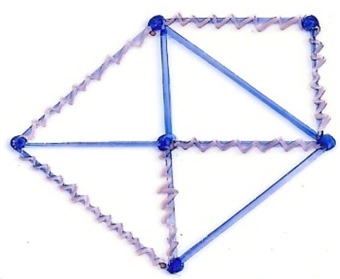
Κύκλος του Hamilton.

Μονοπάτι του Hamilton: Ένα μονοπάτι που περιέχει όλες τις κορυφές ενός γραφήματος.

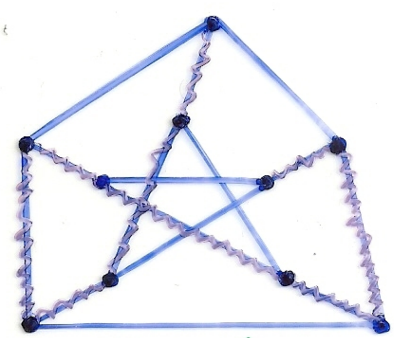
Κύκλος του Hamilton: Ένας κύκλος που περιέχει όλες τις κορυφές ενός γραφήματος.

Hamiltonian γράφημα: Γράφημα που περιέχει κάποιο κύκλο του Hamilton.

π.χ.



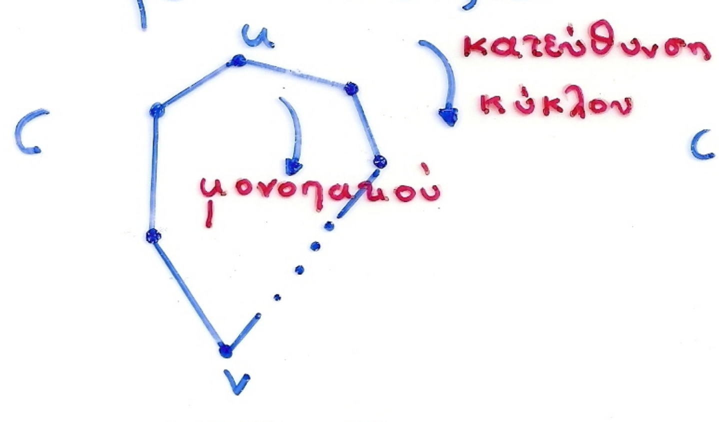
Hamiltonian γράφημα



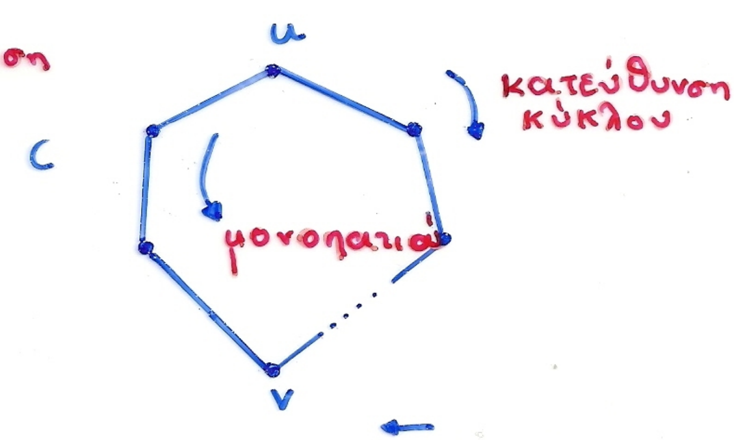
Μη-Hamiltonian γράφημα, το οποίο περιέχει μονοπάτι του Hamilton.

Θεώρημα (Dirac 1952): Έστω G απλό γράφημα με $|V(G)| \geq 3$ και $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$. Το γράφημα G είναι Hamiltonian.

Έστω C κύκλος στο γράφημα G, $u,v \in V(C)$ και έστω (u,v)-μονοπάτι που αποτελεί τμήμα του C. Δίνουμε στον C ένα συγκεκριμένο προσανατολισμό. Εάν το (u,v)-μονοπάτι έχει την ίδια κατεύθυνση με τον C, θα το συμβολίζουμε με $C[u,v]$, ενώ εάν έχει αντίθετη κατεύθυνση θα το συμβολίζουμε με $\overleftarrow{C}[u,v]$.



