- Να βρεθούν οι τιμές του m, για τις οποίες το παρακάτω ομογενές σύστημα έχει μη-μηδενικές λύσεις.

$$\begin{aligned} mx+y+z&=0 \\ x+my+z&=0 \\ x+y+mz&=0 \end{aligned}$$

Απ. Ξέρουμε ότι:

· Ένα ομογενές σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$ n εξισώσεων με n μεταβλητές, έχει ως μόνη λύση την μηδενική $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$.

Επομένως θα πρέπει να εξετάσουμε για ποιές τιμές του m, $|A|=0$.
Έχουμε ότι:

$$A=\begin{bmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{bmatrix}$$

και

$$|A| = m\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1\end{vmatrix} =$$

$$= m(m^2-1) - (m-1) + (1-m)$$

$$= (m-1)\big(m(m+1)-1-1\big)$$

$$= (m-1)(m^2+m-2).$$

Επομένως

$|A| = 0$ όταν $m=1$ ή $m=-2$.

Άρα το ομογενές σύστημα της άσκησης θα έχει μη-μηδενικές λύσεις για τις παραπάνω τιμές του m.

• Έστω αντιστρέψιμος πίνακας A μεγέθους 4×4 και έστω B ο πίνακας που προκύπτει από τον A εναλλάσσοντας τις δύο πρώτες γραμμές του A και προσθέτοντας στην τέταρτη γραμμή το διπλάσιο της τρίτης γραμμής. Είναι ο B αντιστρέψιμος πίνακας;

<u>Απ.</u> Γνωρίζουμε ότι:

α) Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος $\Longleftrightarrow |A| \neq 0$.

β) Πρόσθεση σε γραμμή πίνακα, πολλαπλάσιο άλλης γραμμής, δεν αλλάζει την ορίζουσά του, ενώ εναλλαγή δύο γραμμών του, αλλάζει το πρόσημο αυτής!

Επειδή ο A είναι αντιστρέψιμος, από την (α) έχουμε ότι $|A| \neq 0$. Επομένως κάνοντας χρήση της (β) προκύπτει ότι $|B| \neq 0$. Άρα χρησιμοποιώντας και πάλι την (α), συμπεραίνουμε ότι ο B είναι αντιστρέψιμος πίνακας.

- Έστω πίνακας A μεγέθους $\nu \times \nu$, του οποίου τα διανύσματα στηλών είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Πόσες λύσεις θα έχει το ομογενές σύστημα $A^T X = 0$;

Απ. Επειδή τα διανύσματα στηλών του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αυτό σημαίνει ότι αυτά αποτελούν βάση για τον στηλοχώρο του. Άρα $\varrho(A) = \nu$. Όμως

$$\varrho(A) = \varrho(A^T).$$ Επομένως

$\varrho(A^T) = \nu$.

Τώρα από γνωστό Θεώρημα, γνωρίζουμε

ότι:

Ένα ομογενές σύστημα $BX=0$, ν εξισώσεων με ν μεταβλητές έχει ως μόνη λύση την μηδενική $\Longleftrightarrow$ $\rho(B)=\nu$.

Άρα κάνοντας χρήση του παραπάνω θεωρήματος και επειδή $\rho(A^T)=\nu$, συμπεραίνουμε ότι το ομογενές σύστημα $A^T X=0$, θα έχει ως μόνη λύση την μηδενική.

- Να δοθεί παράδειγμα τετραγωνικών πινάκων A και B έτσι ώστε ο $A+B$ να μην είναι αντιστρέψιμος παρ' όλο που οι A και B είναι αντιστρέψιμοι.

Απ. Θεωρούμε τους πίνακες

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι διότι $|A|=-2\neq 0$, $|B|=2\neq 0$. Αντίθετα ο πίνακας

$$A+B=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$ δεν είναι αντιστρέψιμος διότι $|A+B|=0$.

Εάν

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5,$$ να βρεθεί η τιμή

της ορίζουσας $$\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}.$$

Απ. Ορίζουμε πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{bmatrix}.$$

Έχουμε $A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim A_4$

και $|A_2| = -|A_1|, \ |A_3| = 2|A_2|, \ |A_4| = -|A_3|.$

(διότι εάν πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή (στήλη) ενός πίνακα με αριθμό, τότε η ορίζουσά του πολ/ζεται με τον ίδιο αριθμό.)

Επομένως επειδή $|A_1| = 5$, $|A_4| = 10$.

- Να αποδειχθεί ότι το σύστημα (2)

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10$$

$$x_1 + x_2 - 4x_3 = -10$$

$$2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 24$$

έχει ακριβώς μια λύση (χωρίς να επιλυθεί) και στην συνέχεια να επιλυθεί χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer.

Απ. Θεωρούμε τον πίνακα των συντελεστών του συστήματος

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Έχουμε ότι,

$$|A| = 3(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+ (2)(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (3)(5-16) + (5+8) + (2)(-4-2) =$$

$$= (3)(-11) + (13) + (2)(-6) = -32$$

Επειδή $|A| = -32 \neq 0$, το γραμμικό σύστημα θα έχει μια και μοναδική λύση.

