ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS AND BUSINESS

Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Πληροφορικής
ΠΜΣ στα Πληροφοριακά Συστήματα

# Κρυπτογραφία και Εφαρμογές

Διαλέξεις Ακ. Έτους 2017-2018

# Public Key Cryptography

- RSA cryptosystem
  - ✓ Περιγραφή και κρυπτανάλυση
- ElGamal cryptosystem
  - ✓ Περιγραφή και κρυπτανάλυση
- Ψηφιακές Υπογραφές
  - ✓ RSA signature scheme
  - ✓ ElGamal signature scheme
- Ελλειπτικές Καμπύλες (εκτός ύλης)
  - ✓ Ελλειπτικές καμπύλες στους πραγματικούς, στο $Z_p$ και στο $GF(2^m)$
  - ✓ Κρυπτογραφία ελλειπτικών καμπυλών

## Κρυπτοσυστήματα δημόσιου κλειδιού

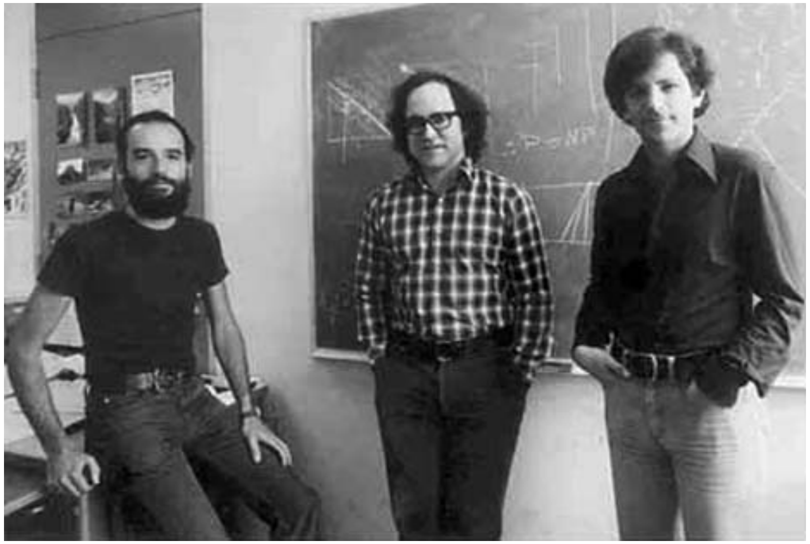
- Κύριο μειονέκτημα της συμμετρικής κρυπτογραφίας: Η Alice και ο Bob πρέπει να συμφωνήσουν εκ των προτέρων για το κλειδί K μέσω ασφαλούς καναλιού
- Αν αυτό δεν είναι εφικτό? Μπορεί να γίνει η κρυπτογράφηση χωρίς να υπάρξει επικοινωνία μεταξύ Alice και Bob?
- Ιδέα: Κάθε οντότητα κατέχει ένα **P**ublic και ένα private (**S**ecret) key
- Κάθε κλειδί είναι ένα τμήμα πληροφορίας
  - RSA: το δημόσιο κλειδί είναι ένα ζεύγος ακεραίων
- Η Alice (**A**) και ο Bob (**B**) έχουν ως public και secret keys τα
  - $\mathbf{P_A}$, $\mathbf{S_A}$ για Alice
  - $\mathbf{P_B}$, $\mathbf{S_B}$ για Bob

- Κρυπτοσυστήματα δημόσιου κλειδιού
  - ✓ Η encryption function που αντιστοιχεί στο public key της Alice δηλώνεται ως $E_A$ και η decryption function που αντιστοιχεί στο secret key της Alice ως $D_A$.
    - Οι $E_A$, $D_A$ είναι υπολογιστικά εφικτές δεδομένων των $\mathbf{P_A}$ και $\mathbf{S_A}$**,** αντίστοιχα
  - ✓ Πρόκληση για ανάπτυξη υπολογιστικά εφικτού public-key cryptosystem:
    - Δημιουργία ενός συστήματος στο οποίο μπορούμε να αποκαλύψουμε το μετασχηματισμό $\mathbf{E_A()}$ χωρίς να μπορεί να ανακαλυφθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathbf{D_A()}$
    - Αντιθέτως, στη συμμετρική κρυπτογραφία αν ξέρουμε το $\mathbf{E_A()}$ τότε εύκολα μαθαίνουμε και το $\mathbf{D_A()}$

- Κρυπτοσυστήματα δημόσιου κλειδιού
- Συνοψίζοντας, σε ένα public key cryptosystem:
  - ✓ Είναι υπολογιστικά εφικτό για έναν χρήστη **B** να παράγει ένα ζεύγος κλειδιών (Public key $P_B$, Secret key $S_B$)
  - ✓ Είναι υπολογιστικά εφικτό για έναν αποστολέα **A**, που γνωρίζει το δημόσιο κλειδί του **B** και το plaintext **M** να δημιουργήσει το αντίστοιχο ciphertext: $C = E_B(M)$
  - ✓ Είναι υπολογιστικά εφικτό για έναν παραλήπτη **B**, που γνωρίζει το ιδιωτικό του κλειδί και λαμβάνει το ciphertext **C** να ανακτήσει το αρχικό κείμενο **M**: $M = D_B(C) = D_B(E_B(M))$
  - ✓ Είναι υπολογιστικά ανέφικτο γνωρίζοντας μόνο το δημόσιο κλειδί $P_B$ να προσδιοριστεί το ιδιωτικό κλειδί $S_B$
  - ✓ Είναι υπολογιστικά ανέφικτο γνωρίζοντας το δημόσιο κλειδί $P_B$ και το ciphertext **C** να προσδιοριστεί το αρχικό μήνυμα **M**

- Κρυπτοσυστήματα δημόσιου κλειδιού
  - ✓ Trapdoor one way functions
  - ✓ One-way functions: είναι συναρτήσεις που μπορούμε να τις υπολογίσουμε εύκολα, είναι όμως υπολογιστικά ανέφικτο να υπολογίσουμε την αντίστροφή τους
  - ✓ Trapdoor: κάποια πληροφορία που μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την αντίστροφη μιας one way function
  - ✓ Ουσιαστικά στην κρυπτογραφία δημοσίου κλειδιού ψάχνουμε για trapdoor one-way functions
  - ✓ [Diffie-Hellman, 1976]: New Directions in Cryptography

- RSA - Rivest, Shamir, Adleman (1978, MIT)
  - ✓ Turing award, 2003



- RSA - Rivest, Shamir, Adleman (1978, MIT)
- Χαρακτηριστικά
  - ✓ Block cipher
  - ✓ Ορίζεται στο $\mathbf{Z_n}$, δηλαδή ο χώρος των αποδεκτών μηνυμάτων **D** είναι οι αριθμοί modulo n (κλάσεις ισοδυναμίας)

**Παραγωγή Κλειδιών**

| | |
|---|---|
| Επέλεξε πρώτους, μεγάλους, διαφορετικούς, αριθμούς | p, q |
| Υπολόγισε n: | $n = p \cdot q$ |
| Υπολόγισε φ(n): | $\varphi(n) = (p-1)\,(q-1)$ |
| Επέλεξε ακέραιο e | |
| $(1<e<\varphi(n))$, έτσι ώστε: | $\gcd(\varphi(n), e) = 1$ |
| Υπολόγισε d, έτσι ώστε: | $de = 1 \bmod(\varphi(n))$ |
| Public key | $P = \{e, n\}$ |
| Secret key | $S = \{d, p, q\}$ |

**Συνάρτηση Euler**

- RSA - Rivest, Shamir, Adleman (1978, MIT)

✓ Μπορούμε να έχουμε ένα ευρετήριο με τα δημόσια κλειδιά όλων των χρηστών

**Κρυπτογράφηση**

Αρχικό κείμενο $M < n$

Ciphertext: $C = E(M) = M^e \bmod n$

**Αποκρυπτογράφηση**

Ciphertext $C < n$

Αρχικό κείμενο: $M = D(C) = C^d \bmod n$

✓ Για την ύψωση σε δύναμη: χρήση του repeated squaring algorithm

- Υλοποίηση παραγωγής κλειδιών
- Πώς επιλέγουμε το e?
  - ✓ Αρκεί κάποιος πρώτος αριθμός > max{p, q} (ίσως και μικρότεροι πρώτοι να είναι κατάλληλοι)
  - ✓ Χρήση primality testing
- Πώς υπολογίζουμε το d?
  - ✓ Χρήση του extended Euclidean algorithm

**Παραγωγή Κλειδιών**

| | |
|---|---|
| Επέλεξε πρώτους, μεγάλους, διαφορετικούς, αριθμούς | p, q |
| Υπολόγισε n: | $n = p \cdot q$ |
| Υπολόγισε φ(n): | $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ |
| Επέλεξε ακέραιο e | |
| $(1<e<\varphi(n))$, έτσι ώστε: | $\gcd(\varphi(n), e) = 1$ |
| Υπολόγισε d, έτσι ώστε: | $de = 1 \bmod(\varphi(n))$ |
| Public key | $P = \{e, n\}$ |
| Secret key | $S = \{d, p, q\}$ |

