ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$\boxed{1}$

x	47	48	49	50	51
l_x	440000	396000	348480	299692	254738
d_x	44000	47520	48788	44954	43306
q_x	0.10	0.12	0.14	0.15	0.17

$\boxed{2}$

$$q_x^* = 1 - e^{-\int_0^1 (\mu_{x+t} - c)dt} = 1 - e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}dt} \cdot e^{-\int_0^1 (-c)dt} \Rightarrow$$

$$q_x^* = 1 - p_x \cdot e^c = \frac{q_x}{2} \rightarrow c = \ln \frac{2 - q_x}{2(1 - q_x)}$$

$\boxed{3}$

α)

$s(x) = \frac{N - x}{N} \rightarrow s(x) = \frac{99 - x}{99}$, $s'(x) = -\frac{1}{99} < 0$ συνεχής και φθίνουσα $\quad s(0) = 1,\ s(\omega) = 0 \ \rightarrow\ \omega = 99$

β)

$$s(30) = \frac{99-30}{99},\ s(35) = \frac{99-35}{99}\ ,\ \frac{s(35)}{s(30)} = \frac{64/99}{69/99} = \frac{64}{69} = 0.927536$$

γ)

$$\ell_0 = 99000\ ,\ \ell_1 = s(1)\cdot\ell_0 = \frac{99-1}{99}\cdot 99000 = 98000,$$

$$\ell_2 = s(2)\cdot\ell_0 = 97000\ ,\ \ell_3 = s(3)\cdot\ell_0 = 96000$$

$$d_0 = d_1 = d_2 = 1000$$

$\boxed{4}$

$$0.5 = e^{-\int_0^{0.4}(F+e^{2x})dx} = e^{-0.4F - [\frac{1}{2}e^{2x}]_0^{0.4}} = e^{-0.4F - 0.6128} \Rightarrow F = 0.20$$

ΜΑΠ Αναλογιστικά Μαθηματικά

$\boxed{5}$ Μια λύση είναι :

$$\frac{\ell_{70+0.5}-\ell_{71+0.5}}{\ell_{70}}=\frac{\ell_{70}-0.5(\ell_{70}-\ell_{71})-(\ell_{71}-0.5(\ell_{71}-\ell_{72}))}{\ell_{70}}=$$

$$\frac{0.5\ell_{70}-0.5\ell_{72}}{\ell_{70}}=0.5-0.5\frac{\ell_{72}}{\ell_{70}}=0.5(1-\frac{\ell_{71}}{\ell_{70}}\cdot\frac{\ell_{72}}{\ell_{71}})=0.5(1-p_{70}p_{71})=$$

$$0.5(1-(1-q_{70})(1-q_{71}))=0.5(1-(1-0.025)(1-0.04))=0.032$$

Μια άλλη λύση είναι :

$$_{0.5}p_{70}-{}_{1.5}p_{70}={}_{0.5}p_{70}-p_{70}\cdot{}_{0.5}p_{71}=(1-{}_{0.5}q_{70})-(1-q_{70})(1-{}_{0.5}q_{71})=$$

$$(1-0.5\cdot q_{70})-(1-q_{70})(1-0.5\cdot q_{71})=$$

$$(1-0.5\cdot 0.025)-(1-0.025)(1-0.5\cdot 0.04)=0.032$$

Μια άλλη λύση είναι :

Η πιθανότητα άτομο 70 ετών να γίνει 70+1/2 είναι:

$$_{0.5}p_{70}=1-{}_{0.5}q_{70}=1-0.5\cdot q_{70}=0.9875$$

Η πιθανότητα άτομο 70+1/2 ετών να γίνει 71 είναι:

$$_{0.5}p_{70+0.5}={}_{1-0.5}p_{70+0.5}=1-{}_{1-0.5}q_{70+0.5}=1-\frac{(1-0.5)\cdot q_{70}}{1-0.5\cdot q_{70}}=0.987342$$

Η πιθανότητα άτομο 71 ετών να γίνει 71+1/2 είναι:

$$_{0.5}p_{71}=1-{}_{0.5}q_{71}=1-0.5\cdot q_{71}=0.98$$

Το γινόμενο $({}_{0.5}p_{70+0.5})\cdot({}_{0.5}p_{71})$ δίνει την πιθανότητα άτομο 70+1/2 να γίνει 71+1/2 οπότε η παράσταση ${}_{0.5}p_{70}\cdot(1-({}_{0.5}p_{70+0.5})\cdot({}_{0.5}p_{71}))=$

$$=(1-0.5\cdot q_{70})\cdot\left(1-(1-\frac{0.5\cdot q_{70}}{1-0.5\cdot q_{70}})\cdot(1-0.5\cdot q_{71})\right)$$

Δίνει την πιθανότητα άτομο 70 ετών να γίνει 70+1/2 και να μην γίνει 71+1/2

$$(1-0.5\cdot 0.025)\cdot\left(1-(1-\frac{0.5\cdot 0.025}{1-0.5\cdot 0.025})\cdot(1-0.5\cdot 0.04)\right)=0.032$$

$\boxed{6}$ (i)

$s(0)=1$ $\lim_{x\to\infty}s(x)=0$ $s'(x)=-\frac{1}{4}x^2e^{-\frac{x^3}{12}}<0$ με $x>0$ άρα φθίνουσα

$$\mu_x=-\frac{s'(x)}{s(x)}=\frac{-\frac{1}{4}x^2e^{-\frac{x^3}{12}}}{e^{-\frac{x^3}{12}}}=\frac{1}{4}x^2$$

(ii)

$s(0)=1$ και $s(12)=0$

Η $s(x)$ δεν είναι φθίνουσα στο [0,12] διότι η $s'(x)>0$ σε υποσύνολο του [0,12].

0.306676 και 8.07428 ρίζες της $s'(x)=0$

ΜΑΠ Αναλογιστικά Μαθηματικά

$\boxed{7}$

$s(0)=1$, λύνοντας την $1-0.005\cdot x-0.00005\cdot x^2=0$ είναι $\omega=100$ δηλ. $s(100)=0$
Η $s'(x)=-0.005-0.0001x$ είναι αρνητική για κάθε x>0 άρα φθίνουσα η δοθείσα.
$s(1)=0.99495$, $s(2)=0.98980$, $s(3)=0.98455$
$l_0=100000\cdot s(0)=100000\cdot 1=100000$,
$l_1=100000\cdot s(1)=100000\cdot 0.99495=99495$,
$l_2=100000\cdot s(2)=100000\cdot 0.98980=98980$,
$l_3=100000\cdot s(3)=100000\cdot 0.98455=98455$

x	0	1	2
l_x	100000	99495	98980
d_x	505	515	525
p_x	0.99495	0.994824	0.994696

$\boxed{8}$

$$s(x)=e^{-\int_0^x \mu_x dt}=e^{-\int_0^x \frac{Ac^t}{1+Bc^t}dt}=e^{-\frac{A}{B\ln c}[\ln\frac{1+Bc^x}{1+B}]}=\left(\frac{1+Bc^x}{1+B}\right)^{-\frac{A}{B\ln c}}$$

$\boxed{9}$

$$e^{-\int_0^{10}(\mu_{50+t}+\theta)dt}=e^{-\int_0^{10}(\mu_{50+t}+0.001(10-t))dt}=$$

$$e^{-\int_0^{10}\mu_{50+t}dt}\cdot e^{-\int_0^{10}0.001(10-t)dt}={}_{10}p_{50}\cdot e^{-\int_0^{10}0.001(10-t)dt}=$$

$$\frac{\ell_{60}}{\ell_{50}}\cdot e^{-0.05}=\frac{7593.220}{8703.470}\cdot 0.95122942=$$

$$0.87243594\cdot 0.95122942=0.82988673$$

ΜΑΠ Αναλογιστικά Μαθηματικά

$\boxed{10}$

$${}_{1.75}p_{45.5} = {}_{0.5}p_{45.5} \cdot p_{46} \cdot {}_{0.25}p_{47} =$$
$${}_{1-0.5}p_{45+0.5} \cdot p_{46} \cdot {}_{0.25}p_{47} =$$
$$(1 - {}_{1-0.5}q_{45+0.5}) \cdot (1 - q_{46}) \cdot (1 - {}_{0.25}q_{47}) =$$
$$(1 - \frac{(1-0.5) \cdot q_{45}}{1 - 0.5 \cdot q_{45}}) \cdot (1 - q_{46}) \cdot (1 - 0.25 \cdot q_{47}) =$$
$$\frac{1 - q_{45}}{1 - 0.5 \cdot q_{45}} \cdot (1 - q_{46}) \cdot (1 - 0.25 \cdot q_{47}) = 0.9889706$$

Ή

$$\frac{\ell_{47+1/4}}{\ell_{45+1/2}} = \frac{\ell_{47} - \frac{1}{4}(\ell_{47} - \ell_{48})}{\ell_{45} - \frac{1}{2}(\ell_{45} - \ell_{46})} = \frac{3\ell_{47} + \ell_{48}}{2(\ell_{45} + \ell_{46})} = 0.9889706$$

