Μάθημα ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ
Καθ. Γ. Κοντογιάννης
Παρασκευή 22 Νοεμβρίου 2013
Φυλλάδιο #10

Σετ ασκήσεων #3

1. *Δεσμευμένες πυκνότητες.* Δείξτε ότι οι περιθώριες και οι δεσμευμένες πυκνότητες οποιωνδήποτε τριών Τ.Μ. X,Y,Z ικανοποιούν την σχέση,

$$\frac{p(x \mid y,z)}{p(x)} \cdot \frac{p(z \mid y)}{p(z \mid x)} = \frac{p(y \mid x,z)}{p(y)}$$

   για κάθε x,y,z.

2. *Δεσμευμένη ανεξαρτησία.* Αποδείξτε ότι αν $\{X_n\}$ είναι μια αλυσίδα Markov, τότε για κάθε n οι Τ.Μ. X_{n-3} και X_n είναι δεσμευμένα ανεξάρτητες δεδομένης της X_{n-1}.

3. *Ανεξαρτησία και δεσμευμένη ανεξαρτησία* Αποδείξτε τις πιο κάτω ιδιότητες:
   a. Αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες, τότε $E(X \mid Y = y) = E(X)$ για κάθε y.
   b. Αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες, τότε η $f(X)$ και η $g(Y)$ είναι ανεξάρτητες, για οποιεσδήποτε δύο συναρτήσεις f και g.
   c. Αν οι X, Z είναι δεσμευμένα ανεξάρτητες δεδομένης της Y, τότε, για κάθε x,y,z: $P(z \mid x, y) = P(z \mid y)$

4. *Αλυσίδα Markov.* Έστω μια αλυσίδα Markov $\{X_n\}$ με σύνολο τιμών το $\{0,1,2,3\}$ και πίνακα μεταβάσεων

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

   a. Σχεδιάστε τη γραφική της αναπαράσταση.
   b. Υπολογίστε τις πιθανότητες μεταβάσεων σε δύο βήματα.
   c. Υπολογίστε την δεσμευμένη πυκνότητα του $X_2 \mid X_0 = 2$,
   d. Υπολογίστε την πυκνότητα του X_1 αν η αρχική κατανομή Q είναι ομοιόμορφη.

5. *Αλυσίδα Markov.* Έστω μια αλυσίδα Markov $\{X_n\}$ η οποία περιγράφει τον εξής τυχαίο περίπατο στις θέσεις $\{1,2,3\}$: Σε κάθε βήμα, δεδομένου ότι $X_n = i$ με πιθανότητα ½ μεταβαίνει στην θέση 1 (δηλαδή $X_{n+1} = 1$) και με πιθανότητα ½ επιλέγει τυχαία και μεταβαίνει σε μια από τις δύο άλλες θέσεις. [Π.χ., δεδομένου ότι $X_n = 1$, η πιθανότητα το $X_{n+1} = 2$ είναι (½)(½) = ¼. Παρομοίως, δεδομένου ότι $X_n = 2$, η πιθανότητα το $X_{n+1} = 1$ είναι (½)+(½)(½) = ¾.]

   (a) Υπολογίστε τον πίνακα μεταβάσεων της $\{X_n\}$.
   (b) Σχεδιάστε τη γραφική της αναπαράσταση.
   (c) Αν $X_0 = 1$, υπολογίστε την πυκνότητα του X_1. Κάντε το ίδιο για την περίπτωση που η X_0 έχει αρχική κατανομή Q με $Q(1) = 2/3$ και $Q(2) = Q(3) = 1/6$.
   (d) Υπολογίστε την πιθανότητα $\Pr\{X_2 = 2 \mid X_0 = 2\}$.

6. *Μια απλή Α.Μ.* Έστω μια Α.Μ. $\{X_n\}$ με σύνολο τιμών το $S = \{1,2,3,4\}$ που έχει αρχική κατανομή ομοιόμορφη στο *S*, και πίνακα μεταβάσεων

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 9/10 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Σχεδιάστε τη γραφική αναπαράσταση αυτής της Α.Μ. Ποιες από τις καταστάσεις είναι επαναληπτικές, ποιες απεριοδικές και ποιες απορροφητικές ; Δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας;
   (b) Είναι η Α.Μ. $\{X_n\}$ αδιαχώριστη; Απεριοδική; Υπάρχουν κλειστές ομάδες καταστάσεων και ποιες είναι; Δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας.
   (c) Υπολογίστε ακριβώς την δεσμευμένη μέση τιμή $E(X_n \mid X_0 = 1)$.

7. *Τυχαίος περίπατος,* Έστω μια Α.Μ. $\{X_n\}$ που εκτελεί τον εξής τυχαίο περίπατο στο σύνολο τιμών $\{1,2,3,4\}$: Δεδομένης της τιμής του X_n, το $X_{n+1} = X_n$ με πιθανότητα ½, ή το X_{n+1} παίρνει μια τυχαία τιμή με κατανομή U{1,2,3,4} με πιθανότητα ½. Έστω ότι η αρχική τιμή $X_0 = 1$.

   a. Υπολογίστε τον πίνακα μεταβάσεων *P* και την στάσιμη κατανομή *π*.
   b. Υπολογίστε την δεσμευμένη πυκνότητα του $X_2 \mid X_0 = 1$.

c. Υπολογίστε την μέση τιμή $E_\pi[X]$ ως προς τη στάσιμη κατανομή π, και την δεσμευμένη μέση τιμή $E[X_2 \mid X_0 = 1]$.

d. Είναι η $E[X_4 \mid X_2 = 1]$ ίση με την $E[X_2 \mid X_4 = 1]$ ή όχι; Αποδείξτε ή τεκμηριώστε την απάντησή σας επακριβώς και λεπτομερώς.