- Παράδειγμα

| Παραγωγή Κλειδιών | | |
| --- | --- | --- |
| Επέλεξε πρώτους, μεγάλους, διαφορετικούς, αριθμούς | p, q | $p = 7, q = 17$ |
| Υπολόγισε n: | $n = p \cdot q$ | $n = 119$ |
| Υπολόγισε φ(n): | $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ | $\varphi(n) = 96$ |
| Επέλεξε ακέραιο e | | |
| ($1<e<\varphi(n)$), έτσι ώστε: | $gcd(\varphi(n), e) = 1$ | $e = 5$ |
| Υπολόγισε d, έτσι ώστε: | $de = 1 \bmod(\varphi(n))$ | $d = 77$ γιατί 5*77=1 mod96 |
| Public key | $P = \{e, n\}$ | |
| Secret key | $S = \{d, p, q\}$ | |

Έστω M = **19**

Αποστολέας, encryption $C = M^5 \bmod n = 19^5 \bmod 119 = 66$ → Repeated Squaring Algorithm:

Παραλήπτης, decryption $M = C^{77} \bmod n = 66^{77} \bmod 119 =$ **19**

# Απόδειξη ορθότητας

- **Θεώρημα:** Για κάθε **M** στο **D**
  - **E(D (M)) = M** και
  - **D(E (M)) = M** για κάθε **M** στο **D**
- **Απόδειξη:**

Έστω $M \in Z_n$. Επειδή ο d είναι ο πολλαπλασιαστικός αντίστροφος του e, modulo φ(n) = (p - 1)(q - 1), έχουμε

ed = 1 + k φ(n) για κάποιο ακέραιο k.

i) Αν $M \neq 0 \pmod p$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
M^{ed} \pmod p &\equiv M^{1 + k\varphi(n)} \pmod p \\
&\equiv M\,(M^{\varphi(n)})^{k} \pmod p \\
&\equiv M\,(M^{p-1})^{k(q-1)} \pmod p \\
&\equiv M \pmod p \text{ (από θεώρημα Fermat)}
\end{aligned}
$$

ii) Αν $M = 0 \pmod p$, τότε πάλι $M^{ed} \pmod p \equiv M \pmod p$

- Απόδειξη ορθότητας
  - ✓ Άρα για κάθε M, $M^{ed} \pmod p \equiv M \pmod p$
  - ✓ Ομοίως $M^{ed} \pmod q \equiv M \pmod q$
  - ✓ Από Chinese Remainder Theorem: όταν n=pq, τότε x = y mod n αν και μόνο αν x=y mod p και x=y mod q
  - ✓ $\Rightarrow$ **D(E(M)) =** $M^{ed} \pmod n = M \pmod n$
- Πιο απλή απόδειξη όταν $M \in Z_n^*$ (gcd(M, n)=1):
  - ✓ ed = 1 + k φ(n) για κάποιο ακέραιο k.

$$\mathbf{D(E(M)) =} M^{ed} \equiv M^{1+k\varphi(n)} \pmod n$$

$$\equiv M (M^{\varphi(n)})^k \pmod n$$

$$\equiv M \pmod n \text{ (από θεώρημα Fermat-Euler)}$$

- Κρυπτανάλυση του RSA
  - Δυσκολία RSA
  - Ciphertext-only ή Chosen ciphertext attack:
  - Δεδομένου ακέραιου n που είναι γινόμενο δύο διαφορετικών πρώτων p και q, ενός ακεραίου e τέτοιου ώστε gcd(e, (p − 1)(q − 1)) = 1, και ενός ακεραίου C, βρες ακέραιο M έτσι ώστε $M^e = C$ (modn) (ή διαφορετικά βρες τον εκθέτη d)
  - Ο ορισμός του προβλήματος και οι παράμετροι n και e εξασφαλίζουν ότι για κάθε ακέραιο $C \in \{0, 1, ..., n-1\}$ υπάρχει ένας ακριβώς $M \in \{0, 1, ..., n-1\}$ τέτοιος ώστε $M^e \equiv C \pmod{n}$.
  - Η δυσκολία έγκειται ουσιαστικά στον υπολογισμό του εκθέτη d (decryption exponent)
    - Αν και δεν μπορούμε να αποκλείσουμε το ενδεχόμενο να σπάσουμε το RSA χωρίς απαραίτητα να υπολογίσουμε το d

- Κρυπτανάλυση του RSA
  - ✓ Δυσκολία RSA
  - ✓ Εικασία: η συνάρτηση $f(x) = x^b \bmod n$, όπου n είναι γινόμενο 2 πρώτων είναι one-way function
  - ✓ Αυτή τη στιγμή δεν υπάρχει καμία συνάρτηση που να είναι **αποδεδειγμένα** one-way
  - ✓ Θεώρημα: Αν υπάρχουν one-way functions, τότε **$P \neq NP$**
  - ✓ Trapdoor στο RSA: $\varphi(n)$

- Κρυπτανάλυση του RSA
  - ✓ Αναγωγή στο integer factorization problem:
  - ✓ Έστω ότι ο Oscar μπορεί να παραγοντοποιήσει εύκολα το n
    - Με το να βρει τους p και q, μπορεί να υπολογίσει το φ(n)
    - Στη συνέχεια μπορεί εύκολα να βρει το d έτσι ώστε de = 1 mod(φ(n)) με χρήση του extended Euclidean algorithm
  - ✓ Για το αντίθετο ξέρουμε ότι:
  - ✓ Θεώρημα: Ένας αλγόριθμος που υπολογίζει τον εκθέτη d σε ένα σύστημα RSA, μπορεί να μετατραπεί σε έναν πιθανοτικό αλγόριθμο παραγοντοποίησης του n (απόδειξη στο Stinson)
    - Άρα, αν αποκαλυφθεί το d, δεν αρκεί να αλλάξεις τα d, e, πρέπει να αλλάξει και το n
  - ✓ **Προσοχή:** δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η παραγοντοποίηση είναι ισοδύναμη με την κρυπτανάλυση του RSA

- Κρυπτανάλυση του RSA
  - ✓ Παρατήρηση: Για την παραγοντοποίηση του n, αρκεί να γνωρίζουμε το φ(n)
  - ✓ Έστω ότι φ(n) γνωστό
  - ✓ Μπορούμε να λύσουμε το σύστημα:

$$n = pq$$

$$\varphi(n) = (p-1)(q-1)$$

  - ✓ Αν $q = n/p$, οι παράγοντες θα προέλθουν από τη διωνυμική εξίσωση $p^2 – (N – \varphi(n)+1)p + N = 0$
  - ✓ Πόρισμα: Ο υπολογισμός του φ(n) δεν είναι ευκολότερος από την παραγοντοποίηση του n.

- Κρυπτανάλυση του RSA
- Στην πράξη:
  - ✓ Αν δουλέψουμε με 1024 bits, τότε δημιουργείται ένα public key που είναι απαραβίαστο σε εύλογο χρονικό διάστημα με βάση την τρέχουσα γνώση και τεχνολογία ($n \approx 200$ decimal digits)
  - ✓ Ίσως όχι τόσο ασφαλές για το μέλλον όμως
  - ✓ Οι γνωστοί αλγόριθμοι παραγοντοποίησης πάνε σχετικά καλά μέχρι το πολύ 130 decimal digits

- Κρυπτανάλυση του RSA
- Μερική ανάκτηση πληροφοριών – Είναι εφικτό να μάθουμε έστω κάποια bits του plaintext?
- Έστω $y = x^e \bmod n$
  - ✓ Παρατήρηση: $E(x \cdot x') = E(x) \cdot E(x')$
- Έστω οι συναρτήσεις:
  - ✓ Parity(y) := LSB(x)
  - ✓ Half(y) := 0 αν $x<n/2$, 1 αν $x> n/2$ (n είναι περιττός αφού $n=pq$)
- Οι 2 συναρτήσεις είναι polynomial-time equivalent
  - ✓ $Half(y) = parity(y \cdot E(2) \bmod n) = parity( E(2x) )$
  - ✓ $Parity(y) = half(y \cdot E(2^{-1}) \bmod n) = half(E(x \cdot 2^{-1}) )$

- Κρυπτανάλυση του RSA
- Θεώρημα: Ένας αλγόριθμος που μπορεί να υπολογίσει το parity(y) ή το half(y) για οποιοδήποτε ciphertext y = E(x), μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσει ολόκληρο το αρχικό κείμενο x.
- Έστω π.χ. αλγόριθμος που μπορεί να υπολογίσει το half(y) για οποιοδήποτε y
- Υπολογίσε τα

