

①

• Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Να διαπιστωθεί ότι είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντιστροφός του.

Αη. Ο τετραγωνικός πίνακας A

είναι αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

Επομένως για να διαπιστώσουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, θα πρέπει να βρούμε την ορίζουσα του A .

$$\text{Έχουμε } |A| = (1)A_{11} + (0)A_{12} + (2)A_{13}$$

$$\text{όπου } A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -11$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

Επομένως

$$|A| = (1)(-11) + (0)(-4) + (2)(6) = 1 \neq 0$$

και άρα ο A είναι αντιστρέψιμος.

②

Τώρα για την εύρεση του αντιστροφου του A , έχουμε ότι:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$$

Τους συνηπαράγοντες A_{11}, A_{12}, A_{13} τους ξέρουμε από προηγούμενως, άρα θα πρέπει να βρούμε πρώτα τους υπολοίπους συνηπαράγοντες των στοιχείων του A .
Έχουμε

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

(3)

Αρα

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \begin{bmatrix} -11 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Να βρεθούν οι τιμές του m , για τις οποίες το παρακάτω ομογενές σύστημα έχει μη-μηδενικές λύσεις.

$$\begin{aligned} mx + y + z &= 0 \\ x + my + z &= 0 \\ x + y + mz &= 0 \end{aligned}$$

Αν. Ξέρουμε ότι:

Ένα ομογενές σύστημα $A\vec{x} = \vec{0}$ n εξισώσεων με n μεταβλητές, έχει ως μονή λύση την μηδενική $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

Επομένως θα πρέπει να εξετάσουμε για ποιές τιμές του m , $|A| = 0$.
Έχουμε ότι:

$$A = \begin{bmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{bmatrix}$$

και

(4)

$$|A| = m \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= m(m^2 - 1) - (m - 1) + (1 - m)$$

$$= (m - 1)(m(m + 1) - 1 - 1)$$

$$= (m - 1)(m^2 + m - 2).$$

Επομένως

$$|A| = 0 \quad \text{όταν} \quad m = 1 \quad \text{ή} \quad m = -2.$$

Άρα το ομογενές σύστημα της άσκησης θα έχει μη-μηδενικές λύσεις για τις παραπάνω τιμές του m .

- Έστω αντιστρέψιμος πίνακας A μεγέθους 4×4 και έστω B ο πίνακας που προκύπτει από τον A εναλλάσσοντας τις δύο πρώτες γραμμές του A και προσθέτοντας στην τέταρτη γραμμή το διπλάσιο της τρίτης γραμμής. Είναι ο B αντιστρέψιμος πίνακας;

Αν. Γνωρίζουμε ότι:

- α) Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

⑤

β) Πρόσθεση σε γραμμή πίνακα, πολλαπλασιασμός άλλης γραμμής, δεν αλλάζει την ορίζουσα του, ενώ εναλλαγή δύο γραμμών του, αλλάζει το πρόσημο αυτής.

Επειδή ο A είναι αντιστρέψιμος, από την (α) έχουμε ότι $|A| \neq 0$.

Επομένως κάνοντας χρήση της (β) προκύπτει ότι $|B| \neq 0$.

Άρα χρησιμοποιώντας και πάλι την (α), συμπεραίνουμε ότι ο B είναι αντιστρέψιμος πίνακας.

- Έστω πίνακας A μεγέθους $n \times n$, του οποίου τα διανύσματα στήλων είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Πόσες λύσεις θα έχει το ομογενές σύστημα $A^T X = 0$;

Αν. Επειδή τα διανύσματα στήλων του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αυτό σημαίνει ότι αυτά αποτελούν βάση για τον στήλοχώρο του. Άρα $e(A) = n$. Όμως

$$e(A) = e(A^T). \text{ Επομένως}$$

$$e(A^T) = n.$$

Τώρα από γνωστό θεώρημα, γνωρίζουμε

δη:

6

Ένα ομογενές σύστημα $BX=0$, v εξισώσεων με v μεταβλητές έχει ως μέγιστη λύση την μηδενική $\Leftrightarrow \rho(B)=v$.

Αρα εάν μιας χρήση του παραπάνω θεωρήματος και επειδή $\rho(A^T)=v$, συμπεραίναμε ότι το ομογενές

σύστημα $A^T X=0$, θα έχει ως μέγιστη λύση την μηδενική.

- Να δοθεί παράδειγμα τετραγωνικών πινάκων A και B έτσι ώστε ο $A+B$ να μην είναι αντιστρέψιμος παρ'όλο που οι A και B είναι αντιστρέψιμοι.

Αν. θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι, διότι $|A| = -2 \neq 0$, $|B| = 2 \neq 0$. Αντίθετα ο πίνακας

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \text{ δεν είναι αντιστρέψιμος διότι } |A+B| = 0.$$