⑬ ΡΥΘΜΟΣ ΕΝΤΡΟΠΙΑΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΕΣΤΩ $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΛΙΞΗ

Ο ΡΥΘΜΟΣ ΕΝΤΡΟΠΙΑΣ (ENTROPY RATE) ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΩΣ:

$$H(\mathcal{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

(ΤΙ ΣΗΜΑΙΝΕΙ?)

ΟΤΑΝ ΥΠΑΡΧΕΙ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: ① $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ IID $\Rightarrow$

$$H(\mathcal{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} H(X_i) = H(X_1)$$

② $X_1, \dots, X_n, \dots$ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ, ΟΧΙ ΜΕ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

$$H(\mathcal{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} H(X_i)$$

, ΠΟΥ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΜΗΝ ΥΠΑΡΧΕΙ

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ:

$$H'(\mathcal{X}) = \lim_{n\to\infty} H(X_n | X_1 \dots X_n)$$

(ΤΙ ΣΗΜΑΙΝΕΙ?)

ΘΕΩΡΗΜΑ: ΟΤΑΝ Η ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΛΙΞΗ ΕΙΝΑΙ ΣΤΑΤΙΚΗ (STATIONARY), ΤΟΤΕ ΤΑ ΔΥΟ ΟΡΙΑ ΤΩΝ ΟΡΙΣΜΩΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ, ΚΑΙ ΤΑΥΤΙΖΟΝΤΑΙ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$H(X_{n+1} | X_1 \dots X_n) \le H(X_{n+1} | X_2 X_3 \dots X_n)$$

$$= H(X_n | X_1 \dots X_{n-1}) \Rightarrow$$

Η $H(X_n | X_1 \dots X_{n-1})$ ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΚΑΙ ΕΠΕΙΔΗ ΕΙΝΑΙ ΦΡΑΓΜΕΝΗ ΚΑΤΩ, ΕΧΕΙ ΟΡΙΟ $H'(\mathcal{X})$. ΟΜΩΣ ΙΣΧΥΕΙ ΤΟ ΑΚΟΛΟΥΘΟ:

ΑΝ $a_n \to a$ ΚΑΙ $b_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$, ΤΟΤΕ $b_n \to a$

(CESÀRO MEAN)

(ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΑ ΠΡΟΦΑΝΕΣ, ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΕΥΚΟΛΗ ΜΕ ΑΠΛΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΥΣ)

ΑΡΑ:

$$\frac{H(x_1, x_2, \dots, x_n)}{n} = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{H(x_i | x_1, \dots, x_{i-1})}_{\hookrightarrow H'(x)}}_{\hookrightarrow H'(x)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΕΝΤΡΟΠΙΑ MARKOV CHAIN):

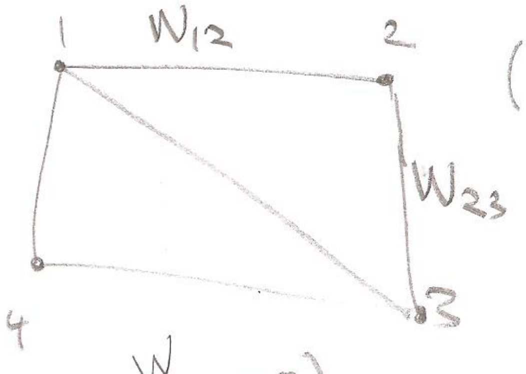
$$H(\mathcal{X}) = \lim_{n\to\infty} H(X_n | X_1 \dots X_n) \underset{\uparrow}{=} \lim_{n\to\infty} H(X_n | X_{n-1})$$

MARKOV PROPERTY ΕΥΚΟΛΑ

$$= H(X_2 / X_1)$$, ΑΝ ΤΟ X_1 ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΗΝ ΣΤΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

$$= \sum_i \mu_i \left(-\sum_j P_{ij} \log P_{ij}\right) = -\sum_{ij} \mu_i P_{ij} \log P_{ij}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΤΥΧΑΙΟΣ ΠΕΡΙΠΑΤΟΣ ΣΕ ΓΡΑΦΟ



$(W_{ij} = W_{ji}$

$W_{24} = 0)$

$$P_{ij} \triangleq \frac{W_{ij}}{\sum_j W_{ij}}$$

Η ΣΤΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΕΙΝΑΙ Η

$$\mu_i = \frac{\sum_j W_{ij}}{2 \sum_{i<j} W_{ij}}$$

← ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΒΑΡΩΝ ΠΟΥ ΒΓΑΙΝΟΥΝ ΑΠΟ ΤΗΝ i

← ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΒΑΡΩΝ

ΠΡΑΓΜΑΤΙ: ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΔΕΙΞΩ: $\mu_j = \sum_i P_{ij} \mu_i$

ΠΡΑΓΜΑΤΙ: $\sum_i P_{ij} \mu_i = \sum_i \frac{W_{ij}}{\cancel{\sum_j W_{ij}}} \cdot \frac{\cancel{\sum_j W_{ij}}}{2 \sum_{i<j} W_{ij}}$

$$= \frac{\sum_i W_{ij}}{2 \sum_{i<j} W_{ij}} = \frac{\sum_i W_{ji}}{2 \sum_{i<j} W_{ij}} = \mu_j$$

ΟΡΙΖΩ: $W_i = \sum_j W_{ij}$, $W = \sum_{i<j} W_i$

$\Rightarrow P_{ij} = \frac{W_{ij}}{W_i}$, $\mu_i = \frac{W_i}{2W}$

ΑΡΑ Ο ΡΥΘΜΟΣ ΕΝΤΡΟΠΙΑΣ ΕΙΝΑΙ:

$$H(X) = H(X_2|X_1) = \sum_i \mu_i \left(- \sum_j P_{ij} \log P_{ij} \right)$$

$$= -\sum_{ij} \frac{W_i}{2W} \frac{W_{ij}}{W_i} \log \frac{W_{ij}}{W_i} =$$

$$-\sum_{ij} \frac{W_{ij}}{2W} \log \frac{W_{ij}}{2W} \cdot \frac{2W}{W_i} =$$

$$\left(-\sum_{ij} \frac{W_{ij}}{2W} \log \frac{W_{ij}}{2W} \right) + \sum_{ij} \frac{W_{ij}}{2W} \log \frac{W_i}{2W} =$$

$$-\sum_{ij}\frac{W_{ij}}{2W}\log\frac{W_{ij}}{2W}-\left(-\sum_{i}\frac{W_i}{2W}\log\frac{W_i}{W}\right)$$

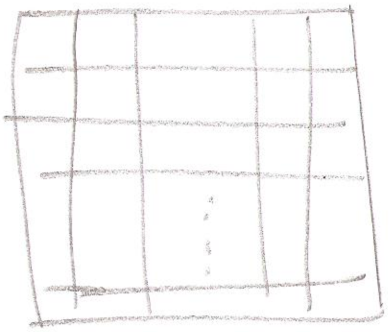
$$=H\left(\ldots,\frac{W_{ij}}{2W},\ldots\right)-H\left(\ldots,\frac{W_i}{2W},\ldots\right)$$

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $W_{ij}=1 \Rightarrow W=E,\ W_i=E_i$

$$H(X)=H\left(\ldots,\frac{1}{2E},\ldots\right)$$

$$-H\left(\ldots,\frac{E_i}{2E}\right)=\log 2E-H\left(\frac{E_1}{2E},\frac{E_2}{2E},\ldots,\frac{E_n}{2E}\right)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ο ΡΥΘΜΟΣ ΕΝΤΡΟΠΙΑΣ ΤΟΥ ΒΑΣΙΛΙΑ ΣΤΗ ΣΚΑΚΙΕΡΑ:



36 ΚΟΥΤΙΑ ΜΕ 8 ΑΚΜΕΣ

4·6 ΚΟΥΤΙΑ ΜΕ 5 ΑΚΜΕΣ

4 ΚΟΥΤΙΑ ΜΕ 3 ΑΚΜΕΣ

36·8 + 4·6·5 + 4·3 = 420 ΑΚΜΕΣ

ΑΡΑ:

$$H(X)=\log(420)-H\left(\underbrace{\frac{3}{420}}_{4},\underbrace{\frac{5}{420}}_{30},\underbrace{\frac{8}{420}}_{36}\right)$$

$$=\underbrace{0.92\log 8}$$

ΟΧΙ 1 ΛΟΓΩ EDGE EFFECTS.

⑳ ΚΩΔΙΚΕΣ – ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΕΝΑΣ ΚΩΔΙΚΑΣ ΠΗΓΗΣ (SOURCE CODE) C ΜΙΑΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ X ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΑΠΟ ΤΟ $\mathcal{X}$ (ΤΟ ΑΛΦΑΒΗΤΟ ΤΗΣ X) ΣΤΟ $\mathcal{D}^*$, ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ (STRINGS) ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΑΠΟ ΕΝΑ ΑΛΦΑΒΗΤΟ ΜΕ D ΣΥΜΒΟΛΑ. $C(x)$ ΕΙΝΑΙ Η ΚΩΔΙΚΗ ΛΕΞΗ (CODEWORD) ΠΑ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΙ ΣΤΟ x ΚΑΙ $l(x)$ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΤΗΣ $C(x)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: ΠΡΑΚΤΙΚΑ, ΠΑΝΤΑ $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, D-1\}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1) $C(\text{red}) = 00$, $C(\text{blue}) = 11$, $\mathcal{X} = \{\text{red}, \text{blue}\}$

$\mathcal{D} = \{0,1\}$.

