

Πρόβλημα 1. (15 μονάδες)

(i) (10 μονάδες) Θεωρήστε το παρακάτω γραμμικό πρόγραμμα.

$$\begin{array}{ll}\max. & 8x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.:} & \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & 5x_1 + 7x_2 \leq 60 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

Αποδείξτε, ότι ο περιορισμός $5x_1 + 7x_2 \leq 60$ συνεπάγεται από τους υπόλοιπους περιορισμούς του γραμμικού προγράμματος, και συνεπώς είναι περιττός.

(ii) (5 μονάδες) Είναι φραγμένη η εφικτή περιοχή του γραμμικού προγράμματος; Απαντήστε χωρίς να σχεδιάσετε την εφικτή περιοχή.

Πρόβλημα 2. (22 μονάδες)

(i) (12 μονάδες) Έστω ότι έχετε γράψει ένα ακέραιο πρόγραμμα για κάποιο πρόβλημα βελτιστοποίησης, στο οποίο έχετε χρησιμοποιήσει 5 ακέραιες μεταβλητές, συγκεκριμένα τις $x_1, x_2, \dots, x_5$, με $x_i \in \{0, 1\}$ για κάθε $i = 1, \dots, 5$. Περιγράψτε πώς θα προσθέτατε έναν γραμμικό περιορισμό στο ακέραιο πρόγραμμά σας για να επιβάλετε κάθεμία από τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Το πολύ μία από τις μεταβλητές x_1, x_2 να ισούται με 1.
2. Μεταξύ των μεταβλητών x_3, x_4 ακριβώς μία να ισούται με 1.
3. Αν σε μια εφικτή λύση έχουμε $x_4 = 1$, τότε και η x_5 να είναι επίσης ίση με 1.
4. Το πολύ 3 μεταβλητές να ισούνται με 1.

(ii) (10 μονάδες) Να διατυπώσετε ένα ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα για το παρακάτω πρόβλημα.

Ένας παραγωγός ταινιών αναζητά ηθοποιούς και επενδυτές για τη νέα του ταινία. Υπάρχουν n διαθέσιμοι ηθοποιοί από τους οποίους καλείται να διαλέξει ένα υποσύνολο για να συμμετέχουν. Υπάρχουν επίσης m διαθέσιμοι επενδυτές. Ο κάθε ηθοποιός i χρεώνει συνολικά v_i ευρώ για την συμμετοχή του στην ταινία. Ο κάθε επενδυτής j , για $j = 1, \dots, m$,

δηλώνει ένα προτεινόμενο σύνολο ηθοποιών $L_j \subseteq \{1, \dots, n\}$, και είναι διατεθειμένος να πληρώσει p_j ευρώ αλλά μόνο υπό την προϋπόθεση ότι όλοι οι ηθοποιοί του συνόλου L_j θα συμπεριληφθούν στο cast της ταινίας.

Ο παραγωγός εν τέλει πρέπει να αποφασίσει ποιους ηθοποιούς θα διαλέξει και ποιοι επενδυτές θα τον πληρώσουν ώστε να μεγιστοποιήσει το όφελος του, το οποίο ισούται με τα λεφτά που θα λάβει από τους επενδυτές που δέχτηκαν να χρηματοδοτήσουν την ταινία μείον τις πληρωμές που θα δώσει στους ηθοποιούς.

Πρόβλημα 3. (18 μονάδες)

Στις διαλέξεις αναφέρθηκε σύντομα το πρόβλημα BIN-PACKING (Ενότητα 11), που μπορεί να οριστεί ως εξής: Δίνονται n αντικείμενα με θετικά βάρη w_i , με $0 < w_i \leq 1$, για κάθε $i = 1, \dots, n$. Ο στόχος είναι να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός κάδων χωρητικότητας 1, στους οποίους μπορούν να τοποθετηθούν τα αντικείμενα (κάθε αντικείμενο πρέπει να τοποθετηθεί σε έναν κάδο, δεν μπορούν να σπάσουν τα αντικείμενα σε μικρότερα κομμάτια). Θεωρήστε τώρα τον αλγόριθμο Next-Fit που είναι μια παραλλαγή του αλγορίθμου των διαφανειών.

Next-Fit

$m = 1$; (αριθμός κάδων);

Θεωρήστε την διάταξη των ακτικειμένων από το 1 ως το n ;

For $i = 1$ to n do

 Αν το αντικείμενο i χωράει στον κάδο m :

 Τοποθέτησε το αντικείμενο αυτό στον κάδο m .

 Αλλιώς

 { $m = m + 1$; (άνοιξε ένα νέο κάδο)

 τοποθέτησε το αντικείμενο i στο νέο κάδο }

Return m ; (πλήθος κάδων που χρησιμοποιήσαμε)

(i) (12 μονάδες) Αποδείξτε ότι ο αλγόριθμος αυτός έχει λόγο προσέγγισης 2, δηλαδή, αν OPT είναι ο ελάχιστος αριθμός κάδων στους οποίους χωράνε τα αντικείμενα, τότε $\frac{m}{OPT} \leq 2$.