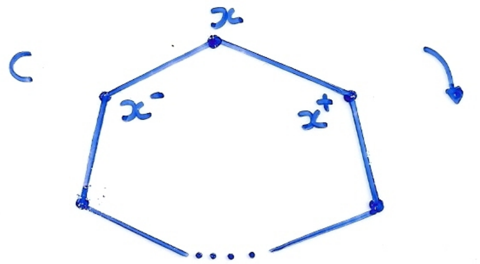
$C[u,v]$



$\overleftarrow{C}[u,v]$

Έστω κύκλος C σ' ένα γράφημα G, στον οποίο έχουμε δώσει έναν προσανατολισμό και έστω x κορυφή του C. Με x^- θα συμβολίζουμε την κορυφή που προηγείται της x στον C, ενώ με x^+

Θα συμβολίζουμε την κορυφή που ακολουθεί την x.



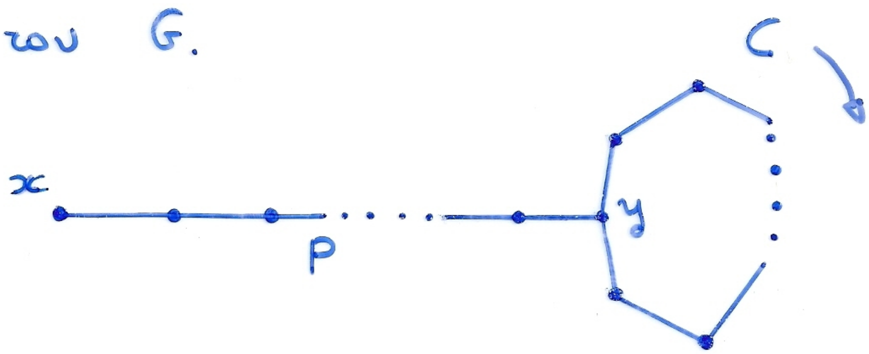
Επίσης ορίζουμε

$$S^- = \{x^- \mid x \in S\}$$

$$S^+ = \{x^+ \mid x \in S\}$$

για $S \subseteq V(C)$.

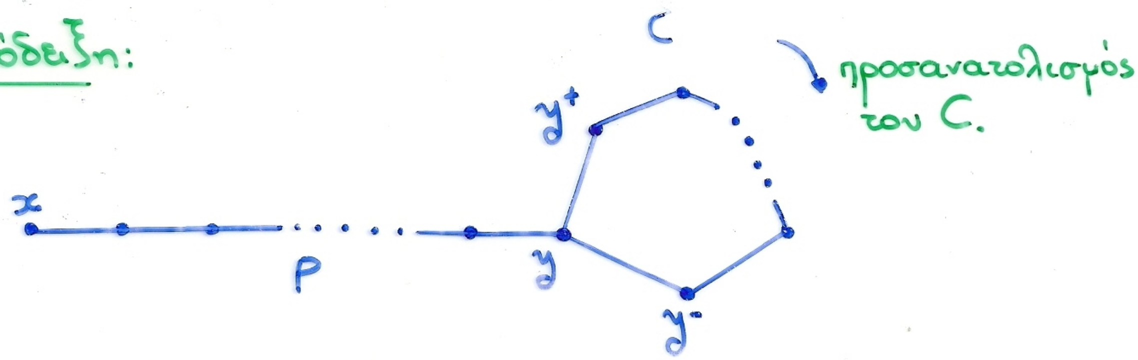
Έστω κύκλος C και μονοπάτι P στο γράφημα G που συνδέει δύο κορυφές x και y. Εάν $V(C) \cap V(P) = \{y\}$ τότε το γράφημα $C \cup P$ ονομάζεται (x,y)-λάσο του G.



Λήμμα: Έστω γράφημα G και έστω $C \cup P$ ένα (x,y)-λάσο του, όπου $|V(P)| = m+1$ και $|V(C)| = l$. Εάν δώσουμε στον C έναν προσανατολισμό, τότε το G περιέχει το (x,y^-)-μονοπάτι $PC[y,y^-]$ και το (x,y^+)-μονοπάτι $P\overleftarrow{C}[y,y^+]$, τα οποία είναι μήκους $m+l-1$.