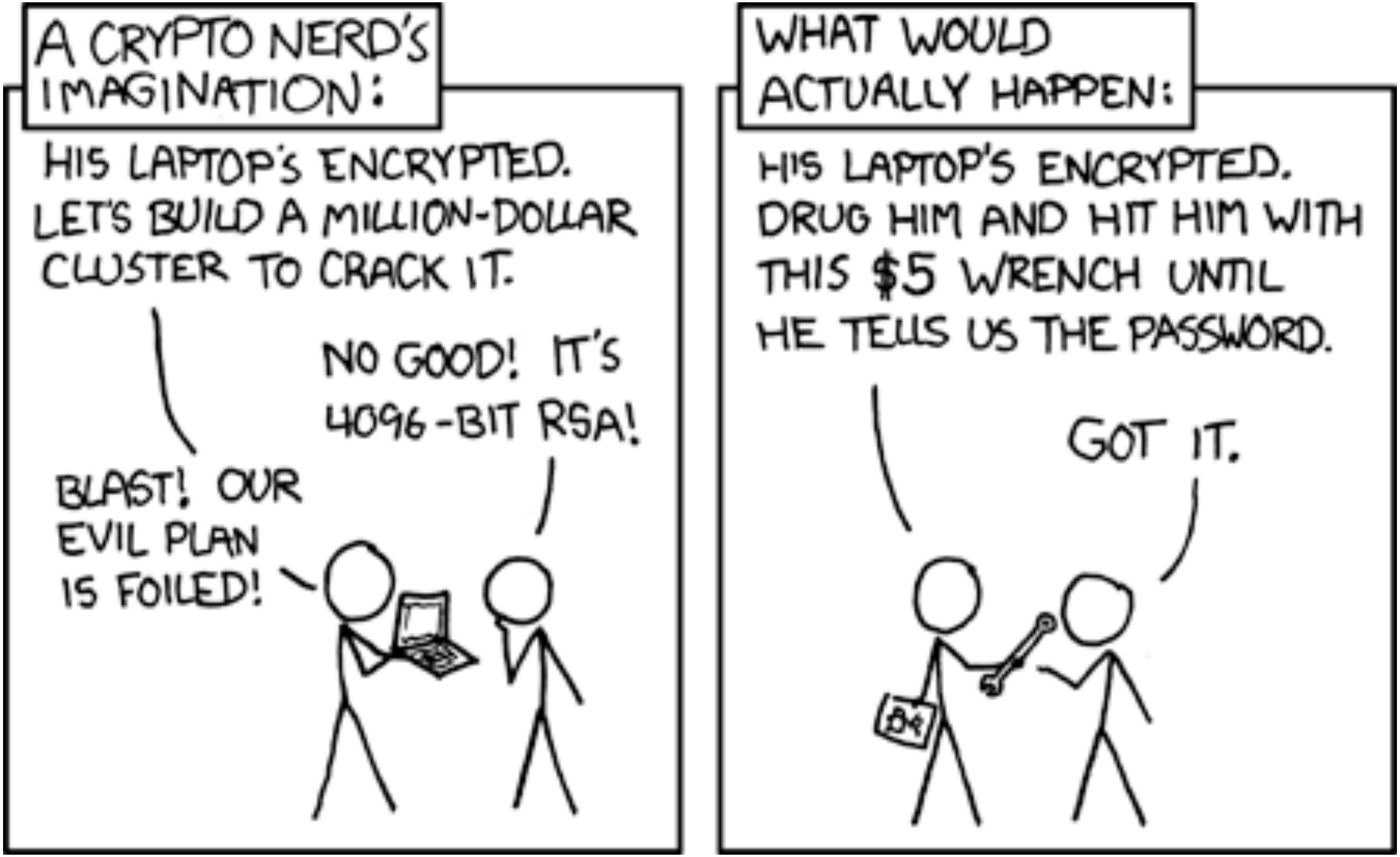
  $y_i = \text{half}(E(x \cdot 2^i))$ (τα οποία ισούνται με $\text{half}(E(x) \cdot E(2^i))$)
- Αν $\text{half}(E(x)) = 0 \Leftrightarrow x \in [0, n/2)$
- Αν $\text{half}(E(2x)) = 0 \Leftrightarrow x \in [0, n/4) \cup [n/2, 3n/4)$
- κ.ο.κ.
- Με binary search μπορούμε να βρούμε τελικά το x

- Κρυπτανάλυση του RSA
- Αλγόριθμος υπολογισμού του x, δεδομένου ενός αλγορίθμου για το half(y)

```
 k = ⌊logn⌋
for i=0 to k
      yᵢ = half(y)
      y = (y E(2)) modn
lo = 0
hi = n
for i=0 to k
    mid = (hi + lo)/2
    if yᵢ = 1 lo = mid
    else hi = mid
x = ⌊hi⌋
```

- Κρυπτανάλυση του RSA
- Άλλες γνωστές επιθέσεις (implementation attacks):
  - ✓ Timing attacks [Kocher '97]: Ο χρόνος υπολογισμού της αποκρυπτογράφησης μπορεί να δώσει πληροφορία για το d
  - ✓ Power attacks [Kocher '99]: Μετρώντας την κατανάλωση ενέργειας σε ένα smartcard κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης του repeated squaring algorithm, μπορεί κανείς να διαβάσει τα bits του d
    - Πρέπει τα chips να μην επιδέχονται power analysis
  - ✓ Fault attacks [Lenstra '96, Boneh, de Millo, Lipton '97]: Αν γίνει έστω και ένα λάθος στον υπολογισμό της αποκρυπτογράφησης ο Oscar μπορεί να μαντέψει το d! (αφορά κυρίως το RSA-CRT)
    - Η μέθοδος δουλεύει αν έχουν γίνει σωστά οι υπολογισμοί modp και λάθος οι υπολογισμοί modq
    - Κοινή τακτική: Ελέγχουμε μετά την αποκρυπτογράφηση αν όντως έγιναν σωστά οι πράξεις. Θα πρέπει $(C^d)^e = C \bmod n$

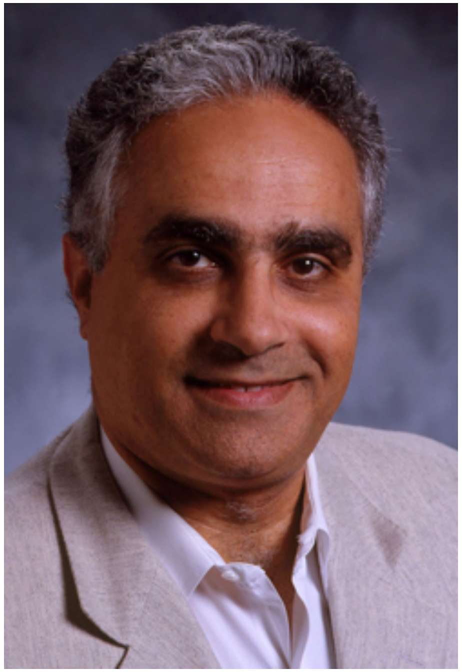
- Κρυπτανάλυση του RSA






http://xkcd.com/538/

- Κρυπτοσύστημα ElGamal
  - ✓ T. Elgamal (1985)



# ElGamal

- Προβλήματα διακριτού λογαρίθμου
  - ✓ Υπενθύμιση:
  - ✓ Αν p πρώτος, τότε το $Z^{*}_{p} = Z_{p} – \{0\}$ είναι κυκλική ομάδα
  - ✓ Αν g γεννήτορας (ή πρωτογενής ρίζα) τότε για κάθε a є $Z^{*}_{p}$ υπάρχει z τέτοιος ώστε $g^{z} \equiv a \pmod p$
    - Το z καλείται διακριτός λογάριθμος (discrete logarithm) του a, modulo p, με βάση το g
  - ✓ Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την k-οστή δύναμη ενός στοιχείου:
    - Εύκολο πρόβλημα, χρήση του repeated squaring algorithm
    - Π.χ. στο $Z^{*}_{17}$ με k=4, $3^{4} \equiv 13 \bmod 17$

- Προβλήματα διακριτού λογαρίθμου
  - ✓ **Discrete logarithm στο $Z_p$ (DLP)**: το αντίστροφο πρόβλημα της ύψωσης σε δύναμη
    - Δεδομένου ότι $3^k \equiv 13 \pmod{17}$, ποιο είναι το k?
    - Πιο γενικά: Δεδομένης πρωτογενούς ρίζας $g \in Z^*_p$, και ενός στοιχειου $\beta \in Z^*_p$, βρες το μοναδικό ακέραιο $k \in \{0, \ldots, p-1\}$ για τον οποίο $g^k = \beta \pmod{p}$
  - ✓ Θεωρείται δύσκολο πρόβλημα όταν το p έχει επιλεγεί προσεκτικά
    - Π.χ. για $p \approx 150$ δεκαδικά ψηφία και όταν το p-1 έχει ένα «μεγάλο» πρώτο παράγοντα

- Σύστημα ElGamal (T. ElGamal, 1985)
- Βασίζεται στο DLP
- Ορίζεται στο $(Z^*_p, *)$
  - ✓ Παραγωγή κλειδιών
    - Αρχικά επιλέγεται ένας πρώτος τέτοιος ώστε το DLP να είναι δύσκολο στο $(Z^*_p, \cdot)$. Ενδεικτικός τρόπος:
    - Επέλεξε μεγάλο πρώτο p έτσι ώστε $p-1 = mq$ για κάποιο μικρό ακέραιο m και μεγάλο πρώτο q.
    - Π.χ., με m=2, επιλέγουμε πρώτα ένα μεγάλο πρώτο q και ελέγχουμε αν το $p=2q+1$ είναι πρώτος
      - Χρήση primality testing
    - Επέλεξε γεννήτορα $g \in Z^*_p$, (άρα $g^{p-1} = 1 \bmod p$)
    - Επέλεξε στοιχείο $\alpha \in \{2,...,p-2\}$

## Κρυπτοσύστημα ElGamal

- ✓ Παραγωγή κλειδιών
  - Έστω $\boldsymbol{K} = \{(p,g,\alpha,\beta): \beta \equiv g^{\alpha} \bmod p)\}$
  - Public Key: Οι τιμές p, g, β
  - Private Key: ο εκθέτης α
- ✓ Αλγόριθμος κρυπτογράφησης (μηνύματος x)
  - Για K=(p,g,α,β) η Alice διαλέγει μυστικό τυχαίο αριθμό $k \in Z^*_{p-1}$ και στέλνει $E_K(x,k) = (y_1, y_2)$, όπου
    - $y_1 = g^k \bmod p$
    - $y_2 = x\beta^k \bmod p$
- ✓ Αλγόριθμος αποκρυπτογράφησης
  - Για τα $y_1$, $y_2$ η συνάρτηση αποκρυπτογράφησης ορίζεται ως:
    - $D_K(y_1, y_2) = y_2( y_1^{\alpha})^{-1} \bmod p$
      - Η οποία παράγει το x

