Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας

Λύσεις θεμάτων προόδου, 7 Δεκεμβρίου 2011.

---

1. **(2 μονάδες) Θεωρήστε το γραμμικό πρόγραμμα:**

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + 3x_2 \\ \textbf{έτσι ώστε}\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 3x_1 - x_2 \leq 5 \\ & x_2 - x_1 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Η λύση $x_1 = 3, x_2 = 4$ είναι βέλτιστη;

Θέτωντας $x_1 = 3, x_2 = 4$ στις εξισώσεις

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + z_1 \\ 3x_1 - x_2 + z_2 = 5 \\ x_2 - x_1 + z_3 = 1 \end{cases}$$

βρίσκουμε $z_1 = 6, z_2 = 0, z_3 = 0$. Το διάνυσμα $(x_1, x_2, z_1, z_2, z_3) = (3, 4, 6, 0, 0)$ είναι μια βασική εφικτή λύση (β.ε.λ.) για το πρόβλημα, αφού όλες οι συνιστώσες είναι μη αρνητικές και τουλάχιστον $n = 2$ από αυτές είναι μηδενικές.

Σύμφωνα με την ικανή συνθήκη βέλτιστης λύσης, η β.ε.λ. αυτή θα είναι βέλτιστη εάν η συμπληρωματική βασική λύση (β.λ.) του δυϊκού προβλήματος, είναι εφικτή, δηλ. όλες οι συνιστώσες του είναι μη αρνητικές.

Το δυϊκό πρόβλημα είναι:

$$\begin{aligned} \min\ & -\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 \\ \text{έτσι ώστε}\ & -\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 \geq 2 \\ & -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \geq 3 \\ & \lambda_1, \lambda_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Η β.λ. $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \nu_1, \nu_2)$ που είναι συμπληρωματική της $(x_1, x_2, z_1, z_2, z_3)$ ικανοποιεί $\lambda_i z_i = 0$ και $x_j \nu_j = 0$ για κάθε $i = 1, 2, 3$ και $j = 1, 2$. Συνεπώς, $\lambda_1 = \nu_1 = \nu_2 = 0$ αφού $z_1, x_1, x_2 > 0$. Τώρα,

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 2 + \nu_1 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 3 + \nu_2 \end{cases}$$

όπου λύνοντας βρίσκουμε $\lambda_2 = 5/2, \lambda_3 = 11/2$. Άρα η β.λ. $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \nu_1, \nu_2) = (0, 5/2, 11/2, 0, 0)$ είναι β.ε.λ.

Συνεπώς, η $(x_1, x_2, z_1, z_2, z_3) = (3, 4, 6, 0, 0)$ είναι βέλτιστη λύση για το αρχικό πρόβλημα.

2. **(2 μονάδες) Γράψτε και λύστε το δυϊκό πρόβλημα του γραμμικού προγράμματος:**

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 12x_5 \\ \textbf{έτσι ώστε}\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Το δυϊκό πρόβλημα είναι:

$$\begin{aligned} &\min \lambda_1 \\ \text{έτσι ώστε } &2\lambda_1 \geq 1 \\ &\lambda_1 \geq 2 \\ &\lambda_1 \geq 3 \\ &\lambda_1 \geq -5 \\ &-3\lambda_1 \geq -12 \\ &\lambda_1 \geq 0. \end{aligned}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το $\min_{3\leq\lambda_1\leq 4} \lambda_1$, το οποίο έχει βέλτιστη λύση $\lambda_1 = 3$ και τιμή 3.

Βρείτε τη βέλτιστη τιμή και λύση του αρχικού προβλήματος χωρίς να εκτελέσετε simplex.

Λύνοντας τις εξισώσεις

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = 1 + \nu_1 \\ \lambda_1 = 2 + \nu_2 \\ \lambda_1 = 3 + \nu_3 \\ \lambda_1 = -5 + \nu_4 \\ -3\lambda_1 = -12 + \nu_5 \end{cases}$$

βρίσκουμε $\nu_1 = 5, \nu_2 = 1, \nu_3 = 0, \nu_4 = 8, \nu_5 = 3$, δηλαδή η βέλτιστη β.ε.λ. του δυϊκού είναι $(\lambda_1, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5) = (3, 5, 1, 0, 8, 3)$ με βέλτιστη τιμή 3.

