Κεφ 3: Πίνακες.

Πίνακα ονομάζουμε κάθε ορθογώνια διευθέτηση $m\times n$ το πλήθος αριθμών σε m γραμμές και n στήλες.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad A=[a_{ij}] \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n \end{matrix}$$

Πράξεις

1) Πρόσθεση

$A=[a_{ij}]$

$B=[b_{ij}]$

$A+B=[c_{ij}]$ όπου $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $\left\}\begin{matrix} i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n \end{matrix}\right.$

2) $A=[a_{ij}]$

$\lambda A=[b_{ij}]$ όπου $b_{ij}=\lambda a_{ij}$ $\left\}\begin{matrix} i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n \end{matrix}\right.$

Ιδιότητες

$A+B=B+A$

$(A+B)+\Gamma=A+(B+\Gamma)$

$A+0=0+A=A$

$A-A=0$ (όπου $-A=(-1)A$)

$\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$

$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

$1A=A$, $0A=0$.

3) Πολλ/σμος πινάκων

$A=[a_{ij}]$ $\quad i=1,2,\dots,m \quad j=1,2,\dots,n$

$B=[b_{jk}]$ $\quad j=1,2,\dots,n \quad k=1,2,\dots,r$

$A.B=C=[c_{ik}]$ $\quad i=1,2,\dots,m$
$\quad k=1,2,\dots,r$

όπου $c_{ik}=\sum_{\rho=1}^{n} a_{i\rho} b_{\rho k}$

π.χ. $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$2\times 3 \qquad 3\times 2$

$$\Gamma=A.B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες.

$(AB)\Gamma=A(B\Gamma)$, $\quad A(B+\Gamma)=A.B+A\Gamma$, $\quad \lambda(AB)=(\lambda A)B=$
$=A(\lambda B)$

Γενικά δεν ισχύει ότι $AB=BA$.

Ανάστροφος πίνακας.

$A=[a_{ij}]$ $\quad$ $A^T=[b_{ij}]$ $\quad$ Ανάστροφος πίνακας του A.

$i=1,2,\ldots,m$ $\quad$ $i=1,2,\ldots,n$

$j=1,2,\ldots,n$ $\quad$ $j=1,2,\ldots,m$

όπου $b_{ij}=a_{ji}$

Ιδιότητες ανάστροφων πινάκων.

$(A^T)^T=A$, $(A+B)^T=A^T+B^T$, $(kA)^T=kA^T$,

$(A.B)^T=(B^T.A^T)$

Θεώρημα: Κάθε σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει καμμία λύση, μια ακριβώς λύση, ή άπειρο αριθμό λύσεων.

Αποδ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι εάν το σύστημα έχει περισσότερες από μια λύσεις τότε έχει άπειρο αριθμό λύσεων.

Το γραμμικό σύστημα μπορεί να εκφρασθεί στην μορφή $AX=B$

Έστω X_1, X_2 δύο διαφορετικές λύσεις του συστήματος. Τότε

$$AX_1 = B \quad \text{και} \quad AX_2 = B$$

Άρα $AX_1 - AX_2 = 0 \Rightarrow A(X_1 - X_2) = 0.$

Θέτουμε $X_0 = X_1 - X_2$ και έστω $k \in \mathbb{R}$.

Τότε

$$A(X_1 + kX_0) = AX_1 + kAX_0$$
$$= B + 0$$
$$= B$$

Άρα ο $X_1 + kX_0$ αποτελεί λύση του $AX = B$· και επειδή ο k είναι τυχαίος αριθμός, το σύστημα $AX = B$ έχει άπειρο αριθμό λύσεων.

