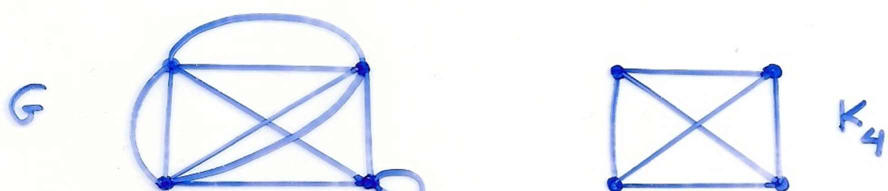
Συνεκτικότητα γραφημάτων.

Έστω γράφημα G και έστω $S \subseteq V(G)$. Το S θα λέμε ότι αποτελεί σύνολο-κορυφών αποκοπής για το G, εάν το γράφημα G-S είναι μη-συνεκτικό.

Υπάρχουν γραφήματα που δεν έχουν σύνολα-κορυφών-αποκοπής;

Απ. Τα μόνα γραφήματα που δεν έχουν σύνολα-κορυφών-αποκοπής είναι εκείνα τα οποία περιέχουν πλήρη γραφήματα ως επικαλυπτικά τους υπογραφήματα.

π.χ.



Το K_4 είναι επικαλυπτικό υπογράφημα του G.

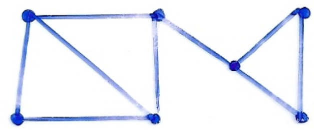
Δηλαδή τα μόνα γραφήματα που δεν έχουν σύνολα-κορυφών-αποκοπής είναι εκείνα στα οποία δεν υπάρχει ζεύγος μη-γειτονικών κορυφών.

Η συνεκτικότητα-κορυφών ενός γραφήματος G συμβολίζεται με $k(G)$ και ορίζεται ως εξής: $k(G) = |V(G)| - 1$ εάν το G δεν έχει σύνολα-κορυφών-αποκοπής

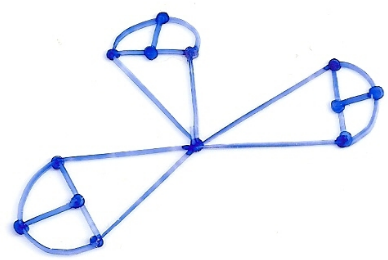
Ενώ στην αντίθετη περίπτωση,

$k(G)$ = ελάχιστο αριθμό στοιχείων που μπορεί να περιέχει ένα σύνολο-κορυφών-αποκοπής του G.

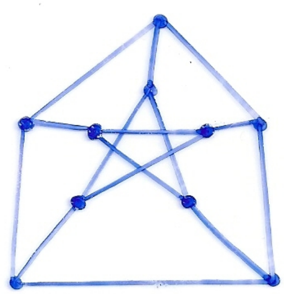
π.χ.



G_1



G_2



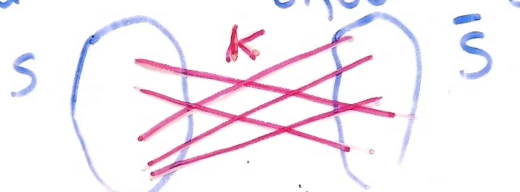
G_3

$k(G_1)=1, \ k(G_2)=1, \ k(G_3)=3$

Ένα γράφημα G θα λέμε ότι είναι k-κορυφών-συνεκτικό εάν $k(G) \geq k$.

Εάν $S, S' \subseteq V(G)$ με $E_G(S,S')$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των ακμών του G που έχουν ένα άκρο στο S και το άλλο στο S'.

Έστω $K \subseteq E(G)$. Θα λέμε ότι το K αποτελεί σύνολο-ακμών-αποκοπής για το G εάν είναι της μορφής $E_G(S, \bar{S})$ όπου S μη-κενό γνήσιο υποσύνολο του $V(G)$ και όπου $\bar{S} = V(G) - S$.