$\boxed{11}$

$$p^9 = \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x} \cdot \frac{\ell_{x+2}}{\ell_{x+1}} \cdot \frac{\ell_{x+3}}{\ell_{x+2}} \cdot \frac{\ell_{x+4}}{\ell_{x+3}} \cdot \frac{\ell_{x+5}}{\ell_{x+4}} \cdot \frac{\ell_{x+6}}{\ell_{x+5}} \cdot \frac{\ell_{x+7}}{\ell_{x+6}} \cdot \frac{\ell_{x+8}}{\ell_{x+7}} \cdot \frac{\ell_{x+9}}{\ell_{x+8}} \rightarrow$$
$$p^9 = \frac{\ell_{x+9}}{\ell_x} = \frac{1}{8} \rightarrow p^3 = \frac{1}{2} \rightarrow p^6 = \frac{1}{4}$$

$\boxed{12}$

$$\mu_x^{\Pi 2} = 2\mu_x^{\Pi 1} \Rightarrow p_x^{\Pi 2} = e^{-\int_x^{x+1} \mu_x^{\Pi 2} dx} = e^{-2\int_x^{x+1} \mu_x^{\Pi 1} dx} = (p_x^{\Pi 1})^2 \Rightarrow$$
$$1 - q_x^{\Pi 2} = (1 - q_x^{\Pi 1})^2 = 1 - 2q_x^{\Pi 1} + (q_x^{\Pi 1})^2 \Rightarrow$$
$$q_x^{\Pi 2} = 2q_x^{\Pi 1} - (q_x^{\Pi 1})^2 \Rightarrow q_x^{\Pi 2} < 2q_x^{\Pi 1}$$

$\boxed{13}$

$${}_{4/14}q_{50} = \frac{\ell_{54} - \ell_{68}}{\ell_{50}} = \frac{\ell_{54}}{\ell_{50}} - \frac{\ell_{68}}{\ell_{60}} \cdot \frac{\ell_{60}}{\ell_{50}} = {}_4p_{50} - {}_8p_{60} \cdot {}_{10}p_{50}$$
$${}_4p_{50} = e^{-(0.05)\cdot(4)} = 0.818731 \quad , \quad {}_{10}p_{50} = e^{-(0.05)\cdot(10)} = 0.606531$$
$${}_8p_{60} = e^{-(0.04)\cdot(8)} = 0.726149$$
$${}_{18}p_{50} = {}_{10}p_{50} \cdot {}_8p_{60} = 0.606531 \cdot 0.726149 = 0.440432$$
$${}_{4/14}q_{50} = {}_4p_{50} - {}_{18}p_{50} = 0.818731 - 0.440432 = 0.378299$$

ΜΑΠ Αναλογιστικά Μαθηματικά

14

$$s(60)=\frac{e^{-(0.10)\cdot(60)}+e^{-(0.08)\cdot(60)}}{2}=0.00535425$$

$$s(61)=\frac{e^{-(0.10)\cdot(61)}+e^{-(0.08)\cdot(61)}}{2}=0.00491994$$

$$q_{60}=1-\frac{s(61)}{s(60)}=1-\frac{0.00491994}{0.00535425}=0.0811148$$

15

$$s(x)=e^{-\mu x}\quad,\quad {}_{t}p_{x}=e^{-\mu t}$$

16

$$\ell_x=\ell_0\cdot e^{-\int_0^x \mu_\psi d\psi}=\ell_0\cdot\left(\frac{100-x}{(x+1)\cdot 100}\right)^2$$

$$\ell_1-\ell_4=\left(\frac{99}{2}\right)^2-\left(\frac{96}{5}\right)^2\simeq 2082$$

17

Υπόθεση ομοιόμορφης κατανομής θανόντων

$$\ell_{x+1/3}-\ell_{x+1}=\ell_x-\frac{1}{3}(\ell_x-\ell_{x+1})-\ell_{x+1}=\frac{2}{3}(\ell_x-\ell_{x+1})=4620$$

Υπόθεση Balducci

$$\ell_x-\ell_{x+2/3}=\ell_x-\frac{\ell_x\cdot\ell_{x+1}}{\ell_{x+1}+\frac{2}{3}(\ell_x-\ell_{x+1})}=5040$$

18

$$\max\left\{\ell_{x+t}^{(A)}-\ell_{x+t}^{(B)}\right\}=\max\left\{(100-75t)-\frac{100\cdot 25}{25+t\cdot 75}\right\}$$

Με $t=\frac{1}{3}$ έχουμε την μέγιστη τιμή 25

19

$${}_{70}p_0=s(70)=\frac{1}{2},\quad \mu_x=\frac{1}{3}0.8\frac{1}{64-0.8x}\Rightarrow\mu_{70}=\frac{1}{30}$$

ΜΑΠ Αναλογιστικά Μαθηματικά

$\boxed{20}$

$$q_x = 1 - \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x} = 1 - \frac{\ell_0 \cdot e^{\int_0^{x+1} k d\psi}}{\ell_0 \cdot e^{\int_0^{x} k d\psi}} = 1 - e^{\int_x^{x+1} k d\psi} = 1 - e^{-k}$$

$\boxed{21}$

$$A_{x:\overline{n|}}^{\ 1} = \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{\ell_{x+n} \cdot \upsilon^{x+n}}{\ell_x \cdot \upsilon^x} = \frac{\upsilon^{x+n} \cdot \ell_0 \cdot e^{-\int_0^{x+n} \mu_\psi d\psi}}{\upsilon^x \cdot \ell_0 \cdot e^{-\int_0^{x} \mu_\psi d\psi}} = \upsilon^n \cdot e^{-\int_x^{x+n} \mu_\psi d\psi}$$

$$A_{20:\overline{25|}}^{\ 1} = \upsilon^{25} \cdot e^{-\int_{20}^{45} \frac{1}{100-\psi} d\psi} = 0295303 \cdot \frac{11}{16} = 0.203021$$

$$100000 \cdot 0.203021 = 20302.10$$

$\boxed{22}$

$$R \cdot \ddot{a}_{40:\overline{20|}} = 100000 \cdot A^1_{40:\overline{25|}} + 100000 \cdot A_{40:\overline{25|}}^{\ 1}$$

$$R = 100000 \cdot \frac{M_{40} - M_{65} + D_{65}}{N_{40} - N_{60}} = 3042.23$$

$\boxed{23}$

$$R(l_x + l_{x+1}\upsilon + \ldots) = 4000(1+0.0425)^1 \upsilon d_x + 4000(1+0.0425)^2 \upsilon^2 d_{x+1} + \ldots$$

$$R(l_x + l_{x+1}\upsilon + \ldots)\upsilon^x = 4000(d_x + d_{x+1} + \ldots)\upsilon^x$$

$$R(D_x + D_{x+1} + \ldots) = 4000 l_x \upsilon^x$$

$$RN_x = 4000 D_x \Rightarrow R = 4000\frac{D_x}{N_x} = 4000\frac{1}{\ddot{a}_x} = 4000(P_x + d)$$

$$R = 4000(0.01 + \frac{0.0425}{1.0425}) = 203.07$$

$\boxed{24}$

$$P \cdot \ddot{a}_{45:\overline{10|}} = 10000({}_{10}/\ddot{a}_{45}) + P(IA_{45:\overline{10|}}^{\ 1})$$

$$P = 10000\frac{N_{55}}{(N_{45} - N_{55}) - (R_{45} - R_{55} - 10M_{55})}$$

$$P = 10000\frac{10500}{13500 - (8500 - 10 \cdot 500)} = 10500$$

ΜΑΠ Αναλογιστικά Μαθηματικά

$\boxed{25}$

Θα πρέπει να υπολογισθούν οι παρούσες αξίες των δύο τρόπων πληρωμής στην ηλικία του ασφαλισμένου.

$$\alpha)\ 20000\cdot \ddot{a}_x = 20000\frac{N_x}{D_x}$$

$$\beta)\ 10000\cdot \ddot{a}_x + 1100\cdot (Ia)_x = 10000\cdot\frac{N_x}{D_x} + 1100\cdot\frac{S_{x+1}}{D_x}$$

Παρατίθενται τα αριθμητικά αποτελέσματα για δύο διαφορετικές ηλικίες.

Για $x = 50$ έχουμε α) 289510.10 ν.μ. και β) 307766.90 ν.μ.

Για $x = 60$ έχουμε α) 226117.70 ν.μ. και β) 210225.60 ν.μ.