Θεωρούμε ένα πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

Τα διανύσματα

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}) \\ \vec{r}_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}) \\ \vdots \\ \vec{r}_m = (\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \ldots, \alpha_{mn}) \end{array}\right\} \text{ ονομάζονται διανύσματα γραμμών του } A.$$

ενώ τα διανύσματα

$$\left.\begin{array}{l} \vec{c}_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{m1}) \\ \vec{c}_2 = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{m2}) \\ \vdots \\ \vec{c}_n = (\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{mn}) \end{array}\right\} \text{ ονομάζονται διανύσματα στηλών του } A.$$

Τον υπόχωρο $L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_m)$ τον ονομάζουμε γραμμοχώρο του A.

Τον υπόχωρο $L(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_n)$ τον ονομάζουμε στηλοχώρο του A.

<u>Θεώρημα</u>: Στοιχειώδεις γραμμομετασχηματισμοί δεν αλλάζουν το γραμμοχώρο ενός πίνακα (δηλαδή εάν $A \sim B$ τότε οι A, B έχουν τον ίδιο γραμμοχώρο)

<u>Λήμμα</u>: Οι γραμμές του πίνακα που προκύπτει μετά από κάθε στοιχειώδη γραμμομετασχηματισμό είναι γραμμικοί συνδυασμοί των γραμμών του προηγούμενου πίνακα.

(Απόδειξη Θεωρήματος).

Έστω πίνακες A, B όπου $A \sim B$.
Έστω επίσης $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_m$ τα διανύσματα γραμμών του A και $\vec{r}_1', \vec{r}_2', \ldots, \vec{r}_m'$ τα διανύσματα γραμμών του B.
Έστω $\vec{u} \in L(\vec{r}_1', \vec{r}_2', \ldots, \vec{r}_m')$. Αυτό σημαίνει ότι το $\vec{u}$ μπορεί να εκφρασθεί ως Γ.Σ. των $\vec{r}_1', \vec{r}_2', \ldots, \vec{r}_m'$. Όμως από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε ότι:

κάθε διάνυσμα γραμμών του B μπορεί να εκφρασθεί ως Γ.Σ. των διανυσμάτων γραμμών του A. Άρα τελικά το $\vec{u}$ μπορεί να εκφρασθεί ως Γ.Σ. των $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_m$ δηλαδή $\vec{u} \in L(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_m)$ και επομένως ο γραμμοχώρος του B περιέχεται στον γραμμοχώρο του A.

Παρομοίως αποδεικνύουμε ότι και ο γραμμοχώρος του A περιέχεται στο γραμμοχώρο του B.

<u>Πόρισμα</u>: Ο γραμμοχώρος ενός πίνακα A ταυτίζεται με το γραμμοχώρο του πίνακα που προκύπτει από τον A εάν εφαρμόσουμε σ' αυτόν τον αλγόριθμο των Gauss-Jordan (Προφανώς ο πίνακας που προκύπτει βρίσκεται σε A.K.M.)

Θεώρημα: Έστω πίνακας A, ο οποίος βρίσκεται σε Α.Κ.Μ.. Οι μη-μηδενικές γραμμές του A αποτελούν βάση για το γραμμοχώρο του.

π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Τα διανύσματα $(1,0,0,1)$, $(0,1,0,3)$, $(0,0,1,-2)$ αποτελούν βάση για το γραμμοχώρο του A.

ΑΣΚΗΣΗ: Να βρεθεί βάση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^5$ που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{v}_1 = (1,-2,0,0,3)$, $\vec{v}_2 = (2,-5,-3,-2,6)$, $\vec{v}_3 = (0,5,15,10,0)$, $\vec{v}_4 = (2,6,18,8,6)$

Απ. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Προφανώς

Γραμμοχώρος του $A = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$

Για να βρούμε βάση για τον υπόχωρο $L(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$, αρκεί να βρούμε βάση για τον γραμμοχώρο του A.

$$A \sim \cdots\cdots\cdots \overset{\text{Αλγόριθμος G-J}}{} \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Τα διανύσματα $\vec{w}_1 = (1,0,0,-2,3)$, $\vec{w}_2 = (0,1,0,-1,0)$, $\vec{w}_3 = (0,0,1,1,0)$ αποτελούν βάση για τον γραμμοχώρο του A και επομένως για τον υπόχωρο $L(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$.