Hints: Σκεφτείτε πρώτα ένα εύλογο κάτω φράγμα για την βέλτιστη λύση. Στη συνέχεια, αν m είναι ο αριθμός των κάδων που χρησιμοποίησε ο αλγόριθμος, αποδείξτε την εξής ιδιότητα: αν χωρίσουμε τους κάδους σε δυάδες (εκτός ίσως από τον τελευταίο), δηλαδή κοιτάζοντας τον 1ο και 2ο μαζί, τον 3ο και 4ο μαζί, κ.ο.κ. τότε το άθροισμα των βαρών από τα αντικείμενα που τοποθετεί ο αλγόριθμος σε κάθε δυάδα υπερβαίνει το 1. Τέλος σκεφτείτε πώς θα χρησιμοποιήσετε τις παραπάνω ιδιότητες για να αποδειχτεί το ζητούμενο (για αρχή είναι λίγο πιο απλό να δείξετε ότι $m \leq 2OPT + 1$).

(ii) (6 μονάδες) Δείξτε ένα παράδειγμα, με τουλάχιστον 5 αντικείμενα, στο οποίο ο παραπάνω αλγόριθμος δεν παράγει την βέλτιστη λύση.

Πρόβλημα 4. (18 μονάδες) Έστω ένας κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E)$. Θέλουμε να διαλέξουμε ένα υποσύνολο των ακμών $E' \subseteq E$, με μέγιστο πλήθος (στόχος μας δηλαδή

είναι να μεγιστοποιήσουμε τον αριθμό των ακμών που θα ανήκουν στο E'), έτσι ώστε ο γράφος $G' = (V, E')$, που περιέχει μόνο τις ακμές του E' , να μην έχει κατευθυνόμενους κύκλους.

(i) (12 μονάδες) Σχεδιάστε ένα πολυωνυμικό προσεγγιστικό αλγόριθμο με λόγο προσέγγισης ίσο με $1/2$.

Hint: Ονομάστε τις κορυφές του γράφου από 1 ως n , με αυθαίρετο τρόπο. Λέμε ότι μια ακμή του γράφου είναι *forward-going* αν είναι της μορφής (i, j) με $i < j$. Σε διαφορετική περίπτωση λέμε ότι είναι *backward-going*. Σκεφτείτε πώς θα εκμεταλλευτείτε αυτό τον ορισμό για τον σχεδιασμό του αλγορίθμου.

(ii) (6 μονάδες) Βρείτε ένα tight example για τον αλγόριθμό σας, δηλαδή ένα παράδειγμα ενός γράφου με κύκλους όπου ο αλγόριθμος επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης ίσο με $1/2$ ή τείνει ασυμπτωτικά στο $1/2$ (αν σας δυσκολεύει, προκειμένου να πάρετε κάποιες μονάδες, προσπαθήστε να βρείτε τουλάχιστον ένα παράδειγμα όπου ο αλγόριθμος δεν βρίσκει την βέλτιστη λύση).

Πρόβλημα 5. (17 μονάδες)

Έστω ένας μη κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E)$, με $|V| = n$, για τον οποίο γνωρίζουμε ότι περιέχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι μήκους k ακμών, για κάποια δοσμένη παράμετρο k .

Θεωρούμε την εξής πιθανοτική διαδικασία: επιλέγουμε μία τυχαία διάταξη των n κόμβων του G (όλες οι διατάξεις θεωρούνται ισοπίθανες), και αφού τοποθετήσουμε τους κόμβους από τα αριστερά προς τα δεξιά με βάση την διάταξη, προσθέτουμε όλες τις ακμές του γράφου G και τους δίνουμε κατεύθυνση από αριστερά προς τα δεξιά. Προκύπτει έτσι ένας κατευθυνόμενος άκυκλος γράφος (Directed Acyclic Graph) που θα συμβολίζουμε με G' .

(i) (8 μονάδες) Αποδείξτε ότι η πιθανότητα ο G' να έχει (κατευθυνόμενο) μονοπάτι μήκους k ακμών είναι τουλάχιστον $p = \frac{2}{(k+1)!}$.

(ii) (9 μονάδες) Έστω ο παρακάτω αλγόριθμος:

RANDOM(G);

Επανάλαβε $t = 1/p$ φορές

{ Κατασκεύασε τον G' (ανεξάρτητα κάθε φορά, με χρήση νέας τυχαίας διάταξης)
Βρες το μέγιστο μονοπάτι στον G' }

Επέστρεψε το μέγιστο από τα μονοπάτια που βρέθηκαν

Αποδείξτε ότι ο αλγόριθμος αυτός βρίσκει ένα μονοπάτι με μήκος τουλάχιστον k ακμές στον G' με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - 1/e$.

Hint: Θα σας χρειαστεί η ανισότητα $1 + x \leq e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 6. (10 μονάδες) Κατασκευάστε ένα tight example για τον αλγόριθμο που χρησιμοποιεί LP-rounding για το πρόβλημα Weighted Vertex Cover, που είδαμε στο μάθημα. Θα πρέπει δηλαδή να φτιάξετε ένα παράδειγμα όπου ο εν λόγω αλγόριθμος επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης ίσο με 2. **Hint:** Υπάρχουν τέτοια παραδείγματα με μικρό αριθμό κορυφών.