- Κρυπτοσύστημα ElGamal
- Απόδειξη ορθότητας
  - Η $D_K(y_1, y_2)=y_2( y_1^{\alpha})^{-1} modp$ παράγει το x
    - Πράγματι:

$$
\begin{aligned}
y_2(y_1^{\alpha})^{-1} & \\
&= x\beta^k ((g^k)^{\alpha})^{-1} \\
&= x\beta^k ((g^{\alpha})^k)^{-1} \\
&= x\beta^k ((\beta)^k)^{-1} \qquad (\text{γιατί } \beta \equiv g^{\alpha} \bmod p) \\
&= x
\end{aligned}
$$

- Χαρακτηριστικά
  - ✓ Το plaintext **x** «μασκαρεύεται» με πολλαπλασιασμό με $\mathbf{\beta^k}$ (παράγεται το $\mathbf{y_2}$)
  - ✓ Στο ciphertext μεταδίδεται και η τιμή $\mathbf{g^k}$
  - ✓ Ο Bob που γνωρίζει το ιδιωτικό του κλειδί **α** μπορεί να παράγει το $(y_1)^{\alpha}$
  - ✓ Κατόπιν αφαιρεί τη μάσκα με το να πολλαπλασιάζει το $\mathbf{y_2}$ με τον αντίστροφο του $\mathbf{\beta^k}$

- Παράδειγμα
  - ✓ Έστω $p = 2579$, $g = 2$, $\alpha = 765$
  - ✓ $\beta = 2^{765} \bmod 2579 = 949$
  - ✓ Έστω ότι η Alice θέλει να στείλει το μήνυμα $x = 1299$
  - ✓ Έστω επίσης ότι διαλέγει τυχαίο $k = 853$
  - ✓ Τότε:
    - $y_1 = 2^{853} \bmod 2579 = 435$
    - $y_2 = 1299\ (949)^{853} \bmod 2579 = 2396$
  - ✓ ο Bob υπολογίζει το
    - $2396\ (435^{765})^{-1} \bmod 2579 = 1299$

- Κρυπτανάλυση του ElGamal
  - ✓ Για chosen ciphertext attack, η κρυπτανάλυση μπορεί να αναχθεί στο discrete logarithm problem
- Δεδομένων των (p, g, β) και των ($y_1$, $y_2$), ο Oscar θα πρέπει
  - ✓ είτε να υπολογίσει τον εκθέτη α, από τη σχέση $\beta = g^{\alpha} \bmod p$ (DLP)
  - ✓ είτε να βρει το k από τη σχέση $y_1 = g^k$ (πάλι DLP)

# ElGamal

- Κρυπτανάλυση του ElGamal
- Γνωστοί αλγόριθμοι για το Discrete Logarithm problem
  - ✓ Shank's algorithm
  - ✓ Pohlig-Hellman algorithm
  - ✓ The Index Calculus method (μοιάζει με αλγορίθμους παραγοντοποίησης)

- Κρυπτανάλυση - Bit Security των διακριτών λογαρίθμων
  - ✓ Στο κρυπτοσύστημα ElGamal, το LSB του εκθέτη α μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο
  - ✓ Από θεωρία τετραγωνικών υπολοίπων mod p, ισούται με:
    - 0, αν $\beta^{(p-1)/2} = 1 \bmod p$
    - 1, διαφορετικά
  - ✓ Τα υπόλοιπα bits όμως είναι (μάλλον) δύσκολο να υπολογιστούν
  - ✓ Θεώρημα: Αν p = 3 mod 4, ένας αλγόριθμος που υπολογίζει το 2ο bit του εκθέτη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να λύσει το DLP

- Άλλα public key cryptosystems

  - ✓ Merkle-Hellman Knapsack systems, all broken except:
    - Chor-Rivest

  - ✓ McEliece

  - ✓ Elliptic Curve systems

## Γενικά Χαρακτηριστικά - Απαιτήσεις

- Bit pattern που εξαρτάται από το μήνυμα που θα υπογραφεί
- Χρησιμοποιεί κάποιου είδους πληροφορία που είναι μοναδική για τον αποστολέα (π.χ., δημόσιο κλειδί)
  - ✓ Για αποφυγή πλαστογραφίας και απάρνησης
- Πρέπει να:
  - ✓ Είναι υπολογιστικά εύκολο να δημιουργηθεί
  - ✓ Είναι εύκολα αναγνωρίσιμη και επαληθεύσιμη
  - ✓ Είναι υπολογιστικά ανέφικτο να πλαστογραφηθεί με τους εξής τρόπους:
    - Με το να παραχθεί ένα νέο μήνυμα με χρήση της ίδιας ψηφιακής υπογραφής
    - Με το να παραχθεί μία άλλη ψηφιακή υπογραφή για ένα δεδομένο μήνυμα

## *Προϋποθέσεις και λύσεις*

- Υποθέτει ότι ο παραλήπτης διαθέτει το δημόσιο κλειδί του αποστολέα
- Η συνολική ασφάλεια του σχήματος εξαρτάται από το ιδιωτικό κλειδί του αποστολέα

- Δύο προσεγγίσεις του σχήματος
  - ✓ Direct Digital Signature (άμεση)
  - ✓ Arbitrated Digital Signature (με μεσολάβηση διαιτητή)

## Direct Digital Signature

- Εμπλέκει μόνο αποστολέα και παραλήπτη

- Ένα σύστημα υπογραφών (signature scheme) αποτελείται από:
  - ✓ $P$: χώρος μηνυμάτων e.g. $Z_n$
  - ✓ $S$: χώρος πιθανών υπογραφών
  - ✓ Signing algorithm $sig_A$ (.): $P \rightarrow S$ για κάθε χρήστη A (secret)
  - ✓ Verification algorithm ver(x,y) (public)
  - ✓ Ο αποστολέας στέλνει το μήνυμα x και την υπογραφή y
  - ✓ Για μήνυμα που ήλθε από A, ver(x,y) = true iff y = $sig_A$(x)

## Direct Digital Signature

- Μπορεί να υλοποιηθεί με χρήση μεθόδων δημόσιου κλειδιού
- Ιδέα: χρήση του decryption algorithm από ένα public key cryptosystem ως signing algorithm
- Αδυναμία:
  - ✓ Ο αποστολέας μπορεί να αποποιηθεί την αποστολή του μηνύματος
    - Μπορεί να ισχυριστεί ότι το ιδιωτικό του κλειδί έχει παραβιαστεί η κλαπεί
    - Ότι ο κλέπτης χρησιμοποίησε το ιδιωτικό κλειδί για πλαστογραφία
  - ✓ Αναγκαία μέθοδος προσδιορισμού του επιπέδου εμπιστοσύνης του αποστολέα

- RSA signature scheme
  - ✓ Έστω ότι η Alice έχει διαλέξει (n, p, q, d, e), με n=pq, de = 1 mod φ(n)
  - ✓ Signing algorithm of Alice: $sig_A(x) = x^d \bmod n = D_A(x)$
  - ✓ Verification: ver(x, y) = true iff $x = y^e \bmod n$

Άρα όταν η Alice θέλει να στείλει υπογεγραμμένο μήνυμα x:

- ✓ Υπογράφει το x, παράγοντας το $y = sig_A(x)$
- ✓ Κρυπτογραφεί το ζεύγος (x, y), και τα στέλνει στον Bob
- ✓ Ο Bob τα αποκρυπτογραφεί και μετά ελέγχει αν ver(x, y) = true

- RSA signature scheme

1. Καθένας μπορεί να παράγει υπογραφή για ένα «τυχαίο» μήνυμα

   - Διάλεξε y. Υπολόγισε το x = e(y). Το y είναι η υπογραφή του x

   - μπορούμε να προσθέσουμε πληροφορίες (ημερομηνία κτλ) ώστε το x να μην αντιστοιχεί σχεδόν ποτέ σε κάποιο meaningful μήνυμα

2. Αν πρώτα κρυπτογραφήσει το x και μετά το υπογράψει?

   - ο Oscar τότε μπορεί να έχει πρόσβαση στο e(x). Μπορεί να το υπογράψει με τη δική του υπογραφή και να το στείλει στον Bob

   - Συνήθης τακτική: πρώτα υπογράφουμε και μετά κρυπτογραφούμε

## ElGamal signature scheme

- Έστω ότι η Alice διαλέγει (p,g,α,β), όπου, g είναι γεννήτορας του $Z_p^*$, $\beta \equiv g^\alpha$ modp και ο p έχει επιλεγεί έτσι ώστε το discrete logarithm να είναι δύσκολο στο $Z_p$.
- Public: (p, g, β), secret: α
- Signing algorithm: διάλεξε τυχαίο ακέραιο k και:

$$sig(x, k) = (\gamma, \delta),$$

$$\gamma = g^k \bmod p, \quad \delta = (x - \alpha\gamma)k^{-1} \bmod (p-1)$$

- Verification:

$$ver(x, (\gamma, \delta)) = \text{true iff } \beta^\gamma \gamma^\delta = g^x \bmod p$$

- ElGamal signature scheme
  - ✓ Ορθότητα:
  - ✓ $\beta^{\gamma} \gamma^{\delta} \equiv g^{\alpha\gamma+\kappa\delta}$
  - ✓ $\alpha\gamma+\kappa\delta \equiv x \bmod (p-1)$
  - ✓ $\alpha\gamma+\kappa\delta = \lambda(p-1) + x$
  - ✓ Η ορθότητα προκύπτει από θεώρημα Fermat.