Θεώρημα: Για κάθε πίνακα A υπάρχει ένας και μοναδικός πίνακας B, ο οποίος έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

(i) $A \sim B$

και (ii) ο B βρίσκεται σε Α.Κ.Μ.

Ένας τέτοιος πίνακας B ονομάζεται ΓΡΑΜΜΟΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ του A.

Θεώρημα: Για δύο πίνακες A, B του ίδιου μεγέθους, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) $A \sim B$

(ii) ο γραμμοχώρος του A ταυτίζεται με τον γραμμοχώρο του B.

(iii) Οι A, B έχουν την ίδια γραμμοκανονική μορφή.

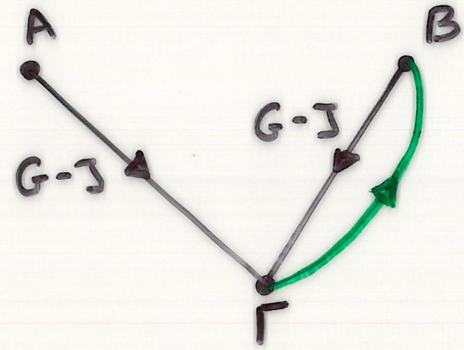
Αποδ:

(i) → (ii) → (iii)

(i) → (ii): Έχει ήδη αποδειχθεί.

(ii) → (iii): Παραλείπεται.

(iii) → (i)



Άρα $A \sim B$.

ΑΣΚΗΣΗ:

V: Υπόχωρος του $\mathbb{R}^5$ που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{u}_1=(1,1,1,0,0)$, $\vec{u}_2=(1,-1,-1,1,1)$, $\vec{u}_3=(2,0,0,1,1)$, $\vec{u}_4=(0,-2,-2,1,1)$

W: Υπόχωρος του $\mathbb{R}^5$ που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{w}_1=(3,-1,-1,2,2)$, $\vec{w}_2=(2,-2,-2,2,2)$, $\vec{w}_3=(2,2,2,0,0)$.

Οι δύο υπόχωροι ταυτίζονται;

Απ.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}3 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & -2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

V: Γραμμοχώρος του A $\quad$ W: Γραμμοχώρος του B.

$V=W \Longleftrightarrow$ Γραμμοχώρος του A = Γραμμοχώρος του B.

$$A \overset{G-J}{\sim \cdots\cdots\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1 & 1 & -1/2 & -1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$B \overset{G-J}{\sim \cdots\cdots\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1 & 1 & -1/2 & -1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Πράγματι οι δύο υπόχωροι ταυτίζονται.

Παρατήρηση: Διάσταση του γραμμοχώρου ενός πίνακα = αριθμό των μη-μηδενικών γραμμών της γραμμοκανονικής του μορφής (ΒΑΘΜΟΣ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ).

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ.

Για κάθε πίνακα A,

Διάσταση του στηλοχώρου του A = διάσταση του γραμμοχώρου του A.

π.χ.
$$A=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\3&2&5&1\\0&4&4&-4\end{bmatrix}$$

$$A \sim \overset{G-J}{\cdots\cdots} \sim \begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Διάσταση γραμμοχώρου A = 2

$$A^T=\begin{bmatrix}1&3&0\\0&2&4\\1&5&4\\1&1&-4\end{bmatrix} \sim \overset{G-J}{\cdots\cdots} \sim \begin{bmatrix}1&0&-6\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Διάσταση στηλοχώρου A = 2.

Έστω γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1+\cdots+a_{1m}x_m=b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nm}x_m=b_n \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}}_{n\times m} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{m\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{n\times 1}$$

$$A\vec{x}=\vec{b}$$

πίνακας συντελεστών

διάνυσμα μεταβλητών

διάνυσμα σταθερών

<u>Θεώρημα:</u> Θεωρούμε το ομογενές σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$, n εξισώσεων με m μεταβλητές (προφανώς $\vec{x}\in\mathbb{R}^m$). Τα διανύσματα $\vec{z}$ που είναι λύσεις του παραπάνω συστήματος θα σχηματίζουν υπόχωρο του $\mathbb{R}^m$ διάστασης $m-\rho$, όπου ρ ο βαθμός του A.