Επίσης εάν ο C είναι κύκλος μέγιστου μήκους στο G και $|V(P)|\geq 2$, τότε η x δεν μπορεί να είναι γειτονική με την y^+ αλλά ούτε και με την y^- στο G.

Απόδειξη:



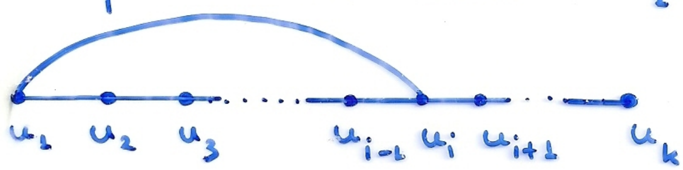
Προφανής εάν λάβουμε υπ' όψη μας το παραπάνω Σχήμα.

1η απόδειξη του Θεωρήματος του Dirac.

(Στην απόδειξη που θα ακολουθήσει θα χρησιμοποιήσουμε την εξής πρόταση:

Άσκηση 1.9 « Έστω G απλό γράφημα με $\delta(G)\geq 2$. Τότε υπάρχει κύκλος στο G με μήκος τουλάχιστον $\delta(G)+1$. »

Απόδειξη: Έστω μονοπάτι P στο G μέγιστου μήκους και έστω $P = u_1 u_2 \dots u_k$

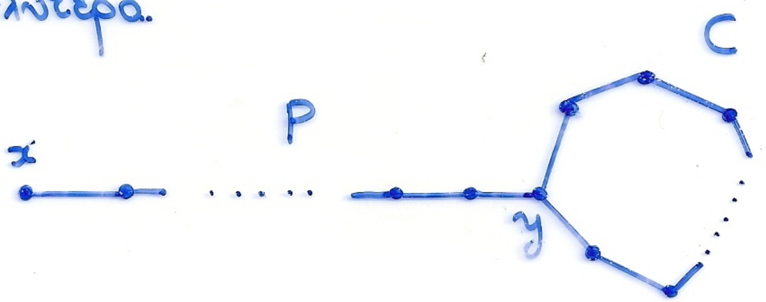


Επειδή $d_G(u_1) \geq \delta(G)$, η u_1 θα είναι γειτονική με τουλάχιστον $\delta(G)$ κορυφές, οι οποίες βρίσκονται πάνω στο P (επειδή το P είναι μέγιστου μήκους). Έστω u_i η τελευταία κορυφή του P, καθώς "πηγαίνουμε" από την u_1 στην u_k που είναι γειτονική με την u_1.

Ο κύκλος $u_1 u_2 u_3 \dots u_{i-1} u_i u_1$ θα περιέχει τουλάχιστον $\delta(G)+1$ κορυφές.)

Έστω C κύκλος μέγιστου μήκους στο G με μήκος l. Από την προηγούμενη πρόταση $l \geq \delta(G)+1$. Εάν ο C είναι κύκλος του Hamilton τότε έχουμε τελειώσει.

Επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι $V(G)-V(C)\neq\emptyset$. Επιλέγουμε ένα υπογράφημα του G, της μορφής $C\cup P$ που είναι (x,y)-λάσο και όπου το P είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερο.

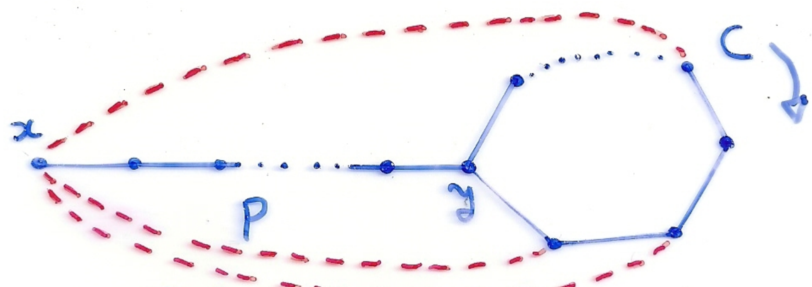


Ας υποθέσουμε ότι το μήκος του P είναι m. Έχουμε

$$\delta(G)\geq |V(G)|-\delta(G) > |V(G)|-\ell = |V(G-C)|.$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε κορυφή που ανήκει στο σύνολο $V(G)-V(C)$ είναι γειτονική με τουλάχιστον μία κορυφή του C. Άρα $m\geq 1$ δηλ. $|V(P)|\geq 2$.

