Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας

Ενδεικτικές λύσεις 2ης Σειράς Ασκήσεων

---

1. **Ο Άγιος Βασίλης θα πρέπει να μοιράσει από 4 χιλιάδες tablets και 4 χιλιάδες smartphones σε Αθήνα, Θεσσαλονίκη και Ηράκλειο. Τα smartphones και tablets φυλάσσονται σε δύο αποθήκες στον Βόρειο και Νότιο Πόλο. Στην αποθήκη του Νότιου Πόλου υπάρχουν 9 χιλιάδες smartphones και 10 χιλιάδες tablets, ενώ στον Βόρειο πόλο 3 χιλιάδες smartphones και 2 χιλιάδες tablets.**

   Εάν το κόστος μεταφοράς (τροφή ταράνδων, μισθοί ξωτικών κ.α.) για κάθε συσκευή εξαρτάται από την αποθήκη και την πόλη που θα μεταφερθεί και δίδεται από τον πίνακα

	Αθήνα	**Θες/νίκη**	**Ηράκλειο**
Βόρειος Π.	**2**	**1**	**3**
Νότιος Π.	**1**	**2**	**1**

   βρείτε τον οικονομικότερο τρόπο μεταφοράς των δώρων.

   Ο οικονομικότερος τρόπος μεταφοράς δίδεται ξεχωριστά για smartphones και tablets λύνοντας δύο ανεξάρτητα προβλήματα μεταφοράς.

   Πρώτα λύνουμε το πρόβλημα μεταφοράς των smartphones.

   Βήμα 1: Ξεκινάμε από τη βασική εφικτή λύση που δίνεται από τον κανόνα της ΒΔ γωνίας:

x_{ij}	Αθήνα	Θες/νίκη	Ηράκλειο	
Βόρειος Π.	4	4	1	9
Νότιος Π.			3	3
	4	4	4	

   Τα μη μηδενικά x_{ij} δίνουν τις εξισώσεις $\mu_1 - \lambda_1 = 2, \mu_2 - \lambda_1 = 1, \mu_3 - \lambda_1 = 3, \mu_3 - \lambda_2 = 1$. Θέτοντας αυθαίρετα $\lambda_1 = 0$ και λύνοντας, βρίσκουμε: $\mu_1 = 2, \mu_2 = 1, \mu_3 = 3, \lambda_2 = 2$.

   Τώρα παρατηρούμε ότι $\mu_1 - \lambda_2 = 0 \leq 1, \mu_2 - \lambda_2 = -1 \leq 2$ άρα η τρέχουσα βασική εφικτή είναι βέλτιστη.

   Τώρα λύνουμε το πρόβλημα μεταφοράς των tablets.

   Βήμα 1:

x_{ij}	Αθήνα	Θες/νίκη	Ηράκλειο	
Βόρειος Π.	2			2
Νότιος Π.	2	4	4	10
	4	4	4	

   από κανόνα ΒΔ γωνίας.

   Λύνουμε τις εξισώσεις $\mu_1 - \lambda_1 = 2, \mu_1 - \lambda_2 = 1, \mu_2 - \lambda_2 = 2, \mu_3 - \lambda_2 = 1$ με $\lambda_2 = 0$ και λαμβάνουμε $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2, \mu_3 = 1, \lambda_1 = -1$.

   Παρατηρούμε ότι $\mu_2 - \lambda_1 = 3 > 1$ άρα η τρέχουσα βασική εφικτή λύση δεν είναι βέλτιστη, οπότε προσθαφαιρούμε ποσότητα $\epsilon > 0$ κατά μήκος του κύκλου

x_{ij}	Αθήνα	Θες/νίκη	Ηράκλειο	
Βόρειος Π.	$2 - \epsilon$	ϵ		2
Νότιος Π.	$2 + \epsilon$	$4 - \epsilon$	4	10
	4	4	4	

Βήμα 2: Θέτοντας $\epsilon = 2$ έχουμε τη βασική εφικτή λύση:

x_{ij}	Αθήνα	Θες/νίκη	Ηράκλειο	
Βόρειος Π.		2		2
Νότιος Π.	4	2	4	10
	4	4	4	

Λύνοντας τις εξισώσεις $\mu_2 - \lambda_1 = 1, \mu_1 - \lambda_2 = 1, \mu_2 - \lambda_2 = 2, \mu_3 - \lambda_2 = 1$ με $\lambda_2 = 0$, λαμβάνουμε $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2, \mu_3 = 1, \lambda_1 = 1$.