$\boxed{26}$

$$R\cdot \ddot{a}_{40:\overline{10}|} = 20000\frac{D_{50}}{D_{40}} + 10000 A_{\overset{1}{40}:\overline{10}|}$$

$$R = \frac{20000\cdot D_{50} + 10000(M_{40}-M_{50})}{N_{40}-N_{50}} = 1574.55$$

$$R' = \frac{10000\cdot(M_{40} - M_{46}) + 20000\cdot D_{50}}{N_{40} - N_{50} - 7\cdot M_{46} - M_{47} - M_{48} - M_{49} + 10\cdot M_{50}} = 1582.98$$

$\boxed{27}$

$$P\cdot \ddot{a}_{40:\overline{5}|} = P\cdot (IA)_{\overset{1}{40}:\overline{5}|} + 5P\cdot A_{\overset{1}{45}:\overline{3}|} A_{40:\overset{1}{\overline{5}|}} + 12\cdot 10^4\cdot \ddot{a}_{48:\overline{23}|} A_{40:\overset{1}{\overline{8}|}}$$

$$P\cdot\left(\ddot{a}_{40:\overline{5}|} - (IA)_{\overset{1}{40}:\overline{5}|} - 5A_{\overset{1}{45}:\overline{3}|} A_{40:\overset{1}{\overline{5}|}}\right) = 12\cdot 10^4\cdot \ddot{a}_{48:\overline{23}|} A_{40:\overset{1}{\overline{8}|}}$$

$$P\cdot\left(\frac{N_{40}-N_{45}}{D_{40}} - \frac{R_{40}-R_{45}-5M_{45}}{D_{40}} - 5\frac{M_{45}-M_{48}}{D_{45}}\cdot\frac{D_{45}}{D_{40}}\right) = 12\cdot 10^4\,\frac{N_{48}-N_{71}}{D_{48}}\cdot\frac{D_{48}}{D_{40}}$$

$$P\cdot\left(N_{40}-N_{45}-R_{40}+R_{45}+5M_{45}-5M_{45}+5M_{48}\right) = 12\cdot 10^4\left(N_{48}-N_{71}\right)$$

$$P = 12\cdot 10^4\,\frac{N_{48}-N_{71}}{N_{40}-N_{45}-R_{40}+R_{45}+5M_{48}}$$

$$P = 247311.30$$

$\boxed{28}$

Από το d = 0.05 έχουμε υ = 0.95

Από την 1η προσφορά έχουμε την τιμή του p_x

$$608 + 350\cdot\upsilon\cdot p_x = 1000\cdot\upsilon\cdot q_x + 1000\cdot\upsilon^2\cdot p_x\cdot q_{x+1} + 1000\cdot\upsilon^2\cdot p_x\cdot p_{x+1}$$

$$608 + 350\cdot\upsilon\cdot p_x = 1000\cdot\upsilon\cdot q_x + 1000\cdot\upsilon^2 p_x\left(q_{x+1}+p_{x+1}\right)$$

$$608 + 350\cdot 0.95\cdot p_x = 1000\cdot 0.95\cdot q_x + 1000\cdot 0.95^2\cdot p_x \Rightarrow p_x = 0.9$$

Από την 2η προσφορά και εξισώνοντας τις παρούσες αξίες των δύο προσφορών

$$608 + 350\cdot\upsilon\cdot p_x = P + P\cdot\upsilon\cdot p_x \Rightarrow P = \frac{608 + 350\cdot\upsilon\cdot p_x}{1+\upsilon\cdot p_x} = 489.08 \text{ ν.μ.}$$

ΜΑΠ Αναλογιστικά Μαθηματικά

$\boxed{29}$

$$A_{45} = A^{\;1}_{45:\overline{15}|} + A_{45:\overline{15}|}^{\;\;\;\;1} \cdot A_{60}$$

$$_{15}P_{45} = \frac{A_{45}}{\ddot{a}_{45:\overline{15}|}} = \frac{A^{\;1}_{45:\overline{15}|} + A_{45:\overline{15}|}^{\;\;\;\;1} \cdot A_{60}}{\ddot{a}_{45:\overline{15}|}} = P^{1}_{45:\overline{15}|} + P_{45:\overline{15}|}^{\;\;\;\;1} \cdot A_{60} = P^{1}_{45:\overline{15}|} + (P_{45:\overline{15}|} - P^{1}_{45:\overline{15}|}) \cdot A_{60}$$

$$\Rightarrow \;\; 0.038 = P^{1}_{45:\overline{15}|} + (0.056 - P^{1}_{45:\overline{15}|}) \cdot (0.625) \;\; \Rightarrow \;\; P^{1}_{45:\overline{15}|} = 0.008$$

$\boxed{30}$

$$_{m/}q_x = {}_m p_x \cdot q_{x+m} \;,\; A^{\;1}_{30:\overline{3}|} = \upsilon \cdot q_{30} + \upsilon^2 \cdot {}_{1/}q_{30} + \upsilon^3 \cdot {}_{2/}q_{30}$$

$$A^{\;1}_{30:\overline{3}|} = \frac{0.01}{1.04} + \frac{0.99 \times 0.02}{(1.04)^2} + \frac{0.99 \times 0.98 \times 0.03}{(1.04)^3} = 0.053796725$$

$$\ddot{a}_{30:\overline{3}|} = 1 + \frac{0.99}{1.04} + \frac{0.99 \times 0.98}{(1.04)^2} = 2.848927515$$

$$\left(1000 \cdot P^{\;1}_{30:\overline{3}|}\right) = 1000 \frac{A^{\;1}_{30:\overline{3}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{3}|}} = 1000 \cdot \frac{0.053796725}{2.848927515} = 18.88315$$

$$A^{\;1}_{31:\overline{3}|} = \frac{0.02}{1.04} + \frac{0.98 \times 0.03}{(1.04)^2} + \frac{0.98 \times 0.97 \times 0.04}{(1.04)^3} = 0.080215919$$

$$\ddot{a}_{31:\overline{3}|} = 1 + \frac{0.98}{1.04} + \frac{0.98 \times 0.97}{(1.04)^2} = 2.82119 \;,\; \left(1000 \cdot P^{\;1}_{30:\overline{3}|}\right) \cdot \ddot{a}_{31:\overline{3}|} = X \cdot A^{\;1}_{31:\overline{3}|}$$

$$53.272954 = X(0.080215919) \;,\; X = 664$$

$\boxed{31}$

$$\upsilon = 0.90 \Rightarrow d = 0.10 \;,\; A_x = 1 - d \cdot \ddot{a}_x = 1 - (0.10)(5) = 0.5$$

$$K = \frac{5000A_x - 5000 \cdot \upsilon \cdot q_x}{\ddot{a}_x} = \frac{5000 \cdot 0.5 - 5000 \cdot 0.90 \cdot 0.05}{5} = 455$$

$\boxed{32}$

$$1000 \cdot A_{35} + K \cdot (IA)_{35} = K \cdot \ddot{a}_{35}$$

$$K = \frac{1000 \cdot A_{35}}{(\ddot{a}_{35} - (IA)_{35})} = \frac{1000 \cdot 0.42898}{(11.99143 - 6.16761)} = 73.66$$

$\boxed{33}$

$$d = 0.05 \Rightarrow \upsilon = 0.95$$

1^{ος} τρόπος

$$608 + 350 \cdot \upsilon \cdot p_x = 1000 \cdot \upsilon \cdot q_x + 1000 \cdot \upsilon^2 \cdot p_x \cdot q_{x+1} + 1000 \cdot \upsilon^2 \cdot p_x \cdot p_{x+1} =$$
$$1000 \cdot \upsilon \cdot q_x + 1000 \cdot \upsilon^2 \cdot p_x (q_{x+1} + p_{x+1}) = 1000 \cdot \upsilon \cdot (1 - p_x) + 1000 \cdot \upsilon^2 \cdot p_x$$
$$\Rightarrow p_x = 0.90$$

2^{ος} τρόπος

$$608 + 350(0.95)(0.90) = K\left(1 + (0.95)(0.90)\right)$$

$$K = \frac{299.25 + 608}{1.855} = 489.08$$

ΜΑΠ Αναλογιστικά Μαθηματικά

34

$$K=\left(10000\cdot \ddot{a}_{40:\overline{25}|}+2500\frac{S_{41}-S_{65}-24\cdot N_{65}}{D_{40}}\right)\cdot 1.04+0.05\cdot K$$

$$0.95\cdot K=\left(10000\cdot \ddot{a}_{40:\overline{25}|}+2500\frac{S_{41}-S_{65}-24\cdot N_{65}}{D_{40}}\right)\cdot 1.04$$

$$0.95\cdot K=2500\left(\frac{4\cdot(N_{40}-N_{65})+S_{41}-S_{65}-24\cdot N_{65}}{D_{40}}\right)\cdot 1.04$$

$$0.95\cdot K=2600\left(\frac{4\cdot N_{40}+S_{41}-S_{65}-28\cdot N_{65}}{D_{40}}\right)$$

$$K=2736.84\left(\frac{4\cdot N_{40}+S_{41}-S_{65}-28\cdot N_{65}}{D_{40}}\right)$$

$$K=2736.84\left(\frac{4\cdot 30008.399+376943.800-32817.185-28\cdot 4309.990}{1745.622}\right)=538520.$$

35

Με χρήση των στοιχείων της παραπάνω άσκησης 34 και βρίσκοντας την παρούσα αξία της ασφάλισης στην έναρξη αυτής, έχουμε

$$0.95\cdot 538520=\left(10000\ddot{a}_{30:\overline{10}|}+2500\frac{S_{31}-S_{40}-9N_{40}}{D_{30}}\right)1.04+100\frac{D_{40}}{D_{30}}+Y\frac{N_{40}-N_{55}}{D_{30}}1.04$$

$$0.95\cdot 538520=\left(10000\frac{N_{30}-N_{40}}{D_{30}}+2500\frac{S_{31}-S_{40}-9N_{40}}{D_{30}}\right)1.04\ +100\frac{D_{40}}{D_{30}}+Y\frac{N_{40}-N_{55}}{D_{30}}1.04$$

$$Y=45782.30$$

Οπότε το σταθερό ποσό για τα υπόλοιπα έτη της ασφάλισης είναι 45782.30

Μια άλλη λύση είναι να εξισώσουμε αναδρομικό και προοπτικό αποθεματικό στο τέλος του 10^{ου} έτους.