<u>Απ.</u> Έστω $\vec{z}_1, \vec{z}_2$ λύσεις του $A\vec{x}=\vec{0}$.

Τότε

$$A(\vec{z}_1+\vec{z}_2)=A\vec{z}_1+A\vec{z}_2=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$$

Άρα το $\vec{z}_1+\vec{z}_2$ είναι επίσης λύση του $A\vec{x}=\vec{0}$.

Έστω $\lambda\in\mathbb{R}$. Τότε έχουμε

$$A(\lambda\vec{z}_1)=\lambda(A\vec{z}_1)=\lambda\vec{0}=\vec{0},$$

δηλαδή και το $\lambda\vec{z}_1$ είναι λύση.

Επομένως τα διανύσματα $\vec{z}$ που είναι λύσεις του $A\vec{x}=\vec{0}$ σχηματίζουν υπόχωρο του $\mathbb{R}^m$.

(Η απόδειξη ότι ο υπόχωρος είναι διάστασης m-ρ παραλείπεται.)

<u>Θεώρημα:</u> Θεωρούμε γραμμικό σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ n εξισώσεων με m αγνώστους. (Προφανώς $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$)

Όλα τα διανύσματα $\vec{b}$ για τα οποία το σύστημα είναι συμβατό σχηματίζουν υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$ που ταυτίζεται με το στηλοχώρο του A.

<u>Αποδ.</u>

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{bmatrix} + \cdots\cdots + x_m \begin{bmatrix} \alpha_{1m} \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Το αρχικό σύστημα είναι συμβατό $\Longleftrightarrow$ το $\vec{b}$ μπορεί να εκφρασθεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων στηλών του $A \Longleftrightarrow$ το $\vec{b}$ ανήκει στο στηλοχώρο του A.

Επομένως το σύνολο των διανυσμάτων $\vec{b}$ για τα οποία το σύστημα είναι συμβατό, θα ταυτίζεται με το στηλοχώρο του A.

<u>Πόρισμα</u>: Το γραμμικό σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ είναι συμβατό $\Longleftrightarrow$ ο επαυξημένος πίνακας $(A \mid \vec{b})$ έχει τον ίδιο βαθμό με τον A.

ΑΣΚΗΣΗ: Θεωρούμε το σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$

όπου $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Το σύστημα είναι συμβατό για

(i) $\vec{b}=(1,1,0)$, (ii) $\vec{b}=(2,1,1)$;

<u>Απάντηση</u>: Το σύστημα θα είναι συμβατό, γενικά για $\vec{b}=(k_1,k_2,k_3) \Longleftrightarrow$ οι πίνακες A και $(A \vdots \vec{b})$ έχουν τον ίδιο βαθμό.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & k_1 \\ 1 & -1 & 0 & k_2 \\ 0 & -1 & -1 & k_3 \end{array}\right] \sim \overset{G\text{-}J}{\cdots\cdots\cdots} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{k_1+k_2}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{k_1-k_2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_3-k_2/2+k_1/2}{-2} \end{array}\right]$$

Για $\vec{b}=(1,1,0)$ (δηλ. για $k_1=1,\ k_2=1,\ k_3=0$), ο βαθμός του A ισούται με το βαθμό του $(A \vdots \vec{b})$. Άρα για $\vec{b}=(1,1,0)$ το σύστημα είναι συμβατό

Για $\vec{b}=(2,1,1)$, ο βαθμός του A δεν ισούται με τον βαθμό του $(A \vdots \vec{b})$, άρα σ' αυτή την περίπτωση το σύστημα δεν είναι συμβατό.