Παρατηρούμε ότι η τρέχουσα λύση είναι βέλτιστη αφού $\mu_1 - \lambda_1 = 0 \leq 2, \mu_3 - \lambda_1 = 0 \leq 3$.

2. **Από τρείς clients C_1, C_2, C_3 αποστέλλονται αιτήσεις εξυπηρέτησης με ρυθμούς 6, 9 και 2 αιτήσεις ανά δευτερόλεπτο, αντίστοιχα. Οι αιτήσεις εξυπηρετούνται από δύο απομακρυσμένους servers S_1, S_2, όπου ο κάθε ένας μπορεί να εξυπηρετεί έως 10 αιτήσεις/δευ. Ο χρόνος διεκπεραίωσης μιας αίτησης, δηλαδή ο χρόνος που απαιτείται μέχρι να αποσταλεί, εξυπηρετηθεί από τον server και ληφθεί πίσω το αποτέλεσμα, για κάθε ζευγάρι client και server δίνεται από τον πίνακα:**

	S_1	S_2
C_1	**3**	**1**
C_2	**2**	**1**
C_3	**4**	**2**

Μας ενδιαφέρει να βρεθεί πόσες αιτήσεις ανά δευτερόλεπτο πρέπει να στέλνει κάθε client σε κάθε server ώστε να ελαχιστοποιηθεί ο συνολικός χρόνος διεκπεραίωσης των αιτήσεων.

(α′) **Διατυπώστε το παραπάνω πρόβλημα ως γραμμικό πρόγραμμα.**

Θέτοντας x_{ij} = ρυθμός αιτήσεων μεταξύ C_i και S_j, λαμβάνουμε το γραμμικό πρόγραμμα:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_{11} + x_{12} + 2x_{21} + x_{22} + 4x_{31} + 2x_{32} \\ \text{έτσι ώστε } & x_{11} + x_{12} = 6\,, \\ & x_{21} + x_{22} = 9\,, \\ & x_{31} + x_{32} = 2\,, \\ & x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 10\,, \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 10\,, \\ \text{όπου } & x_{ij} \geq 0, i, j \in \{1,2,3\}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

(β′) **Λύστε το.**

Παρατηρήστε ότι λύνοντας το πρόβλημα μεταφοράς

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_{11} + x_{12} + 2x_{21} + x_{22} + 4x_{31} + 2x_{32} \\ \text{έτσι ώστε } & x_{11} + x_{12} \geq 6\,, \\ & x_{21} + x_{22} \geq 9\,, \\ & x_{31} + x_{32} \geq 2\,, \\ & x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 10\,, \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 10\,, \\ \text{όπου } & x_{ij} \geq 0, i, j \in \{1,2,3\}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

θα λάβουμε και τη βέλτιστη λύση του (1) μιας και η βέλτιστη λύση του (2) ικανοποιεί τους περιορισμούς με ισότητα.

Στη συνέχεια θα λύσουμε το πρόβλημα μεταφοράς (2), όπου οι servers έχουν τον ρόλο των 'αποθηκών' και οι clients αντιστοιχούν στα 'καταστήματα'. Παρατηρήστε ότι το 'απόθεμα' των αποθηκών είναι 20 ενώ η 'ζήτηση' των καταστημάτων 17, συνεπώς θα εισάγουμε ένα εικονικό κατάστημα (C_4) με ζήτηση 3 και μηδενικό κόστος μεταφοράς προς αυτό.

Βήμα 1: Από κανόνα ΒΔ γωνίας:

	S_1	S_2	
C_1	1	5	6
C_2	9		9
C_3		2	2
C_0		3	3
	10	10	

Δεν είναι βέλτιστη, προσθαφαιρούμε $\epsilon > 0$ κατά μήκος του κύκλου

	S_1	S_2	
C_1	$1-\epsilon$	$5+\epsilon$	6
C_2	9		9
C_3		2	2
C_0	ϵ	$3-\epsilon$	3
	10	10	

και θέτουμε $\epsilon = 1$.