- ElGamal signature scheme
  - ✓ Ασφάλεια του συστήματος:
  - ✓ Έστω ότι ο Oscar θέλει να υπογράψει ως Alice ένα μήνυμα x
  - ✓ Πρέπει να υπολογίσει τα (γ, δ)
  - ✓ Αν διαλέξει ένα γ και προσπαθεί να βρει το δ πρέπει να βρει το διακριτό λογάριθμο του $g^x(\beta^\gamma)^{-1}$ με βάση το γ
  - ✓ Αν διαλέξει ένα δ, τότε πρέπει να λύσει ως προς γ την εξίσωση $\beta^\gamma \gamma^\delta = g^x \bmod p$
    - Δεν σχετίζεται με διακριτό λογάριθμο αλλά θεωρείται δύσκολο πρόβλημα
  - ✓ Αν διαλέξει ένα ζεύγος (γ, δ), για να βρει σε ποιο μήνυμα αντιστοιχούν πρέπει πάλι να βρει το διακριτό λογάριθμο του $\beta^\gamma \gamma^\delta$ με βάση το g.

- Digital Signature Standard (or the Digital Signature Algorithm- DSA)
  - ✓ Παραλλαγή του ElGamal scheme
  - ✓ Adopted by the National Institute of Standards and Technology (NIST)
  - ✓ Αρχική πρόταση NIST (1991): p ≈ 512 bits
  - ✓ Μετέπειτα (2001): Recommendation για p ≈ 1024 bits
  - ✓ Εφαρμογή υπογραφής σε hash του μηνύματος
  - ✓ Μειώνει σημαντικά το μέγεθος της υπογραφής
  - ✓ Με p ≈ 1024 bits, μέγεθος υπογραφής ≈ 2 x 160 = 320

- Other signature schemes
- One-time signatures (ασφαλείς όταν υπογράφεται μόνο ένα μήνυμα)
  - ✓ Με χρήση one-way functions
- Undeniable signatures (χρειάζονται τη συνεργασία της Alice για την επιβεβαίωση)
  - ✓ Αποτρέπει τον Bob από το να αναπαράγει και να προωθήσει σε άλλους υπογεγραμμένα μηνύματα της Alice
  - ✓ Verification algorithm: Challenge-and-response protocol
  - ✓ Disavowal protocol (για να μην μπορεί να αποποιηθεί την υπογραφή της η Alice, αλλά και για να μπορεί η Alice να αποδείξει αν έγινε πλαστογραφία)
  - ✓ Chaum-van Antwepen scheme, βασισμένο στο DLP
- Fail-stop signatures (αυξημένη ασφάλεια κατά της πλαστογραφίας)
  - ✓ Έχουν και "proof of forgery" algorithm

## *Arbitrated Digital Signatures*

- Εμπλέκει αρχή ***Διαιτησίας*** (Arbiter)
- Υποβάλει το μήνυμα του αποστολέα και την υπογραφή του σε σειρά δοκιμασιών για να ελέγξει την αυθεντικότητα του
- Μετά από έλεγχο, ο ***Διαιτητής***
  - ✓ Προσθέτει ημερομηνία στο μήνυμα
  - ✓ Προσθέτει ένδειξη επικύρωσης από ***Διαιτητή***
  - ✓ Αποστέλλει στον παραλήπτη:
    - Μήνυμα με υπογραφή αποστολέα, ημερομηνία, ένδειξη διαιτησίας
- Απαιτεί ισχυρό επίπεδο εμπιστοσύνης και των δύο μερών απέναντι στον ***Διαιτητή***
- Μπορεί να υλοποιηθεί με χρήση συμμετρικής ή κρυπτογραφίας δημοσίου κλειδιού

- Ελλειπτικές Καμπύλες
  - ✓ Κρυπτογραφία ελλειπτικών καμπυλών
  - ✓ Ιδέα: Ψάχνουμε αβελιανές ομάδες όπου το πρόβλημα διακριτού λογαρίθμου είναι δύσκολο

- # Ελλειπτικές Καμπύλες

  ✓ **Το Πρόβλημα Διακριτού Λογαρίθμου (DLP) σε μία ομάδα (G, ⊗)**:

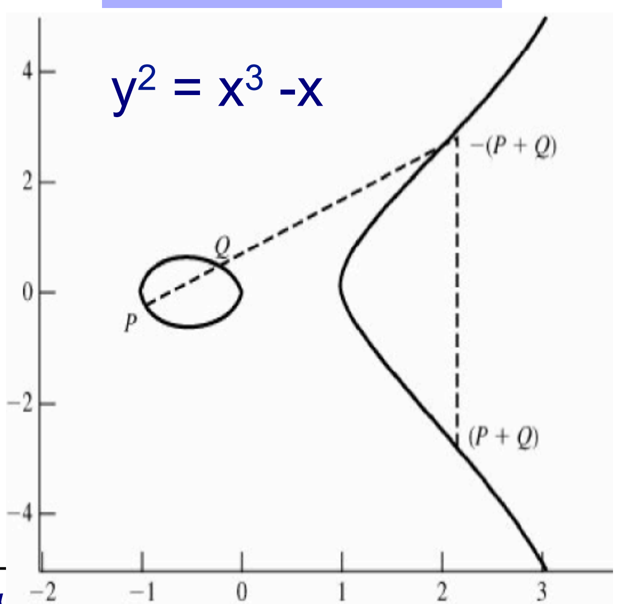
  Έστω G πεπερασμένη ομάδα, g є G, και β є H, όπου $H = \{g^{(r)}, r \geq 0\}$, είναι η κυκλική υποομάδα που δημιουργείται από το g.

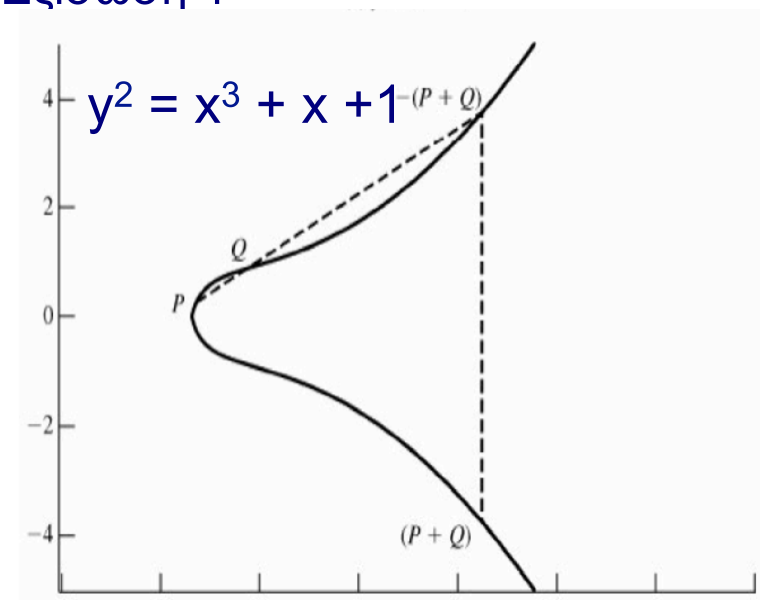
  Βρες το μοναδικό ακέραιο k є {0,…, |H|-1} για τον οποίο $g^{(k)} = \beta$,

  - Όπου $g^{(k)} = g \otimes g \otimes g \otimes \ldots \otimes g$ (k φορές)
  - Π.χ. Στο $(Z_n, +)$, $g^{(k)} = kg$

- Κρυπτογραφία Ελλειπτικών Καμπυλών
  - ✓ Ελλειπτικές Καμπύλες στο σώμα των πραγματικών
  - ✓ Ελλειπτικές Καμπύλες ορισμένες modp
  - ✓ Ελλειπτικές Καμπύλες στο $GF(2^m)$
  - ✓ Ελλειπτικές Καμπύλες και πρόβλημα διακριτού λογαρίθμου

- Ελλειπτικές Καμπύλες
  - ✓ Δεν είναι ελλείψεις
  - ✓ Στη γενική μορφή τους ορίζονται από:
    - $y^2 + axy + by = x^3 + cx^2 + dx + e$
    - a, b, c, d, e πραγματικοί αριθμοί
    - x και y παίρνουν τιμές από πραγματικούς αριθμούς
  - ✓ Περιοριζόμαστε στην ειδική μορφή
    - $\mathbf{y^2 = x^3 + ax + b}$ Εξίσωση 1