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟ

$$538520\frac{D_{30}}{D_{40}}-\left(10000\frac{N_{30}-N_{40}}{D_{40}}\ +2500\frac{S_{31}-S_{40}-9N_{40}}{D_{40}}\right)1.04-0.05\cdot 538520\frac{D_{30}}{D_{40}}$$

ΠΡΟΟΠΤΙΚΟ

$$100+Y\frac{N_{40}-N_{55}}{D_{40}}1.04$$

Λύνοντας ως προς Υ έχουμε Υ=45782.30

ΜΑΠ Αναλογιστικά Μαθηματικά

36

$$R + R * \frac{D_{82}}{D_{80}} = 1000 * \frac{M_{80}}{D_{80}} + \frac{R}{2} * \frac{M_{80} - M_{81}}{D_{80}} + \frac{R}{2} * \frac{M_{82} - M_{83}}{D_{82}} * \frac{D_{82}}{D_{80}}$$

$$R = 2000 \frac{M_{80}}{2 * D_{80} + 2 * D_{82} - M_{80} + M_{81} - M_{82} + M_{83}}$$

$$R = 2000 \frac{M_{80}}{2 * D_{80} + 2 * D_{82} - C_{80} - C_{82}} = 492.22$$

37

α) Υπενθυμίζονται τα σύμβολα (ή οι συναρτήσεις) μετατροπής.

$$D_x = \ell_x \upsilon^x, \quad N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} \cdots, \quad S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} \cdots$$

$$C_x = d_x \upsilon^{x+1}, \quad M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} \cdots, \quad R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} \cdots$$

Με χρήση της $d_t = \ell_t - \ell_{t+1}$ η $C_t = d_t \upsilon^{t+1}$ μας δίνει $C_t = \upsilon D_t - D_{t+1}$ ή

$$C_t = D_t - D_{t+1} - d\, D_t \quad \text{όπου } d = 1\text{-}\upsilon = i\upsilon$$

$$M_x = \sum_{t=x}^{\infty} C_t = \sum_{t=x}^{\infty} \left(D_t - D_{t+1} - d\, D_t\right) = D_x - d\, N_x$$

$$\frac{M_x}{D_x} = 1 - d\,\frac{N_x}{D_x} \Rightarrow A_x = 1 - d\,\ddot{a}_x$$

β) $P_{28} = \dfrac{M_{28}}{N_{28}}$ αλλά είναι

$$N_{28} = S_{28} - S_{29} = 97, \quad N_{29} = S_{29} - S_{30} = 93$$

$$D_{28} = N_{28} - N_{29} = 4 \Rightarrow M_{28} = D_{28} - d\, N_{28} = 4 - \frac{3}{103} 97$$

$$P_{28} = \frac{M_{28}}{N_{28}} = \frac{4 - \frac{3}{103} 97}{97} = 0.0121109$$

38

Από την $C_t = \upsilon D_t - D_{t+1} \Rightarrow \sum_{t=x}^{x+n-1} C_t = \sum_{t=x}^{x+n-1} (\upsilon D_t - D_{t+1}) = \upsilon \cdot \sum_{t=x}^{x+n-1} D_t - \sum_{t=x}^{x+n-1} D_{t+1} \Rightarrow$

$$M_x - M_{x+n} = \upsilon \cdot (N_x - N_{x+n}) - (N_{x+1} - N_{x+n+1}) \Rightarrow$$

$$\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = \upsilon \cdot \frac{(N_x - N_{x+n})}{D_x} - \frac{(N_{x+1} - N_{x+n+1})}{D_x} \Rightarrow \boxed{A^1_{x:\overline{n}|} = \upsilon \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}}$$

Είναι

Ζητείται το $P^1_{x:\overline{10}|} = \dfrac{A^1_{x:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{10}|}} = \dfrac{\upsilon \cdot \ddot{a}_{x:\overline{10}|} - a_{x:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{10}|}} = \upsilon - \dfrac{a_{x:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{10}|}}$

$$\ddot{a}_{x:\overline{10}|} = a_{x:\overline{9}|} + 1, \quad a_{x:\overline{10}|} = \left(a_{x+1:\overline{9}|} + 1\right) \cdot \upsilon \cdot p_x$$

$$P^1_{x:\overline{10}|} = \upsilon - \frac{\left(a_{x+1:\overline{9}|} + 1\right)}{a_{x:\overline{9}|} + 1} \cdot \upsilon \cdot p_x = 0.97 - \frac{8.5}{8.6} \cdot 0.99 \cdot 0.97 = 0.0208663$$

ΜΑΠ Αναλογιστικά Μαθηματικά

39

$$\upsilon \cdot p_x \cdot \ddot{a}_{x+1} = \upsilon \cdot \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x} \cdot \frac{N_{x+1}}{D_{x+1}} = \upsilon \cdot \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x} \cdot \frac{N_{x+1}}{\upsilon^{x+1} \cdot \ell_{x+1}} = \frac{N_{x+1}}{\upsilon^x \ell_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x} = a_x$$

40

$$A^{1}_{40:\overline{15}|} = \frac{M_{40} - M_{55}}{D_{40}} = \frac{d_{40} \cdot \upsilon^{41} + d_{41} \cdot \upsilon^{42} + \cdots + d_{54} \cdot \upsilon^{55}}{\ell_{40} \cdot \upsilon^{40}}$$

Είναι όμως $d_x = \ell_x - \ell_{x+1} = (100 - x) - (100 - (x+1)) = 1$ οπότε

$$A^{1}_{40:\overline{15}|} = \frac{M_{40} - M_{55}}{D_{40}} = \frac{d_{40} \cdot \upsilon^{41} + d_{41} \cdot \upsilon^{42} + \cdots + d_{54} \cdot \upsilon^{55}}{\ell_{40} \cdot \upsilon^{40}} = \frac{1 \cdot \upsilon^{41} + 1 \cdot \upsilon^{42} + \cdots + 1 \cdot \upsilon^{55}}{\ell_{40} \cdot \upsilon^{40}} \Rightarrow$$

$$A^{1}_{40:\overline{15}|} = \frac{\upsilon^{1} + \upsilon^{2} + \cdots + \upsilon^{15}}{\ell_{40}} = \frac{\dfrac{\upsilon^{15} \cdot \upsilon - \upsilon}{\upsilon - 1}}{\ell_{40}} = \left(\upsilon^{15} - 1\right) \cdot \frac{\upsilon}{\upsilon - 1} \cdot \frac{1}{\ell_{40}} \Rightarrow$$

$$A^{1}_{40:\overline{15}|} = (0.743 - 1)\left(-\frac{1}{0.02}\right)\frac{1}{60} = 0.214154$$

$$10000 \cdot A^{1}_{40:\overline{15}|} = 2141.54$$

41

Ζητείται η τελική αξία $s^{(12)}_{40:\overline{10}|}$ της ληξιπρόθεσμης πρόσκαιρης κλασματικής ράντας $a^{(12)}_{40:\overline{10}|}$.

Είναι

$$s^{(12)}_{40:\overline{10}|} = a^{(12)}_{40:\overline{10}|} \cdot \frac{1}{A_{40:\overline{10}|}^{\;\;1}} \simeq \frac{1}{A_{40:\overline{10}|}^{\;\;1}} \left[a_{40:\overline{10}|} + \frac{12-1}{2 \cdot 12}\left(1 - A_{40:\overline{10}|}^{\;\;1}\right) \right] =$$

$$\frac{1}{A_{40:\overline{10}|}^{\;\;1}} \left[\ddot{a}_{40:\overline{10}|} - 1 + A_{40:\overline{10}|}^{\;\;1} + \frac{12-1}{2 \cdot 12}\left(1 - A_{40:\overline{10}|}^{\;\;1}\right) \right] =$$

$$\frac{\ddot{a}_{40:\overline{10}|}}{A_{40:\overline{10}|}^{\;\;1}} - \frac{13}{24}\left(\frac{1}{A_{40:\overline{10}|}^{\;\;1}} - 1\right) = \frac{8.7}{0.712} - \frac{13}{24}\left(\frac{1}{0.712} - 1\right) = 12$$

ΜΑΠ Αναλογιστικά Μαθηματικά

$\boxed{42}$

Έστω ότι m έτη από την έναρξη της ασφάλισης έχουμε:

$10^5 \cdot m \le K$ και συγχρόνως $10^5 \cdot (m+1) > K$. Τότε θα έχουμε:

$$K = 10^5 a_{50} + K(A_{50} - A_{50+m+1} \cdot A_{50:\overline{1+m|}}^{\;\;1}) - 10^5 \cdot (IA)_{51:\overline{m|}}^{1} \cdot A_{50:\overline{1|}}^{\;\;1} \Rightarrow$$

$$K(1-(A_{50} - A_{50+m+1} \cdot A_{50:\overline{1+m|}}^{\;\;1})) = 10^5(a_{50} - (IA)_{51:\overline{m|}}^{1} \cdot A_{50:\overline{1|}}^{\;\;1}) \Rightarrow$$

$$K = 10^5 \frac{(a_{50} - (IA)_{51:\overline{m|}}^{1} \cdot A_{50:\overline{1|}}^{\;\;1})}{1-(A_{50} - A_{50+m+1} \cdot A_{50:\overline{1+m|}}^{\;\;1})} = 10^5 \frac{(\frac{N_{51}}{D_{50}} - \frac{R_{51} - R_{51+m} - m \cdot M_{51+m}}{D_{50}})}{1-(\frac{M_{50}}{D_{50}} - \frac{M_{50+m+1}}{D_{50}})} =$$

$$K = 10^5 \frac{N_{51} - (R_{51} - R_{51+m} - m \cdot M_{51+m})}{D_{50} - M_{50} + M_{50+m+1}}$$

Το m=13 δίνει 1450556 >(13+1)*10^5 που απορρίπτεται.

