ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Σχεδίαση και Ανάλυση Αλγορίθμων
Διδάσκων: Ε. Μαρκάκης, Φθινοπωρινό εξάμηνο 2014-2015

3η Σειρά Ασκήσεων **Εξέταση: 13 Ιανουαρίου 2015**

Πρόβλημα 1. Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις δικαιολογώντας την απάντησή σας. Θεωρήστε ότι έχουμε ένα σταθμισμένο γράφο $G = (V, E)$ συνεκτικό και μη κατευθυνόμενο, και ότι όλα τα βάρη είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

1. Έστω ότι όλα τα βάρη είναι θετικά, και έστω s μια κορυφή του γραφήματος. Είναι δυνατόν ένα δέντρο συντομότερων διαδρομών με αφετηρία την s (π.χ. σαν αυτό που θα παρήγαγε ο αλγόριθμος του Dijkstra) και ένα MST του G να μην έχουν καμία κοινή ακμή;
2. Είναι δυνατόν η ακμή μικρότερου βάρους να μην εμπεριέχεται σε κάποιο MST;
3. Ο αλγόριθμος του Prim λειτουργεί σωστά όταν υπάρχουν αρνητικά βάρη;

Πρόβλημα 2. Έστω ένας γράφος $G = (V, E)$. Ένα υποσύνολο ακμών $E' \subseteq E$ ονομάζεται *σύνολο ακμών ανάδρασης*, αν τέμνει κάθε κύκλο του γραφήματος. Κάθε κύκλος του γραφήματος δηλαδή έχει τουλάχιστον μια ακμή που ανήκει στο E'. Επομένως αφαιρώντας τις ακμές του E', το γράφημα θα γίνει άκυκλο. Σχεδιάστε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για το εξής πρόβλημα: σε είσοδο ένα γράφημα με θετικά βάρη στις ακμές του, ο αλγόριθμος πρέπει να υπολογίζει ένα σύνολο ακμών ανάδρασης ελαχίστου συνολικού βάρους.

Πρόβλημα 3.

Οι παρακάτω ερωτήσεις αφορούν τη χρήση ουρών προτεραιότητας, και συγκεκριμένα την υλοποίησή τους με σωρούς που είδαμε και στο μάθημα.

1. Ο σωρός που έχουμε δει στο μάθημα ονομάζεται δυαδικός σωρός (binary heap), επειδή χρησιμοποιούμε δυαδικό δέντρο για την αναπαράστασή του. Μια άλλη ιδέα για να υλοποιήσουμε μια ουρά προτεραιότητας είναι η χρήση d-αδικού σωρού, για κάποια μικρή τιμή του d. Π.χ. για $d = 3$, αυτό σημαίνει ότι το δέντρο θα είναι πλέον τριαδικό, κάθε εσωτερικός κόμβος θα έχει 3 παιδιά, και θα εξακολουθούν να ισχύουν ό,τι είδαμε και στο δυαδικό σωρό, δηλαδή, το δέντρο θα έχει γεμάτα όλα τα επίπεδα εκτός ίσως του τελευταίου, και το κλειδί ενός κόμβου θα πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο από τα κλειδιά των παιδιών του. Οι λειτουργίες “bubble up” και “bubble down” ορίζονται επίσης με τον ίδιο τρόπο, όπως και πριν. Το πλεονέκτημα είναι ότι έτσι μπορεί να μειωθεί το ύψος του δέντρου. Δείξτε πόσο θα είναι το ύψος του δέντρου σε ένα d-αδικό σωρό με n στοιχεία και γιατί αυτό συνεπάγεται καποια (έστω μικρή) βελτίωση για την insert; Εξηγήστε γιατί αυτό αντισταθμίζεται από καποια μικρή επιβάρυνση για την $delete - min$.

2. Έστω ότι έχετε k ταξινομημένους πίνακες, και κάθε πίνακας έχει n στοιχεία. Το k είναι μια παράμετρος με $1 \leq k \leq n$. Θέλουμε να συγχωνεύσουμε τους πίνακες σε έναν ταξινομημένο πίνακα μεγέθους nk. Μία λύση είναι να βαλουμε όλα τα στοιχεία σε ένα νέο πίνακα μεγέθους nk, και να τον ταξινομήσουμε. Ποια η πολυπλοκότητα αυτής της λύσης; Σκεφτείτε πώς με τη χρήση δυαδικού σωρού, μπορούμε να πετύχουμε μια πιο αποδοτική υλοποίηση (ως συνάρτηση του k και του n).