Βήμα 2:

	S_1	S_2	
C_1		6	6
C_2	9		9
C_3		2	2
C_0	1	2	3
	10	10	

Δεν είναι βέλτιστη, προσθαφαιρούμε $\epsilon > 0$ κατά μήκος του κύκλου

	S_1	S_2	
C_1		6	6
C_2	$9-\epsilon$	ϵ	9
C_3		2	2
C_0	$1+\epsilon$	$2-\epsilon$	3
	10	10	

και θέτουμε $\epsilon = 2$.

Βήμα 3:

	S_1	S_2	
C_1		6	6
C_2	7	2	9
C_3		2	2
C_0	3		3
	10	10	

η οποία είναι βέλτιστη.

Ο βέλτιστος τρόπος αποστολής είναι: οι C_1, C_3 στέλνουν όλες τις αιτήσεις τους στον S_2 και ο C_2 στέλνει 7 αιτήσεις/δευ. στον S_1 και 2 αιτήσεις/δευ. στον S_2.

3. **Κάθε μέρα οι 150 εργαζόμενοι μιας επιχείρησης μετακινούνται προς/από τα 3 εργοστάσια (Ε1, Ε2, Ε3) της επιχείρησης. Οι μετακινήσεις γίνονται με τη χρήση δημόσιων λεωφορείων από 3 διαφορετικά σημεία αφετηρίας (Α1,Α2,Α3). Από το Α1 εξυπηρετούνται 40, από το Α2 30 ενώ από το Α3 οι υπόλοιποι 80 εργαζόμενοι. Το κόστος του εισιτηρίου -το οποίο αναλαμβάνει να πληρώσει η επιχείρηση, για κάθε εργαζόμενο- εξαρτάται από το συγκεκριμένο δρομολόγιο που ακολουθείται και δίδεται από τον πίνακα:**

	Ε1	**Ε2**	**Ε3**
Α1	**6**	**-**	**2**
Α2	**3**	**2**	**1**
Α3	**-**	**3**	**1**

Μεταξύ του Α1 και Ε2, καθώς και μεταξύ του Α3 και Ε1 δεν υπάρχουν δρομολόγια, για αυτό τον λόγο και δεν αναγράφονται τιμές εισιτηρίου.

Η επιχείρηση έχει τη δυνατότητα να μειώσει το συνολικό κόστος μεταφοράς αλλάζοντας το εργοστάσιο στο οποίο εργάζεται κάθε εργαζόμενος, ανάλογα με την αφετηρία που αυτός χρησιμοποιεί. Βέβαια, σε κάθε ένα από τα εργοστάσια θα πρέπει να καταλήγει ο ίδιος αριθμός (50) εργαζομένων.

Βρείτε με ποιο τρόπο πρέπει να αντιστοιχηθούν οι εργαζόμενοι στα εργοστάσια (ανάλογα και με την αφετηρία που χρησιμοποιούν), ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος μεταφοράς για την επιχείρηση.

Θεωρούμε ένα πρόβλημα μεταφοράς όπου το κόστος μεταφοράς μεταξύ μη επιτρεπτών διαδρομών είναι αρκετά μεγάλο ώστε οι βέλτιστες λύσεις να μην τις χρησιμοποιούν. Συγκεκριμένα, θα θεωρήσουμε τα κόστη μεταφοράς που δίδονται από τον πίνακα:

	Ε1	Ε2	Ε3
Α1	6	100	2
Α2	3	2	1
Α3	100	3	1

Βήμα 1: Από κανόνα ΒΔ γωνίας:

x_{ij}	Ε1	Ε2	Ε3	
Α1	4			4
Α2	1	2		3
Α3		3	5	8
	5	5	5	

όπου οι μονάδες δίδονται σε δεκάδες εργαζομένων.