Με m=14 έχω K = 1461468,30 που είναι ακριβώς το B.

$\boxed{43}$

$$R \cdot \ddot{a}_{31:\overline{14|}} = 3500 \cdot \ddot{a}_{50} \cdot A_{31:\overline{19|}}^{\;\;1} + 3000 \cdot A_{31}$$

$$R = \frac{3500 \cdot \frac{N_{50}}{D_{50}} \cdot \frac{D_{50}}{D_{31}} + 3000 \cdot \frac{M_{31}}{D_{31}}}{\frac{N_{31} - N_{45}}{D_{31}}} = \frac{3500 \cdot N_{50} + 3000 \cdot M_{31}}{N_{31} - N_{45}} = 2045.41$$

Προοπτικό Αποθεματικό

$$3500 \cdot \ddot{a}_{50} \cdot A_{44:\overline{6|}}^{\;\;1} + 3000 \cdot A_{44} - R =$$

$$3500 \cdot \frac{N_{50}}{D_{44}} + 3000 \cdot \frac{M_{44}}{D_{44}} - \frac{3500 \cdot N_{50} + 3000 \cdot M_{31}}{N_{31} - N_{45}} = 36877.68$$

Αναδρομικό Αποθεματικό

$$R \cdot \frac{N_{31} - N_{44}}{D_{44}} - 3000 \cdot \frac{M_{31} - M_{44}}{D_{44}} = 36877.68$$

ΜΑΠ Αναλογιστικά Μαθηματικά

$\boxed{44}$

$$K = 10000 \cdot {}_{30}/\ddot{a}_{35} + K \cdot A_{\overset{1}{35}:\overline{30}|} \Rightarrow K = 10000 \cdot \frac{{}_{30}/\ddot{a}_{35}}{1 - A_{\overset{1}{35}:\overline{30}|}} \quad \text{Λογω} \quad A_{35:\overline{30}|} = A_{\overset{1}{35}:\overline{30}|} + A_{35:\overset{1}{\overline{30}|}}$$

$$K = 10000 \cdot \frac{{}_{30}/\ddot{a}_{35}}{1 - A_{\overset{1}{35}:\overline{30}|}} = 10000 \cdot \frac{(A_{35:\overline{30}|} - A_{\overset{1}{35}:\overline{30}|}) \cdot \ddot{a}_{65}}{1 - A_{\overset{1}{35}:\overline{30}|}} = 10000 \cdot \ddot{a}_{65} \cdot \frac{A_{35:\overset{1}{\overline{30}|}}}{1 - A_{\overset{1}{35}:\overline{30}|}} = 22659$$

$$\text{Αναδρομικό αποθεματικό} \Rightarrow K \cdot \frac{1}{A_{35:\overset{1}{\overline{5}|}}} - K \cdot A_{\overset{1}{35}:\overline{5}|} \cdot \frac{1}{A_{35:\overset{1}{\overline{5}|}}} = 27954$$

$$\text{Προοπτικό αποθεματικό} \Rightarrow K \cdot A_{\overset{1}{40}:\overline{25}|} + 10000 \cdot \ddot{a}_{65} \cdot A_{40:\overset{1}{\overline{25}|}} = 27954$$

$\boxed{45}$

$$500 + K \cdot \ddot{a}_{30:\overline{25}|} \cdot A_{25:\overset{1}{\overline{5}|}} = 10000 \cdot A_{\overset{1}{25}:\overline{35}|} + 5000 \cdot A_{60} \cdot A_{25:\overset{1}{\overline{35}|}} \rightarrow$$

$$K = \frac{10000 \cdot A_{\overset{1}{25}:\overline{35}|} + 5000 \cdot A_{60} \cdot A_{25:\overset{1}{\overline{35}|}} - 500}{\ddot{a}_{30:\overline{25}|} \cdot A_{25:\overset{1}{\overline{5}|}}} = 63.49$$

$$\text{Αναδρομικό αποθεματικό } 500 \cdot \frac{1}{A_{25:\overset{1}{\overline{4}|}}} - 10000 \cdot A_{\overset{1}{25}:\overline{4}|} \cdot \frac{1}{A_{25:\overset{1}{\overline{4}|}}} =$$

$$500 \cdot \frac{D_{25}}{D_{29}} - 10000 \cdot \frac{M_{25} - M_{29}}{D_{25}} \cdot \frac{D_{25}}{D_{29}} = \frac{500 \cdot D_{25} - 10000 \cdot (M_{25} - M_{29})}{D_{29}} = 524.04$$

$$\text{Προοπτικό αποθεματικό } 10000 \cdot A_{\overset{1}{29}:\overline{31}|} + 5000 \cdot A_{60} \cdot A_{29:\overset{1}{\overline{31}|}} - K \cdot \ddot{a}_{30:\overline{25}|} \cdot A_{29:\overset{1}{\overline{1}|}} = 524.04$$

$\boxed{46}$

Σχέσεις που ισχύουν: $\ddot{a}_{40} = \ddot{a}_{40:\overline{20}|} + \ddot{a}_{60} * A_{40:\overset{1}{\overline{20}|}}$, $A_{40} = A_{\overset{1}{40}:\overline{20}|} + A_{60} * A_{40:\overset{1}{\overline{20}|}}$

Αναδρομικό αποθεματικό για τα 20 αρχικά έτη: ${}_{20}V = P_1 * \ddot{a}_{40:\overline{20}|} * \frac{1}{A_{40:\overset{1}{\overline{20}|}}} - A_{\overset{1}{40}:\overline{20}|} * \frac{1}{A_{40:\overset{1}{\overline{20}|}}}$

Προοπτικό αποθεματικό μετά την αλλαγή: ${}_{20}V = 0.75 * A_{60} - P_1 * \ddot{a}_{60}$

Το παραπάνω σύστημα των 4 εξισώσεων μας δίνει:

$$A_{40:\overset{1}{\overline{20}|}} = \frac{\ddot{a}_{40} - \ddot{a}_{40:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{60}} = 0.357 \, , \; A_{\overset{1}{40}:\overline{20}|} = A_{40} - A_{60} * \frac{\ddot{a}_{40} - \ddot{a}_{40:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{60}} = 0.106$$

$$P_1 = \frac{A_{\overset{1}{40}:\overline{20}|} + \frac{3}{4} A_{60} * A_{40:\overset{1}{\overline{20}|}}}{\ddot{a}_{40}} = 0.0146 \Rightarrow \boxed{{}_{20}V = A_{60} - \frac{A_{40} * \ddot{a}_{60}}{\ddot{a}_{40}} - \frac{1}{4} A_{60} * \frac{\ddot{a}_{40:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{40}} = 0.24}$$

$\boxed{47}$

Μια λύση είναι

Υπολογισμός ετήσιου αρχικού ασφαλίστρου

$$\pi = 10000 \frac{A_{45:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{45:\overline{20}|}} = 10000 \frac{\frac{D_{65} + M_{45} - M_{65}}{D_{45}}}{\frac{N_{45} - N_{65}}{D_{45}}} = 10000 \frac{D_{65} + M_{45} - M_{65}}{N_{45} - N_{65}} = 374.10 \text{ ν.μ.}$$

Συμβολίζοντας με K το ζητούμενο μειωμένο ποσό και εξισώνοντας το προοπτικό αποθεματικό στο τέλος του 15^{ου} έτους πριν και μετά την μεταβολή έχουμε:

$$10000 \, {}_{15}V_{45:\overline{20}|} = 10000 \cdot A_{60:\overline{5}|} - \pi \cdot \ddot{a}_{60:\overline{5}|} = 10000 \cdot A_{\overset{1}{60}:\overline{5}|} + K \cdot A_{60:\overset{1}{\overline{5}|}} \rightarrow K = 7691.13 \text{ ν.μ.}$$

ΜΑΠ Αναλογιστικά Μαθηματικά

$\boxed{48}$

Από τον ορισμό του προοπτικού αποθεματικού είναι

$$ {}_{t}V_{x} = A_{x+t} - P_{x}\ddot{a}_{x+t} = 1 - d\ddot{a}_{x+t} - P_{x}\ddot{a}_{x+t} = 1 - (P_{x} + d)\ddot{a}_{x+t} $$

