο **πατέρας** απαγορεύει να υπάρχουν πάνω από 3 σκύλοι ανά πάσα στιγμή. Τα **παιδιά** φέρνουν σκύλους έτσι ώστε ο χρόνος μεταξύ των αφίξεων να είναι εκθετικός, με μέση τιμή $1/10$ του έτους. Η **μαμά** κάνει μαγειρικά ατυχήματα που προκαλούν δηλητηριάσεις στους σκύλους. (Τα μέλη της οικογένειας έχουν ανοσία). Τα μαγειρικά

ατυχήματα είναι σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 8 ανά έτος. Κάθε δηλητηρίαση συνεπάγεται χρηματικό κόστος 50 ευρώ ανά σκύλο, για επίσκεψη στον κτηνίατρο, και είναι θανατηφόρα (παρά την βέβαιη επίσκεψη στον κτηνίατρο) για κάθε σκύλο με πιθανότητα 0.5, ανεξάρτητα από τους άλλους σκύλους. Δίνεται ότι η συντήρηση κάθε σκύλου είναι 10 ευρώ μηνιαίως.

(α΄) Καταστρώστε μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου που να μοντελοποιεί την εξέλιξη του πληθυσμού στην οικογένεια. Πρέπει να φαίνονται όλες οι πιθανές μεταβάσεις, και οι ρυθμοί μετάβασης. Γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας. (Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε με νούμερα τη στατική κατανομή, αρκεί να γράψετε εξισώσεις που να την περιγράφουν πλήρως.)

(β΄) Πόσα δίνει ετησίως κατά μέσο όρο η οικογένεια για τη συντήρηση των σκύλων της και πόσα για τον κτηνίατρο? Κατά μέσο όρο πόσο παραμένει ένας σκύλος στην οικογένεια? Δώστε τις απαντήσεις σας συναρτήσει των πιθανοτήτων της στατικής κατανομής. (Που ΔΕΝ χρειάζεται να έχετε υπολογίσει.) Δώστε μια σύντομη αιτιολόγηση για κάθε απάντηση.

6η Ομάδα Ασκήσεων

46. **(Εξυπηρετητής με διακοπές)** Μια ουρά αναμονής αποτελείται από έναν εξυπηρετητή και K θέσεις αναμονής (συμπεριλαμβανομένης της θέσης του εξυπηρετούμενου). Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί με παράμετρο μ, και οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων είναι επίσης εκθετικοί με παράμετρο λ. Όποτε ο εξυπηρετητής διαπιστώσει ότι δεν υπάρχει πελάτης για να εξυπηρετήσει, περιμένει εκθετικό χρόνο με παράμετρο ν και, εφόσον στο μεταξύ δεν έχει έρθει πελάτης, αναχωρεί για διακοπές συγκεκριμένης (μη τυχαίας) διάρκειας V. Κατά την απουσία του, οι πελάτες που έρχονται συσσωρεύονται στην ουρά αναμονής. Σε κάθε περίπτωση, πελάτες που έρχονται και βρίσκουν K πελάτες στο σύστημα αναχωρούν.

    (α΄) Μπορεί το σύστημα να μοντελοποιηθεί ως αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου; Γιατί;

    (β΄) Μοντελοποιήστε το σύστημα χρησιμοποιώντας μια αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου, και προσδιορίστε όλες τις πιθανότητες μετάβασης.

    (γ΄) Υπάρχει στατική κατανομή; Γιατί; Γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας της άνω αλυσίδας. Μην λύσετε το σύστημα εξισώσεων, και στη συνέχεια θεωρήστε την στατική κατανομή γνωστή.