Σύμφωνα με τον κανόνα του Cramer, η μία και μοναδική λύση του συστήματος είναι η εξής:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|},$$

όπου A_i είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A, εάν αντικαταστήσουμε την i-στήλη του A με το διάνυσμα

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 24 \end{pmatrix} \quad \text{για κάθε } i = 1,2,3.$$

Δηλαδή

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -1 & 2 \\ -10 & 1 & -4 \\ 24 & -4 & 5 \end{vmatrix}}{-32}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 & 2 \\ 1 & -10 & -4 \\ 2 & 24 & 5 \end{vmatrix}}{-32},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -10 \\ 2 & -4 & 24 \end{vmatrix}}{-32}.$$

Όμως

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 2 \\ -10 & 1 & -4 \\ 24 & -4 & 5 \end{vmatrix} = (10)(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} -10 & -4 \\ 24 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+ (2)(-1)^4 \begin{vmatrix} -10 & 1 \\ 24 & -4 \end{vmatrix} = (10)(-11) + (46) + (2)(16) =$$

$$= (-110) + (46) + (32) = -32.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 10 & 2 \\ 1 & -10 & -4 \\ 2 & 24 & 5 \end{vmatrix} = (3)(-1)^2 \begin{vmatrix} -10 & -4 \\ 24 & 5 \end{vmatrix} + (10)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+ (2)(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 2 & 24 \end{vmatrix} = (3)(46) + (-10)(13) + (2)(44) =$$

$$= 138 - 130 + 88 = 96.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -10 \\ 2 & -4 & 24 \end{vmatrix} = (3)(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ -4 & 24 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 2 & 24 \end{vmatrix} +$$

$$+ (10)(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (3)(-16) + (44) + (10)(-6) =$$

$$= -48 + 44 - 60 = -64.$$

Άρα η μοναδική λύση του συστήματος θα είναι η εξής:

$$x_1 = \frac{-32}{-32} = 1, \quad x_2 = \frac{96}{-32} = -3, \quad x_3 = \frac{-64}{-32} = 2.$$

- Να αναφερθούν δύο άλλοι τρόποι, με τους οποίους μπορεί να επιλυθεί το γραμμικό σύστημα της προηγούμενης άσκησης.

Απ. Ένας άλλος πρώτος τρόπος επίλυσης του γραμμικού συστήματος είναι χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο των Gauss-Jordan.
Ένας δεύτερος τρόπος με τον οποίο μπορούμε να λύσουμε το σύστημα

$A\vec{x}=\vec{b}$, όπου A πίνακας μεγέθους $\nu\times\nu$ και όπου $|A|\neq 0$, είναι ο εξής:

$$A\vec{x}=\vec{b} \Longleftrightarrow A^{-1}(A\vec{x})=A^{-1}\vec{b} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \vec{x}=A^{-1}\vec{b}$$

Δηλαδή η μία και μοναδική λύση του συστήματος μπορεί να προκύψει πολλαπλασιάζοντας τον αντίστροφο* του A με το διάνυσμα $\vec{b}$ των σταθερών όρων.

* Ο αντίστροφος του A υπάρχει διότι $|A|\neq 0$.

- Τα διανύσματα $\vec{v}_1=(1,2,1)$, $\vec{v}_2=(2,9,0)$, $\vec{v}_3=(3,3,4)$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}=(5,-1,9)$ ως προς την βάση $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$.

Απ. Έχουμε ότι

$$\vec{x}' = P^{-1}\vec{x}$$

όπου $\vec{x}$: διάνυσμα αρχικών συντεταγμένων του $\vec{v}$

$\vec{x}'$: διάνυσμα των συντεταγμένων του $\vec{v}$ ως προς την βάση $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

P: πίνακας μεγέθους 3x3, ο οποίος έχει ως στήλες του, τα διανύσματα της βάσης $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, δηλαδή

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Επίσης έχουμε ότι:

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} P^* = \frac{1}{|P|} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}^T$$

όπου P_{ij} ο συμπαράγοντας του στοιχείου που βρίσκεται στην (i,j)-θέση του πίνακα P, για $i,j=1,2,3$.

$$P_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 36, \quad P_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -5,$$

$P_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -9$, $\quad P_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8$,

$P_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1$, $\quad P_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$,

$P_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -21$, $\quad P_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$,

$P_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 5$.

$$|P| = (1)P_{11} + (2)P_{12} + (3)P_{13} =$$
$$= (1)(36) + (2)(-5) + (3)(-9) = -1$$

Οπότε $P^{-1} = \frac{1}{|P|} P^* = \left(\frac{1}{-1}\right) \begin{bmatrix} 36 & -5 & -9 \\ -8 & 1 & 2 \\ -21 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T =$

$$= \begin{bmatrix} -36 & 8 & 21 \\ 5 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Επομένως επειδή $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$, έχουμε ότι

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -36 & 8 & 21 \\ 5 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Άρα οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v} = (5, -1, 9)$ ως προς την βάση $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ είναι $(1, -1, 2)$.

(Πράγματι

$$(5, -1, 9) = (1)(1, 2, 1) + (-1)(2, 9, 0) + $$
$$+ (2)(3, 3, 4))$$