2) $C(\text{red}) = L$, $C(\text{blue}) = \perp$, $\mathcal{X} = \{\text{red}, \text{blue}\}$, $\mathcal{D} = \{0,1\}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΤΟ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΟ ΜΗΚΟΣ $L(C)$ ΕΝΟΣ ΚΩΔΙΚΑ $C(x)$ ΜΙΑΣ Τ.Μ. X ΜΕ ΜΑΖΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ $p(x)$ ΔΙΝΕΤΑΙ ΑΠΟ

$$L(C) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) l(x)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1) $P(X=1) = \frac{1}{2}$ $C(1) = 0$

$P(X=2) = \frac{1}{4}$, $C(2) = 10$

$P(X=3) = \frac{1}{8}$, $C(3) = 110$

$P(X=4) = \frac{1}{8}$, $C(4) = 111$

$$L(C) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot 3 = 1.75 = H(X).$$

2) $P(X=1) = \frac{1}{3}$, $P(X=2) = \frac{1}{3}$, $P(X=3) = \frac{1}{3}$

$C(1) = 0$, $C(2) = 10$, $C(3) = 11$

$$L(C) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 2 = 1.66 > \log 3 = 1.58 = H(X)$$

3) $P(X=1)=\frac{1}{3}$ $P(X=2)=\frac{1}{3}$, $P(X=3)=\frac{1}{3}$

$C(1)=C(2)=C(3)=0 \Rightarrow$

$L(C)=1<H(X)$. ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ?

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΕΝΑΣ ΚΩΔΙΚΑΣ ΛΕΓΕΤΑΙ ΜΗ-ΙΔΙΑΖΩΝ (NON-SINGULAR) ΑΝ ΚΑΘΕ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΤΟΥ X ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΙ ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗ ΚΩΔΙΚΗ ΛΕΞΗ. ΔΗΛΑΔΗ:

$$x \neq x' \Rightarrow C(x) \neq C(x')$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: ΣΥΝΗΘΩΣ ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ ΣΤΕΛΝΟΥΜΕ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΑΠΟ ΣΥΜΒΟΛΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η ΕΠΕΚΤΑΣΗ (EXTENSION) C^* ΕΝΟΣ ΚΩΔΙΚΑ C ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΑΠΟ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΤΗΣ $\mathcal{X}$ ΣΕ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΤΗΣ $\mathcal{D}$ ΠΟΥ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΩΣ:

$$C^*(x_1x_2\ldots x_n)=C(x_1)C(x_2)\ldots C(x_n)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΕΝΑΣ ΚΩΔΙΚΑΣ ΛΕΓΕΤΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΑ ΑΠΟΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΙΜΟΣ (UNIQUELY DECODABLE) ΑΝ Η ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΟΥ ΕΙΝΑΙ ΜΗ ΙΔΙΑΖΟΥΣΑ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $C(1)=1$, $C(2)=01$, $C(3)=101$

Ο ΚΩΔΙΚΑΣ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΔΙΑΖΩΝ (SINGULAR), ΑΛΛΑ * ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΟΥ ΕΙΝΑΙ, ΓΙΑΤΙ $C^*(3)=101$, $C^*(12)=101$

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΕΝΑΣ ΚΩΔΙΚΑΣ ΛΕΓΕΤΑΙ ΚΩΔΙΚΟΣ ΠΡΟΘΕΜΑΤΟΣ (PREFIX CODE) Η' ΣΤΙΓΜΙΑΙΟΣ ΚΩΔΙΚΑΣ ΑΝ ΚΑΜΙΑ ΚΩΔΙΚΗ ΛΕΞΗ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΠΡΟΘΕΜΑ ΚΑΜΙΑΣ ΑΛΛΗΣ ΚΩΔΙΚΗΣ ΛΕΞΗΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΟΠΟΙΗΣΗ:

ΟΛΟΙ ΟΙ ΚΩΔΙΚΕΣ ⊃ ΜΗ ΙΔΙΑΖΟΝΤΕΣ ΚΩΔΙΚΕΣ (NON-SINGULAR CODES)

⊃ ΜΟΝΑΔΙΚΑ ΑΠΟΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΙΜΟΙ ΚΩΔΙΚΕΣ ⊃ (UNIQUELY DECODABLE CODES)