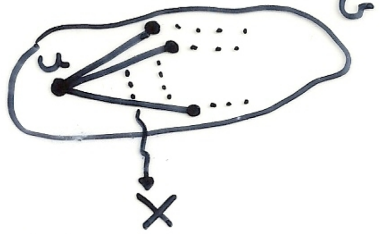
Η συνεκτικότητα-ακμών ενός γραφήματος G συμβολίζεται με $\lambda(G)$ και ορίζεται ως εξής: Εάν $|V(G)| \geq 2$ το $\lambda(G)$ ισούται με τον ελάχιστο αριθμό στοιχείων που μπορεί να περιέχει ένα σύνολο-ακμών-αποκοπής του G. Διαφορετικά εάν $|V(G)| = 1$ τότε ορίζουμε $\lambda(G) = 0$.

Ένα γράφημα G θα λέμε ότι είναι k-ακμών-συνεκτικό εάν $\lambda(G) \geq k$.

Για τα προηγούμενα γραφήματα έχουμε ότι: $\lambda(G_1) = 1$, $\lambda(G_2) = 2$, $\lambda(G_3) = 3$.

Θεώρημα (Whitney 1932): Για κάθε γράφημα G $k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.

Αποδ. Εάν $|V(G)| = 1$ τότε $\lambda(G) = 0 \leq \delta(G)$. Τώρα εάν $|V(G)| \geq 2$ θεωρούμε κορυφή u στο G με $d_G(u) = \delta(G)$ και έστω X το σύνολο των ακμών που έχουν την u ως άκρο τους.

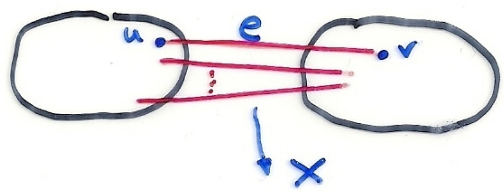


Προφανώς το X αποτελεί σύνολο-ακμών-αποκοπής για το G. Άρα $\lambda(G) \leq |X| = \delta(G)$.

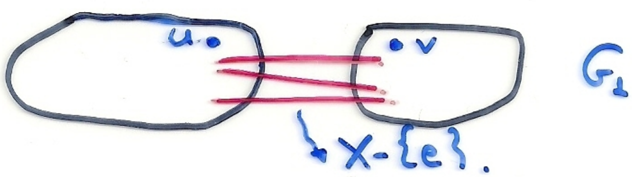
Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι $k(G) \leq \lambda(G)$. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς $\lambda(G)$. Εάν $\lambda(G)=0$, αυτό σημαίνει ότι $|V(G)|=1$ ή ότι το G είναι μη-συνεκτικό γράφημα. Όμως και για τις δύο αυτές περιπτώσεις έχουμε ότι $k(G)=0$. Άρα $k(G)\leq\lambda(G)$.

Έστω τώρα ότι $k(G)\leq\lambda(G)$ για όλα τα γραφήματα που έχουν συνεκτικότητα ακμών μικρότερη από r και έστω γράφημα G με $\lambda(G)=r\geq 1$.

Θεωρούμε σύνολο-ακμών-αποκοπής X του G, όπου $|X|=r$



Εάν $e\in X$, ορίζουμε το γράφημα $G_1=G-\{e\}$

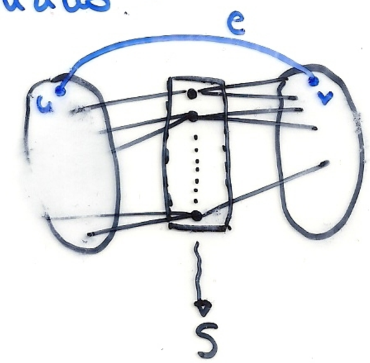


Τότε έχουμε ότι $\lambda(G_1)=r-1$ και επομένως από την υπόθεση της επαγωγής $k(G_1)\leq\lambda(G_1)=r-1$.

