ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
Ειδικά Θέματα Αλγορίθμων
Διδάσκων: Ε. Μαρκάκης, Φθινοπωρινό εξάμηνο 2024

2η σειρά ασκήσεων **Προθεσμία παράδοσης: 19/1/2025**

Πρόβλημα 1. (16 μονάδες) Θεωρήστε τους παρακάτω περιορισμούς ενός γραμμικού προγράμματος.

$$
\begin{aligned}
-x_1 \;+\; 3x_2 \;&\leq 30 \\
-3x_1 \;+\; x_2 \;&\leq 30 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

(i) (6 μονάδες) Να σχεδιάσετε την εφικτή περιοχή και να αποφασίσετε αν είναι φραγμένη ή μη φραγμένη.

(ii) (10 μονάδες) Έστω ότι η αντικειμενική συνάρτηση που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε είναι η $f(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}x_1 - x_2$. Χρησιμοποιήστε την γραφική μέθοδο για να αποφασίσετε αν το γραμμικό πρόγραμμα έχει βέλτιστη λύση. (**Tip**: Για την καλύτερη επίδειξη της μεθόδου, ξεκινήστε με την τιμή $Z = -30$ ή κάποια άλλη κοντινή τιμή και χρησιμοποιήστε τουλάχιστον άλλες 2 τιμές).

Πρόβλημα 2. (15 μονάδες)

(i) (8 μονάδες) Έστω ότι έχετε γράψει ένα ακέραιο πρόγραμμα για κάποιο πρόβλημα βελτιστοποίησης, στο οποίο έχετε χρησιμοποιήσει 5 ακέραιες μεταβλητές, συγκεκριμένα τις $x_1, x_2, \ldots, x_5$, με $x_i \in \{0, 1\}$ για κάθε $i = 1, \ldots, 5$. Περιγράψτε πώς θα προσθέτατε έναν γραμμικό περιορισμό στο ακέραιο πρόγραμμά σας για να επιβάλετε κάθεμια από τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Το πολύ μιά από τις μεταβλητές x_1, x_2 να ισούται με 1.
2. Μεταξύ των μεταβλητών x_3, x_4 ακριβώς μία να ισούται με 1.
3. Αν σε μια εφικτή λύση έχουμε $x_4 = 1$, τότε και η x_5 να είναι επίσης ίση με 1.
4. Το πολύ 3 μεταβλητές να ισούνται με 1.

(ii) (7 μονάδες) Έστω ένας μη κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E)$ με θετικά βάρη στις ακμές του. Διατυπώστε ως ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα το εξής πρόβλημα: Θέλουμε να διαλέξουμε ένα σύνολο από ακμές με το ελάχιστο δυνατό βάρος έτσι ώστε για κάθε κορυφή v του γράφου να υπάρχει τουλάχιστον μια ακμή από αυτές που διαλέξαμε που να ξεκινάει από την v.

Πρόβλημα 3. (16 μονάδες) Θεωρήστε την εξής ειδική περίπτωση του προβλήματος Weighted Vertex Cover, όπου το βάρος κάθε κορυφής $v \in V$, δίνεται από την σχέση

$w(v) = c \cdot d(v)$, με $d(v)$ τον βαθμό της κορυφής v (δηλαδή ο αριθμός των γειτόνων της) και c είναι μια θετική σταθερά. Να δείξετε ότι οποιοσδήποτε αλγόριθμος που επιστρέφει πάντα ένα έγκυρο vertex cover, επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης ίσο με το πολύ 2 για αυτή την περίπτωση.

Βρείτε και ενα tight example για την επίδοση του αλγορίθμου.

Πρόβλημα 4. (24 μονάδες) Η ερώτηση αυτή αφορά το εξής πρόβλημα:
ΜΕΓΙΣΤΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ: Δίνεται γράφος $G = (V, E)$, με $n = |V|$ κόμβους. Ζητείται να βρεθεί το μέγιστο σε πληθικό αριθμό υποσύνολο κόμβων που είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους, δηλαδή ένα υποσύνολο $S \subseteq V$, τέτοιο ώστε για κάθε ζευγάρι κόμβων $u, v \in S$ ισχύει ότι $(u, v) \notin E$ και ο πληθικός αριθμός $|S|$ είναι ο μέγιστος δυνατός.

Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ότι είναι NP-complete. Ένας αλγόριθμος που μπορεί να εφαρμοστεί είναι μια απλή παραλλαγή του Greedy-best-node που είχαμε δει για το VERTEX COVER, η οποία περιγράφεται παρακάτω.

GREEDY(G);
$S = \emptyset$;
While $V \neq \emptyset$ do
{ Let v be a node of minimum degree in G;
$S = S \cup v$;
Remove v and its neighbors from G }
Return S;

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο αυτό, όπως φαίνεται παραπάνω, ξεκινάμε με αρχική λύση το κενό σύνολο, $S = \emptyset$. Στη συνέχεια επιλέγουμε τον κόμβο με τον ελάχιστο βαθμό, τον προσθέτουμε στο S, και αφαιρούμε από τον γράφο μας τον κόμβο αυτό μαζί με τους γείτονές του. Αν υπάρχουν ισοβαθμίες, ο αλγόριθμος επιλέγει αυθαίρετα έναν από τους κόμβους με τον ελάχιστο βαθμό. Συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο μέχρι να μην υπάρχει άλλη κορυφή στο γράφημά μας.

(i) (10 μονάδες) Αν S είναι το σύνολο κορυφών που επιστρέφει ο αλγόριθμος, εξηγήστε γιατί είναι ανεξάρτητο σύνολο. Επίσης να δείξετε ότι $|V \setminus S| \leq \Delta \cdot |S|$, όπου Δ είναι ο μέγιστος βαθμός στο γράφημα ($\Delta = \max_{u \in V} d_u$, αν συμβολίσουμε με d_u τον βαθμό της κορυφής u).

(ii) (7 μονάδες) Αποδείξτε ότι ο αλγόριθμος επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης, τουλάχιστον ίσο με $1/(\Delta + 1)$.

(iii) (7 μονάδες) Εξηγήστε τι λόγο προσέγγισης επιτυγχάνει ο αλγόριθμος στο εξής μη κατευθυνόμενο γραφημα $G = (V, E)$: Ο γράφος έχει $2m + 1$ κορυφές, συγκεκριμένα $V = \{x\} \cup \{v_1, ..., v_m\} \cup T$, όπου το T είναι ένα σύνολο m κορυφών. Η κορυφή x συνδέεται με τις κορυφές $v_1, ..., v_m$. Οι κορυφές του T συνδέονται όλες μεταξύ τους, δηλαδή το T είναι μια κλίκα m κορυφών. Επίσης, κάθε κορυφή v_i, για $i = 1, ..., m$, συνδέεται εκτός από την x και με όλες τις κορυφές του T.

Πρόβλημα 5. (17 μονάδες)

Παραμένοντας τώρα στο πρόβλημα της εύρεσης του μέγιστου ανεξάρτητου υποσυνόλου, θεωρήστε τον εξής τυχαιοποιημένο αλγόριθμο για ένα γράφο $G = (V, E)$:

RANDOM(G);
Choose a permutation π of V uniformly at random;
Construct a subset $S(\pi) \subseteq V$ as follows:
    For each vertex $u \in V$:
        Add u to $S(\pi)$ if and only if no neighbor of u precedes u in the permutation π.
Return $S(\pi)$;

Ο αλγόριθμος ουσιαστικά επιλέγει ένα σύνολο κορυφών, ξεκινώντας από μια τυχαία αντιμετάθεση π του συνόλου όλων των κορυφών του γράφου (θεωρώντας ότι όλες οι αντιμεταθέσεις είναι ισοπίθανες).

(i) (5 μονάδες) Για το υποσύνολο $S(\pi)$, αποδείξτε ότι είναι ανεξάρτητο υποσύνολο.

(ii) (12 μονάδες) Αποδείξτε ότι για το υποσύνολο $S(\pi)$, η αναμενόμενη τιμή του πληθικού αριθμού του είναι $E[|S(\pi)|] = \sum_{u \in V} \frac{1}{d_u+1}$, όπου d_u ο βαθμός της κορυφής u.

Πρόβλημα 6. (12 μονάδες) Κατασκευάστε ένα tight example για τον αλγόριθμο που χρησιμοποιεί LP-rounding για το πρόβλημα Weighted Vertex Cover, που είδαμε στο μάθημα. Θα πρέπει δηλαδή να φτιάξετε ένα παράδειγμα όπου ο εν λόγω αλγόριθμος επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης ίσο με 2. **Hint**: Υπάρχουν τέτοια παραδείγματα με μικρό αριθμό κορυφών.