Ισχύει όμως $P_{x} + d = \dfrac{1}{\ddot{a}_{x}}$ (σχέση 3.45 σελίδα 106) όποτε ${}_{t}V_{x} = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_{x}}$

Με ${}_{t}V_{x} = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_{x}} \Rightarrow {}_{10}V_{35} = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{45}}{\ddot{a}_{35}} = 0.150, \quad {}_{20}V_{35} = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{55}}{\ddot{a}_{35}} = 0.354$

$$ \frac{\dfrac{\ddot{a}_{55}}{\ddot{a}_{35}}}{\dfrac{\ddot{a}_{45}}{\ddot{a}_{35}}} = \frac{0.646}{0.850} = 0.760 = \frac{\ddot{a}_{55}}{\ddot{a}_{45}} \quad \text{και} \quad {}_{10}V_{45} = 1 - \frac{\ddot{a}_{55}}{\ddot{a}_{45}} = 1 - 0.760 = 0.240 $$

$\boxed{49}$

1η

Οικονομική ισοδυναμία στην ηλικία 40

$$ A_{40} = P_{40} \cdot \ddot{a}_{40:\overline{10}|} + P^{*} \cdot \ddot{a}_{50:\overline{10}|} \cdot A_{40:\overline{10}|}^{\;\;1} $$

$$ \frac{M_{40}}{D_{40}} = \frac{M_{40}}{N_{40}} \cdot \frac{N_{40} - N_{50}}{D_{40}} + P^{*} \cdot \frac{N_{50} - N_{60}}{D_{50}} \cdot \frac{D_{50}}{D_{40}} $$

$$ P^{*} = \frac{M_{40} \cdot N_{50}}{N_{40} \cdot (N_{50} - N_{60})} $$

2η

Εξίσωση αποθεματικών στην ηλικία 50

$$ A_{50} - P^{*} \cdot \ddot{a}_{50:\overline{10}|} = P_{40} \cdot \ddot{a}_{40:\overline{10}|} \cdot \frac{1}{A_{40:\overline{10}|}^{\;\;1}} - A_{40:\overline{10}|}^{1} \cdot \frac{1}{A_{40:\overline{10}|}^{\;\;1}} $$

$$ \frac{M_{50}}{D_{50}} - P^{*} \cdot \frac{N_{50} - N_{60}}{D_{50}} = \frac{M_{40}}{N_{40}} \cdot \frac{N_{40} - N_{50}}{D_{40}} \cdot \frac{1}{\dfrac{D_{50}}{D_{40}}} - \frac{M_{40} - M_{50}}{D_{40}} \cdot \frac{1}{\dfrac{D_{50}}{D_{40}}} $$

$$ P^{*} = \frac{M_{40} \cdot N_{50}}{N_{40} \cdot (N_{50} - N_{60})} $$

3η

Εξίσωση αποθεματικών στην ηλικία 60

$$ A_{60} = P_{40} \cdot \ddot{a}_{40:\overline{10}|} \cdot \frac{1}{A_{40:\overline{20}|}^{\;\;1}} + P^{*} \cdot \ddot{a}_{50:\overline{10}|} \cdot \frac{1}{A_{50:\overline{10}|}^{\;\;1}} - A_{40:\overline{20}|}^{1} \cdot \frac{1}{A_{40:\overline{20}|}^{\;\;1}} $$

$$ \frac{M_{60}}{D_{60}} = \frac{M_{40}}{N_{40}} \cdot \frac{N_{40} - N_{50}}{D_{40}} \cdot \frac{1}{\dfrac{D_{60}}{D_{40}}} + P^{*} \cdot \frac{N_{50} - N_{60}}{D_{50}} \cdot \frac{1}{\dfrac{D_{60}}{D_{50}}} - \frac{M_{40} - M_{60}}{D_{60}} $$

$$ P^{*} = \frac{M_{40} \cdot N_{50}}{N_{40} \cdot (N_{50} - N_{60})} $$

ΜΑΠ Αναλογιστικά Μαθηματικά

4η

Οικονομική ισοδυναμία στην ηλικία 50

$$P^* \cdot \ddot{a}_{50:\overline{10}|} = P_{40} \cdot \ddot{a}_{50}$$

$$P^* = \frac{P_{40} \cdot \ddot{a}_{50}}{\ddot{a}_{50:\overline{10}|}} = \frac{M_{40}}{N_{40}} \cdot \frac{\frac{N_{50}}{D_{50}}}{\frac{N_{50} - N_{60}}{D_{50}}} = \frac{M_{40} \cdot N_{50}}{N_{40} \cdot (N_{50} - N_{60})}$$

$\boxed{50}$

$$_nV_x = \left(P_x - P^1_{x:\overline{n}|}\right) \cdot \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{A^{\;1}_{x:\overline{n}|}} = \left(P_x - P^1_{x:\overline{n}|}\right) \cdot \frac{1}{P^{\;1}_{x:\overline{n}|}} \Rightarrow$$

$$0.563 = \frac{\left(0.090 - P^1_{x:\overline{n}|}\right)}{0.00864} \Rightarrow P^1_{x:\overline{n}|} = 0.090 - (0.00864)(0.563) = 0.0851$$

$\boxed{51}$

Έχουμε $i = 0.06$, $p_x = 1 - 0.65 = 0.35$, $p_{x+1} = 1 - 0.85 = 0.15$, $p_{x+2} = 1 - 1.00 = 0$

Θα γίνει χρήση της $_tV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}$ Εδώ χρειάζονται $\ddot{a}_x$, $\ddot{a}_{x+1}$ και $\ddot{a}_{x+2}$

$$\ddot{a}_{x+2} = 1 + \ddot{a}_{x+3} \cdot \frac{D_{x+3}}{D_{x+2}} = 1 + \ddot{a}_{x+3} \cdot \frac{\ell_{x+3}}{\ell_{x+2}} \cdot \upsilon = 1 + \ddot{a}_{x+3} \cdot p_{x+2} \cdot \upsilon = 1 + \ddot{a}_{x+3} \cdot 0 \cdot \upsilon = 1$$

$$\ddot{a}_{x+1} = 1 + \ddot{a}_{x+2} \cdot \frac{D_{x+2}}{D_{x+1}} = 1 + \ddot{a}_{x+2} \cdot \frac{\ell_{x+2}}{\ell_{x+1}} \cdot \upsilon = 1 + \ddot{a}_{x+2} \cdot p_{x+1} \cdot \upsilon = 1 + 1 \cdot 0.15 \frac{1}{1.06} = 1.14151$$

$$\ddot{a}_x = 1 + \ddot{a}_{x+1} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x} = 1 + \ddot{a}_{x+1} \cdot \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x} \cdot \upsilon = 1 + \ddot{a}_{x+1} \cdot p_x \cdot \upsilon = 1 + 1.14151 \cdot 0.35 \frac{1}{1.06} = 1.37691$$

Οπότε από την $_tV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}$ με t=1 έχουμε:

$$_1V_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+1}}{\ddot{a}_x} = 1 - \frac{1.14151}{1.37691} = 0.170965 \simeq 0.171$$

$\boxed{52}$

<u>α)</u>

ΜΑΠ Αναλογιστικά Μαθηματικά

$$P\cdot \ddot{a}_{45:\overline{20}|} = 4000\cdot(\overline{A}^{1}_{45:\overline{20}|} + 1.5\cdot \overline{A}^{1}_{45:\overline{10}|}) =$$

$$4000\cdot\sqrt{1.0425}\cdot(A^{1}_{45:\overline{20}|} + 1.5\cdot A^{1}_{45:\overline{10}|}) \Rightarrow$$

$$P\cdot \ddot{a}_{45:\overline{20}|} = 4000\cdot 1.021\cdot(A^{1}_{45:\overline{20}|} + 1.5\cdot A^{1}_{45:\overline{10}|}) \Rightarrow$$

$$P = 4000\cdot 1.021\cdot\left(\frac{A^{1}_{45:\overline{20}|} + 1.5\cdot A^{1}_{45:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{45:\overline{20}|}}\right) \simeq 81.62$$

β)

$${}_{10}V = 4000\cdot \overline{A}^{1}_{55:\overline{10}|} - P\cdot \ddot{a}_{55:\overline{10}|} = 4000\cdot 1.021\cdot A^{1}_{55:\overline{10}|} - P\cdot \ddot{a}_{55:\overline{10}|} \simeq -26.59$$

γ)
Το αρνητικό ποσό οφείλεται στο ότι η κάλυψη που προσφέρεται στα πρώτα χρόνια της ασφάλισης είναι μεγαλύτερη από ότι το ασφάλιστρο καλύπτει.
Ο ασφαλισμένος έχει <<οφειλή >> ίση με το αρνητικό αποθεματικό.
Εάν λοιπόν κατά την πρώτη 10ετία σταματήσει η πληρωμή ασφάλιστρων, τότε η εταιρεία θα έχει ζημιά που δεν θα μπορεί να αναπληρωθεί.
δ)
Ακολουθούν κάποιες προτάσεις που θα μπορούσαν να αντιμετωπίσουν τη <<ζημιά>> της εταιρείας. Όπως π.χ.
Να επισπευσθεί η πληρωμή των ασφαλίστρων.
Τα ασφάλιστρα των πρώτων ετών να είναι μεγαλύτερα από αυτά των τελευταίων.
Το ποσόν κάλυψης των πρώτων ετών να μην έχει μεγάλη διαφορά από το ποσό κάλυψης των τελευταίων ετών.
Οιαδήποτε άλλη λογική πρόταση θα είναι επίσης δεκτή.