ΣΤΙΓΜΙΑΙΟΙ ΚΩΔΙΚΕΣ (INSTANTANTANEOUS CODES)

ΒΕΒΑΙΩΘΗΤΕ ΠΩΣ ΙΣΧΥΟΥΝ ΤΑ ΑΝΩ!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

X	ΙΔΙΑΖΩΝ	ΜΗ ΙΔΙΑΖΩΝ, ΑΛΛΑ ΟΧΙ ΜΟΝΑΔΙΚΑ ΑΠΟΚ.	ΜΟΝΑΔΙΚΑ ΑΠΟΚ. ΑΛΛΑ ΟΧΙ ΣΤΙΓΜΙΑΙΟΣ	ΣΤΙΓΜΙΑΙΟΣ
1	0	0	10	0
2	0	010	00	10
3	0	01	11	110
4	0	10	110	111

㉑ Η ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΤΟΥ KRAFT

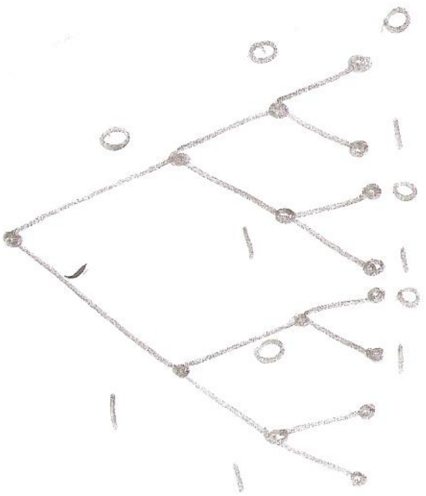
ΘΕΩΡΗΜΑ: ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΣΤΙΓΜΙΑΙΟ ΚΩΔΙΚΑ ΣΕ ΕΝΑ ΑΛΦΑΒΗΤΟ ΜΗΚΟΥΣ D, ΤΑ ΜΗΚΗ ΤΩΝ ΛΕΞΕΩΝ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΟΥΝ ΤΗΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

$$\sum_i D^{-l_i} \leq 1$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ: ΑΝ ΕΙΧΑΜΕ ΕΝΑ ΣΥΝΟΛΟ ΑΠΟ ΜΗΚΗ ΛΕΞΕΩΝ $l_1, l_2, \dots l_m$ ΠΟΥ ΙΚΑΝΟΠΟΙΟΥΣΑΝ ΤΗΝ ΑΝΩ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ, ΤΟΤΕ ΥΠΑΡΧΕΙ ΣΤΙΓΜΙΑΙΟΣ ΚΩΔΙΚΑΣ ΜΕ ΑΥΤΑ ΤΑ ΜΗΚΗ

ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΑ: ΔΕΝ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΕΧΟΥΜΕ ΚΑΙ ΠΟΛΛΕΣ, ΚΑΙ ΜΙΚΡΕΣ ΛΕΞΕΙΣ

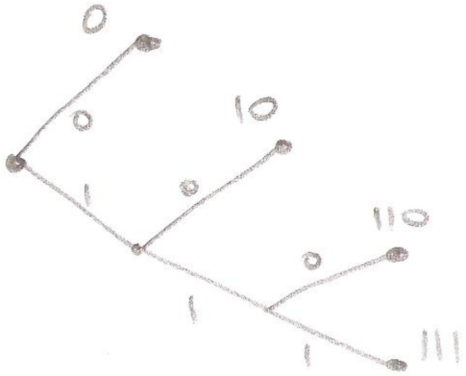
ΑΠΟΔΕΙΞΗ: (⇒) ΒΑΖΟΥΜΕ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΛΕΞΕΙΣ ΣΕ ΕΝΑ ΔΕΝΤΡΟ



ΣΤΙΓΜΙΑΙΟΣ ΚΩΔΙΚΑΣ ⇒ ΚΑΜΙΑ ΛΕΞΗ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΣΤΟ ΔΡΟΜΟ ΚΑΠΟΙΑΣ ΑΛΛΗΣ ΠΡΟΣ ΤΗ ΡΙΖΑ

ΕΣΤΩ l_{max} ΤΟ ΜΕΓΙΣΤΟ ΜΗΚΟΣ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:



ΟΙ ΑΠΟΓΟΝΟΙ ΤΗΣ i ΣΕ ΒΑΘΟΣ l_{max}.