Έστω S σύνολο-κορυφών-αποκοπής του G_1 όπου $|S|=k(G_1)$.
Τότε είτε το $G-S$ είναι μη-συνεκτικό, οπότε

$$k(G)\leq k(G_1)\leq r-1 \qquad -(1)$$

ή διαφορετικά το $G-S$ είναι συνεκτικό.



Σ' αυτή την περίπτωση η e, θα αποτελεί γέφυρα* του $G-S$.

Εδώ διακρίνουμε τις εξής δύο υποπεριπτώσεις:

<u>$|V(G-S)|=2$:</u>

Τότε

$$k(G) \leq |V(G)|-1 = |S|+2-1 = k(G_1)+1 \leq r \qquad -(2)$$

<u>$|V(G-S)| \geq 3$:</u>

Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα άκρο της e, έστω η u, τέτοιο ώστε $\omega(G-|S\cup\{u\}|)\geq 2$, οπότε

$$k(G) \leq k(G_1)+1 \leq r \qquad -(3)$$

διότι το $S\cup\{u\}$ αποτελεί σύνολο-κορυφών-αποκοπής για το G.

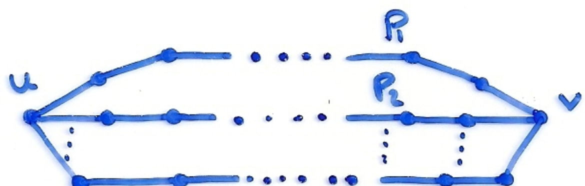
* Μια ακμή e λέμε ότι αποτελεί γέφυρα ενός συνεκτικού γραφήματος G, εάν $\omega(G-\{e\})=2$.

Από τις (1),(2),(3) προκύπτει ότι

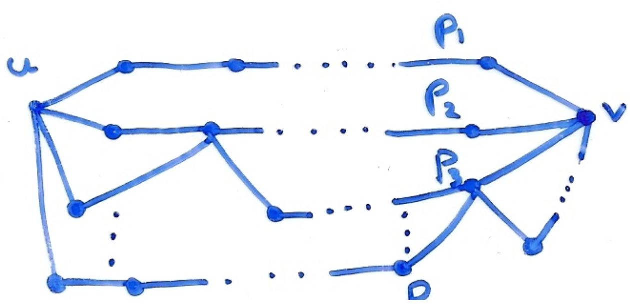
$$k(G) \leq r.$$

Άρα έχουμε αποδείξει ότι $k(G) \leq r = \lambda(G)$.

Έστω γράφημα G και έστω $u, v \in V(G)$. Μια οικογένεια (u,v)-μονοπατιών θα λέμε ότι αποτελείται από μονοπάτια εσωτερικών-κορυφών-ξένα εάν δεν υπάρχει κορυφή στο G που να είναι εσωτερική σε περισσότερα από ένα μονοπάτια αυτής της οικογένειας.



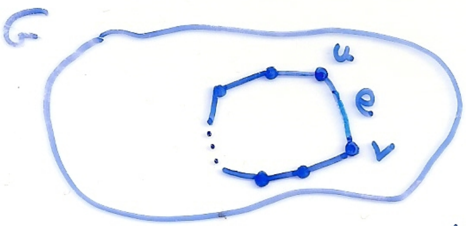
Επίσης μια οικογένεια (u,v)-μονοπατιών θα λέμε ότι αποτελείται από μονοπάτια ακμών-ξένα εάν δεν υπάρχει ακμή στο G που να ανήκει σε περισσότερα από ένα μέλη αυτής της οικογένειας.



Θεώρημα: Έστω γράφημα G με $|V(G)| \geq 3$. Το G είναι 2-κορυφών-συνεκτικό εάν και μόνον εάν $\forall\, u, v \in V(G)$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο (u,v)-μονοπάτια στο G εσωτερικών-κορυφών-ξένα.

Απόδειξη: Εάν $\forall\, u, v \in V(G)$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο (u,v)-μονοπάτια στο G εσωτερικών-κορυφών-ξένα, τότε προφανώς δεν υπάρχει σύνολο-κορυφών-αποκοπής στο G που να έχει ένα μόνον στοιχείο. Άρα το G θα είναι 2-κορυφών-συνεκτικό.