Επίσης εάν μια κορυφή του $C-\{y\}$ απέχει από την y κατά μήκος του C απόσταση m ή λιγότερο δεν μπορεί να είναι γειτονική με την x. (διότι ο C είναι μέγιστου μήκους)



Ο αριθμός των παραπάνω κορυφών ισούται με $2m$. Από τις υπόλοιπες $l-2m$ κορυφές του C, δεν μπορούμε να έχουμε δύο διαδοχικές που να είναι γειτονικές προς την x (και εδώ διότι ο C είναι μέγιστου μήκους)

Τέλος η x δεν μπορεί να είναι γειτονική με κορυφή που ανήκει στο $V(G)-(V(C)\cup V(P))$, (διότι το P είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερο

Άρα

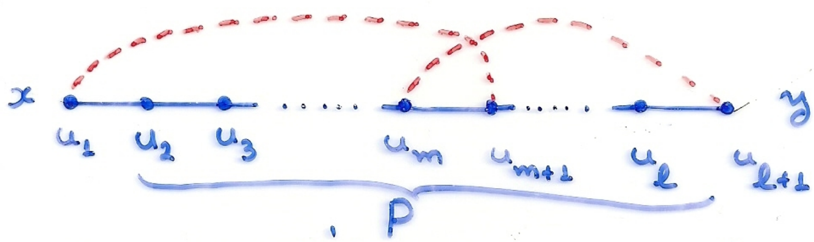
$$\underline{d_G(x)} \leq m+\frac{l-2m}{2}=\frac{l}{2} \leq \frac{|V(G)|}{2} \leq \underline{\delta(G)}$$

ΑΤΟΠΟ

(NEWMANN 1958)

2η απόδειξη του Θεωρήματος του Dirac.

Έστω P μονοπάτι μέγιστου μήκους στο G, με μήκος l. Θα αποδείξουμε ότι το G περιέχει κύκλο μήκους $l+1$



Εάν οι κορυφές x και y είναι γειτονικές τότε προφανώς ισχύει αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε. Επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει ακμή στο G με άκρα τις κορυφές x και y.

Επειδή το P είναι μέγιστου μήκους, όλες οι κορυφές που είναι γειτονικές προς την x ή την y θα ανήκουν στο P. Ορίζουμε

$$X=\{u_i \mid u_1 \text{ γειτονική προς την } u_{i+1}\}.$$
$$Y=\{u_i \mid u_i \text{ γειτονική προς την } u_{l+1}\}.$$

Θα αποδείξουμε ότι

$X \cap Y \neq \emptyset$.

Επειδή $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$,

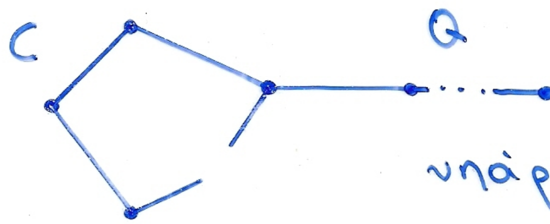
$$|X| + |Y| = d_G(u_1) + d_G(u_{l+1}) \geq 2\delta(G) \geq |V(G)|$$

και επειδή $y \notin X \cup Y$, $|X \cup Y| \leq l \leq |V(G)| - 1$.

Άρα $|X \cap Y| = |X| + |Y| - |X \cup Y| \geq 1$. Έστω $u_m \in X \cap Y$. Τότε ο κύκλος $C = P[x, u_m] u_m y \overleftarrow{P}[y, u_{m+1}] u_{m+1} x$ έχει μήκος $l+1$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ο C είναι κύκλος του Hamilton στο G.