Για την απόδειξη του Πορίσματος θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω πρόταση:

<u>Πρόταση</u>: Έστω $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^\nu$. Ένα διάνυσμα $\vec{u} \in L(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k) \Longleftrightarrow$

$$L(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k) = L(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{u}).$$

<u>Απόδειξη</u>: $(\Longrightarrow)$

Έστω ότι $\vec{u} \in L(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$. Αυτό σημαίνει ότι το $\vec{u}$ μπορεί να εκφρασθεί ως Γ.Σ. των $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$, δηλ. $\exists\ t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\vec{u} = t_1\vec{u}_1 + \dots + t_k\vec{u}_k$$

Τώρα έστω $\vec{v} \in L(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{u})$.

Αυτό σημαίνει ότι $\exists\ t_1', \ldots, t_k', t_{k+1}' \in \mathbb{R}$

τ.ω.

$$\vec{v} = t_1'\vec{u}_1 + \cdots + t_k'\vec{u}_k + t_{k+1}'\vec{u}$$

$$= t_1'\vec{u}_1 + \cdots + t_k'\vec{u}_k + t_{k+1}'(t_1\vec{u}_1 + \cdots + t_k\vec{u}_k)$$

$$= (t_1' + t_{k+1}'t_1)\vec{u}_1 + \cdots + (t_k' + t_{k+1}'t_k)\vec{u}_k$$

δηλ. $\vec{v} \in L(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k)$.

Άρα $L(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{u}) \subseteq L(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k)$.

(1)

Επίσης είναι προφανές ότι,

$L(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k) \subseteq L(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{u})$ – (2).

Επομένως από (1) και (2),

$$L(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k) = L(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{u}).$$

($\Leftarrow$) Έστω ότι $L(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k) = L(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{u})$.

Όμως $\vec{u} \in L(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{u})$. Άρα

$\vec{u} \in L(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k)$.

(Απόδειξη Πορίσματος)

Το $A\vec{x}=\vec{b}$ είναι συμβατό $\Longleftrightarrow$ το $\vec{b}$ ανήκει στο στηλοχώρο του A $\Longleftrightarrow$ οι πίνακες A και $(A \mid \vec{b})$ έχουν τον ίδιο βαθμό.

Θεώρημα: Έστω γραμμικό σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$, το οποίο είναι συμβατό. Οι λύσεις του συστήματος θα είναι ένα σύνολο της μορφής $\vec{m}+V$*, όπου $\vec{m}$ είναι για οποιαδήποτε λύση του $A\vec{x}=\vec{b}$ και όπου V είναι ο υπόχωρος των λύσεων του ομογενούς συστήματος $A\vec{x}=\vec{0}$.

* $\vec{m}+V=\{\vec{u} \mid \vec{u}=\vec{m}+\vec{v}$ όπου $\vec{v}\in V\}$.

<u>Απ</u>.

Έστω $\vec{m}$ λύση του $A\vec{x}=\vec{b}$ και έστω $\vec{z}$ μια οποιαδήποτε λύση του ομογενούς $A\vec{x}=\vec{0}$. Προφανώς $\vec{m}+\vec{z}\in\vec{m}+V$. Θα αποδείξουμε ότι το $\vec{m}+\vec{z}$ αποτελεί λύση του $A\vec{x}=\vec{b}$. Πράγματι

$$A(\vec{m}+\vec{z})=A\vec{m}+A\vec{z}=\vec{b}+\vec{0}=\vec{b}$$

Αντίστροφα έστω $\vec{y}$ λύση του $A\vec{x}=\vec{b}$. Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{y}-\vec{m}=\vec{z}$. Έχουμε

$$A(\vec{y}-\vec{m})=A\vec{y}-A\vec{m}=\vec{b}-\vec{b}=\vec{0}$$ δηλαδή

το $\vec{y}-\vec{m}$ είναι λύση του ομογενούς του $A\vec{x}=\vec{0}$. Άρα

$\vec{y}=\vec{m}+$ (λύση του ομογενούς)

δηλ. $\vec{y}\in\vec{m}+V$.