Η βέλτιστη τιμή του αρχικού προβλήματος είναι ίση με αυτή του δυϊκού, δηλαδή 3.

Απομένει ο υπολογισμός της βέλτιστης λύσης του αρχικού. Απο τις συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας, βρίσκουμε ότι η συμπληρωματική β.λ. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, z_1)$ του αρχικού προβλήματος ικανοποιεί $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = z_1 = 0$. Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην εξίσωση $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 + z_1 = 10$ βρίσκουμε $x_3 = 10$. Άρα η βέλτιστη λύση του αρχικού είναι $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 10, 0, 0)$.

3. **(3 μονάδες) Θεωρήστε το γραμμικό πρόγραμμα:**

$$\begin{aligned} &\max x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \textbf{έτσι ώστε } &2x_1 + x_3 \leq 3 \\ &x_2 + x_3 \leq 2 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(α′) **Βρείτε τη βέλτιστη τιμή και λύση.**

Θέτοντας $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ στις εξισώσεις $2x_1 + x_3 + z_1 = 3, x_2 + x_3 + z_2 = 2$ βρίσκουμε $z_1 = 3, z_2 = 2$ η οποίες είναι μη αρνητικές τιμές. Συνεπώς η β.λ. $(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2) = (0, 0, 0, 3, 2)$ είναι β.ε.λ. και θα τη χρησιμοποιήσουμε ως αρχική β.ε.λ. στον αλγόριθμο simplex.

	x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	σταθ.
	1	-1	2	0	0	0
(z_1)	2	0	1	1	0	3
(z_2)	0	1	1	0	1	2
	1	-3	0	0	-2	-2
(z_1)	2	-1	0	1	-1	1
(x_3)	0	1	1	0	1	2
	0	-5/2	0	-1/2	-3/2	-5/2
(x_1)	1	-1/2	0	1/2	-1/2	1/2
(x_3)	0	1	1	0	1	2

Συνεπώς η βέλτιστη τιμή είναι 5/2 και λύση η $(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2) = (1/2, 0, 2, 0, 0)$.

(β′) **Πόσο θα μεταβληθεί η βέλτιστη τιμή εάν ο 1ος περιορισμός γίνει $2x_1+x_3 \leq 3.001$;**

Εφόσων μεταβάλεται ο πρώτος περιορισμός κατά τη μικρή ποσότητα $\epsilon = 0.001$, από την ιδιότητα της ευαισθησίας η βέλτιστη τιμή θα μεταβληθεί κατά $\lambda_1\epsilon = (1/2) \times 0.001 = 0.0005$, όπου $\lambda_1 = -(-1/2) = 1/2$, από το τελευταίο βήμα του simplex.

(γ′) **Ποιά θα είναι η βέλτιστη λύση εάν ο 1ος περιορισμός γίνει $2x_1 + x_3 \leq 4$; (Δε χρειάζεται να ξαναεκτελέσετε simplex.)**

Εφόσων η μεταβολή του περιορισμού δεν είναι μικρή, δε μπορεί να εφαρμοστεί η ιδιότητα της ευαισθησίας. Παρατηρούμε ότι η συμπληρωματική β.ε.λ. του δυϊκού που αντιστοιχούσε στη βέλτιστη β.ε.λ. του αρχικού που βρήκαμε στο ερώτημα (3α′), εξακολουθεί να είναι β.ε.λ. (όχι όμως απαραίτητα βέλτιστη) για το δυϊκό. Αυτό συμβαίνει γιατί η αλλαγή του δεξιού μέλους του περιορισμού δεν αλλάζει τους περιορισμούς του δυϊκού και άρα τις β.ε.λ. του δυϊκού.