    (δ΄) Τι ποσοστό του *χρόνου* (και όχι των καταστάσεων της διακριτής αλυσίδας) ο εξυπηρετητής βρίσκεται σε διακοπές; Τι ποσοστό των πελατών βρίσκουν το σύστημα σε διακοπές;

47. **(Αγχωμένος Υπάλληλος)** Σε μια τράπεζα υπάρχει ένας μόνο ταμίας, και συνολικά $< \infty$ θέσης αναμονής (συμπεριλαμβανομένης και της θέσης μπροστά στον ταμία.) Οι αφίξεις πελατών έρχονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda > 0$. Ο ταμίας αγχώνεται εύκολα όταν βλέπει κόσμο, και αυτό έχει ως αποτέλεσμα η απόδοσή του να πέφτει καθώς αυξάνει η ουρά. Συγκεκριμένα, ο ρυθμός εξυπηρέτησης όταν υπάρχουν στο σύστημα n πελάτες είναι μ/n, όπου εννοείται $\mu > 0$.

    (α΄) Να περιγράψετε το σύστημα σαν μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου. Να σημειώσετε όλες τις δυνατές μεταβάσεις, και τους αντίστοιχους ρυθμούς. Υπολογίστε, σε κλειστή μορφή, την πιθανότητα το σύστημα να έχει i πελάτες, όπου $i = 0, \ldots, K$.

    (β΄) Ποιο είναι το ποσοστό των πελατών που καταφτάνουν στην τράπεζα αλλά δεν μπαίνουν επειδή οι θέσεις είναι όλες κατειλημμένες?

    (γ΄) Αν $K = \infty$, δηλαδή υπάρχουν άπειρες θέσεις αναμονής, πότε η αλυσίδα έχει μόνιμη κατάσταση? Εξηγήστε με λόγια.

48. **(Μοντέλο Γραφειοκρατίας)** Έστω τρεις υπηρεσίες του Ελληνικού Δημοσίου, A, B, C, σε ένα υπουργείο. Υποθέτουμε ότι οι αφίξεις πολιτών προς εξυπηρέτηση σε κάθε μια από αυτές γίνεται σύμφωνα με ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς (σε πολίτες ανά μέρα) $r_A = 100$, $r_B = 200$, $r_C = 400$. Οι χρόνοι μεταξύ των αναχωρήσεων από κάθε υπηρεσία, εφόσον υπάρχουν πολίτες, είναι εκθετικοί, με ρυθμούς μ ανά ημέρα και για τις τρεις υπηρεσίες. Οι πολίτες κατά την αποχώρησή τους από μια υπηρεσία είτε μετακινούνται σε άλλη υπηρεσία είτε ολοκληρώνουν την υπόθεσή τους και αποχωρούν. Οι πολίτες που βγαίνουν από την A μετακινούνται στην B με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, στην C με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, και αποχωρούν με πιθανότητα $\frac{1}{3}$. Οι πολίτες που βγαίνουν από την B με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ μετακινούνται στην A, και με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ αποχωρούν. Τέλος, οι πολίτες της C, μετά την αναχώρησή τους, πάντοτε κατευθύνονται στην B.

(α΄) Υπολογίστε τον ρυθμό με τον οποίο έχουμε αφίξεις πολιτών (όλων των ειδών) στις τρεις υπηρεσίες, υποθέτοντας ότι υπάρχει μόνιμη κατάσταση. Να συνυπολογίσετε και τους καινούργιους πολίτες, και αυτούς που έρχονται από άλλες υπηρεσίες.

(β΄) Πόσο πρέπει να είναι το μ για να υπάρχει μόνιμη κατάσταση?

(γ΄) Υποθέτοντας ότι υπάρχει μόνιμη κατάσταση, ποιοι είναι οι μέσοι όροι των πολιτών στις τρεις υπηρεσίες? Ποια υπηρεσία έχει τον περισσότερο κόσμο?

(δ΄) Κατά μέσο όρο, πόσο διαρκεί η παραμονή ενός πολίτη στο υπουργείο?

Για να απαντήσετε τα άνω, μπορείτε να υποθέσετε ότι το σύστημα βρίσκεται στην μόνιμη κατάσταση

49. **(Μια ουρά αναμονής με αποθάρρυνση)** Σε μια ουρά με άπειρες θέσεις αναμονής φτάνουν πελάτες σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson ρυθμού λ. Αν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα, ένας πελάτης μένει με πιθανότητα $\frac{1}{n+1}$, ανεξάρτητα από όλους τους άλλους που ήρθαν ή θα έρθουν. Ο εξυπηρετητής χρειάζεται για κάθε πελάτη εκθετικό χρόνο με ρυθμό $\mu > 0$, ανεξάρτητα από τους άλλους. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης και η διαδικασία των αφίξεων είναι επίσης ανεξάρτητα.

