

①

• Εάν

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5, \text{ να βρεθεί η τιμή}$$

της ορίζουσας  $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}.$

Αν. Ορίζουμε πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{bmatrix}.$$

Έχουμε  $A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim A_4$

και  $|A_2| = -|A_1|, |A_3| = 2|A_2|, |A_4| = -|A_3|.$

(δίου εάν πολλαπλασιάσουμε για γραμμή (στήλη) ενός πίνακα με αριθ.  $\lambda$ , τότε η ορίζουσα του πολλαπλαιάζεται τον ίδιο αριθμό.)  
Επομένως έχουμε  $|A_1| = 5, |A_4| = 10.$

● Να αποδειχθεί ότι το σύστημα (2)

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10$$

$$x_1 + x_2 - 4x_3 = -10$$

$$2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 24$$

έχει ακριβώς μια λύση (χωρίς να επιλυθεί) και στην συνέχεια να επιλυθεί χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer.

Αν. Θεωρούμε τον πίνακα των συντελεστών του συστήματος

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Έχουμε ότι,

$$|A| = 3(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+ (2)(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (3)(5-16) + (5+8) + (2)(-4-2) =$$

$$= (3)(-11) + (13) + (2)(-6) = -32$$

Επειδή  $|A| = -32 \neq 0$ , το γραμμικό σύστημα θα έχει για και μοναδική λύση.

(3)

Σύμφωνα με τον κανόνα του Cramer, η μία και μοναδική λύση του συστήματος είναι η εξής:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|},$$

όπου  $A_i$  είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον  $A$ , εάν αντικαταστήσουμε την  $i$ -στήλη του  $A$  με το διάνυσμα

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 24 \end{pmatrix} \quad \text{για κάθε } i=1,2,3.$$

Δηλαδή

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -1 & 2 \\ -10 & 1 & -4 \\ 24 & -4 & 5 \end{vmatrix}}{-32}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 & 2 \\ 1 & -10 & -4 \\ 2 & 24 & 5 \end{vmatrix}}{-32},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -10 \\ 2 & -4 & 24 \end{vmatrix}}{-32}.$$

Όπως

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 2 \\ -10 & 1 & -4 \\ 24 & -4 & 5 \end{vmatrix} = (10)(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} -10 & -4 \\ 24 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+ (2)(-1)^4 \begin{vmatrix} -10 & 1 \\ 24 & -4 \end{vmatrix} = (10)(-11) + (46) + (2)(16) =$$

④

$$= (-110) + (46) + (32) = -32.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 10 & 2 \\ 1 & -10 & -4 \\ 2 & 24 & 5 \end{vmatrix} = (3)(-1)^2 \begin{vmatrix} -10 & -4 \\ 24 & 5 \end{vmatrix} + (10)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (2)(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 2 & 24 \end{vmatrix} = (3)(46) + (-10)(13) + (2)(44) = 138 - 130 + 88 = 96.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -10 \\ 2 & -4 & 24 \end{vmatrix} = (3)(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ -4 & 24 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 2 & 24 \end{vmatrix} + (10)(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (3)(-16) + (44) + (10)(-6) = -48 + 44 - 60 = -64.$$

Άρα η γραμμική λύση του συστήματος θα είναι η εξής:

$$x_1 = \frac{-32}{-32} = 1, \quad x_2 = \frac{96}{-32} = -3, \quad x_3 = \frac{-64}{-32} = 2.$$

- Να αναφερθούν δύο άλλοι τρόποι, με τους οποίους μπορεί να επιλυθεί το γραμμικό σύστημα της προηγούμενης άσκησης.

(5)

Αη. Ένας άλλος ηπιος τρόπος επίλυ-

σης του γραμμικού συστήματος είναι  
χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο των  
Gauss-Jordan.

Ένας δεύτερος τρόπος με τον οποίο  
μπορούμε να λύσουμε το σύστημα

$A\vec{x} = \vec{b}$ , όπου  $A$  πίνακας μεγέθους  
 $n \times n$  και όπου  $|A| \neq 0$ , είναι ο εξής:

$$A\vec{x} = \vec{b} \iff A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b} \iff$$

$$\iff \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

δηλαδή η για και μοναδική λύση  
του συστήματος μπορεί να προκύψει  
πολλοπλοιαστικά λύσης των αντιστροφών  
του  $A$  με το διάνυσμα  $\vec{b}$  των  
σταθερών όρων.

\* 0 αντιστροφος του  $A$  υπάρχει  
δ.ότι  $|A| \neq 0$ .

• Τα διανύσματα  $\vec{v}_1 = (1, 2, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (2, 9, 0)$ ,

$\vec{v}_3 = (3, 3, 4)$  αποτελούν βάση του

$\mathbb{R}^3$ . Να βρεθούν οι συντεταγμένες του  
διανύσματος  $\vec{v} = (5, -1, 9)$  ως προς την  
βάση  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ .

(6)

Αη. Έχουμε ότι

$$\vec{x}' = P^{-1} \vec{x}$$

όπου  $\vec{x}$ : διάνυσμα αρχικών συντεταγμένων του  $\vec{v}$

$\vec{x}'$ : διάνυσμα των συντεταγμένων του  $\vec{v}$  ως προς την βάση  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ .

$P$ : πίνακας μεγέθους  $3 \times 3$ , ο οποίος έχει ως στήλες του, τα διανύσματα της βάσης  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ , δηλαδή

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Επίσης έχουμε ότι:

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} P^* = \frac{1}{|P|} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}^T$$

όπου  $P_{ij}$  ο συνπαράγοντας του

στοιχείου που βρίσκεται στην  $(i,j)$ -θέση του πίνακα  $P$ , για  $i, j = 1, 2, 3$ .

$$P_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 36, \quad P_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -5,$$

⑦

$$P_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -9, \quad P_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8,$$

$$P_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad P_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

$$P_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -21, \quad P_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3,$$

$$P_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 5.$$

$$|P| = (1)P_{11} + (2)P_{12} + (3)P_{13} =$$

$$= (1)(36) + (2)(-5) + (3)(-9) = -1$$

$$\text{Οπότε } P^{-1} = \frac{1}{|P|} P^* = \left( \frac{1}{-1} \right) \begin{bmatrix} 36 & -5 & -9 \\ -8 & 1 & 2 \\ -21 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} -36 & 8 & 21 \\ 5 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Επομένως επειδή  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$ , έχουμε  
 ότι

8)

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -36 & 8 & 21 \\ 5 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Αρα οι συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{v} = (5, -1, 9)$  ως προς την βάση  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  είναι  $(1, -1, 2)$ .

(Πράγματι

$$(5, -1, 9) = (1)(1, 2, 1) + (-1)(2, 9, 6) + (2)(3, 3, 4)$$