Εάν ο C δεν είναι κύκλος του Hamilton τότε υπάρχει λάσο $C \cup Q$ στο G, όπου Q μονοπάτι μήκους $k \geq 1$.



Όμως σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα υπάρχει μονοπάτι στο G μήκους $l+1+k-1 = l+k$ — ΑΤΟΠΟ

διότι το P που είναι μέγιστου μήκους, έχει μήκος l.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ.

Στην προηγούμενη απόδειξη ουσιαστικά αποδείξαμε το εξής ισχυρότερο αποτέλεσμα:

«Έστω G απλό γράφημα με $|V(G)| \geq 3$.
Εάν για κάθε ζεύγος μη-γειτονικών κορυφών x και y,

$$d_G(x) + d_G(y) \geq |V(G)|,$$

τότε το G είναι Hamiltonian.»

3η απόδειξη του Θεωρήματος του Dirac.

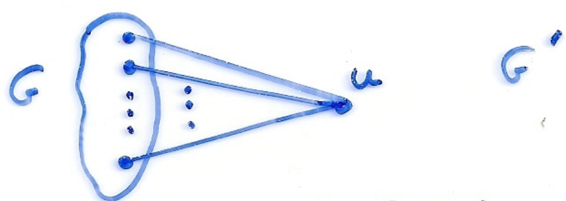
Bondy 1981.

Από το Θεώρημα του Dirac προκύπτουν τα εξής δύο πορίσματα:

Πόρισμα 1: Έστω G απλό γράφημα με $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|-1}{2}$. Τότε το G περιέχει μονοπάτι του Hamilton.

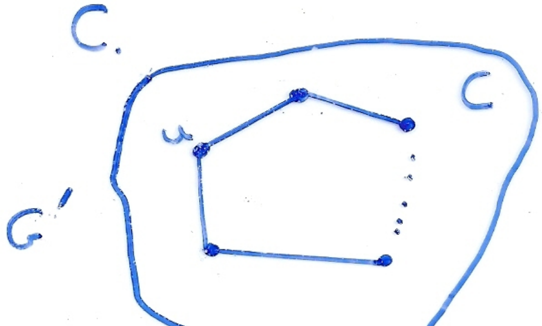
Απόδειξη: Εάν $|V(G)|=1$, τότε προφανώς το πόρισμα ισχύει.

Έστω ότι $|V(G)|\geq 2$. Θεωρούμε το γράφημα $G'=G+\{u\}$ (Το G' προκύπτει από το G, προσθέτοντας μια νέα κορυφή u, την οποία συνδέουμε με κάθε κορυφή του G).



Έχουμε ότι: $|V(G')|\geq 3$ και $\delta(G')\geq \frac{\overbrace{|V(G)|+1}^{|V(G')|}}{2}$.

Άρα από το Θεώρημα του Dirac το G' περιέχει κύκλο του Hamilton, έστω τον C.



Το γράφημα $C-\{u\}$ αποτελεί μονοπάτι του Hamilton για το G.

<u>Πόρισμα 2</u>: Έστω G απλό γράφημα και u,v μη-γειτονικές κορυφές του, όπου

$$d_G(u)+d_G(v)\geq |V(G)|. \qquad -(*)$$

Θεωρούμε το γράφημα $G' = G + \{u, v\}$, το οποίο προκύπτει από το G εάν προσθέσουμε για ακμή που συνδέει τις μη-γειτονικές κορυφές u και v.
Το γράφημα G είναι Hamiltonian εάν και μόνον εάν το G' είναι επίσης Hamiltonian.

Απόδειξη:
$\Rightarrow$ Προφανές

$\Leftarrow$ Έστω ότι το G' είναι Hamiltonian

Τότε το γράφημα G, θα περιέχει μονοπάτι του Hamilton δηλ μονοπάτι μήκους $|V(G)|-1$. Ένα τέτοιο μονοπάτι είναι προφανώς μονοπάτι μέγιστου μήκους και θα έχει για άκρα του, τις κορυφές u, v.