Δεν είναι βέλτιστη, προσθαφαιρούμε $\epsilon > 0$ κατά μήκος του κύκλου

x_{ij}	Ε1	Ε2	Ε3	
Α1	$4-\epsilon$		ϵ	4
Α2	$1+\epsilon$	$2-\epsilon$		3
Α3		$3+\epsilon$	$5-\epsilon$	8
	5	5	5	

και θέτουμε $\epsilon = 2$.

Βήμα 2:

x_{ij}	E1	E2	E3	
A1	2		2	4
A2	3			3
A3		5	3	8
	5	5	5	

η οποία είναι βέλτιστη.

4. **Μια εταιρία διαθέτει 3 εργοστάσια (Ε1, Ε2, Ε3) και 2 αποθήκες (Α1, Α2). Από τις τελευταίες προμηθεύει 3 πελάτες της εταιρίας (Π1, Π2, Π3), των οποίων οι εγκαταστάσεις βρίσκονται σε διαφορετικές τοποθεσίες.**

   Το εργοστάσιο Ε1 παράγει 5 εκατομμύρια μονάδες προϊόντος ανά μήνα, 7 το Ε2, και 3 το Ε3. Η αποθήκη Α1 έχει χωρητικότητα 6 εκατομμύρια μονάδων και 9 η Α2. Η ζήτηση σε εκατομμύρια μονάδες ανά μήνα κάθε πελάτη είναι 5 εκατομμύρια μονάδες ανά μήνα.

   Το κόστος μεταφοράς ανά μονάδα προϊόντος από τα εργοστάσια στις αποθήκες και από αυτές στους πελάτες δίνεται από τον πίνακα:

	Α1	**Α2**
Ε1	**2**	**1**
Ε2	**2**	**1**
Ε3	**3**	**1**
Π1	**2**	**2**
Π2	**1**	**3**
Π3	**1**	**2**

   Ο ακόλουθος τρόπος μεταφοράς (σε εκατομμύρια μονάδες προϊόντων) ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος μεταφοράς;

	Α1	**Α2**
Ε1	**5**	**0**
Ε2	**1**	**6**
Ε3	**0**	**3**
Π1	**0**	**5**
Π2	**5**	**0**
Π3	**1**	**4**

   Το ελάχιστο κόστος μεταφοράς από τα εργοστάσια στους πελάτες επιτυγχάνεται όταν οι μεταφορές από τα εργοστάσια προς τις αποθήκες και από τις αποθήκες προς τους πελάτες γίνονται με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Συνεπώς θα πρέπει να επιβεβαιώσουμε ότι η βέλτιστη λύση του προβλήματος μεταφοράς από τα εργοστάσια προς τις αποθήκες είναι η

	Α1	Α2
Ε1	5	0
Ε2	1	6
Ε3	0	3

   και η βέλτιστη λύση του προβλήματος μεταφοράς από τις αποθήκες προς τους πελάτες είναι η

	Π1	Π2	Π3
A1	0	5	1
A2	5	0	4

Τα παραπάνω επιβεβαιώνονται εργαζόμενοι ως συνήθως.

5. **Λύστε το γραμμικό πρόγραμμα**

$$\begin{aligned} \max\quad & 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+x_5+x_6 \\ \textbf{έτσι ώστε}\ & x_1+x_2+x_3 \le 2 \\ & x_4+x_5+x_6 = 3 \\ & x_1+x_4 \ge 1 \\ & x_2+x_5 \ge 5/2 \\ & x_3+x_6 \ge 3/2 \\ & x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6 \ge 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Η βέλτιστη λύση του προβλήματος μεταφοράς

$$\begin{aligned} \min\quad & -3x_{11}-2x_{12}-x_{13}-3x_{21}-x_{22}-x_{23} \\ \text{έτσι ώστε}\ & x_{11}+x_{12}+x_{13} \le 2 \\ & x_{21}+x_{22}+x_{23} \le 3 \\ & x_{11}+x_{21} \ge 1 \\ & x_{12}+x_{22} \ge 5/2 \\ & x_{13}+x_{23} \ge 3/2 \\ & x_{ij} \ge 0, i=1,2, j=1,2,3\ , \end{aligned} \tag{4}$$

δίνει τη βέλτιστη λύση του (3) με την αντιστοίχηση $x_1 = x_{11}, x_2 = x_{12}, x_3 = x_{13}, x_4 = x_{21}, x_5 = x_{22}, x_6 = x_{23}$.
Ακολουθεί η λύση του (4).