$\boxed{53}$

Θα γίνει χρήση των σχέσεων : $A_x = 1 - d\cdot\ddot{a}_x, \quad {}_nV_x = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_x}$

$$\upsilon = 0.90 \Rightarrow d = 0.10, \qquad A_x = 1 - d\cdot\ddot{a}_x = 1 - (0.10)(5) = 0.5$$

$$\pi\cdot\ddot{a}_x = 5000\cdot A_x - 5000\cdot\upsilon\cdot q_x \quad \Rightarrow \quad \pi = 455$$

$${}_{10}V_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+10}}{\ddot{a}_x} \Rightarrow 0.2 = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+10}}{5} \quad \Rightarrow \quad \ddot{a}_{x+10} = 4$$

$$A_{x+10} = 1 - d\cdot\ddot{a}_{x+10} = 1 - (0.10)\cdot(4) = 0.6$$

$${}_{10}V = 5000\cdot A_{x+10} - \pi\cdot\ddot{a}_{x+10} = 1180$$

$\boxed{54}$

Έστω P το ετήσιο ασφάλιστρο τότε η σχετική εξίσωση ισοδυναμίας είναι:

ΜΑΠΙ Αναλογιστικά Μαθηματικά

$$P\cdot\ddot{a}_{45:\overline{15}|}=10000\cdot A^{1}_{45:\overline{20}|}+20000\cdot A_{45:\overline{20}|}^{\ \ \ \ 1}\Rightarrow$$

$$P\cdot\frac{N_{45}-N_{60}}{D_{45}}=10000\cdot\frac{M_{45}-M_{65}}{D_{45}}+20000\cdot\frac{D_{65}}{D_{45}}\Rightarrow$$

$$P=10000\frac{M_{45}-M_{65}+2\cdot D_{65}}{N_{45}-N_{60}}=741.43$$

Το αποθεματικό ${}_{13}V$ στο τέλος του 13^{ου} έτους είναι:

$${}_{13}V=10000\cdot A^{1}_{58:\overline{7}|}+20000\cdot A_{58:\overline{7}|}^{\ \ \ 1}-P\cdot\ddot{a}_{58:\overline{2}|}\Rightarrow$$

$${}_{13}V=10000\cdot\frac{M_{58}-M_{65}}{D_{58}}+20000\cdot\frac{D_{65}}{D_{58}}-P\cdot\frac{N_{58}-N_{60}}{D_{58}}\Rightarrow$$

$${}_{13}V=10000\cdot\frac{M_{58}-M_{65}}{D_{58}}+20000\cdot\frac{D_{65}}{D_{58}}-P\cdot\frac{N_{58}-N_{60}}{D_{58}}=12507.26$$

Οπότε το «Κεφάλαιο υπό κίνδυνο» ανά ασφαλιστικό συμβόλαιο είναι

$$DSAR=10000-12507.26=-2507.26$$

«Το αναμενόμενο κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο» είναι

$$EDS=199\cdot q_{57}\cdot(-2507.26)=199\cdot 0.0162896\cdot(-2507.26)=-8127.61$$

Το πραγματικό κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο είναι

$$ADS=4\cdot(-2507.26)=\text{-}10029.04$$

Οπότε «κέρδος ή ζημία»=
(αναμενόμενο κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο) −
(πραγματικό κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο)

$$EDS-ADS=-8127.61-(-10029.04)=1901.43$$

Εδώ η εταιρεία έχει «κέρδος» λόγω των περισσοτέρων θανάτων που συνέβησαν από όσους αναμένονταν.

$\boxed{55}$

Έστω P είναι το μηνιαίο ασφάλιστρο, η εξίσωση ισοδυναμίας είναι:

$$12\cdot P\cdot\ddot{a}^{(12)}_{30:\overline{35}|}=300+250\cdot\bar{A}_{30}+48000\cdot\bar{A}_{30}+2000\cdot(I\bar{A})_{30}+$$

$$+\frac{50}{100}\cdot 12P+\left(0.05\cdot 12\cdot P\cdot\ddot{a}^{(12)}_{30:\overline{35}|}-0.05\cdot P\right)\Rightarrow$$

$$12\cdot 0.95\cdot P\cdot\ddot{a}^{(12)}_{30:\overline{35}|}-5.95\cdot P=300+(250+48000)\cdot\bar{A}_{30}+2000\cdot(I\bar{A})_{30}$$

$$\ddot{a}^{(12)}_{30:\overline{35}|}=\ddot{a}_{30:\overline{35}|}-\frac{11}{24}\left(1-\frac{D_{65}}{D_{30}}\right)=17.73325-\frac{11}{24}\left(1-\frac{445.529}{2716.836}\right)=$$

$$17.73325-\frac{11}{24}(1-0.1643563)=17.73325-0.3830034=17.35025$$

$$\bar{A}_{30}=(1.0425)^{1/2}\cdot A_{30}=1.02103\cdot 0.21239=0.216855$$

$$(I\bar{A})_{30}=(1.0425)^{1/2}\cdot(IA)_{30}=1.02103\cdot 6.977255=7.12398$$

Οπότε

MAI Αναλογιστικά Μαθηματικά

$$12 \cdot 0.95 \cdot \mathrm{P} \cdot 17.35025 - 5.95 \cdot \mathrm{P} =$$

$$300 + \left(250 + 48000\right) \cdot 0.216855 + 2000 \cdot 7.12398 \Rightarrow \boxed{\mathrm{P} = 130.373}$$

56

Έστω P' είναι το μηνιαίο ασφάλιστρο.
Παρακάτω το πρώτο μέλος της ισοδυναμίας είναι το ίδιο με το παραπάνω μόνο που στη θέση του P είναι το P'.

$$12 \cdot 0.95 \cdot \mathrm{P}' \cdot \ddot{a}^{(12)}_{30:\overline{35}|} - 5.95 \cdot \mathrm{P}' = 300 + 250 \cdot \bar{A}_{30} +$$

$$50000 \cdot \sqrt{1+i}\left(\upsilon \cdot q_x + \upsilon^2 p_x \cdot q_{x+1} \cdot (1+i) + \upsilon^3 {}_2p_x \cdot q_{x+2} \cdot (1+i)^2 + \cdots\right) =$$

$$300 + 250 \cdot \bar{A}_{30} +$$

$$50000 \cdot \upsilon \cdot \sqrt{1+i}\left(q_x + \upsilon^1 p_x \cdot q_{x+1} \cdot (1+i) + \upsilon^2 {}_2p_x \cdot q_{x+2} \cdot (1+i)^2 + \cdots\right) =$$

$$300 + 250 \cdot \bar{A}_{30} + 50000 \cdot \upsilon^{0.5}\left(q_x + p_x \cdot q_{x+1} + {}_2 p_x \cdot q_{x+2} + \cdots\right) =$$

$$300 + 250 \cdot \bar{A}_{30} +$$

$$50000 \cdot \upsilon^{0.5}\left(\frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x} + \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x} \cdot \frac{\ell_{x+1} - \ell_{x+2}}{\ell_{x+1}} + \frac{\ell_{x+2}}{\ell_x} \cdot \frac{\ell_{x+2} - \ell_{x+3}}{\ell_{x+2}} + \cdots\right) =$$

$$300 + 250 \cdot \bar{A}_{30} + 50000 \cdot \upsilon^{0.5}\left(1\right) = 300 + 250 \cdot \sqrt{1+i} \cdot A_{30} + \frac{50000}{\sqrt{1+i}} =$$

$$300 + 54.2137 + 48970.20 \Rightarrow$$

$$12 \cdot 0.95 \cdot \mathrm{P}' \cdot 17.35025 - 5.95 \cdot \mathrm{P}' = 49324.40 \Rightarrow \boxed{\mathrm{P}' \simeq 257.11}$$

57

Η οικονομική ισοδυναμία στην έναρξη της ασφάλισης είναι :

$$12 \cdot \mathrm{P} \cdot \ddot{a}^{(12)}_{35:\overline{30}|} = \left(245000 + 300\right) \cdot A_{35:\overline{30}|} + 5000 \cdot \left(IA\right)^{1}_{35:\overline{30}|} +$$

$$(155000 - 150) \cdot A_{35:\overline{30}|}^{\;\;\;\;1} + 0.03 \cdot 12\mathrm{P} \cdot \ddot{a}^{(12)}_{35:\overline{30}|} - 0.03 \cdot \mathrm{P} + 250 + 0.5 \cdot 12 \cdot \mathrm{P}$$