ΠΡΕΠΕΙ

$$\sum_i D^{l_{max}-l_i} \le D^{l_{max}}$$

ΟΛΟΙ ΟΙ ΑΠΟΓΟΝΟΙ ΣΤΟ ΒΑΘΟΣ l_{max}

$$\Rightarrow \sum D^{-l_i} \le 1$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ (⇐) ΕΣΤΩ $l_1, l_2, \ldots, l_m$ ΜΗΚΗ ΠΟΥ ΙΚΑΝΟΠΟΙΟΥΝ ΤΗΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ KRAFT. ΦΤΙΑΧΝΟΥΜΕ ΕΝΑ ΔΕΝΤΡΟ ΚΟΜΒΟΥΣ ΒΑΘΟΥΣ l_{max}. Ο ΠΡΩΤΟΣ (ΛΕΞΙΚΟΓΡΑΦΙΚΑ) ΚΟΜΒΟΣ ΒΑΘΟΥΣ l_1 ΓΙΝΕΤΑΙ Η ΚΩΔΙΚΗ ΛΕΞΗ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ l_1. ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΥΜΕ ΓΙΑ l_2. **ΣΙΓΟΥΡΑ** ΘΑ ΒΡΟΥΜΕ ΛΕΞΕΙΣ ΓΙΑ ΟΛΟΥΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ: Η ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ KRAFT ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΚΑΙ ΙΚΑΝΗ ΣΥΝΘΗΚΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΜΟΝΑΔΙΚΑ ΑΠΟΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΙΜΩΝ ΚΩΔΙΚΩΝ ΜΕ ΑΠΕΙΡΕΣ ΚΩΔΙΚΕΣ ΛΕΞΕΙΣ.

(22) ΚΑΤΩ ΦΡΑΓΜΑ ΣΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΜΗΚΟΣ ΚΩΔΙΚΑ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΕΣΤΩ Τ.Μ. X ΜΕ ΜΑΖΑ $p_1, p_2, \dots, p_m, \dots$ ΠΟΙΟ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΜΕΣΟ ΜΗΚΟΣ ΚΩΔΙΚΑ ΠΟΥ ΜΠΟΡΩ ΝΑ ΕΠΙΤΥΧΩ?

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: minimize $L = \sum_{i=1}^{m} p_i l_i$

subject to: $\sum D^{-l_i} \leq 1$, l_i ΑΚΕΡΑΙΑ, ΘΕΤΙΚΑ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:
- D ΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ ΤΟΥ ΑΛΦΑΒΗΤΟΥ
- ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΙΝΑΙ ΔΥΣΚΟΛΟ ΛΟΓΩ ΤΟΥ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥ ΤΑ l_i ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΑΚΕΡΑΙΑ

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ: ΕΣΤΩ $l_i \in R \Rightarrow$

ΚΑΙΝΟΥΡΓΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ:

Ⓐ
$$\left\{\begin{array}{l} \text{minimize } L = \sum_{i=1}^{m} p_i l_i \\ \text{subject to: } \sum D^{-l_i} \leq 1, \ l_i \text{ ΘΕΤΙΚΟ} \end{array}\right\}$$

$$\Updownarrow$$

Ⓑ
$$\left\{\begin{array}{l} \text{minimize } L = \sum_{i=1}^{m} p_i l_i \\ \text{subject to: } \sum D^{-l_i} = 1, \ l_i \in R \end{array}\right.$$

ΤΑ Ⓐ, Ⓑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΓΙΑΤΙ:
- ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΛΥΣΗ ΤΟΥ Ⓐ ΕΙΝΑΙ ΛΥΣΗ ΤΟΥ Ⓑ
- ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΛΥΣΗ ΤΟΥ Ⓑ ΕΙΝΑΙ ΛΥΣΗ ΚΑΙ ΤΟΥ Ⓐ

ΑΡΑ ΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΕΙΝΑΙ ΙΣΕΣ

ΤΟ Ⓑ ΕΙΝΑΙ ΑΠΛΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΥΡΤΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ.

ΤΟ ΛΥΝΟΥΜΕ ΜΕ LAGRANGE MULTIPLIERS:

$$\left\{ \text{minimize } \overset{\text{LAGRANGIAN}}{J} = \sum p_i l_i + \underset{\uparrow\ \text{ΤΙΜΗ}}{\lambda} \sum D^{-l_i} \right\} \text{Ⓒ}$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: ΑΝ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΩ ΤΟ L' ΧΩΡΙΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ ΚΑΙ ΕΠΙΛΕΞΩ λ ΤΕΤΟΙΟ ΩΣΤΕ ΝΑ ΙΣΧΥΕΙ Ο ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ, Η ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΛΥΣΗ ΤΟΥ Ⓒ, p_i^* ΕΙΝΑΙ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΛΥΣΗ ΤΟΥ Ⓑ.