Πρόβλημα 4. Ένας τρόπος για να αποδείξει κανείς ότι ένα πρόβλημα Π είναι NP-πληρες, είναι με τη μέθοδο της γενίκευσης. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να δείξουμε ότι το Π αποτελεί γενίκευση κάποιου γνωστού NP-πλήρους προβλήματος (εμπεριέχει δηλαδή όλα τα instances ενός NP-πλήρους προβλήματος). Δείξτε με βάση αυτή την ιδέα ότι τα παρακάτω προβλήματα είναι NP-πλήρη, χρησιμοποιώντας τα NP-πλήρη προβλήματα που έχουμε ήδη δει.

1. Longest Path: Δεδομένου ενός γράφου $G = (V, E)$, και ενός ακεραίου k, υπάρχει μονοπάτι με μήκος τουλαχιστον k; Θεωρήστε ότι δεν έχουμε βάρη και ότι το μήκος του μονοπατιού είναι το πλήθος των ακμών που χρησιμοποιεί.

2. Max-SAT: Δεδομένης μιας CNF φορμουλας φ, και ενός ακεραίου k, υπάρχει μια απονομή αλήθειας που να ικανοποιεί τουλάχιστον k clauses;

3. Stingy SAT: Δεδομένης μιας CNF φορμουλας φ, και ενός ακεραίου k, υπάρχει μια απονομή αλήθειας που ικανοποιεί τη φόρμουλα και όπου το πολύ k μεταβλητές είναι true;

Πρόβλημα 5.

1. Δώστε μια αναγωγή από το πρόβλημα SUBSET-SUM στο πρόβλημα PARTITION.

2. Το εξής πρόβλημα (3DM - 3-dimensional matching) αποτελεί γενίκευση των matching προβλημάτων σε διμερείς γράφους. Έστω 3 ξένα μεταξύ τους σύνολα $X = \{x_1,...,x_n\}$, $Y = \{y_1, ..., y_n\}$, και $Z = \{z_1, ..., z_n\}$ με n αντικείμενα το καθένα. Έστω επίσης ένα σύνολο $T \subseteq X \times Y \times Z$, που αποτελείται από τριάδες της μορφής (x_i, y_j, z_k). Κάθε τριάδα περιέχει ακριβώς ένα αντικείμενο από τα X, Y, Z. Ένα 3διάστατο ταίριασμα (matching) είναι ένα υποσύνολο του T, δηλαδή ένα συνολο από τριάδες που δεν έχουν κοινά στοιχεία μεταξύ τους. Αυτο σημαίνει ότι για οποιεσδήποτε 2 τριάδες του ταιριάσματος, (x_1, y_1, z_1) και (x_2, y_2, z_2), έχουμε $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$. Θελουμε να αποφασίσουμε αν υπάρχει ένα ταίριασμα με n τριάδες, δηλαδή ένα ταίριασμα που να καλύπτει όλα τα στοιχεία από τα X, Y, Z. Το 3DM είναι ένα από τα γνωστά NP-πλήρη προβλήματα.

   Δώστε μια απλή αναγωγή από το 3DM στο SAT, και μια από το 3DM στο SET COVER.

Πρόβλημα 6. Σε αναλογία με το πρόβλημα TSP, μπορούμε να ορίσουμε και προβλήματα όπου ψάχνουμε να βρούμε αντί για κύκλο ένα Hamiltonian μονοπάτι το οποίο επισκέπτεται όλες τις κορυφές ακριβώς 1 φορά. Για το πρόβλημα αυτό υπάρχουν 3 παραλλαγές, ανάλογα με το αν καθορίζεται το σημείο αφετηρίας και το σημείο τερματισμού. Στην πρώτη εκδοχή του προβλήματος, θέλουμε να βρούμε το Hamiltonian μονοπάτι ελαχίστου κόστους χωρίς περιορισμό στην κορυφή έναρξης και στην κορυφή τερματισμού. Στην δεύτερη εκδοχή, μας δίνεται ως είσοδος και μια κορυφή s του γράφου, και θέλουμε ένα Hamiltonian μονοπάτι, το οποίο να ξεκινά από την κορυφή s. Τέλος, στην τρίτη εκδοχή, μας δίνονται ως είσοδος 2 κορυφές s, t, και θέλουμε το μονοπάτι να ξεκινά απο το s και να τελειώνει στο t. Θεωρούμε μη κατευθυνόμενα γραφήματα.

Δείξτε ότι για τις πρώτες 2 εκδοχές του προβλήματος, μπορούμε να έχουμε ενα $3/2$-προσεγγιστικό αλγόριθμο. Προαιρετικά μπορείτε να σκεφτείτε και την τρίτη εκδοχή.