

①

● Δίνεται η τετραγωνική μορφή

$$Q = X^T A X, \text{ όπου } A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 8 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Να προσδιορισθεί το είδος της.

Αν. Για να βρούμε το είδος

της τ.γ. Q , αρκεί να βρούμε

ως ιδιοτιμές ενός συμμετρικού μι-
νιμα να ορίσει την παραπάνω
τη τετραγωνική μορφή. Ένας
τέτοιος πίνακας είναι ο πίνακας

$$S = \frac{A + A^T}{2} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 8 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 4 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 5 \end{bmatrix}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 & 12 & 12 \\ 12 & 10 & 10 \\ 12 & 10 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 6 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Θα βρούμε ως ιδιοτιμές του S .

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 6 \\ 6 & 5-\lambda & 5 \\ 6 & 5 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 5 \\ 5 & 5-\lambda \end{vmatrix} + (-1)(6) \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 5-\lambda \end{vmatrix} + \\ + (6) \begin{vmatrix} 6 & 5-\lambda \\ 6 & 5 \end{vmatrix} =$$

②

$$\begin{aligned} &= (4-\lambda)[(5-\lambda)^2-25]-6[30-6\lambda-30]+6[30-30+6\lambda]= \\ &= \dots\dots\dots = \lambda[-\lambda^2+14\lambda+32]=0 \end{aligned}$$

Επομένως οι ιδιοτιμές του S είναι

$$\lambda_1=0, \lambda_2=-2, \lambda_3=16.$$

Επειδή ο S έχει μια θετική και αρνητική ιδιοτιμή, η τ.γ. Q

είναι ΑΟΡΙΣΤΗ.

(3)

- (i) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (ii) Να προσδιορισθεί το είδος της τετραγωνικής μορφής $Q = X^T A X$

όπου $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

Αν. (i) $|A - \lambda I| = 0 \iff \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\iff (1-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 4] = 0$$

$$\iff (1-\lambda)[4 - 4\lambda + \lambda^2 - 4] = 0$$

$$\iff (1-\lambda)\lambda(\lambda-4) = 0$$

Άρα έχουμε ως ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4.$

Θα βρούμε στην συνέχεια, τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις παραπάνω ιδιοτιμές.

(4)

Gia $\lambda_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + x_2 + 0x_3 = 0$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

$$0x_1 + 0x_2 + x_3 = 0$$

Επομένως $x_0: \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gia $\lambda_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(5)

$$x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

$$0x_1 + x_2 + 0x_3 = 0$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0.$$

Επομένως

$$x_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Για $\lambda_3 = 4$.

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \textcircled{-2} & \textcircled{2} & \textcircled{0} \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 - x_2 + 0x_3 = 0$$

$$0x_1 + 0x_2 + x_3 = 0$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

Επομένως

⑥

$$X_4: \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Για να βρούμε το είδος της τετραγωνικής μορφής $Q = X^T A X$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ αρκεί να βρούμε}$$

τις ιδιοτιμές ενός συμμετρικού πίνακα που ορίζει την παραπάνω τετραγωνική μορφή. Ένας τέτοιος πίνακας είναι ο πίνακας

$$S = \frac{A + A^T}{2} \text{ που αποζητεί το}$$

συμμετρικό μέρος του A .

Όπως

$$S = \frac{A + A^T}{2} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}}{2} =$$
$$= \frac{\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(7)

Τις ιδιοτιμές λ του S ,
ως έχουμε ήδη βρεί στο επόμενο
(i). Είναι οι $\lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=4$.
και επειδή $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$, η
 Q είναι θετικά ημιορισμένη.

8

● Δίνεται η τετραγωνική μορφή

$$Q = X^T A X \quad \text{όπου} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -6 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(i) Να προσδιορισθεί το είδος της.

(ii) Να βρεθεί η αλλαγή καρτεσιανών συντεταγμένων που την διαγωνοποιεί.

Αη. Θα βρούμε πρώτα ένα συμμετρικό πίνακα που ορίζει την Q. Ένας τέτοιος πίνακας είναι

$$S = \frac{A + A^T}{2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Θα βρούμε τις ιδιοτιμές του S.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (4-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ (-2)(-1) \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff (4-\lambda)((2-\lambda)(3-\lambda)-4) +$$

$$+ (-2)(+2)(2-\lambda) = 0 \iff$$

$$(4-\lambda)(6-3\lambda-2\lambda+\lambda^2-4) - 8 + 4\lambda = 0 \iff$$

(9)

$$\Leftrightarrow \lambda(-\lambda^2 + 9\lambda - 18) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6.$$

Επομένως επειδή $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$, η

Q είναι θετικά ημιορισμένη.

(ii) Θα βρούμε αρχικά βάσεις για τους υπόχωρους των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του S .

Για $\lambda_1 = 0$.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 - \frac{x_3}{2} &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Άρα $\chi_0: \begin{pmatrix} t/2 \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Για $\lambda_2 = 3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 - 2x_3 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Αρα

$$x_3: \begin{pmatrix} 2t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Για $n_3 = 6$.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{0} \iff \dots \iff \begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 - \frac{x_3}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Αρα

$$x_6: \begin{pmatrix} -t \\ t/2 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως $P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

και άρα η αλλαγή μεταβλητών
που διαγωνοποιεί την Q είναι

$$x' = Px.$$