Βήμα 1: Από κανόνα ΒΔ γωνίας:

x_{ij}	K1	K2	K3	
A1	1	1		2
A2		3/2	3/2	3
	1	5/2	3/2	

Δεν είναι βέλτιστη, προσθαφαιρούμε $\epsilon > 0$ κατά μήκος του κύκλου

x_{ij}	K1	K2	K3	
A1	$1-\epsilon$	$1+\epsilon$		2
A2	ϵ	$3/2-\epsilon$	3/2	3
	1	5/2	3/2	

όπου θέτουμε $\epsilon = 1$.

Βήμα 2:

x_{ij}	K1	K2	K3	
A1		2		2
A2	1	1/2	3/2	3
	1	5/2	3/2	

η οποία είναι βέλτιστη.

6. **5 ταξί πρέπει να παραλάβουν 5 πελάτες. Η χιλιομετρική απόσταση μεταξύ του ταξί T_i και πελάτη C_j, για $i, j = 1, \ldots, 5$, δίνεται από τον πίνακα:**

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
T_1	**6**	**12**	**19**	**11**	**2**
T_2	**6**	**2**	**2**	**20**	**6**
T_3	**19**	**10**	**6**	**3**	**2**
T_4	**8**	**11**	**9**	**5**	**13**
T_5	**9**	**5**	**4**	**3**	**20**

(α′) **Θεωρήστε ότι το κόστος ανά χιλιόμετρο που διανύει κάθε ταξί είναι 10 λεπτά του ευρώ. Ποιον πελάτη πρέπει να παραλάβει κάθε ταξί ώστε να ελαχιστοποιήσουμε το ελάχιστο κόστος παραλαβής;**

Ο πίνακας κόστους (σε μονάδες 10 λεπτών του ευρώ) είναι:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
T_1	6	12	19	11	2
T_2	6	2	2	20	6
T_3	19	10	6	3	2
T_4	8	11	9	5	13
T_5	9	5	4	3	20

Βήμα 1: αφαίρεση μικρότερου στοιχείου κάθε γραμμής:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
T_1	4	10	17	9	0
T_2	4	0	0	18	4
T_3	17	8	4	1	0
T_4	3	6	4	0	8
T_5	6	2	1	0	17

Βήμα 2: αφαίρεση μικρότερου στοιχείου κάθε στήλης:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
T_1	1	10	17	9	0
T_2	1	0	0	18	4
T_3	14	8	4	1	0
T_4	0	6	4	0	8
T_5	3	2	1	0	17

Βήμα 3: κάλυψη '0' με τον ελάχιστο πλήθος ευθειών:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
T_1	1	10	17	9	0
T_2	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~18~~	~~4~~
T_3	14	8	4	1	0
T_4	~~0~~	~~6~~	~~4~~	~~0~~	~~8~~
T_5	3	2	1	0	17

Βήμα 4: αφαίρεση ελάχιστου μη καλυπτόμενου στοιχείου από μη καλυπτόμενες γραμμές και πρόσθεση του στις καλυπτόμενες στήλες:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
T_1	0	9	16	9	0
T_2	1	0	0	19	5
T_3	13	7	3	1	0
T_4	0	6	4	1	9
T_5	2	1	0	0	17

Βήμα 5: κάλυψη '0' με τον ελάχιστο πλήθος ευθειών:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
T_1	0	9	16	9	0
T_2	1	0	0	19	5
T_3	13	7	3	1	0
T_4	0	6	4	1	9
T_5	2	1	0	0	17

Βήμα 6: αφαίρεση ελάχιστου μη καλυπτόμενου στοιχείου από μη καλυπτόμενες γραμμές και πρόσθεση του στις καλυπτόμενες στήλες:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
T_1	0	8	15	8	0
T_2	2	0	0	19	6
T_3	13	6	2	0	0
T_4	0	5	3	0	9
T_5	3	1	0	0	18

