

● Έστω γραμμική απεικόνιση ①

$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με νόμο $F(\vec{x}) = A\vec{x}$

όπου
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθούν βάσεις για τους υπόχωρους $\text{Im}F$, $\text{ker}F$.

Αν. Ο υπόχωρος $\text{Im}F$ ταυτίζεται με τον στήλο χώρο του A , άρα για να βρούμε βάση του $\text{Im}F$, αρκεί να βρούμε βάση για τον στήλο χώρο του A .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα μια βάση του υπόχωρου $\text{Im}F$ είναι η $\{(1, 2, 0)\}$.

Ο υπόχωρος $\text{ker}F$ είναι ο υπόχωρος των λύσεων του $A\vec{x} = \vec{0}$

δηλαδή του
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Το αρχικό ομογενές σύστημα

$A\vec{x} = \vec{0}$ θα έχει τις ίδιες λύσεις
με το
 $x_1 + 0x_2 - \frac{x_3}{2} = 0$. Έστω

θέσουμε $x_2 = s, x_3 = t$, τότε οι

λύσεις του θα είναι τα διανύσματα
τα του $\mathbb{R}^3$ που έχουν την
μορφή $\begin{pmatrix} t/2 \\ s \\ t \end{pmatrix}$.

Όπως

$$\begin{pmatrix} t/2 \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

και άρα για βάση του $\ker F$
είναι η $\{(0, 1, 0), (1/2, 0, 1)\}$.

(3)

• Έστω γραμμική απεικόνιση

$$F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ με νόμο } F(\vec{x}) = A\vec{x}$$

όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Να βρεθεί

βάση για τον υπόχωρο $\text{Im} F$ και
για τον υπόχωρο $\text{Ker} F$.

Αν. Ξέρουμε ότι,

$$\text{Im} F = \text{στηλοχώρος του } A.$$

Άρα για να βρούμε μια βάση για τον υπόχωρο $\text{Im} F$, αρκεί να βρούμε βάση για τον στηλοχώρο του A .

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως τα διανύσματα $(1, 0, 0)$,
 $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ αποτελούν βάση
του $\text{Im} F$ (δηλ. $\text{Im} F = \mathbb{R}^3$)

Ο πυρήνας της F είναι ο
υπόχωρος των λύσεων του ομογε-
νούς γραμμικού συστήματος $A\vec{x} = \vec{0}$.

④

Αρα για να βρούμε μια βάση για τον πυρήνα της F , αρκεί να βρούμε μια βάση για τον παραπάνω υπόχωρο.

Έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 = 0$$

$$0x_1 + x_2 + 0x_3 - x_4 = 0$$

$$0x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 = 0$$

Αρα

$$\ker F: \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως μια βάση του $\ker F$ θα αποτελείται από το διάνυσμα

$$(-1, 1, 0, 1)$$

(5)

Έστω γραμμική απεικόνιση

$F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ για την οποία ισχύει

$$\text{ότι } F(1,0,0,0) = (1,2,1), F(0,0,1,0) = (0,1,0),$$

$$F(0,1,0,0) = (1,3,0), F(0,0,0,1) = (1,1,1).$$

Να βρεθούν βάσεις για τους
υπόχωρους $\text{Im} F$ και $\text{Ker} F$.

Αν. Ο τύπος της F μπορεί να
ευφρασθεί στην μορφή $F(\vec{x}) = A\vec{x}$
όπου ο A είναι πίνακας μεγέθους
 3×4 και για τον οποίο ισχύει

$$A = [F(\hat{e}_1) \ F(\hat{e}_2) \ F(\hat{e}_3) \ F(\hat{e}_4)]$$

δηλαδή $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Για να βρούμε βάση για τον

$\text{Im} F$, αρκεί να βρούμε βάση
για τον σπηλοχώρο του A .

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(6)

Άρα για βάση του $\text{Im } F$
είναι η $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

Ο υπόχωρος $\text{Ker } F$ καθίσταται
γέ των υπόχωρων των λύσεων

του $A\vec{x} = \vec{0}$. Όπως

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{G-Z} \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως το αρχικό ομογενές γραμμικό σύστημα $A\vec{x} = \vec{0}$ θα έχει τις ίδιες λύσεις γέ το

$$x_1 + x_4 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 - x_4 = 0$$

Οπότε οι λύσεις του συστήματος θα είναι όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$ που έχουν την μορφή

$$\begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άρα για βάση του $\text{Ker } F$ αποζηλεί
το διάνυσμα $(-1, 0, 1, 1)$.

(7)

- Να δοθεί παράδειγμα γραμμικής απεικόνισης $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ για την οποία ισχύει ότι:

$$\dim \operatorname{Im} F = \dim \operatorname{Ker} F.$$

Αν. Για την γραμμική απεικόνιση F του παραδείγματος μας, θα πρέπει να ισχύει:

$$\dim \operatorname{Ker} F + \dim \operatorname{Im} F = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$$

$$\text{και επίσης } \dim \operatorname{Im} F = \dim \operatorname{Ker} F,$$

Θα πρέπει να έχουμε ότι

$$\dim \operatorname{Im} F = \dim \operatorname{Ker} F = 2$$

Ο νόμος της F μπορεί να ευφρασθεί στην μορφή $F(\vec{x}) = A\vec{x}$ όπου A πίνακας μεγέθους 4×4 και επειδή ο οριστικός χώρος του A ταυτίζεται με τον $\operatorname{Im} F$, θέλουμε ο οριστικός χώρος του A να έχει διάσταση 2. Ένας τέτοιος πίνακας μπορεί να είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$