Από τη γραμμή της αντικειμενικής εξίσωσης στον πίνακα simplex του τελευταίου βήματος βλέπουμε ότι η β.ε.λ. αυτή είναι η $(\lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2, \nu_3) = (1/2, 3/2, 0, 5/2, 0)$. Θα ελέγξουμε εάν αξακολουθεί να είναι βέλτιστη για το δυϊκό, εξετάζοντας εάν η συμπληρωματική της β.λ. $(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2)$ του αρχικού προβλήματος (με τον αλλαγμένο περιορισμό) είναι εφικτή. Εάν είναι όντως εφικτή τότε από την ικανή συνθήκη βέλτιστης λύσης ξέρουμε ότι θα είναι και η νέα βέλτιστη λύση του αρχικού που αναζητούμε.

Η $(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2)$ ικανοποιεί τις συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας, άρα $z_1 = z_2 = x_2 = 0$. Τώρα οι εξισώσεις $2x_1+x_3+z_1 = 4, x_2+x_3+z_2 = 2$ δίνουν $x_1 = 1, x_3 = 2$, άρα $(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2) = (1, 0, 2, 0, 0)$ η οποία είναι β.ε.λ. αφού δεν έχει αρνητικές συνιστώσες. Συνεπώς αυτή είναι η νέα βέλτιστη β.ε.λ.

(δ′) **Θα αλλάξει η βέλτιστη λύση εάν η αντικειμενική συνάρτηση γίνει $x_1 + x_2 + x_3$ ενώ οι περιορισμοί μείνουν άθικτοι;**

Εφόσων οι περιορισμοί δεν αλλάζουν, η βέλτιστη β.ε.λ. $(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2) = (1/2, 0, 2, 0, 0)$ που βρήκαμε στο ερώτημα (3α′) εξακολουθεί να είναι β.ε.λ. αλλά όχι απαραίτητα βέλτιστη. Θα ελέγξουμε εάν η β.ε.λ. αυτή είναι βέλτιστη εξετάζοντας εάν η συμπληρωματική β.λ. του δυϊκού είναι εφικτή. Το δυϊκό πρόβλημα είναι

$$
\begin{aligned}
&\min\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \\
\text{έτσι ώστε}\ &2\lambda_1 \geq 1 \\
&\lambda_2 \geq 1 \\
&\lambda_1 + \lambda_2 \geq 1 \\
&\lambda_1, \lambda_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Από τις συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας βρίσκουμε ότι η β.λ. $(\lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ του δυϊκού ικανοποιεί $\nu_1 = \nu_3 = 0$. Άρα λύνοντας τις εξισώσεις

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = 1 + \nu_1 \\ \lambda_2 = 1 + \nu_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 + \nu_3 \end{cases}$$

βρίσκουμε $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ και $\nu_2 = -1/2 < 0$. Άρα η β.λ. $(\lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ δεν είναι εφικτή. Συνεπώς, από την αναγκαία συνθήκη βέλτιστης λύσης, η $(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2) = (1/2, 0, 2, 0, 0)$ δεν είναι βέλτιστη για το νέο πρόβλημα.

4. **(3 μονάδες) Κάθε πρωί μια εταιρία γαλακτοκομικών εφοδιάζει δύο πόλεις με 17 και 18 τόνους γάλακτος αντίστοιχα. Το γάλα μεταφέρεται από 3 διαφορετικά εργοστάσια της εταιρίας, όπου το κόστος μεταφοράς (ανά τόνο) από κάθε εργοστάσιο σε κάθε πόλη δίνεται από τον πίνακα:**

	πόλη 1	**πόλη 2**
εργοστάσιο 1	4	2
εργοστάσιο 2	4	2
εργοστάσιο 3	2	3

Το εργοστάσιο 1 παράγει 10 τόνους καθημερινά, 20 τόνους το εργοστάσιο 2 και 5 τόνους το εργοστάσιο 3.