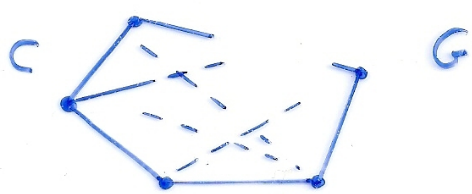
Στην απόδειξη 2 του θεωρήματος του Dirac, μεταξύ άλλων αποδείξαμε και το εξής:
«Έστω P μονοπάτι μέγιστου μήκους σ' ένα γράφημα G, τα άκρα του οποίου ικανοποιούν την $(*)$. Εάν το P έχει μήκος ℓ, τότε το G περιέχει κύκλο μήκους $\ell+1$»

Εάν θέσουμε $l=|V(G)|-1$, τότε προκύπτει αμέσως το Πόρισμα.

Άσκηση: (5.1, α).

Έστω G Hamiltonian γράφημα. Για κάθε μη-κενό, γνήσιο υποσύνολο S του V(G), να αποδειχθεί ότι $\omega(G-S)\leq |S|$.

Αποδ. Έστω C κύκλος του Hamilton στο G.



Για κάθε μη-κενό γνήσιο υποσύνολο S του V(C), $\omega(C-S)\leq|S|$.

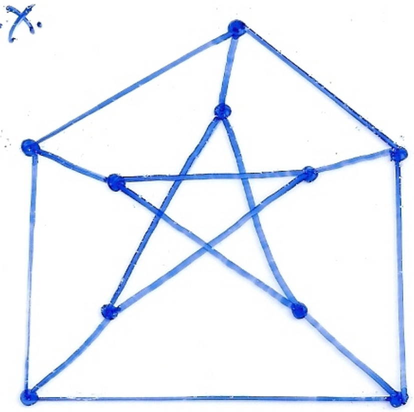
Όμως $\omega(C-S)\geq\omega(G-S)$.

Άρα $\omega(G-S)\leq|S|$

Το αντίστροφο ισχύει; (Άσκηση 5.3).

ΟΧΙ.

π.χ.



Γράφημα του Petersen.

Το παραπάνω γράφημα δεν είναι Hamiltonian παρ' ότι $\omega(G-S) \leq |S|$ για κάθε μη-κενό γνήσιο υποσύνολο S του $V(G)$.

Το πρόβλημα του περιοδεύοντος εμπόρου.

Έστω γράφημα G και έστω συνάρτηση $w: E(G) \to \mathbb{R}^+$. Θέλουμε να βρούμε κύκλο του Hamilton C στο G, έτσι ώστε το

$$\sum_{e \in E(C)} w(e)$$

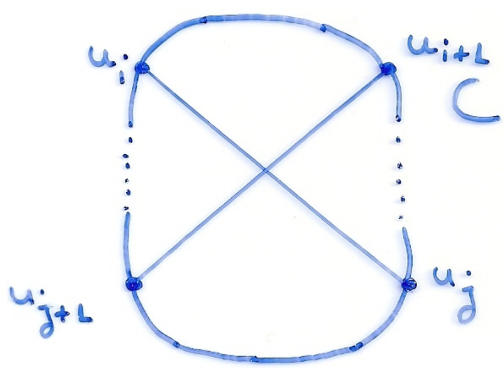
να είναι ελάχιστο.

(Προφανώς το παραπάνω πρόβλημα έχει έννοια, μόνον στην περίπτωση που το G είναι Hamiltonian)

Σε αντίθεση με άλλα προβλήματα βελτιστοποίησης δεν υπάρχει αποδοτική διαδικασία επίλυσης του παραπάνω προβλήματος. Θα περιγράψουμε μια διαδικασία που μας δίνει μια "σχετικώς καλή" λύση, αλλά όχι απαραίτητα και βέλτιστη.

Ξεκινάμε από έναν κύκλο του Hamilton C στο G και τροποποιώντας τον προσπαθούμε να κατασκευάσουμε έναν άλλο μικρότερον συνολικού βάρους.