Έστω τώρα ότι το G είναι 2-κορυφών-συνεκτικό. Θα αποδείξουμε ότι κάθε ζεύγος κορυφών u και v στο G συνδέονται μεταξύ τους με τουλάχιστον 2 μονοπάτια εσωτερικών-κορυφών-ξένα, χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς $d_G(u,v)$.
Έστω ότι $d_G(u,v)=1$.



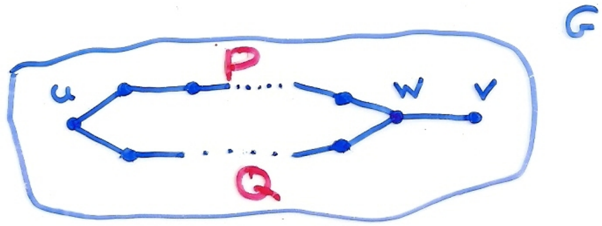
Επειδή $2 \leq k(G) \leq \lambda(G)$, η ακμή e που έχει ως άκρα της, τις κορυφές u και v δεν μπορεί να αποτελεί γέφυρα για το G. Δηλαδή θα υπάρχει (u,v)-μονοπάτι στο $G-\{e\}$. Άρα οι κορυφές u και v συνδέονται μεταξύ τους με δύο μονοπάτια εσωτερικών-κορυφών-ξένα.

Έστω τώρα ότι το Θεώρημα ισχύει για κάθε ζεύγος κορυφών οι οποίες απέχουν απόσταση μικρότερη από r και

$d_G(u,v)=r\geq 2$.

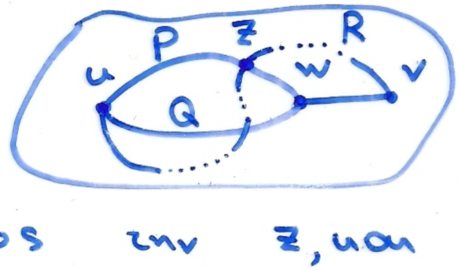
Θεωρούμε ένα συντομότερο (u,v)-μονοπάτι μήκους r και έστω w η προτελευταία του κορυφή.

Επειδή $d_G(u,v)=r$, $d_G(u,w)=r-1$. Άρα



από την υπόθεση της επαγωγής, υπάρχουν στο G δύο (u,w)-μονοπάτια εσωτερικών-κορυφών-ξένα. Ας τα ονομάσουμε P και Q.

Το G είναι 2-κορυφών-συνεκτικό, άρα το $G_1=G-\{w\}$ είναι συνεκτικό γράφημα. Επομένως υπάρχει (u,v)-μονοπάτι στο G_1. Ας το ονομάσουμε R. Έστω z η τελευταία κορυφή του R που ανήκει στο $P\cup Q$. Θεωρούμε τα εξής δύο (u,v)-μονοπάτια.



Το πρώτο αποτελείται από το τμήμα του μονοπατιού P από την u έως την z, και από το τμήμα του R από την z έως την v. Το δεύτερο αποτελείται από το μονοπάτι Q και την ακμή wv. Τα δύο αυτά μονοπάτια είναι εσωτερικών-κορυφών-ξένα.

Πόρισμα: Εάν ένα γράφημα G είναι 2-κορυφών-συνεκτικό τότε κάθε ζεύγος κορυφών του ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Το προηγούμενο θεώρημα μπορεί να γενικευτεί ως εξής.

Θεώρημα (Whitney 1932): Έστω γράφημα G με $|V(G)| \geq k+1$. Το G είναι k-κορυφών-συνεκτικό εάν και μόνον εάν $\forall\, u,v \in V(G)$ υπάρχουν τουλάχιστον k (u,v)-μονοπάτια στο G εσωτερικών-κορυφών-ξένα.

Κατασκευή αξιόπιστων δικτύων με ελάχιστο αριθμό συνδέσεων.