(α′) **Βρείτε τον οικονομικότερο τρόπο μεταφοράς του γάλακτος.**

Αρχικοποίηση. Για να βρούμε μια αρχική β.ε.λ. χρησιμοποιούμε τον κανόνα της βορειοδυτικής γωνίας, όπου βρίσκουμε

	πόλη 1	πόλη 2	
εργοστάσιο 1	10	0	10
εργοστάσιο 2	7	13	20
εργοστάσιο 3	0	5	5
	17	18	

Βήμα 1: Για κάθε μηδενική μεταβλητή x_{ij} πρέπει να ικανοποιείται $\mu_j - \lambda_i = c_{ij}$, οπότε λαμβάνουμε

$$\begin{cases} \mu_1 - \lambda_1 = 4 \\ \mu_1 - \lambda_2 = 4 \\ \mu_2 - \lambda_2 = 2 \\ \mu_2 - \lambda_3 = 3 \end{cases}$$

Εφόσων οι άγνωστοι υπερβαίνουν τον αριθμό των εξισώσεων κατά ένα, θέτουμε αυθαίρετα κάποια μεταβλητή ίση μηδέν, π.χ., $\lambda_2 = 0$ και λύνουμε ως προς τους υπόλοιπους άγνωστους για να λάβουμε $\mu_1 = 4, \mu_2 = 2, \lambda_3 = -1, \lambda_1 = 0$. Τώρα για τις μηδενικές μεταβλητές x_{ij} ελέγχουμε εάν $-\nu_{ij} = \mu_j - \lambda_i - c_{ij} \leq 0$. Για $i = 3, j = 1$: $\mu_1 - \lambda_3 - c_{31} = 2 > 0$, άρα θα πρέπει να μεταβάλουμε τη β.ε.λ. κατά $\epsilon > 0$ ως εξής:

	πόλη 1	πόλη 2	
εργοστάσιο 1	10	0	10
εργοστάσιο 2	7-ϵ	13+ϵ	20
εργοστάσιο 3	ϵ	5-ϵ	5
	17	18	

Βλέπουμε ότι ανώτατη επιτρεπτή τιμή είναι η $\epsilon = 5$ η οποία δίνει:

	πόλη 1	πόλη 2	
εργοστάσιο 1	10	0	10
εργοστάσιο 2	2	18	20
εργοστάσιο 3	5	0	5
	17	18	

Βήμα 2: Για κάθε μηδενική μεταβλητή x_{ij} πρέπει να ικανοποιείται $\mu_j - \lambda_i = c_{ij}$, οπότε λαμβάνουμε

$$\begin{cases} \mu_1 - \lambda_1 = 4 \\ \mu_1 - \lambda_2 = 4 \\ \mu_2 - \lambda_2 = 2 \\ \mu_1 - \lambda_3 = 2 \end{cases}$$

Θέτοντας $\mu_1 = 0$ και λύνοντας ως προς τους υπόλοιπους άγνωστους λαμβάνουμε $\mu_2 = -2, \lambda_3 = -2, \lambda_2 = -4, \lambda_1 = -4$. Τώρα για τις μηδενικές μεταβλητές x_{12}, x_{32} ισχύει $-\nu_{12} = \mu_2 - \lambda_1 - 2 = 0, -\nu_{32} = \mu_2 - \lambda_3 - 3 = -3 < 0$, άρα η β.ε.λ. $x_{11} = 10, x_{21} = 2, x_{22} = 18, x_{31} = 5$ είναι βέλτιστη.

(β′) **Βρείτε τον οικονομικότερο τρόπο μεταφοράς εάν η ζήτηση για γάλα στην πόλη 1 μειωθεί κατά 5 τόνους. Κατά πόσο θα πρέπει να ελαττωθεί η ποσότητα του παραγώμενου γάλακτος σε κάθε εργοστάσιο έτσι ώστε να μη μένουν αδιάθετες ποσότητες;**

Εισάγουμε την πλασματική πόλη 3 με ζήτηση 5 και $c_{i3} = 0$ για κάθε $i = 1, 2, 3$.