Βήμα 7: παρατηρούμε ότι το ελάχιστο πλήθος ευθειών που καλύπτει τα '0' είναι 5, άρα ο αλγόριθμος τερματίζει και η βέλτιστη ανάθεση είναι

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
T_1	0	8	15	8	$\boxed{0}$
T_2	2	$\boxed{0}$	0	19	6
T_3	13	6	2	$\boxed{0}$	0
T_4	$\boxed{0}$	5	3	0	9
T_5	3	1	$\boxed{0}$	0	18

Πόσο είναι το ελάχιστο κόστος;

Το ελάχιστο κόστος είναι 2+2+3+8+4=18 δέκατα του ευρώ = 1.8 ευρώ.

(β') **Θεωρήστε ότι η χρέωση των πελατών εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθεί ο καθένας και δίνεται (σε ευρώ) από τον πίνακα:**

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
χρέωση	**8**	**7**	**12**	**10**	**9**

Βρείτε πως πρέπει να παραληφθούν οι πελάτες από τα ταξί ώστε να μεγιστοποιήσουμε το συνολικό κέρδος (= χρέωση διαδρομής − κόστος παραλαβής).

Η συνολική χρέωση για τις διαδρομές είναι $8+7+12+10+9=46$ ευρώ και είναι ανεξάρτητη από την ανάθεση, άρα η μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους είναι ισοδύναμη με την ελαχιστοποίηση του κόστους παραλαβής που έγινε στο προηγούμενο υποερώτημα. Συνεπώς, η βέλτιστη ανάθεση παραμένει η ίδια.

Ένας άλλος τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι ο πίνακας κέρδους για κάθε ανάθεση είναι:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
T_1	$8-0.1\cdot 6$	$7-0.1\cdot 12$	$12-0.1\cdot 19$	$10-0.1\cdot 11$	$9-0.1\cdot 2$
T_2	$8-0.1\cdot 6$	$7-0.1\cdot 2$	$12-0.1\cdot 2$	$10-0.1\cdot 20$	$9-0.1\cdot 6$
T_3	$8-0.1\cdot 19$	$7-0.1\cdot 10$	$12-0.1\cdot 6$	$10-0.1\cdot 3$	$9-0.1\cdot 2$
T_4	$8-0.1\cdot 8$	$7-0.1\cdot 11$	$12-0.1\cdot 9$	$10-0.1\cdot 5$	$9-0.1\cdot 13$
T_5	$8-0.1\cdot 9$	$7-0.1\cdot 5$	$12-0.1\cdot 4$	$10-0.1\cdot 3$	$9-0.1\cdot 20$

Ισοδύναμα, η βέλτιστη ανάθεση ελαχιστοποιεί τον πίνακα κόστους:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
T_1	$-8+0.1\cdot 6$	$-7+0.1\cdot 12$	$-12+0.1\cdot 19$	$-10+0.1\cdot 11$	$-9+0.1\cdot 2$
T_2	$-8+0.1\cdot 6$	$-7+0.1\cdot 2$	$-12+0.1\cdot 2$	$-10+0.1\cdot 20$	$-9+0.1\cdot 6$
T_3	$-8+0.1\cdot 19$	$-7+0.1\cdot 10$	$-12+0.1\cdot 6$	$-10+0.1\cdot 3$	$-9+0.1\cdot 2$
T_4	$-8+0.1\cdot 8$	$-7+0.1\cdot 11$	$-12+0.1\cdot 9$	$-10+0.1\cdot 5$	$-9+0.1\cdot 13$
T_5	$-8+0.1\cdot 9$	$-7+0.1\cdot 5$	$-12+0.1\cdot 4$	$-10+0.1\cdot 3$	$-9+0.1\cdot 20$

Εφόσον η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει εάν προστεθεί ένας αριθμός στα στοιχεία μιας στήλης (ή γραμμής), η βέλτιστη ανάθεση του παραπάνω πίνακα κόστους ελαχιστοποιεί τον πίνακα κόστους