Η διαδικασία τροποποίησης του C έχει ως εξής: Έστω $C = u_1 u_2 \dots u_n u_1$



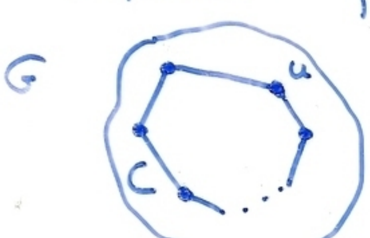
Εάν $w(u_i u_j) + w(u_{i+1} u_{j+1}) < w(u_i u_{i+1}) + w(u_j u_{j+1})$, θεωρούμε τον κύκλο $C^* = u_1 u_2 \dots u_i u_j u_{j-1} \dots \dots u_{i+1} u_{j+1} u_{j+2} \dots u_n u_1$, ο οποίος έχει μικρότερο συνολικό βάρος απ' ότι ο C.

Εάν εφαρμόσουμε την παραπάνω διαδικασία έναν αριθμό φορών, στο τέλος θα καταλήξουμε σ' ένα κύκλο του Hamilton C, που δεν είναι δυνατόν να "βελτιωθεί" περαιτέρω.

Ο C ενδέχεται να μην είναι η βέλτιστη λύση. Θα είναι μια προσέγγιση αυτής, δηλ. θα είναι ένα πάνω φράγμα της.

[Μπορούμε να έχουμε μια ένδειξη για το πόσο καλή είναι η προσέγγιση αυτή, βρίσκοντας ένα κάτω φράγμα της βέλτιστης λύσης]

Έστω κύκλος του Hamilton C στο G, με ελάχιστο συνολικό βάρος· δηλ. ο C αποτελεί βέλτιστη λύση στο πρόβλημα του περιοδεύοντος εμπόρου. Εάν $u \in V(C)$, το γράφημα $C-\{u\}$ αποτελεί μονοπάτι του Hamilton στο $G-\{u\}$.



Το γράφημα $C-\{u\}$ μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως επικαλυπτικό δένδρο του $G-\{u\}$

Έστω e_k, e_l ακμές που έχουν ως άκρο τους, την κορυφή u με $w(e_k)+w(e_l)$ όσο το δυνατόν μικρότερο.

Τότε

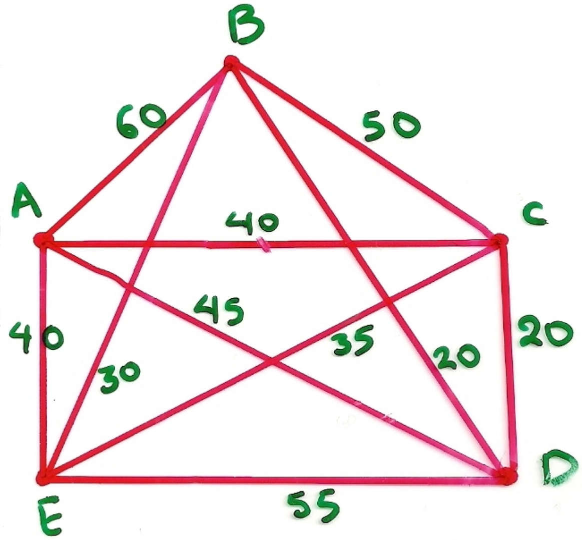
$$\sum_{e \in E(C)} w(e) \geq \sum_{e \in E(C-\{u\})} w(e) + w(e_k) + w(e_l) \geq (\text{συνολικό}$$

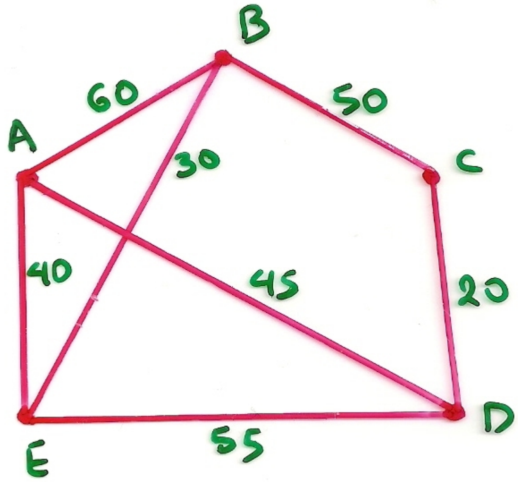
βάρος βέλτιστου επικαλυπτικού δέντρου στο $G-\{u\}$)

