

# Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας

## 3η σειρά ασκήσεων

Παράδοση: Πέμπτη 20 Δεκέμβρη 2018.

### Άσκηση 1

Μια ποδοσφαιρική ομάδα έχει βρεθεί ότι μετά από έναν νικητήριο αγώνα στον επόμενο θα νικήσει με πιθανότητα 50%, θα χάσει με 25% ή θα φέρει ισοπαλία με 25%. Μετά από ήττα, στον επόμενο αγώνα θα νικήσει ή θα χάσει με ίση πιθανότητα αλλά αποκλείεται να φέρει ισοπαλία, ενώ μετά από μια ισοπαλία κάθε αποτέλεσμα είναι ισοπίθανο. Υπολογίστε τα παρακάτω στατιστικά για την ομάδα αυτή:

- Το ποσοστό νικών μετά από πολλούς αγώνες.
- Τον μέσο αριθμό αγώνων μεταξύ δύο ηττών.
- Την πιθανότητα μετά από μια ισοπαλία η ομάδα να παραμείνει αήττητη για τα επόμενα 4 παιχνίδια.

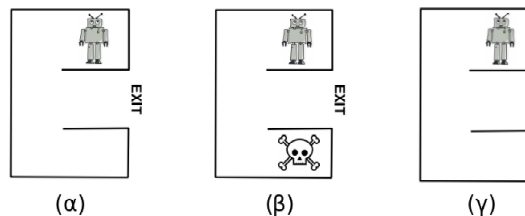
### Άσκηση 2

Θεωρήστε την τιμή μιας μετοχής που αλλάζει κάθε λεπτό και λαμβάνει τιμές στο σύνολο  $\{0, 1, 2\}$ . Όταν η τιμή είναι 0, θα αυξηθεί σίγουρα κατά 1 στο επόμενο λεπτό. Εάν η τιμή είναι 1, τότε με πιθανότητα  $3/4$  χάνει την αξία της (πέφτει στο 0) ή γίνεται 2 με πιθανότητα  $1/4$ . Όταν η τιμή είναι 2, είτε ελαττώνεται κατά 1 με πιθανότητα  $1/4$ , είτε χάνει την αξία της με πιθανότητα  $1/4$ , ή παραμένει η ίδια.

- Ποιο ποσοστό του χρόνου η τιμή της μετοχής δεν έχει αξία;
- Ποια είναι η μέση χρονικά τιμή της μετοχής εάν την παρακολουθούσατε για ένα αρκετά μεγάλο διάστημα;
- Πόσος χρόνος μεσολαβεί μέχρι η μετοχή να ξαναχάσει την αξία της, αφότου γίνει 1;
- Υπολογίστε την πιθανότητα να χρειαστούν τουλάχιστον 5 λεπτά μέχρι η μετοχή να χάσει την αξία της, αφότου γίνει 1.

### Άσκηση 3

Ένα ρομπότ βρίσκεται σε ένα λαβύρινθο (σχήμα α) που αποτελείται από 6 διακριτές θέσεις, από όπου προσπαθεί να βγει. Σε κάθε βήμα το ρομπότ κινείται προς μια από τις διαθέσιμες διπλάνες θέσεις με ίση πιθανότητα.



- α) Δώστε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα που να περιγράφει την κίνηση του ρομπότ.
- β) Βρείτε την πιθανότητα το ρομπότ να βγεί κάποτε από τον λαβύρινθο.
- γ) Βρείτε τον μέσο αριθμό βημάτων μέχρι το ρομπότ να βγεί από τον λαβύρινθο.
- δ) Βρείτε την πιθανότητα να εξέλθει του λαβυρίνθου χωρίς να πέσει στην παγίδα θανάτου, όπως φαίνεται στο σχήμα β
- ε) Για τον ίδιο λαβυρινθο (σχήμα β) βρείτε την πιθανότητα το ρομπότ να βγεί από αυτόν περνώντας πρώτα από τη θέση δίπλα από την παγίδα θανάτου.
- στ) Εάν η έξοδος κλείσει (σχήμα γ) βρείτε πόσο συχνά περνάει το ρομπότ από κάθε θέση του λαβυρίνθου καθώς κινείται ατέρμονα μέσα σε αυτόν.

## Άσκηση 4

Σαν συλλέκτης κόμικς θέλετε να μαζέψετε και τα  $N$  τεύχη του Αστερίξ (χωρίς να έχετε κανένα) και υπάρχουν δυο τρόποι να γίνει αυτό.

Στον 1ο τρόπο, κάθε μέρα σας έρχεται ένα τυχαίο από τα  $N$  τεύχη με ίση πιθανότητα.

Στον 2ο τρόπο, κάθε μέρα με πιθανότητα  $p$  σας έρχεται ένα τεύχος που δεν έχετε και με  $1 - p$  πρέπει να τα επιστρέψετε όλα πίσω.

- α) Με τον 1ο τρόπο, όταν φτάσει η στιγμή που θα έχετε  $k$  διαφορετικά τεύχη, σε πόσο χρόνο αναμένεται να έχετε  $k + 1$  τεύχη;
- β) Σε πόσο χρόνο αναμένεται να μαζέψετε όλα τα τεύχη με τον 1ο τρόπο;  
(Υπόδειξη: χρησιμοποιήσετε Μαρκοβιανή αλυσίδα  $N$  καταστάσεων)
- γ) Μέχρι να τα μαζέψετε όλα, με τον 1ο τρόπο, για πόσες μέρες αναμένεται να έχετε  $> N/2$  τεύχη;
- δ) Σε πόσο χρόνο αναμένεται να μαζέψετε όλα τα τεύχη με τον 2ο τρόπο;
- ε) Ποιόν από τους δύο τρόπους θα προτιμούσατε, για τις διάφορες τιμές των  $N$  και  $p$ ;