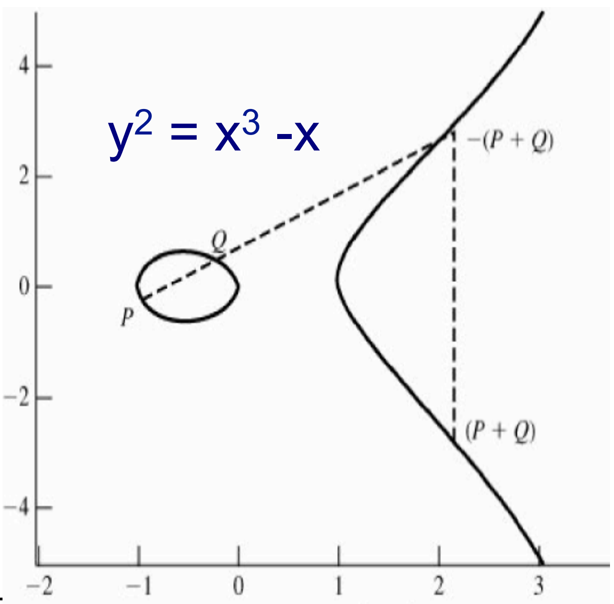


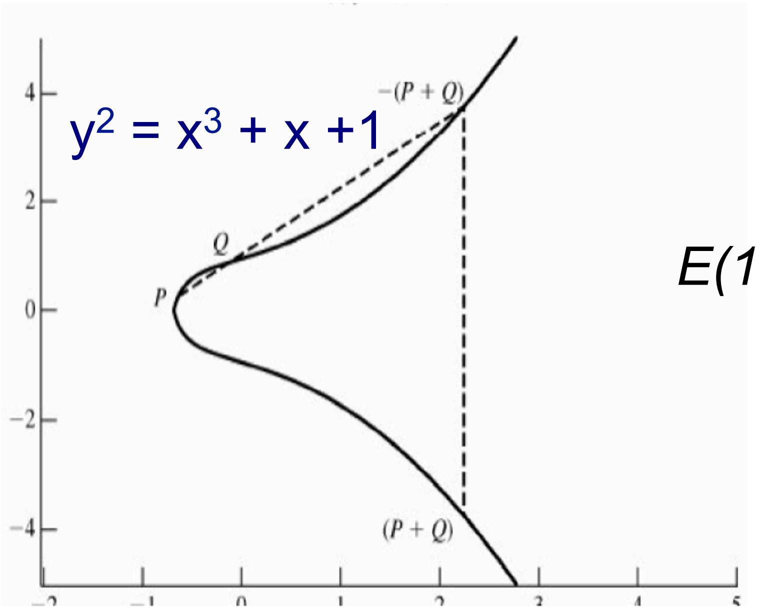



## Ελλειπτικές Καμπύλες

- **Ορισμός:** Για a,b ∈R, η ελλειπτική καμπύλη $\mathbf{y^2 = x^3 + ax + b}$ είναι το σύνολο των σημείων (x, y) που ικανοποιούν την εξίσωση μαζί με ενα ειδικό σημείο O που καλείται *σημείο στο άπειρο* (point at infinity or zero point)
- **Ορολογία:** *E(a, b)* = τα σημεία (x, y) της ελλειπτικής καμπύλης μαζί με το σημείο *O*.
- Οι ελλειπτικές καμπύλες που θεωρούμε είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x

*E(-1,0)*




*E(1, 1)*

## Ελλειπτικές Καμπύλες

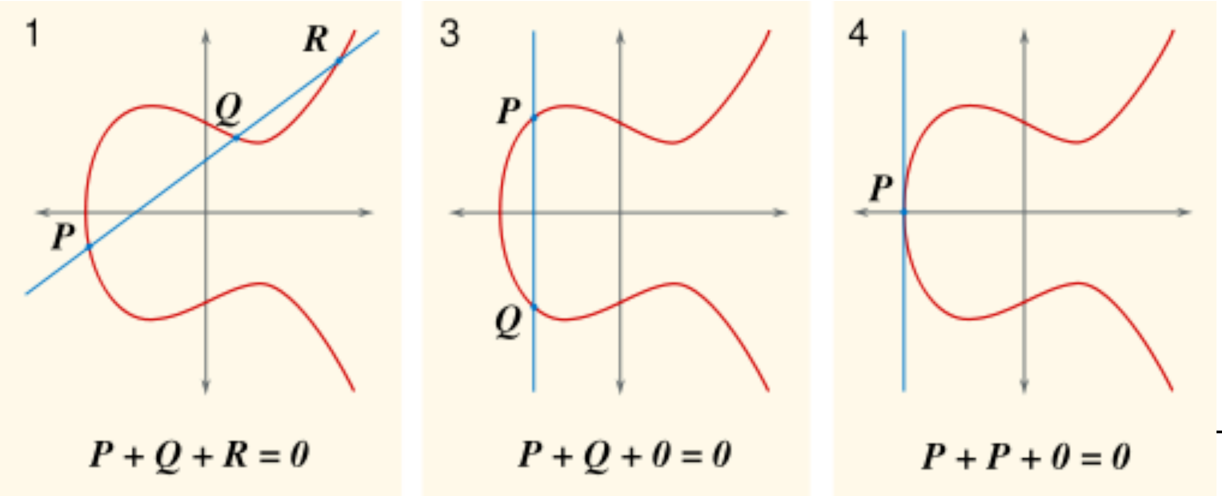
- Θα δείξουμε ότι τα σημεία της ελλειπτικής καμπύλης αποτελούν αβελιανή ομάδα (abelian group) με βάση μία ειδική πράξη που θα την λέμε «πρόσθεση»
- Υπό τη συνθήκη όμως ότι $4a^3 + 27b^2 \neq 0$
- Γεωμετρική ερμηνεία της πρόσθεσης: Αν τρία σημεία στην *E* ανήκουν σε ευθεία, το άθροισμα τους πρέπει να είναι το ουδέτερο στοιχείο
- Ουδέτερο στοιχείο: το σημείο *O*. Για κάθε σημείο P στην *E*, $P+O = O + P = P$
- Ύπαρξη αντιστρόφου: για κάθε $P \neq O$, ο αντίστροφος ορίζεται ως το mirror image ως προς τον άξονα x
  - Αν $P = (x, y)$, τότε $-P = (x, -y)$, $P + (-P) = O$
  - Ενώνονται με κατακόρυφη ευθεία

- Ελλειπτικές Καμπύλες – Γεωμετρική ανάλυση
  - ✓ Ορισμός της πρόσθεσης
  - ✓ Έστω ότι θέλουμε να προσθέσουμε τα σημεία $P=(x_1, y_1)$, και $Q=(x_2, y_2)$ της *E*. Το αποτέλεσμα θα είναι κάποιο σημείο $R = (x_3, y_3)$ της *E*
  - ✓ 1η περίπτωση: $x_1 \mathrel{!}= x_2$
    - Έστω L η γραμμή που διέρχεται από P και Q
    - Έστω R’ το 3ο σημείο τομής (πλην P και Q) της L με *E* (υπάρχει λόγω της συνθήκης $4a^3 + 27b^2 \neq 0$)
    - Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης είναι το είδωλο του R’ ως προς άξονα x, δηλαδή ο αντίστροφος του R’
    - P+Q = R, όπου R = -R’
    - Ποιες είναι οι συντεταγμένες του;
    - Η ευθεία L έχει εξίσωση $y = \lambda x+\mu$, όπου $\lambda=(y_2-y_1) / (x_2-x_1)$ και $\mu =y_1 - \lambda x_1 = y_2-\lambda x_2$
    - Για να βρούμε το σημείο τομής L και *E* αντικαθιστούμε την $y=\lambda x+ \mu$ στην εξίσωση της καμπύλης

- Ελλειπτικές Καμπύλες – Γεωμετρική ανάλυση
  - ✓ 1η περίπτωση: $x_1 \,!\!= x_2$ (συνέχεια)
    - $(\lambda x+\mu)^2 = x^3 + ax^2 + b$ =>
      $x^3 - \lambda^2 x^2 + (a - 2\lambda\mu)x + b - \mu^2 = 0$ (Εξ. 2)
    - Οι ρίζες τις εξίσωσης είναι οι χ συντεταγμένες του σημείου τομής *E* και L
    - Αλλά ήδη ξέρουμε τις δύο λύσεις: $x_1$ και $x_2$
    - Εφόσον δύο λύσεις είναι στους πραγματικούς, τότε και η τρίτη λύση $x_3$ στους πραγματικούς. Μάλιστα, το άθροισμα θα πρέπει να είναι ίσο με το μείον του συντελεστή του τετραγώνου: $x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2$ => $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$
    - Έστω ότι η y-συντεταγμένη του R' είναι $-y_3$
    - Η κλίση της L γράφεται και ως $\lambda=(-y_3-y_1) / (x_3-x_1)$. Άρα από εδώ προσδιορίζουμε το $y_3= \lambda (x_1-x_3)-y_1$
    - Ορίστηκε επομένως η πρόσθεση για $x_1 \,!\!= x_2$

- Ελλειπτικές Καμπύλες – Γεωμετρική ανάλυση
  - ✓ 2η περίπτωση: $x_1 = x_2$ και $y_1 = - y_2$
    - Απλή. Τα σημεία είναι αντίθετα
    - (x,y) + (x,-y) = *O* για κάθε (x,y) της *E*
  - ✓ 3η περίπτωση: $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$
    - Πρόσθεση σημείου P = $(x_1, y_1)$ στον εαυτό του
    - Αν $y_1 = 0$, P + P = *O*
    - Αλλιώς, παίρνουμε ως L την εφαπτομένη της *E* στο P
    - Το P+P είναι το είδωλο του σημείου όπου η εφαπτομένη τέμνει την *E*
    - Η κλίση λ της L θα προκύψει με μερική παράγωγο της *E*
    - $2y (dy/dx) = 3x^2+a \rightarrow \lambda = (3x^2+a)/2y$
    - Αντικαθιστώντας το x με $x_1$ και y με $y_1$ έχουμε γνωστό το $\lambda=(3x_1^2+a)/2y_1$
    - Η υπόλοιπη ανάλυση όπως στην περίπτωση 1