    (α΄) Αν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα, ποια είναι η κατανομή του χρόνου που απομένει μέχρι την επόμενη άφιξη και γιατί?

    (β΄) Εξηγήστε γιατί η διαδικασία $X(t)$ των πελατών μπορεί να μοντελοποιηθεί ως αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου.

    (γ΄) Είναι η αλυσίδα αντιστρέψιμη στο χρόνο? Για ποιες τιμές των λ, μ δεν υπάρχει μόνιμη κατάσταση? Ποια είναι η κατανομή των πελατών στη μόνιμη κατάσταση?

50. **(Μοντελοποίηση Ζωοκλοπής στην Ορεινή Κρήτη)** Έστω τρεις στάνες, A, B, C, στις παρυφές του Ψηλορείτη. Υποθέτουμε ότι οι αφίξεις νέων προβάτων σε κάθε μια από αυτές γίνεται σύμφωνα με ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $\lambda_A = 1,\ \lambda_B = 2,\ \lambda_C = 1$ και οφείλονται σε αγορές και γεννήσεις. Οι χρόνοι μεταξύ των αναχωρήσεων, εφόσον υπάρχουν πρόβατα, είναι εκθετικοί με ρυθμούς μ_A, μ_B, μ_C. Τα πρόβατα κατά την αποχώρησή τους είτε μετακινούνται σε άλλες στάνες (περίπτωση ζωοκλοπής) είτε σφάζονται. Τα πρόβατα που βγαίνουν από την A μετακινούνται στην B, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, στην στάνη C με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, και σφάζονται με πιθανότητα $\frac{1}{6}$. Τα πρόβατα που βγαίνουν από την στάνη B με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ μετακινούνται στη στάνη A, και με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ σφαγιάζονται. Τέλος, τα πρόβατα της στάνης C, μετά την αναχώρησή τους από τη στάνη, πάντοτε κατευθύνονται στην στάνη B.

    (α΄) Υπολογίστε τον ρυθμό με τον οποίο έχουμε αφίξεις προβάτων (όλων των ειδών) στις τρεις στάνες, υποθέτοντας ότι υπάρχει μόνιμη κατάσταση.

    (β΄) Τι σχέσεις πρέπει να ικανοποιούν οι ρυθμοί αναχώρησης μ_A, μ_B, μ_C ώστε ο πληθυσμός σε όλες τις στάνες να μην τείνει στο άπειρο?

    (γ΄) Γράψτε ένα τύπο που να δίνει την πιθανότητα να έχουμε 1 πρόβατο στη στάνη A, 3 πρόβατα στην στάνη B, και 7 πρόβατα στην στάνη C.

51. **(Ουρά M/G/1)** Ένας εξυπηρετητής χρειάζεται για να εξυπηρετήσει ένα πελάτη τυχαίο χρόνο με συνεχή κατανομή $f(x)$. Στον εξυπηρετητή έρχονται πελάτες σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Όταν ένας πελάτη έρθει και βρει τον εξυπηρετητή απασχολημένο, περιμένει σε μια ουρά, η οποία δεν έχει περιορισμό στη χωρητικότητά της.

    (α΄) Μπορεί να μοντελοποιηθεί το πλήθος των πελατών συναρτήσει του χρόνου $\{X(t) : t \geq 0\}$ ως μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου; Εξηγήστε γιατί, π.χ. με ένα αντιπαράδειγμα.

    (β΄) Δείξτε ότι το σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου αν επικεντρωθούμε στο πλήθος των πελατών σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Ποιες είναι αυτές;

    (γ΄) Προσδιορίστε τις πιθανότητες μετάβασης αυτής της αλυσίδας.