

①

- Ο υπόχωρος που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{u}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{u}_2 = (3, 4, -2)$ συνίσταται με τον υπόχωρο που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{v}_1 = (9, 5, -1)$ και $\vec{v}_2 = (-17, -11, 3)$;

Απ. Ορίζουμε $U = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, $V = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 5 & -1 \\ -17 & -11 & 3 \end{bmatrix}.$$

Προφανώς

$U = \text{Γραμμοχώρος των } A$, $V = \text{Γραμμοχώρος των } B$

Από γνωστά θεωρήματα οι πίνακες A και B θα έχουν τον ίδιο γραμμοχώρο εάν και μόνον εάν έχουν την ίδια γραμμοκανονική μορφή.

$$A = \begin{bmatrix} \textcircled{-3} & \textcircled{3} & \textcircled{-3} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \end{bmatrix} \\ \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/7 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \end{bmatrix}.$$

②

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 5 & -1 \\ -17 & -11 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5/9 & -1/9 \\ -17 & -11 & 3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 5/9 & -1/9 \\ 0 & -14/9 & 10/9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5/9 & -1/9 \\ 0 & 1 & -5/7 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/7 \\ 0 & 1 & -5/7 \end{bmatrix}$$

Οι πίνακες A και B έχουν την ίδια γραφικοκανονική μορφή άρα έχουν τον ίδιο γραφικό χώρο και επομένως

$$V = U.$$

- Έστω πίνακας A μεγέθους $n \times m$.
Να αποδειχθεί
 $\rho(A) \leq \min\{m, n\}$. (Με $\rho(A)$
συμβολίζουμε τον βαθμό του πίνακα A.)

Αν. Επειδή ο A είναι μεγέθους $n \times m$,
έχουμε:

Γραφικό χώρος του A υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$
Στηλοχώρος του A υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

③

Επομένως

Διάσταση γραμμοχώρου του $A \leq m$.

Διάσταση στήλοχώρου του $A \leq n$.

Όπως από το Θεμελιώδες Θεώρημα
της Γραμμικής Άλγεβρας,

Διάσταση του γραμμοχώρου του $A =$
 $=$ Διάσταση στήλοχώρου του $A = r(A)$.

Άρα $r(A) \leq \min\{m, n\}$.

● Θεωρούμε το ομογενές γραμμικό
σύστημα

$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0$$

Να βρεθεί η διάσταση του
υπόχωρου των λύσεων του παραπάνω
ομογενούς συστήματος.

Αν. Από γνωστό Θεώρημα έχουμε ότι:

4

«Τα διανύσματα $\vec{x}$ που αποτελούν λύσεις του ομογενούς γραμμικού συστήματος $A\vec{x} = \vec{0}$, το οποίο έχει n εξισώσεις και m μεταβλητές, σχηματίζουν υπόχωρο του $\mathbb{R}^m$, διάστασης $m - \rho(A)$.»

Επομένως για να λύσουμε την άσκηση, αρκεί να βρούμε τον βαθμό του πίνακα A .

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 4/2 & -4/2 & 4/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 5/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & -5/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 5/3 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & -5/2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άρα $\rho(A) = 2$ και επομένως ο υπόχωρος των λύσεων του $A\vec{x} = \vec{0}$ θα είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ διάστασης $4 - \rho(A) = 2$.

(5)

- Έστω πίνακας A μεγέθους 23×15 και βαθμού 10. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξαρτητών διανυσμάτων που ικανοποιούν το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$A^T \vec{x} = \vec{0};$$

Αν. Επειδή ο πίνακας A είναι μεγέθους 23×15 , ο A^T θα είναι πίνακας μεγέθους 15×23 . Επομένως το

σύστημα $A^T \vec{x} = \vec{0}$ θα έχει 15 εξισώσεις και 23 μεταβλητές. Αρα χρησιμοποιώντας το θεώρημα που αναφέραμε στην επίλυση της προηγούμενης άσκησης, το σύνολο

των λύσεων του $A^T \vec{x} = \vec{0}$ θα είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{23}$ διάστασης $23 - \rho(A^T)$. Όμως $\rho(A^T) = \rho(A) = 10$. Επομένως το σύνολο των λύσεων του $A^T \vec{x} = \vec{0}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{23}$ διάστασης 13. Σε ένα τέτοιο υπόχωρο, ο μέγιστος αριθμός Γ.Α. που θα υπάρχουν είναι 13 (όσα συγγεμίζουν σε μια βάση αυτού του υπόχωρου). Αρα ο μέγιστος αριθμός Γ.Α. διανυσμάτων που ικανοποιούν το $A^T \vec{x} = \vec{0}$ είναι 13.

(6)

- Έστω πίνακας A μεγέθους 5×7 με βαθμό 4. Αληθεύει ότι το γραμμικό σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ είναι συμβατό για κάθε διάνυσμα $\vec{b}$ που ανήκει στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^5$.
Αη. Από γνωστό θεωρήμα έχουμε
 ότι:

«Το σύνολο των διανυσμάτων $\vec{b}$ για τα οποία το $A\vec{x} = \vec{b}$ είναι συμβατό, ταυτίζεται με τον σπηλοχώρο του πίνακα A ».

Άρα το $A\vec{x} = \vec{b}$ θα είναι συμβατό για κάθε διάνυσμα $\vec{b}$ που ανήκει στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^5 \iff$ ο σπηλοχώρος του A ταυτίζεται με τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^5$.

Ο σπηλοχώρος όμως του A δεν μπορεί να ταυτίζεται με τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^5$, διότι

διαστάση σπηλοχώρου του $A = \rho(A) = 4$,
 ενώ $\dim(\mathbb{R}^5) = 5$.

Επομένως το $A\vec{x} = \vec{b}$ δεν είναι
 συμβατό για κάθε $\vec{b}$ που
 ανήκει στο $\mathbb{R}^5$.