- Ελλειπτικές Καμπύλες – Γεωμετρική ανάλυση
  - ✓ Με βάση τα ανωτέρω, ορίσαμε σε μία ελλειπτική καμπύλη την πράξη + για την οποία ισχύουν οι ιδιότητες:
    - Κλειστή
    - Αντιμεταθετική
    - *O* είναι το ουδέτερο στοιχείο
    - Κάθε σημείο στο *E* έχει αντίθετο
    - Προσεταιριστική (πιο δύσκολη απόδειξη αλλά θα την παραλείψουμε)
  - ✓ (*E*, +) είναι αβελιανή ομάδα



- Ελλειπτικές Καμπύλες στο σώμα $Z_p$
  - ✓ p πρώτος αριθμός
  - ✓ cubic equation στην οποία οι μεταβλητές και οι συντελεστές έχουν τιμές από 0 έως p-1
  - ✓ Οι υπολογισμοί γίνονται modulo p.
    - **$y^2 \bmod p = (x^3 + ax + b) \bmod p$** Εξίσωση 3
  - ✓ Παράδειγμα: Η εξίσωση 3 ικανοποιείται για a=1, b=1, x=9, y=7, p=23:

$7^2 \bmod 23 = (9^3 + 9 + 1) \bmod 23$

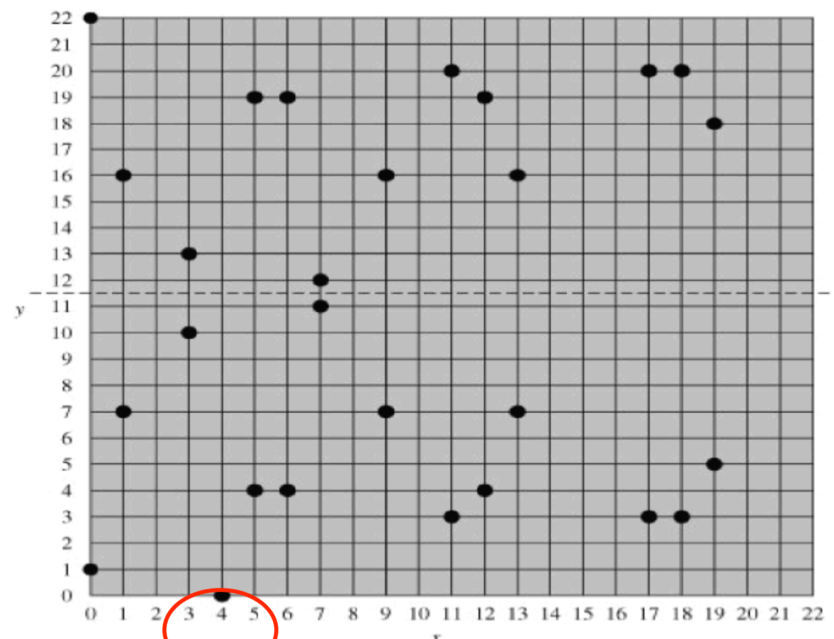
$49 \bmod 23 = 739 \bmod 23$

$3 = 3$

- Ελλειπτικές Καμπύλες στο σώμα $Z_p$
  - ✓ Έστω σύνολο $E_p(a, b)$ από τα ζεύγη (x,y) που ικανοποιούν την Εξίσωση 3 μαζί με ένα σημείο στο άπειρο *O*.
  - ✓ Απαιτούμε πάλι $4a^3 + 27b^2 \neq 0 \pmod p$,
  - ✓ Έστω p=23 και έστω η “καμπύλη” $E_{23}(1,1)$: $y^2 = x^3 + x + 1$ δηλαδή a=b=1.
  - ✓ Η καμπύλη τώρα περιέχει σημεία στο grid `{0, p-1}x{0, p-1}` που ικανοποιούν την εξίσωση

- Ελλειπτικές Καμπύλες στο σώμα $Z_p$
  - ✓ Ο πίνακας περιέχει όλα τα σημεία (εκτός *O*) που ανήκουν στην $E_{23}(1,1)$.
  - ✓ Όλα (πλην ενός) είναι συμμετρικά στο y=11,5

| | | |
|---|---|---|
| (0, 1) | (6, 4) | (12, 19) |
| (0, 22) | (6, 19) | (13, 7) |
| (1, 7) | (7, 11) | (13, 16) |
| (1, 16) | (7, 12) | (17, 3) |
| (3, 10) | (9, 7) | (17, 20) |
| (3, 13) | (9, 16) | (18, 3) |
| (4, 0) | (11, 3) | (18, 20) |
| (5, 4) | (11, 20) | (19, 5) |
| (5, 19) | (12, 4) | (19, 18) |




[redacted]

- Ελλειπτικές Καμπύλες στο σώμα $Z_p$
  - Οι κανόνες άθροισης στο $E_p(a,b)$ αντιστοιχούν στις αλγεβρικές τεχνικές για EC στο σώμα των πραγματικών
  - Για όλα τα σημεία P, Q του $E_p(a, b)$
  - $P + O = P$
  - Αν $P = (x_P, y_P)$ τότε $P + (x_P, -y_P) = O$. Το σημείο $(x_P, -y_P)$ είναι το αντίθετο του P, που συμβολίζεται ως –P.
    - Π.χ. $E_{23}(1,1)$, για $P = (13,7)$, έχουμε $-7 \bmod 23 = 16$.
    - Άρα $–P = (13, -7)=(13, 16)$, που ανήκει στο $E_{23}(1,1)$.
  - Αν $P = (x_P, y_Q)$ και $Q = (x_Q, y_Q)$ με $P \neq Q$, τότε $P+Q=(x_R,y_R)$ όπου

    $x_R = (\lambda^2 - x_P - x_Q) \bmod p$

    $y_R = (\lambda(x_P - x_R) - y_P) \bmod p$ και

$$\lambda = \begin{cases} \left(\dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}\right) \bmod p & \text{if } P \neq Q \\ \left(\dfrac{3x_P^2 + a}{2y_P}\right) \bmod p & \text{if } P = Q \end{cases}$$

- Ελλειπτικές Καμπύλες στο σώμα $Z_p$

Ο πολλαπλασιασμός ορίζεται ως επαναληπτική πρόσθεση: 4P = P + P + P + P.

- ✓ Έστω P=(3,10) και Q = (9,7) στην $E_{23}(1,1)$ τότε
  - ✓ λ=(7-10)/(9-3)mod23=((-1)/2)mod23=11 (από EEA)
  - ✓ $x_R$ = ($11^2$ - 3 - 9) mod 23 = 109 mod 23= 17
  - ✓ $y_R$ = (11(3 - 17) - 10) mod 23 = -164 mod 23 = 20
  - ✓ Άρα P + Q = (17, 20).
- ✓ Για να βρω P+P=2P χρήση 2ης περίπτωσης λ (P=Q)
  - ✓ λ=[(3$(3)^2$+1)/(2x10)]mod23=(5/20)mod23=(1/4)mod23=6 (από EEA)
  - ✓ $x_R$ = ($6^2$ - 3 - 3) mod 23 = 30 mod 23 = 7
  - ✓ $y_R$ = (6(3 - 7) - 10) mod 23 = (-34) mod 23 = 12
  - ✓ Άρα 2P = (7, 12).

- Ελλειπτικές Καμπύλες στο σώμα $Z_p$
  - ✓ Για τον υπολογισμό της ασφάλειας των Elliptic Curve Cryptosystems, είναι ενδιαφέρον να γνωρίζουμε τον αριθμό των σημείων στην αβελιανή ομάδα, και την ύπαρξη «μεγάλων» κυκλικών υποομάδων.
  - ✓ Στην περίπτωση του $E_p(a,b)$, ο αριθμός N των σημείων οριοθετείται από

$$p + 1 - 2\sqrt{p} \le N \le p + 1 + 2\sqrt{p}$$

  - ✓ Θεώρημα: Υπάρχουν πάντα ακέραιοι $n_1$, $n_2$ με $n_2 \mid n_1$, έτσι ώστε το (E, +) να είναι ισομορφικό με το

$$Z_{n_1} \times Z_{n_2}$$

  - ✓ Πόρισμα: Το (E,+) έχει κυκλική ομάδα ισομορφική με το $Z_{n1}$ (υποψήφια για χρήση στο ElGamal). Αν το N είναι πρώτος ή γινόμενο πρώτων, τότε το ίδιο το (E, +) είναι κυκλική ομάδα

- Ελλειπτικές Καμπύλες στο σώμα GF($2^m$)
  - ✓ Το πεδίο GF($2^m$) αποτελείται από $2^m$ στοιχεία και είναι εφοδιασμένο με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό επί πολυωνύμων.
  - ✓ Για ελλειπτικές καμπύλες στο GF($2^m$) οι μεταβλητές και οι συντελεστές παίρνουν τιμές από το GF($2^m$)
  - ✓ Αριθμητική πραγματοποιείται με κανόνες στο GF($2^m$)
  - ✓ Εξίσωση ελλειπτικής καμπύλης:
    - $\mathbf{y^2 + xy = x^3 + ax^2 + b}$ Εξίσωση 4
    - Λίγο διαφορετική από τις άλλες (παράγοντας xy)
  - ✓ Όπου x, y και συντελεστές a,b είναι στοιχεία του GF($2^m$)
  - ✓ Έστω σύνολο $E_{2^m}(a, b)$ από τα ζεύγη (x,y) που ικανοποιούν την Εξίσωση 4 μαζί με ένα σημείο στο άπειρο *O*.