$f(m,n)$: ελάχιστος αριθμός ακμών που μπορεί να έχει ένα m-κορυφών-συνεκτικό γράφημα με n κορυφές.

Έστω G ένα τέτοιο γράφημα. Τότε

$$
\begin{aligned}
2|E(G)| &= \sum_{x \in V(G)} d_G(x) \\
&\geq \delta(G)\,|V(G)| \\
&\geq k(G)\,|V(G)|
\end{aligned}
$$

Άρα $2|E(G)| \geq m.n$ και επομένως

$$f(m,n) \geq \left\lceil \frac{m.n}{2} \right\rceil .$$

Θα κατασκευάσουμε ένα m-κορυφών-συνεκτικό γράφημα με n κορυφές που έχει ακριβώς $\left\lceil \frac{m \cdot n}{2} \right\rceil$ ακμές.

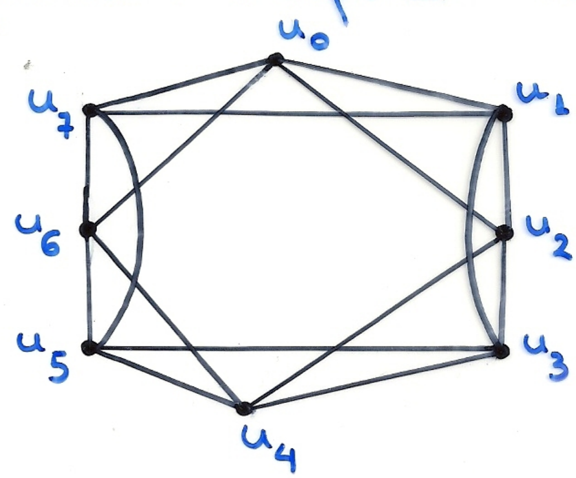
Η ύπαρξη ενός τέτοιου γραφήματος (το οποίο θα συμβολίζουμε με $H_{m,n}$) αποδεικνύει ότι $f(m,n) = \left\lceil \frac{mn}{2} \right\rceil$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

<u>Το m είναι άρτιος.</u>

Έστω $m=2r$. Το γράφημα $H_{2r,n}$ κατασκευάζεται ως εξής: Έχει για κορυφές του τις $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ και δύο κορυφές u_i, u_j είναι γειτονικές εάν $i-r \le j \le i+r$, όπου η πρόσθεση θεωρείται modulo n.

π.χ.



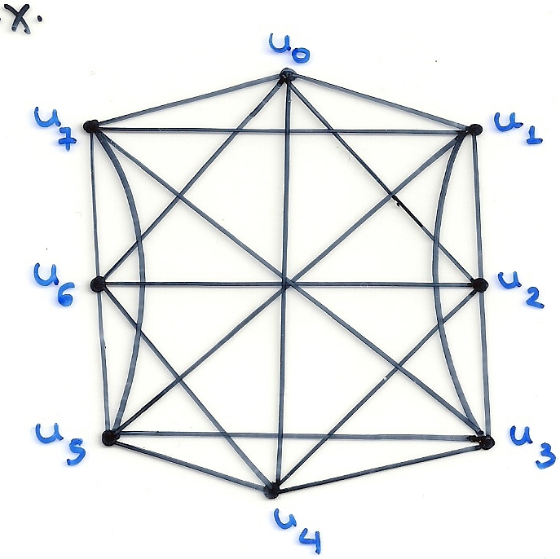
$H_{4,8}$.

Το m είναι περιττός και το n άρτιος.

Έστω $m=2r+1$. Το γράφημα $H_{2r+1,n}$ κατασκευάζεται ως εξής:

Κατασκευάζουμε πρώτα το $H_{2r,n}$ και μετά συνδέουμε την κορυφή u_i με την κορυφή $u_{i+\frac{n}{2}}$ για $1\le i\le \frac{n}{2}$.

π.χ.

