- Έστω πίνακας A μεγέθους $m \times n$, πίνακας B μεγέθους $n \times p$ και πίνακας C μεγέθους $r \times q$. Τι συνθήκες θα πρέπει να ικανοποιούν τα p, q, r έτσι ώστε να ορίζονται τα γινόμενα ABC, ACB και $A.(B+C)$. Τι μέγεθος θα έχουν τα παραπάνω γινόμενα;

Απ.

$$\overset{m\times n}{A} . \overset{n\times p}{B} . \overset{r\times q}{C}$$

Για να ορίζεται ο πίνακας $A.B.C$ θα πρέπει $p=r$ και αυτός θα είναι μεγέθους $m\times q$.

$$\overset{m\times n}{A} . \overset{r\times q}{C} . \overset{n\times p}{B}$$

Για να ορίζεται ο πίνακας $A.C.B$ θα πρέπει $n=r=q$ και αυτός θα είναι μεγέθους $m\times p$.

$$\overset{m\times n}{A} . (\overset{n\times p}{B} + \overset{r\times q}{C})$$

Για να ορίζεται ο πίνακας $A.(B+C)$ θα πρέπει $n=r$, $p=q$ και αυτός θα είναι μεγέθους $m\times q$.

- Να κατασκευασθεί πίνακας A, του οποίου ο γραμμοχώρος περιέχει τα διανύσματα $(1,1)$, $(1,2)$ ενώ ο στηλοχώρος τα διανύσματα $(1,0,0)$, $(0,0,1)$.

Απ. Επειδή τα διανύσματα $(1,1),(1,2)$ περιέχονται στο γραμμοχώρο του A, αυτός θα έχει 2 στήλες και επειδή τα διανύσματα $(1,0,0),(0,0,1)$ περιέχονται στο στηλοχώρο του A, αυτός θα έχει 3 γραμμές. Άρα ο A είναι μεγέθους 3×2.

Ένα παράδειγμα πίνακα A που έχει τις ιδιότητες, στις οποίες αναφέρεται η άσκηση, είναι ο εξής:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Προφανώς τα διανύσματα $(1,0,0)$, $(0,0,1)$ ανήκουν στον στηλοχώρο του A, αλλά και τα διανύσματα $(1,1)$, $(1,2)$ ανήκουν στον γραμμοχώρο του A, διότι

$$(1,1)=(1)(1,0)+(0)(0,0)+(1)(0,1)$$

$$(1,2)=(1)(1,0)+(0)(0,0)+(2)(0,1)$$

- Να βρεθεί βάση για τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^5$ που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{u}_1=(1,1,1,0,0)$, $\vec{u}_2=(1,-1,-1,1,1)$, $\vec{u}_3=(2,0,0,1,1)$, $\vec{u}_4=(0,-2,-2,1,1)$.

Απ. Ορίζουμε $V=L(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4)$

και πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Προφανώς, Γραμμοχώρος του $A = V$.

Επομένως αρκεί να βρούμε βάση για το γραμμοχώρο του A.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} -2 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας Α.Κ.Μ. που έχει προκύψει έχει τον ίδιο γραμμοχώρο με τον αρχικό πίνακα A. Οι μη-μηδενικές γραμμές του πίνακα Α.Κ.Μ. αποτελούν βάση για τον γραμμοχώρο αυτού του πίνακα, άρα τα διανύσματα $(1,0,0,1/2,1/2)$, $(0,1,1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ θα

αποτελούν βάση και για τον γραμμοχώρο του A, δηλαδή για τον υπόχωρο V.

- Να βρεθεί βάση για τον στηλοχώρο του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

__Απ.__ Ο στηλοχώρος του A ταυτίζεται με τον γραμμοχώρο του A^T. Άρα αρκεί να βρούμε βάση για τον γραμμοχώρο του A^T.

$$A^T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -3 & -6 & -3 & -6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -4 & -8 & -4 & -8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -2 & -4 & -2 & -4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & 11 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Τα διανύσματα $(1,0,0,1)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,1)$ αποτελούν βάση για τον γραμμοχώρο του A^T και επομένως και για τον στηλοχώρο του A.

• Ο υπόχωρος που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{u}_1=(1,-1,1)$, $\vec{u}_2=(3,4,-2)$ ταυτίζεται με τον υπόχωρο που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{v}_1=(9,5,-1)$ και $\vec{v}_2=(-17,-11,3)$;

Απ. Ορίζουμε $U=L(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$, $V=L(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$,

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 9 & 5 & -1 \\ -17 & -11 & 3 \end{bmatrix}.$$

Προφανώς

$U=$ Γραμμοχώρο του A, $V=$ Γραμμοχώρο του B

Από γνωστό θεώρημα οι πίνακες A και B θα έχουν τον ίδιο γραμμοχώρο εάν και μόνον εάν έχουν την ίδια γραμμοκανονική μορφή.

$$A=\begin{array}{c} \begin{matrix} -3 & 3 & -3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/7 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \end{bmatrix}.$$

$$B=\begin{bmatrix} 9 & 5 & -1 \\ -17 & -11 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 17 & \frac{85}{9} & \frac{-17}{9} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 5/9 & -1/9 \\ -17 & -11 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 5/9 & -1/9 \\ 0 & -14/9 & 10/9 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 5/9 & -1/9 \\ 0 & 1 & -5/7 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 0 & -5/9 & 25/63 \end{array} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/7 \\ 0 & 1 & -5/7 \end{bmatrix}.$$

Οι πίνακες A και B έχουν την ίδια γραμμοκανονική μορφή άρα έχουν τον ίδιο γραμμοχώρο και επομένως

$$V=U.$$

- Έστω πίνακας A μεγέθους $n \times m$. Να αποδειχθεί ότι $\rho(A) \leq \min\{m,n\}$. (Με $\rho(A)$ συμβολίζουμε τον βαθμό του πίνακα A.)