- Ελλειπτικές Καμπύλες στο σώμα GF($2^m$)
  - ✓ Έστω GF($2^4$) με irreducible polynomial $f(x) = x^4 + x + 1$.
  - ✓ Ο γεννήτορας από f(g)=0, με τιμή $g^4 = g + 1$, ή δυαδικό 0011.
  - ✓ Οι δυνάμεις του g θα είναι :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $g^0$=0001 | $g^4$=0011 | $g^8$=0101 | $g^{12}$=1111 |
| $g^1$=0010 | $g^5$=0110 | $g^9$=1010 | $g^{13}$=1101 |
| $g^2$=0100 | $g^6$=1100 | $g^{10}$=0111 | $g^{14}$=1001 |
| $g^3$=1000 | $g^7$=1101 | $g^{11}$=1110 | $g^{15}$=0001 |

Π.χ. το $g^5$ υπολογίζεται ως $g^5=(g^4)(g)=(g+1)g=g^2+g=0100+0010=0110$

Έστω EC: $y^2 + xy = x^3 + g^4x^2 + 1$ (Δηλαδή $a=g^4$ και $b=g^0=1$)

Σημείο που ικανοποιεί την EC είναι ($g^5$, $g^3$):

$(g^3)^2 + (g^5)(g^3) = (g^5)^3 + (g^4)(g^5)^2 + 1 \Rightarrow$

$g^6 + g^8 = g^{15} + g^{14} + 1 \Rightarrow$

$1100 + 0101 = 0001 + 1001 + 0001 \Rightarrow$

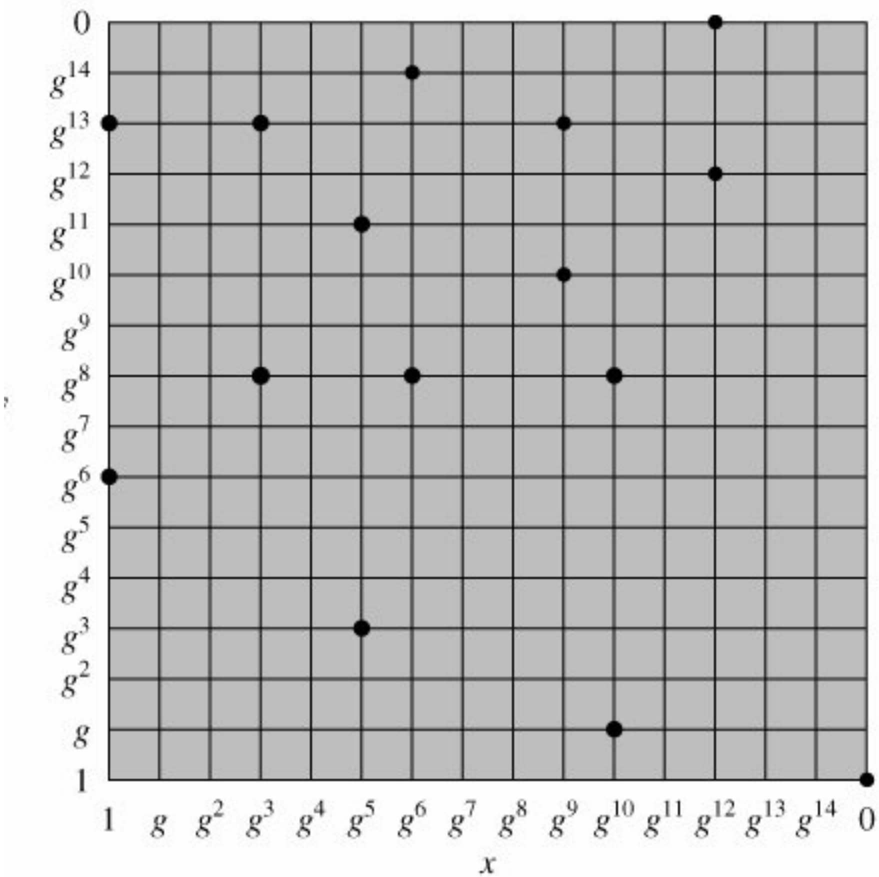
$1001 = 1001$

- Ελλειπτικές Καμπύλες στο σώμα GF($2^m$)

Σημεία στην καμπύλη $E_{2^m}(g^4, b)$

| | | |
|---|---|---|
| $(0, 1)$ | $(g^5, g^3)$ | $(g^9, g^{13})$ |
| $(1, g^6)$ | $(g^5, g^{11})$ | $(g^{10}, g)$ |
| $(1, g^{13})$ | $g^6, g^8)$ | $(g^{10}, g^8)$ |
| $(g^3, g^8)$ | $(g^6, g^{14})$ | $(g^{12}, 0)$ |
| $(g^3, g^{13})$ | $(g^9, g^{10})$ | $(g^{12}, g^{12})$ |

Η καμπύλη $E_{2^m}(g^4, b)$




Cryptography and Network Security Principles and Practices,
4th ed. W. Stallings Prentice Hall

- Ελλειπτικές Καμπύλες στο σώμα GF($2^m$)
  - ✓ Κανόνες άθροισης στο $E_{2^m}(a, b)$
  - ✓ $P + O = P$. $O$ ουδέτερο
  - ✓ Αν $P = (x_P, y_P)$, τότε $P + (x_P, x_p+y_P) = O$. Άρα το σημείο $(x_P, x_P+y_P)$ είναι ο αντίθετος του P, δηλαδή ο –P
  - ✓ Αν $P = (x_P, y_P)$, και $Q = (x_Q, y_Q)$ ($P \neq -Q$ και $P \neq Q$) τότε το άθροισμα ορίζεται ως $R = P + Q = (x_R, y_R)$ όπου:

    $x_R = \lambda^2 + \lambda + x_P + x_Q + a$

    $y_R = \lambda(x_P + x_R) + x_R + y_P$ και

    $\lambda = (y_Q+y_P) / (x_Q+x_P)$
  - ✓ Αν $P = (x_P, y_P)$ ο πολλαπλασιασμός $2P=R=(x_R, y_R)$ ορίζεται ως :

    $x_R = \lambda^2 + \lambda + a$

    $y_R = x^2_P + (\lambda+1)x_R$ και

    $\lambda = x_P + (y_P / x_P)$

- Κρυπτογραφία Ελλειπτικών Καμπυλών
  - ✓ Χρειαζόμαστε να βρούμε ένα "hard problem"
    - ισοδύναμο του discrete logarithm
    - Αλλά εύκολο σε υπολογισμούς κρυπτογράφησης και αποκρυπτογράφησης
  - ✓ Έστω η σχέση $Q = kP$ όπου Q, P δύο σημεία της καμπύλης $E_p(a, b)$ και $k<p$.
  - ✓ Εύκολο να υπολογίσεις Q δεδομένου k και P
  - ✓ Δύσκολο να υπολογίσεις k δεδομένου Q και P.
  - ✓ Αυτό καλείται πρόβλημα διακριτών λογαρίθμων (discrete logarithm) σε elliptic curves
  - ✓ Our task: πρέπει να βρούμε σημείο της καμπύλης που παράγει μεγάλη κυκλική ομάδα

## Κρυπτογραφία Ελλειπτικών Καμπυλών

- Παράδειγμα
- Έστω καμπύλη $E_{23}(9, 17)$.
- Πρόκειται για την Αβελιανή ομάδα που ορίζεται από την εξίσωση $y^2 \bmod 23 = (x^3 + 9x + 17) \bmod 23$.
- Ερώτημα: Ποιος είναι ο διακριτός λογάριθμος k του Q = (4, 5) στη βάση P=(16, 5);
- Η brute-force μέθοδος είναι να υπολογιστούν πολλαπλάσια του P μέχρι να βρούμε το Q.
- Δηλαδή:
- P=(16, 5) 2P=(20, 20) 3P=(14, 14) 4P=(19, 20) 5P=(13, 10) 6P=(7, 3) 7P = (8, 7) 8P (12, 17) 9P = (4, 5) = Q
- Επειδή 9P = (4, 5) = Q, ο διακριτός λογάριθμος του Q=(4, 5) στη βάση P=(16, 5) είναι k = 9
- Στην πράξη το k το πρέπει να είναι πολύ μεγάλο για να αποτρέψει το brute-force

- Ασφάλεια Ελλειπτικών Καμπυλών

| Symmetric Scheme (key size in bits) | ECC-Based Scheme (size of $n$ in bits) | RSA/DSA (modulus size in bits) |
|---|---|---|
| 56 | 112 | 512 |
| 80 | 160 | 1024 |
| 112 | 224 | 2048 |
| 128 | 256 | 3072 |
| 92 | 384 | 7680 |
| 256 | 512 | 15360 |

Source: Certicom

Με elliptic curves μειώνεται σημαντικά το μήκος του κλειδιού

# Διακριτοί λογάριθμοι στην πράξη

- Οι ομάδες που παρουσιάζουν πρακτικό ενδιαφέρον:
- $(Z_p^*, \cdot)$, p μεγάλος πρώτος και g γεννήτορας του $Z_p^*$
- $(Z_p^*, \cdot)$, p, q πρώτοι, και g στοιχείο με τάξη q (δηλ. γεννήτορας κυκλικής υποομάδας με q στοιχεία)
- $(GF(2^m), *, +)$, και g γεννήτορας του πεδίου ως προς *
- (E, +), όπου E ελλειπτική καμπύλη modp και $g \in E$ με τάξη |E|/h (με h = 1, 2 ή 4)
- (E,+) όπου E ελλειπτική καμπύλη στο $GF(2^m)$ και $g \in E$ με τάξη |E|/h (με h = 2 ή 4)