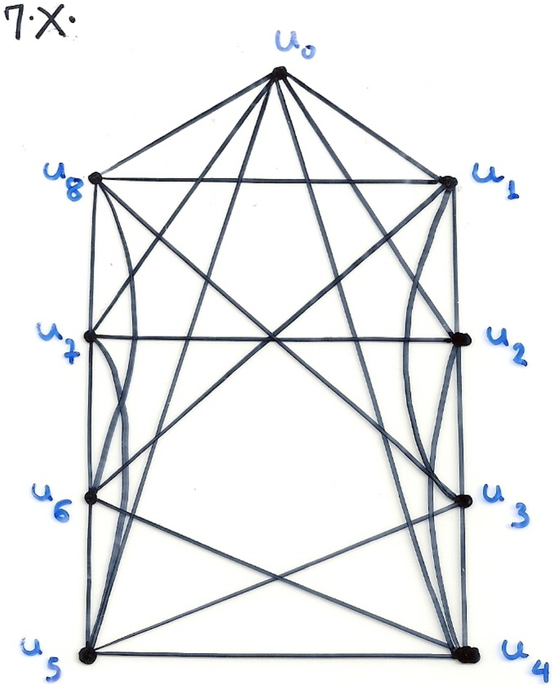


$H_{5,8}$

Τα m, n περιττοί.

Έστω $m=2r+1$. Το γράφημα $H_{2r+1,n}$ κατασκευάζεται ως εξής: Κατασκευάζουμε πρώτα το $H_{2r,n}$ και μετά συνδέουμε την κορυφή u_0 με τις κορυφές $u_{\frac{n-1}{2}}, u_{\frac{n+1}{2}}$ και την κορυφή u_i με την $u_{i+\frac{n+1}{2}}$ για $1\le i<\frac{n-1}{2}$.

π.χ.

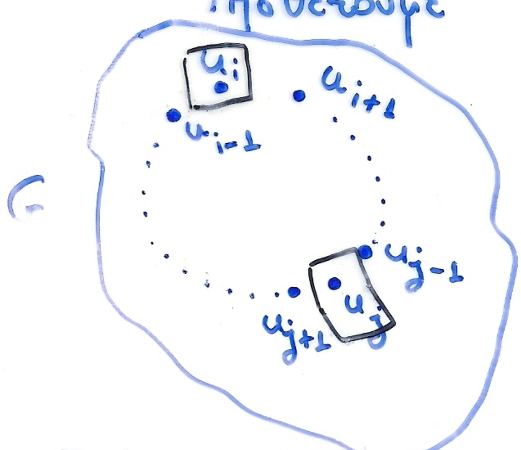


$H_{5,9}$

Θεώρημα (Harary 1962): Το γράφημα $H_{m,n}$ είναι m-κορυφών-συνεκτικό.

Απόδειξη: Έστω ότι $m=2r$. Έστω επίσης ότι υπάρχει σύνολο-κορυφών-αποκοπής S του $H_{m,n}$ όπου $|S|<2r$.

Υποθέτουμε ότι οι κορυφές u_i και u_j ανήκουν σε διαφορετικές συνιστώσες του γραφήματος $H_{2r,n}-S$.



Θεωρούμε τα σύνολα

$P=\{u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_j\}$

$Q=\{u_j, u_{j+1}, \ldots, u_{i-1}, u_i\}$

Επειδή $|S|<2r$, χ.β.γ.ε. μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|P\cap S|<r$. Θεωρούμε την ακολουθία κορυφών που αποτελούν στοιχεία του $P-S$, η οποία αρχίζει με την u_i και τελειώνει με

την u_j. Για κάθε ζεύγος διαδοχικών κορυφών u_ℓ, u_k σ' αυτή την ακολουθία $|\ell - k| \leq r$. Όμως για τέτοια ακολουθία αποτελεί το σύνολο κορυφών ενός (u_i, u_j)-μονοπατιού στο γράφημα $H_{2r,n} - S$ — ΑΤΟΠΟ.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε το θεώρημα για $m = 2r+1$.