ΛΥΝΩ ΤΟ Ⓒ: $\frac{\partial J}{\partial l_i} = p_i + \lambda(-\log_e D) D^{-l_i} = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{D^{-l_i} = \frac{p_i}{\lambda \log_e D}}$$

ΟΜΩΣ $\sum D^{-l_i} = 1 \Rightarrow \sum \frac{p_i}{\lambda \log_e D} = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{\log_e D}}$

$$\Rightarrow D^{-l_i} = p_i \Rightarrow \boxed{l_i^* = -\log_D p_i}$$

$$\Rightarrow L^* = \sum p_i l_i^* = -\sum p_i \log_D p_i = H_D(p)$$

$$\Rightarrow \boxed{L^* = H_D(p)} \leftarrow \text{ΧΩΡΙΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ ΣΤΑ } l_i$$

ΑΡΑ, ΑΝ ΠΡΕΠΕΙ l_i ΑΚΕΡΑΙΑ $\Rightarrow \boxed{L^* \geq H_D(p)}$

ΚΑΙ ΜΕ ΙΣΟΤΗΤΑ ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ ΤΑ $-\log_D p_i$ ΕΙΝΑΙ ΑΚΕΡΑΙΑ.

↑ $\Rightarrow$

(ΤΟΤΕ Η p_i ΛΕΓΕΤΑΙ D-ΑΔΙΚΗ)

ΘΕΩΡΗΜΑ: ΤΟ ΜΕΣΟ ΜΗΚΟΣ ΟΠΟΙΟΥΔΗΠΟΤΕ ΚΩΔΙΚΑ ΓΙΑ ΜΙΑ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΕΙΝΑΙ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ ΤΗΣ ΕΝΤΡΟΠΙΑΣ:

$$\boxed{L \geq H_D(x)}$$

ΙΣΟΤΗΤΑ ΕΧΟΥΜΕ ΜΟΝΟ ΑΝ Η p_i ΕΙΝΑΙ D-ΑΔΙΚΗ ΚΑΙ

ΘΕΣΩ $D^{-l_i} = p_i$

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ, ΜΕ ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ:

$$L - H_D(x) = \sum p_i l_i - \sum p_i \log_D \frac{1}{p_i}$$

$$= -\sum_i p_i \log_D D^{-l_i} + \sum_i p_i \log_D p_i$$

$$= \sum_i p_i \log_D \frac{p_i\left(\sum_j D^{-l_j}\right)}{D^{-l_i}} - \sum p_i \log_D\left(\sum D^{-l_j}\right)$$

$$= \underbrace{D\left(p_i \,\Big\|\, \frac{D^{-l_i}}{\sum D^{-l_i}}\right)}_{\geq 0,\ \text{ΑΠΟ ΓΝΩΣΤΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ}} + \underbrace{\log\left(\frac{1}{\sum_j D^{-l_j}}\right)}_{\geq 0,\ \text{ΛΟΓΩ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ KRAFT}}$$

ΕΠΙΣΗΣ,

$$L = H_D(x) \Leftrightarrow p_i = \frac{D^{-l_i}}{\sum D^{-l_i}}, \quad \sum D^{-l_j} = 1 \Leftrightarrow$$

$$p_i = D^{-l_i}$$

㉓ ΑΝΩ ΦΡΑΓΜΑ ΣΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΜΗΚΟΣ ΚΩΔΙΚΑ

ΕΡΩΤΗΜΑ: ΠΟΣΟ ΚΟΝΤΑ ΜΠΟΡΩ ΝΑ ΦΤΑΣΩ ΣΤΟ ΚΑΤΩ ΦΡΑΓΜΑ ΤΗΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΗΣ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΥ?

ΘΕΩΡΗΜΑ: ΕΣΤΩ $l_1^*, l_2^*, \ldots, l_m^*$ ΤΑ ΜΗΚΗ ΕΝΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΚΩΔΙΚΑ ΓΙΑ ΜΙΑ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ Χ, ΚΑΙ ΕΣΤΩ L^* ΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΜΕΣΟ ΜΗΚΟΣ. ΙΣΧΥΕΙ ΤΟ ΟΡΙΟ

L^* ή $\sum p_i l_i^*$

$$\boxed{H_D(X) \le L^* \le H_D(X) + 1}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: ΤΑ ΒΕΛΤΙΣΤΑ ΜΗΚΗ ΘΑ ΗΤΑΝ $l_i = \log_D \frac{1}{p_i}$, ΑΝ ΜΠΟΡΟΥΣΑ ΝΑ ΒΑΛΩ ΚΑΙ ΜΗ ΑΚΕΡΑΙΑ. ΑΣ ΒΑΛΩ