Αρχικοποίηση. Ο κανόνας της βορειοδυτικής γωνίας δίνει:

	πόλη 1	πόλη 2	πόλη 3	
εργοστάσιο 1	10	0	0	10
εργοστάσιο 2	2	18	0	20
εργοστάσιο 3	0	0	5	5
	12	18	5	

Βήμα 1: Λύνουμε τις εξισώσεις $\mu_1 - \lambda_1 = 4, \mu_1 - \lambda_2 = 4, \mu_2 - \lambda_2 = 2, \mu_3 - \lambda_3 = 0$ με $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ (πρέπει να θέσουμε 2 άγνωστους ίσους με 0 αφού οι άγνωστοι υπερβαίνουν τον αριθμό των εξισώσεων κατά 2) και λαμβάνουμε: $\lambda_1 = 0, \mu_1 = 4, \mu_2 = 2, \mu_3 = 0$. Για τη μηδενική μεταβλητή x_{31} ισχύει $\mu_1 - \lambda_4 = 4 > c_{31} = 0$. Άρα θα πρέπει να μεταβάλουμε τη β.ε.λ. κατά $\epsilon > 0$ ως εξής:

	πόλη 1	πόλη 2	πόλη 3	
εργοστάσιο 1	10	0	0	10
εργοστάσιο 2	2-ϵ	18	ϵ	20
εργοστάσιο 3	ϵ	0	5-ϵ	5
	12	18	5	

Η ανώτατη επιτρεπτή αύξηση είναι $\epsilon = 2$ η οποία δίνει:

	πόλη 1	πόλη 2	πόλη 3	
εργοστάσιο 1	10	0	2	10
εργοστάσιο 2	0	18	2	20
εργοστάσιο 3	2	0	3	5
	12	18	5	

Βήμα 2: Λύνοντας τις εξισώσεις $\mu_1 - \lambda_1 = 4, \mu_2 - \lambda_2 = 2, \mu_3 - \lambda_2 = 0, \mu_3 - \lambda_3 = 0, \mu_1 - \lambda_3 = 2$ για $\lambda_2 = 0$, λαμβάνουμε $\mu_2 = 2, \mu_3 = 0, \lambda_3 = 0, \mu_1 = 2, \lambda_1 = -2$.

Αποφασίζουμε να αυξήσουμε τη x_{13} κατά $\epsilon > 0$, αφού $\mu_3 - \lambda_1 = 0 + 2 > 0$. Συνεπώς,

	πόλη 1	πόλη 2	πόλη 3	
εργοστάσιο 1	10-ϵ	0	ϵ	10
εργοστάσιο 2	0	18	2	20
εργοστάσιο 3	2+ϵ	0	3-ϵ	5
	12	18	5	

όπου η μέγιστη αύξηση του ϵ (ίση με 3) δίνει

	πόλη 1	πόλη 2	πόλη 3	
εργοστάσιο 1	7	0	3	10
εργοστάσιο 2	0	18	2	20
εργοστάσιο 3	5	0	0	5
	12	18	5	

Βήμα 3: Οι εξισώσεις $\mu_1 - \lambda_1 = 4, \mu_3 - \lambda_1 = 0, \mu_2 - \lambda_2 = 2, \mu_3 - \lambda_2 = 0, \mu_1 - \lambda_3 = 2$ για $\lambda_1 = 0$, δίνουν $\mu_1 = 4, \mu_3 = 0, \lambda_3 = 2, \lambda_2 = 0, \mu_2 = 2$. Παρατηρούμε ότι $\mu_j - \lambda_i \leq c_{ij}$ για κάθε i, j, άρα η τρέχουσα β.ε.λ. είναι βέλτιστη.

Εφόσων στη λύση αυτή, τα εργοστάσια 1 και 2 στέλνουν 3 και 2 τόνους αντίστοιχα στην πλασματική πόλη, θα πρέπει στην πραγματικότητα να ελαττώσουν την παραγωγή τους κατά τα αντίστοιχα ποσά.