Η επίλυση της εξίσωσης δίνει $\mathrm{P} \simeq 694.80$

Μια εντελώς παραπλήσια παρουσίαση με το ίδιο αποτέλεσμα $\mathrm{P} \simeq 694.80$ είναι:

$$12 \cdot \mathrm{P} \cdot \ddot{a}^{(12)}_{35:\overline{30}|} = 250000 \cdot A_{35:\overline{30}|} + 5000 \cdot \left(IA\right)^{1}_{36:\overline{29}|} \cdot A_{35:\overline{1}|}^{\;\;\;\;1} + 300 \cdot A^{1}_{35:\overline{30}|} +$$

$$150000 \cdot A_{35:\overline{30}|}^{\;\;\;\;1} + 150 \cdot A_{35:\overline{30}|}^{\;\;\;\;1} + 0.03 \cdot 12\mathrm{P} \cdot \ddot{a}^{(12)}_{35:\overline{30}|} - 0.03 \cdot \mathrm{P} + 250 + 0.5 \cdot 12 \cdot \mathrm{P}$$

58

Έστω P το ετήσιο ασφάλιστρο τότε η σχετική εξίσωση ισοδυναμίας είναι:

ΜΑΠ Αναλογιστικά Μαθηματικά

$$P \cdot \ddot{a}_{45:\overline{15}|} = 10000 \cdot A^{1}_{45:\overline{20}|} + 20000 \cdot A_{45:\overline{20}|}^{\quad 1} \Rightarrow$$

$$P \cdot \frac{N_{45} - N_{60}}{D_{45}} = 10000 \cdot \frac{M_{45} - M_{65}}{D_{45}} + 20000 \cdot \frac{D_{65}}{D_{45}} \Rightarrow$$

$$P = 10000 \frac{M_{45} - M_{65} + 2 \cdot D_{65}}{N_{45} - N_{60}} = 741.43$$

Το αποθεματικό ${}_{13}V$ στο τέλος του 13ου έτους είναι:

$${}_{13}V = 10000 \cdot A^{1}_{58:\overline{7}|} + 20000 \cdot A_{58:\overline{7}|}^{\quad 1} - P \cdot \ddot{a}_{58:\overline{2}|} \Rightarrow$$

$${}_{13}V = 10000 \cdot \frac{M_{58} - M_{65}}{D_{58}} + 20000 \cdot \frac{D_{65}}{D_{58}} - P \cdot \frac{N_{58} - N_{60}}{D_{58}} \Rightarrow$$

$${}_{13}V = 10000 \cdot \frac{M_{58} - M_{65}}{D_{58}} + 20000 \cdot \frac{D_{65}}{D_{58}} - P \cdot \frac{N_{58} - N_{60}}{D_{58}} = 12507.26$$

Οπότε το «Κεφάλαιο υπό κίνδυνο» ανά ασφαλιστικό συμβόλαιο είναι

$$DSAR = 10000 - 12507.26 = -2507.26$$

«Το αναμενόμενο κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο» είναι

$$EDS = 199 \cdot q_{57} \cdot (-2507.26) = 199 \cdot 0.0162896 \cdot (-2507.26) = -8127.61$$

Το πραγματικό κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο είναι

$$ADS = 4 \cdot (-2507.26) = -10029.04$$

Οπότε «κέρδος ή ζημία»=
(αναμενόμενο κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο) –
(πραγματικό κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο)

$$EDS - ADS = -8127.61 - (-10029.04) = 1901.43$$

Εδώ η εταιρεία έχει «κέρδος» λόγω των περισσοτέρων θανάτων που συνέβησαν από όσους αναμένονταν.

$\boxed{59}$

$$P \cdot \ddot{a}_{30:\overline{20}|} = 75000 \cdot A_{30:\overline{25}|}^{\quad 1} \Rightarrow$$

$$P = 75000 \cdot \frac{A_{30:\overline{25}|}^{\quad 1}}{\ddot{a}_{30:\overline{20}|}} = 75000 \cdot \frac{\frac{M_{30} - M_{55}}{D_{30}}}{\frac{N_{30} - N_{50}}{D_{30}}} = 75000 \cdot \frac{M_{30} - M_{55}}{N_{30} - N_{50}}$$

$$P = 75000 \cdot \frac{577.024 - 395.279}{52488.327 - 15722.552} = 75000 \cdot \frac{181.746}{36765.776} = 370.751$$

$$\boxed{P = 370.751}$$

Το αποθεματικό ανά ασφαλισμένο στο τέλος του 20ου έτους

ΜΑΠ Αναλογιστικά Μαθηματικά

$${}_{20}V = 75000 \cdot A^{\;1}_{50:\overline{5}|} - 0 = 75000 \cdot \frac{M_{50} - M_{55}}{D_{50}} = \boxed{3445.80}$$

Το αποθεματικό ανά ασφαλισμένο στο τέλος του 19^{ου} έτους

$${}_{19}V = 75000 \cdot A^{\;1}_{49:\overline{6}|} - P = 75000 \cdot \frac{M_{49} - M_{55}}{D_{49}} - 370.751 = \boxed{3498.50}$$

«Κεφάλαιο υπό κίνδυνο»

$$75000 - 3445.80 = 71554.20$$

«Αναμενόμενο κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο»

$$EDS = 738 \cdot q_{49} \cdot 71554.20 \simeq 433862.30$$

«Πραγματικό κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο»

$$ADS = 2 \cdot 71554.20 = 143108.40$$

$EDS - ADS = 433862.30 - 143108.40 = 290753.90$ δηλ. «κέρδος»

$\boxed{60}$

$$P \cdot \ddot{a}_{40:\overline{20}|} = 1000 \cdot A^{\;1}_{40:\overline{20}|} + 2000 \cdot A_{40:\overline{20}|}^{\quad\;\; 1} + 50(IA)^{\;1}_{40:\overline{20}|} \Rightarrow$$

$$P \cdot \frac{N_{40} - N_{60}}{D_{40}} = 1000 \frac{M_{40} - M_{60}}{D_{40}} + 2000 \frac{D_{60}}{D_{40}} + 50 \frac{R_{40} - R_{60} - 20 \cdot M_{60}}{D_{40}} \Rightarrow$$

$$P = \frac{1000(M_{40} - M_{60}) + 2000 \cdot D_{60} + 50(R_{40} - R_{60} - 20 \cdot M_{60})}{N_{40} - N_{60}} = 67.25$$

Το σταθερό ασφάλιστρο που θα πληρώνει είναι 67.25 ν.μ.
Το αναδρομικό αποθεματικό στο τέλος του 5^{ου} έτους είναι:

$${}_{5}V = 67.25 \cdot \frac{N_{40} - N_{45}}{D_{45}} - 1000 \cdot \frac{M_{40} - M_{45}}{D_{45}} - 50 \cdot \frac{R_{40} - R_{45} - 5 \cdot M_{45}}{D_{45}} = 358.17$$

Αν S είναι το ζητούμενο σταθερό ασφαλισμένο ποσό θα έχουμε:

$$S \cdot A_{45:\overline{15}|} - P \cdot \ddot{a}_{45:\overline{15}|} = 358.17 \Rightarrow S = \frac{358.17 + 67.25 \cdot \ddot{a}_{45:\overline{15}|}}{A_{45:\overline{15}|}} = 1938.05$$

$\boxed{61}$

Έστω ότι το ασφαλισμένο ποσό είναι S θα έχουμε:

$$P \cdot \ddot{a}_{30:\overline{30}|} = S \cdot A_{30} \;\Rightarrow\; P = S \frac{A_{30}}{\ddot{a}_{30:\overline{30}|}} = S \frac{M_{30}}{N_{30} - N_{60}} =$$

$$S \frac{577.024}{52488.327 - 7065.889} = 0.01270351 \cdot S$$

Το αποθεματικό στο τέλος του 5^{ου} έτους είναι:

ΜΑΠ Αναλογιστικά Μαθηματικά

$$ {}_5V = P\cdot \ddot{a}_{30:\overline{5}|} \cdot A_{30:\overline{5}|}^{\,1} - S\cdot A_{30:\overline{5}|}^{\,1} \cdot A_{30:\overline{5}|}^{\,1} = S\cdot \frac{M_{30}}{N_{30}-N_{60}}\cdot\frac{N_{30}-N_{35}}{D_{35}} - S\cdot\frac{M_{30}-M_{35}}{D_{35}} \Rightarrow $$

$$ {}_5V = S\left(\frac{M_{30}}{N_{30}-N_{60}}\cdot\frac{N_{30}-N_{35}}{D_{35}} - \frac{M_{30}-M_{35}}{D_{35}}\right) = 0.061031\cdot S $$

Οπότε

$$ S\cdot A_{35:\overline{n}|}^{\,1} = 0.061031\cdot S \quad\Rightarrow\quad A_{35:\overline{n}|}^{\,1} = 0.061031 \quad\Rightarrow $$

$$ \frac{M_{35}-M_{35+n}}{D_{35}} = 0.061031 \Rightarrow M_{35+n} = 418.56 $$

Είναι $M_{35+17} = 426.221$, $M_{35+n} = 418.56$, $M_{35+18} = 416.245$

$M_{35+17} - M_{35+18} = 9.976 \qquad M_{35+17} - M_{35+n} = 7.66$

$$ \frac{7.66}{9.976} = 0.7678 $$

Οπότε η διάρκεια κάλυψης θα είναι προσεγγιστικά 17 έτη 9 μήνες και 6 ημέρες.

ΜΑΠ Αναλογιστικά Μαθηματικά