ΚΩΔΙΚΑΣ ΣΑΝΝΟΝ

$l_i = \left\lceil \log \frac{1}{p_i} \right\rceil$, ΔΗΛΑΔΗ ΤΟΝ ΑΜΕΣΩΣ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ ΑΚΕΡΑΙΟ ΑΠΟ ΤΟΝ $\log \frac{1}{p_i}$ ΕΧΟΥΜΕ:

$$\log_D \frac{1}{p_i} \le l_i < \log_D \frac{1}{p_i} + 1 \Rightarrow$$

$$p_i \log_D \frac{1}{p_i} \le p_i l_i < p_i \log_D \frac{1}{p_i} + p_i \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\underbrace{\sum p_i \log_D \frac{1}{p_i}}_{H_D(X)} \le \underbrace{\sum p_i l_i}_{L} < \underbrace{\sum p_i \log_D \frac{1}{p_i}}_{H(D)} + 1$$

$$H_D(X) \le L^* \le L \Rightarrow \boxed{H_D(X) \le L^* < H_D(X) + 1}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΠΛΗΣΙΑΣΟΥΜΕ ΑΚΟΜΑ ΠΙΟ ΠΟΛΥ ΤΗΝ ΕΝΤΡΟΠΙΑ, ΑΝ ΕΙΜΑΣΤΕ ΔΙΑΤΕΘΙΜΕΝΟΙ ΝΑ ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΟΥΜΕ ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ ΠΟΛΛΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ.

ΕΣΤΩ n ΣΥΜΒΟΛΑ ΠΡΟΕΡΧΟΜΕΝΑ ΑΠΟ ΤΟ ΑΛΦΑΒΗΤΟ $\mathcal{X}^n$
ΕΣΤΩ C ΚΩΔΙΚΑΣ $\mathcal{X}^n \to D^*$, ΚΑΙ ΕΣΤΩ $l(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΤΗΣ ΛΕΞΗΣ ΓΙΑ ΤΟ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ΚΑΙ $L_n = \frac{1}{n} \sum p(x_1, x_2, \ldots, x_n) l(x_1, \ldots, x_n) =$

$\frac{1}{n} El(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ΤΟ ΜΕΣΟ ΜΕΓΕΘΟΣ ΤΗΣ ΚΩΔΙΚΟΛΕΞΗΣ ΑΝΑ ΣΥΜΒΟΛΟ

ΑΠΟ ΤΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΘΕΩΡΗΜΑ:

$$H(X_1, X_2, \ldots, X_n) \le El(X_1, \ldots X_n) < H(X_1, X_2, \ldots, X_n) + 1$$

$$\Rightarrow \frac{H(X_1, X_2, \ldots X_n)}{n} \le L_n^* \le \frac{H(X_1, \ldots X_n)}{n} + \frac{1}{n} \quad ①$$

ΠΡΩΤΗ ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: ΤΑ X_i IID $\Rightarrow$

$$H(X_1, X_2, \ldots, X_n) = H(X_1) + H(X_2) + \ldots + H(X_n) = nH(X)$$

$$\overset{①}{\Rightarrow} H(X) \le L_n^* < H(X) + \frac{1}{n}$$

ΔΕΥΤΕΡΗ ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: ΥΠΑΡΧΕΙ ΡΥΘΜΟΣ ΕΝΤΡΟΠΙΑΣ $H(\mathcal{X})$

$$\underset{\searrow H(\mathcal{X})}{\frac{H(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{n}} \le \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ} \\ H(\mathcal{X})}}{L_n^*} \le \underset{\searrow H(\mathcal{X})}{\frac{H(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{n}} + \underset{\searrow 0}{\frac{1}{n}}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: ΕΣΤΩ Τ.Μ. X ΜΕ ΜΑΖΑ $p(x)$, ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΠΟΙΑ ΕΧΩ ΕΠΙΛΕΞΕΙ ΜΗΚΗ ΛΕΞΕΩΝ $l(x) = \lceil \log \frac{1}{q(x)} \rceil$

ΤΟΤΕ:

$$H(p) + D(p \| q) \le E_p l(X) \le H(p) + D(p \| q) + 1$$

ΑΡΑ, ΤΟ ΚΟΣΤΟΣ ΠΟΥ ΠΛΗΡΩΝΩ ΓΙΑ ΤΗΝ ΛΑΘΟΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΤΗ ΜΑΖΑ ΕΙΝΑΙ $D(p\|q)$!