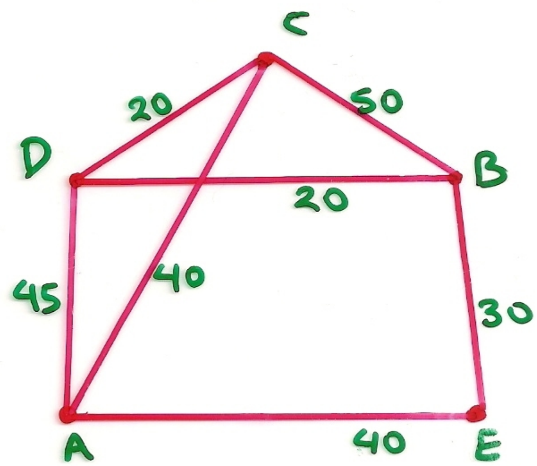
$+ w(e_k) + w(e_l)$

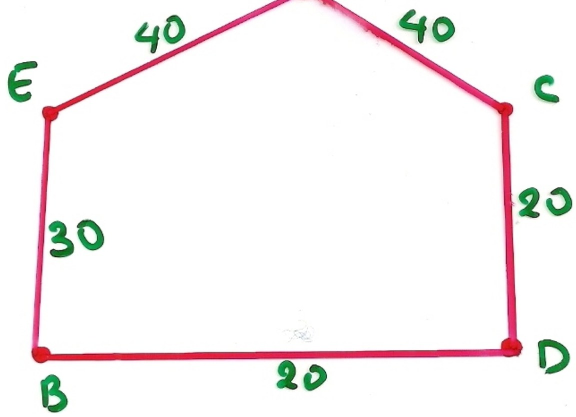
Εάν βρούμε ένα βέλτιστο επικαλυπτικό δέντρο στο $G-\{u\}$ χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Kruskal ή του Prim και στην συνέχεια το συνολικό του βάρος έχουμε ένα κάτω φράγμα της βέλτιστης λύσης, στο πρόβλημα του περιοδεύοντος εμπόρου.

π.χ.



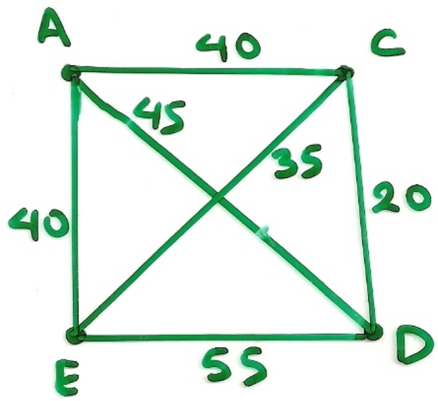


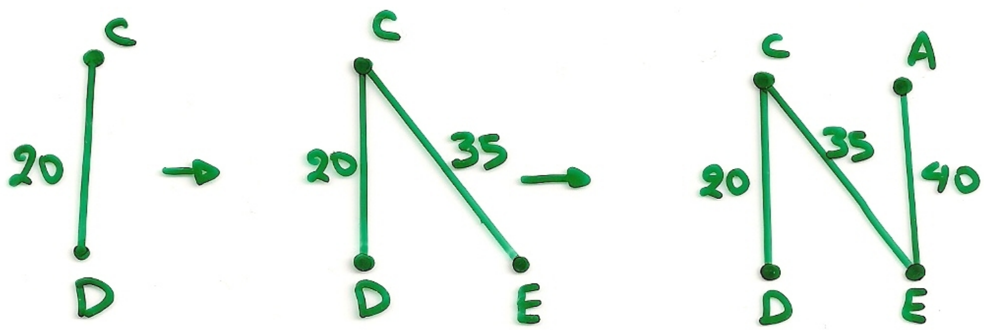




Προσέγγιση βέλτιστης λύσης με συνολικό βάρος 150.

$G - \{B\} = G_1$





T

$$\sum_{e \in E(T)} w(e) + w(BE) + w(BD) = 95 + 30 + 20 = 145.$$

Άρα εάν C βέλτιστη λύση

$$145 \leq \sum_{e \in E(C)} w(e) \leq 150.$$