8. *Τυχαίος περίπατος,* Έστω μια Α.Μ. $\{X_n\}$ που εκτελεί τον εξής τυχαίο περίπατο στο σύνολο τιμών $\{1,2,3\}$: Δεδομένης της τιμής του X_n, το X_{n+1} παίρνει κάθε μια από τις άλλες δύο τιμές με πιθανότητα ½. Έστω ότι η αρχική τιμή $X_0 = 1$.

   (a) Υπολογίστε τον πίνακα μεταβάσεων P και την στάσιμη κατανομή π.

   (b) Υπολογίστε την πιθανότητα του ενδεχομένου $\{X_3 = 1\}$.

9. *Άλλη μια απλή Α.Μ.* Έστω μια αλυσίδα Markov $\{X_n\}$ με σύνολο τιμών το $\{1,2,3\}$ και πίνακα μεταβάσεων

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Σχεδιάστε τη γραφική της αναπαράσταση.

   (b) Αν $X_0 = 2$, υπολογίστε την πυκνότητα του X_1. Κάντε το ίδιο για την περίπτωση που η X_0 έχει αρχική κατανομή Q με $Q(1) = 1/10$ και $Q(2) = 4/10, \quad Q(3) = 1/2$.

   (c) Είναι ή όχι αναστρέψιμη αυτή η Α.Μ.; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

10. *Προσομοίωση Α.Μ.* Χρησιμοποιώντας το `Scilab` γράψτε ένα πρόγραμμα που να προσομοιώνει την Α.Μ. της άσκησης 6. με $X_0 = 3$ για n = 100 βήματα. Κάντε τρία γραφήματα που να αναπαριστούν τα αποτελέσματά σας.

11. *Πιθανότητα χρεοκοπίας.* Σε ένα τυχερό παιχνίδι ξεκινάμε με $X_0 = 10$ Ευρώ και σε κάθε γύρο ή κερδίζουμε 2 Ευρώ με πιθανότητα 1/3, ή χάνουμε 1 Ευρώ με πιθανότητα 2/3. Αν χρεοκοπήσουμε σταματάμε, και ο στόχος μας είναι να φτάσουμε (ή να ξεπεράσουμε) τα 20 Ευρώ.

   a. Κάντε τη γραφική αναπαράσταση αυτής της Α.Μ., και περιγράψτε το σύνολο καταστάσεων.

   b. Ποιες καταστάσεις είναι επαναληπτικές, απορροφητικές, μεταβατικές; Είναι η Α.Μ. αδιαχώριστη; Απεριοδική; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

12. *Μια Α.Μ.* Έστω μια Α.Μ. $\{X_n\}$ με σύνολο τιμών το $\{1,2,3\}$, με πίνακα μεταβάσεων τον P όπως πιο κάτω, και με αρχική τιμή $X_0 = 1$. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 1/x$.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 5/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}$$

Α. Υπολογίστε τον πίνακα P^2 και χρησιμοποιήστε τον για να υπολογίσετε την μέση τιμή $E[f(X_2)]$. Συγκρίνετε τις τιμές των $E[f(X_0)]$, $E[f(X_1)]$ και $E[f(X_2)]$.

Β. Ποιες από τις καταστάσεις είναι επαναληπτικές, ποιες απεριοδικές και ποιες απορροφητικές; Είναι η Α.Μ. $\{X_n\}$ αδιαχώριστη; Απεριοδική; Δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας.

Γ. Βρείτε τη στάσιμη κατανομή της Α.Μ. Είναι αναστρέψιμη η Α.Μ.;

13. Χρησιμοποιώντας το `Scilab` γράψτε ένα πρόγραμμα που να πραγματοποιεί τα εξής στάδια:

(a) Να προσομοιώνει την Α.Μ. της άσκησης 9. για n = 150 βήματα.

(b) Επαναλάβετε το a. 100 φορές, και την κάθε φορά καταγράψτε την τιμή του X_{150}. Από αυτές τις τιμές, υπολογίστε την «εμπειρική κατανομή» του X_{150}, δηλαδή, την κατανομή R όπου $R(i) = \frac{1}{100}$[πλήθος από τα X_{150} που είχαν την τιμή i]. Πόσο «κοντά» είναι η R στην στάσιμη κατανομή π;

(c) Υπολογίστε την πραγματική τιμή του $E_\pi[f(X)]$, τη μέση τιμή της $f(x)$ ως προς τη στάσιμη κατανομή π, $E_\pi[f(X)] = \sum_i \pi(i) f(i)$.

(d) Τροποποιήστε το πρόγραμμά σας για να βρίσκει μια προσέγγιση της $E_\pi[f(X)]$ μετά από n βήματα για κάθε n = 1,2,...,150 και κάντε μια γραφική αναπαράσταση των προσεγγίσεων σας. Πόσα βήματα απαιτούνται στην προσομοίωση ώστε η προσέγγιση που παίρνουμε να είναι ακριβής κατά περίπου 1%;

14. Έστω μια Α.Μ. $\{X_n\}$ με πίνακα μεταβάσεων τον $P = (P_{ij})$ και στάσιμη κατανομή την $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s)$. Αποδείξτε ότι για κάθε i έχουμε:

$$\sum_{j \neq i} \pi_i P_{ij} = \sum_{j \neq i} \pi_j P_{ji} .$$

15. *Συνέχεια.* [**ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΗ**] Για την Α.Μ. της άσκησης 6:

(a) Υπολογίστε την στάσιμη κατανομή π αν υπάρχει. Αν δεν υπάρχει, εξηγείστε γιατί.

(b) Είναι αυτή η αλυσίδα Markov αναστρέψιμη ή όχι; Αποδείξτε την απάντησή σας.