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$\sum_x p(x)\log\frac{1}{q(x)} \le \overset{El(X)}{\overset{\shortparallel}{\sum_x p(x)\left\lceil \log\frac{1}{q(x)}\right\rceil}} < \underset{\sum_x p(x)\log\frac{1}{q(x)} + 1}{\underset{\shortparallel}{\sum_x p(x)\left(\log\frac{1}{q(x)}+1\right)}}$$

ΟΜΩΣ:

$$\sum_x p(x)\log\frac{1}{q(x)} = \sum_x p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)}\cdot\frac{1}{p(x)} =$$

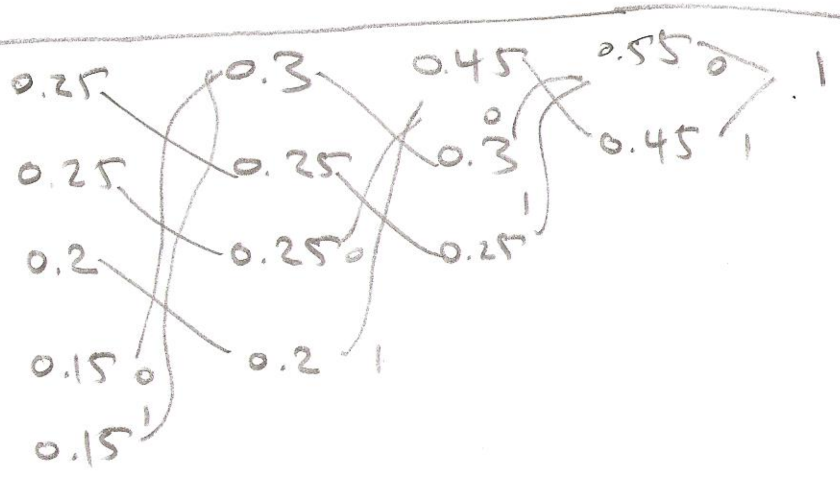
$$\sum_x p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)} - \sum_x p(x)\log p(x) =$$

$$H(p) + D(p\|q)$$

㉔ ΚΩΔΙΚΕΣ HUFFMAN

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.6.1

	X
01	1
10	2
11	3
000	4
001	5



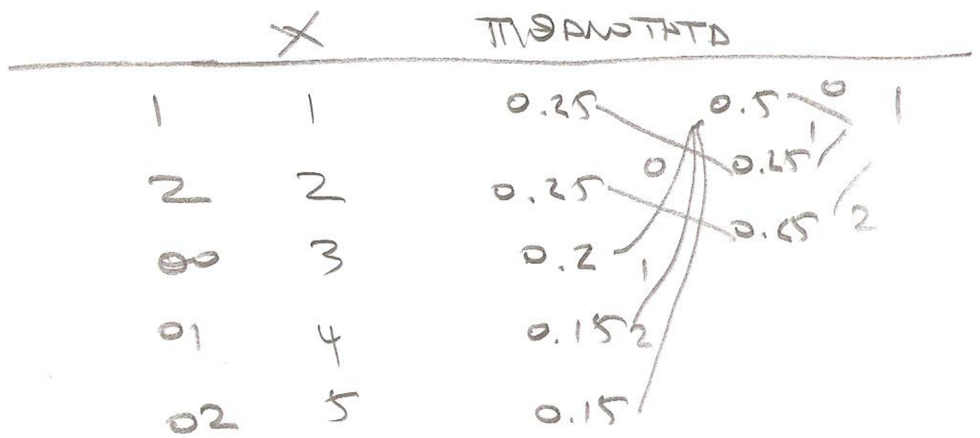
ΓΕΝΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ :

→ ΤΟΠΟΘΕΤΟΥΜΕ ΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΣΕ ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΣΕΙΡΑ

– ΣΕ ΚΑΘΕ ΒΗΜΑ, ΠΡΟΣΘΕΤΟΥΜΕ ΤΙΣ ΔΥΟ ΜΙΚΡΟΤΕΡΕΣ P_{m-1} P_m ΚΑΙ ΒΑΖΟΥΜΕ ΕΝΑ ΣΥΜΒΟΛΟ (0 Ή 1) ΜΠΡΟΣΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΚΩΔΙΚΕΣ ΛΕΞΕΙΣ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΘΕΙ ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΕΝΑ ΑΠΟ ΤΑ ΣΥΜΒΟΛΑ ΠΟΥ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥΝ ΣΤΙΣ P_{m-1}, P_m

– ΣΤΑΜΑΤΑΜΕ ΟΤΑΝ ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΟΥΜΕ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΤΡΙΑΔΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (5.6.2)



ΤΡΙΑΔΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΕ DUMMY VARIABLE (5.6.3)