Απ. Επειδή ο A είναι μεγέθους $n \times m$, έχουμε:

Γραμμοχώρος του A υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.
Στηλοχώρος του A υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Επομένως

Διάσταση γραμμοχώρου του $A \leq m$.

Διάσταση στηλοχώρου του $A \leq n$.

Όμως από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας,

διάσταση του γραμμοχώρου του $A =$

$=$ διάσταση στηλοχώρου του $A = \rho(A)$.

Άρα $\rho(A) \leq \min\{m, n\}$.

- Θεωρούμε το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0$$

Να βρεθεί η διάσταση του υπόχωρου των λύσεων του παραπάνω ομογενούς συστήματος.

Απ. Από γνωστό Θεώρημα έχουμε ότι:

«Τα διανύσματα $\vec{z}$ που αποτελούν λύσεις του ομογενούς γραμμικού συστήματος $A\vec{x}=\vec{0}$, το οποίο έχει n εξισώσεις και m μεταβλητές, σχηματίζουν υπόχωρο του $\mathbb{R}^m$, διάστασης $m-\rho(A)$.»

Επομένως για να λύσουμε την άσκηση, αρκεί να βρούμε τον βαθμό του πίνακα A.

$$\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} -1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 5/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & -5/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1 & 5/3 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & -5/2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 5/6 \\ 0 & 1 & -1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άρα $\rho(A)=2$ και επομένως ο υπόχωρος των λύσεων του $A\vec{x}=\vec{0}$ θα είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ διάστασης

$$4-\rho(A)=2.$$

- Έστω πίνακας A μεγέθους 23×15 και βαθμού 10. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων που ικανοποιούν το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$A^T\vec{x}=\vec{0};$$

Απ. Επειδή ο πίνακας A είναι μεγέθους 23×15, ο A^T θα είναι πίνακας μεγέθους 15×23. Επομένως το σύστημα $A^T\vec{x}=\vec{0}$ θα έχει 15 εξισώσεις και 23 μεταβλητές. Άρα χρησιμοποιώντας το Θεώρημα που αναφέραμε στην επίλυση της προηγούμενης άσκησης, το σύνολο των λύσεων του $A^T\vec{x}=\vec{0}$ θα είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{23}$ διάστασης $23-\rho(A^T)$. Όμως $\rho(A^T)=\rho(A)=10$. Επομένως το σύνολο των λύσεων του $A^T\vec{x}=\vec{0}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{23}$ διάστασης 13. Σε ένα τέτοιο υπόχωρο, ο μέγιστος αριθμός Γ.Α. που θα υπάρχουν είναι 13 (όσα συμμετέχουν σε μια βάση αυτού του υπόχωρου). Άρα ο μέγιστος αριθμός Γ.Α. διανυσμάτων που ικανοποιούν το $A^T\vec{x}=\vec{0}$ είναι 13.

- Έστω πίνακας A μεγέθους 5×7 με βαθμό 4. Αληθεύει ότι το γραμμικό σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ είναι συμβατό για κάθε διάνυσμα $\vec{b}$ που ανήκει στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^5$;

Απ. Από γνωστό θεώρημα έχουμε ότι:

«Το σύνολο των διανυσμάτων $\vec{b}$ για τα οποία το $A\vec{x}=\vec{b}$ είναι συμβατό, ταυτίζεται με τον στηλοχώρο του πίνακα A».

Άρα το $A\vec{x}=\vec{b}$ θα είναι συμβατό για κάθε διάνυσμα $\vec{b}$ που ανήκει στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^5 \Leftrightarrow$ ο στηλοχώρος του A ταυτίζεται με τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^5$.

Ο στηλοχώρος όμως του A δεν μπορεί να ταυτίζεται με τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^5$, διότι

διάσταση στηλοχώρου του $A=\rho(A)=4$, ενώ $\dim(\mathbb{R}^5)=5$.

Επομένως το $A\vec{x}=\vec{b}$ <u>δεν είναι</u> συμβατό για κάθε $\vec{b}$ που ανήκει στο $\mathbb{R}^5$.

• Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Να διαπιστωθεί ότι είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

<u>Απ</u>. Ο τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος $\Longleftrightarrow |A| \neq 0$.

Επομένως για να διαπιστώσουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, θα πρέπει να βρούμε την ορίζουσα του A.

Έχουμε $|A| = (1)A_{11} + (0)A_{12} + (2)A_{13}$

όπου $A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -11$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

Επομένως

$$|A| = (1)(-11) + (0)(-4) + (2)(6) = 1 \neq 0$$

και άρα ο A είναι αντιστρέψιμος.

Τώρα για την εύρεση του αντίστροφου του A, έχουμε ότι:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{*} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^{T}.$$

Τους συμπαράγοντες A_{11}, A_{12}, A_{13} τους ξέρουμε από προηγούμενως, άρα θα πρέπει να βρούμε πρώτα τους υπόλοιπους συμπαράγοντες των στοιχείων του A.

Έχουμε

$$A_{21} = (-1)^{3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{22} = (-1)^{4} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{23} = (-1)^{5} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{4} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{32} = (-1)^{5} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = (-1)^{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Apa

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \begin{bmatrix} -11 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$