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
T_1	$0.1\cdot 6$	$0.1\cdot 12$	$0.1\cdot 19$	$0.1\cdot 11$	$0.1\cdot 2$
T_2	$0.1\cdot 6$	$0.1\cdot 2$	$0.1\cdot 2$	$0.1\cdot 20$	$0.1\cdot 6$
T_3	$0.1\cdot 19$	$0.1\cdot 10$	$0.1\cdot 6$	$0.1\cdot 3$	$0.1\cdot 2$
T_4	$0.1\cdot 8$	$0.1\cdot 11$	$0.1\cdot 9$	$0.1\cdot 5$	$0.1\cdot 13$
T_5	$0.1\cdot 9$	$0.1\cdot 5$	$0.1\cdot 4$	$0.1\cdot 3$	$0.1\cdot 20$

ο οποίος είναι ισοδύναμος με τον πίνακα κόστους του πρώτου υποερωτήματος. Συνεπώς η βέλτιστη ανάθεση είναι η ίδια με αυτή στο πρηγούμενο υποερώτημα.

7. **Ο Ανδρέας, η Βάσω και ο Γιώργος προσλαμβάνονται σε ένα εργοστάσιο όπου παράγονται ανταλλακτικά τριών ειδών. Μετά από μια εκπαιδευτική περίοδο όπου όλοι οι εργαζόμενοι δοκιμάστηκαν στην παραγωγή ανταλλακτικών κάθε είδους, μετρήθηκαν οι εξής ρυθμοί παραγωγής (σε ανταλλακτικά την ώρα):**

	1ο είδος	**2ο είδος**	**3ο είδος**
Ανδρέας	**10**	**5**	**12**
Βάσω	**12**	**7**	**13**
Γιώργος	**11**	**7**	**10**

Εάν όλα τα είδη ανταλλακτικών πρέπει τελικά να παραχθούν και εφόσον κάθε εργαζόμενος απασχοληθεί με την παραγωγή αποκλειστικά ενός είδους, βρείτε την ανάθεση εργαζομένων σε είδος ανταλλακτικού ώστε να μεγιστοποιηθεί ο συνολικός ρυθμός παραγωγής.

Ισοδύναμα, πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος ανάθεσης για τον πίνακα κόστους:

	1ο είδος	2ο είδος	3ο είδος
Ανδρέας	-10	-5	-12
Βάσω	-12	-7	-13
Γιώργος	-11	-7	-10

Εφόσον ο ουγγρικός αλγόριθμος απαιτεί θετικές τιμές κόστους, προσθέτουμε ένα αρκετά μεγάλο αριθμό (13) στον παραπάνω πίνακα. Η βέλτιστη λύση παραμένει η ίδια.

	1ο είδος	2ο είδος	3ο είδος
Ανδρέας	3	8	1
Βάσω	1	6	0
Γιώργος	2	6	3

Βήμα 1: αφαίρεση μικρότερου στοιχείου κάθε γραμμής:

	1ο είδος	2ο είδος	3ο είδος
Ανδρέας	2	7	0
Βάσω	1	6	0
Γιώργος	0	4	1

Βήμα 2: αφαίρεση μικρότερου στοιχείου κάθε στήλης:

	1ο είδος	2ο είδος	3ο είδος
Ανδρέας	2	3	0
Βάσω	1	2	0
Γιώργος	0	0	1

Βήμα 3: κάλυψη '0':

	1ο είδος	2ο είδος	3ο είδος
Ανδρέας	2	3	0
Βάσω	1	2	0
Γιώργος	0	0	1

8. Βήμα 4: αφαίρεση ελάχιστου μη καλυπτόμενου στοιχείου από μη καλυπτόμενες γραμμές και πρόσθεση του στις καλυπτόμενες στήλες:

	1ο είδος	2ο είδος	3ο είδος
Ανδρέας	1	2	0
Βάσω	0	1	0
Γιώργος	0	0	2

Παρατηρούμε ότι η βέλτιστη ανάθεση είναι

	1ο είδος	2ο είδος	3ο είδος
Ανδρέας	1	2	$\boxed{0}$
Βάσω	$\boxed{0}$	1	0
Γιώργος	0	$\boxed{0}$	2

δηλαδή ο Ανδρέας αναλαμβάνει το 3ο είδος, η Βάσω το 1ο και ο Γιώργος το 2ο.