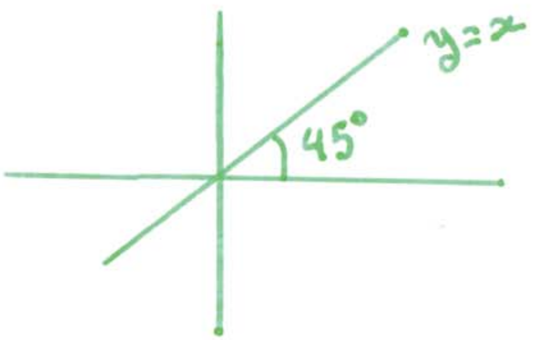
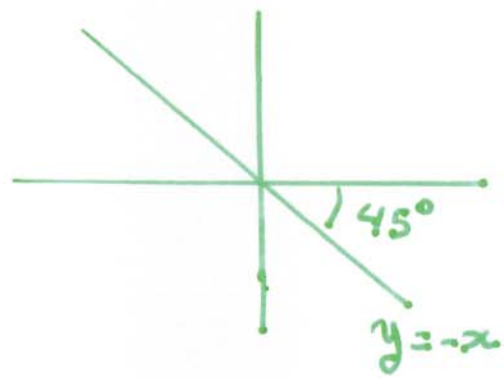
• Ποιό είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x,y)=\frac{xy}{x^2-y^2}$.

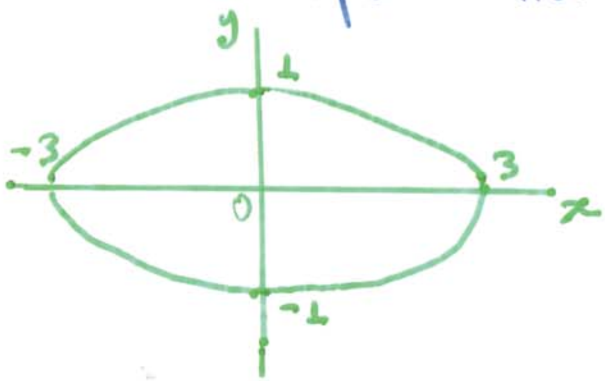
Απ. Τα x και y μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή εκτός από εκείνες για τις οποίες $x^2-y^2=0$ ή $x^2=y^2$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f αποτελείται από όλα τα σημεία (x,y) του επιπέδου εκτός από εκείνα των ευθειών $y=x$ και $y=-x$.





• Ποιό είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x,y)=\ln(9-x^2-9y^2)$

Απ. Η f ορίζεται σε κάθε σημείο (x,y) του επιπέδου, για το οποίο ισχύει $9-x^2-9y^2>0$ δηλαδή $\frac{x^2}{9}+y^2<1$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο των σημείων που βρίσκονται στο εσωτερικό της έλλειψης $\frac{x^2}{9}+y^2=1$



• Σχεδιάστε τις ισοσταθμικές καμπύλες της $f(x,y)=-(x-1)^2-y^2+1$ για

$f(x,y)=1,\ 0,\ -3.$

Απ. Κάθε ισοσταθμική καμπύλη της f θα έχει εξίσωση $f(x,y)=c$.

Όταν $c=1$

η εξίσωσή της, θα είναι

$-(x-1)^2-y^2+1=1$ δηλαδή $(x-1)^2+y^2=0$.

Επομένως θα είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $(1,0)$ και ακτίνα 0.

Όταν $c=0$

η εξίσωσή της, θα είναι

$-(x-1)^2-y^2+1=0$ ή $(x-1)^2+y^2=1$

δηλαδή κύκλος με κέντρο το σημείο $(1,0)$ και ακτίνα 1

Όταν $c=-3$

η εξίσωσή της, θα είναι

$$-(x^2-1)^2-y^2+1=-3 \quad \text{ή} \quad (x^2-1)^2+y^2=4$$

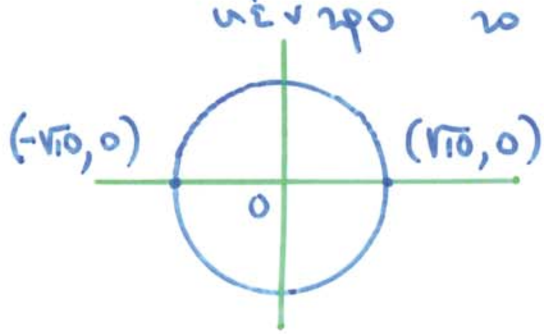
δηλαδή κύκλος με κέντρο το σημείο (1,0) και ακτίνα 2.

- Να βρεθεί η εξίσωση της ισοσταθμικής καμπύλης της $f(x,y)=16-x^2-y^2$ που περιέχει το σημείο $(2\sqrt{2},\sqrt{2})$.

Απ. Κάθε ισοσταθμική καμπύλη της f έχει εξίσωση $f(x,y)=c$ δηλαδή $16-x^2-y^2=c$. Θέλουμε να βρούμε την εξίσωση εκείνης της ισοσταθμικής καμπύλης που "περνάει" από το σημείο $(2\sqrt{2},\sqrt{2})$. Οπότε έχουμε

$$16-(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2=c$$
$$16-4\cdot 2-2=c$$
$$6=c$$

Άρα η εξίσωση είναι $x^2+y^2=10$, δηλαδή αυτή περιγράφει κύκλο με κέντρο το (0,0) και ακτίνα $\sqrt{10}$.



- Να βρεθούν οι καμπύλες που προκύπτουν από την τομή των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τα επίπεδα συντεταγμένων.

(i) $z=2x^2+y^2+1$, (ii) $z=x^2-y$, (iii) $z=1-x-y^2$

Απ. Σε όλες τις περιπτώσεις οι ζητούμενες καμπύλες που προκύπτουν (εάν το αντίστοιχο επίπεδο τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης) βρίσκονται επάνω στο επίπεδο που τέμνει την γραφική παράσταση.

Οι τομές βρίσκονται εάν θέσουμε $z=0$ για το xy-επίπεδο, $x=0$ για το yz-επίπεδο και $y=0$ για το zx-επίπεδο

(i) Το xy-επίπεδο δεν τέμνει την επιφάνεια που αποτελεί την γραφική παράσταση της συνάρτησης διότι για $z=0$ έχουμε $2x^2+y^2+1=0$.

Το $x=0$ δίνει την παραβολή $z=y^2+1$. Το $y=0$ δίνει την παραβολή $z=2x^2+1$.

(ii) Για $z=0$ έχουμε την παραβολή $y=x^2$. Για $x=0$ έχουμε την ευθεία $z=-y$. Για $y=0$ έχουμε την παραβολή $z=x^2$.

(iii) Για $z=0$ έχουμε την παραβολή $x=1-y^2$ στο xy-επίπεδο. Για $x=0$ έχουμε την παραβολή $z=1-y^2$ στο yz-επίπεδο. Για $y=0$ έχουμε την ευθεία $z=1-x$ στο xz-επίπεδο.

• Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$

Απ. Το πεδίο ορισμού D της f είναι το σύνολο σημείων (x,y) του επιπέδου, για τα οποία το $\sqrt{y-x^2}$ είναι πραγματικός αριθμός. Δηλαδή το D περιέχει ως στοιχεία του, όλα τα σημεία (x,y), για τα οποία $y \geq x^2$. Άρα το D είναι το σύνολο των σημείων που βρίσκονται πάνω και μέσα στην παραβολή $y=x^2$ (βλέπε σκιασμένη περιοχή)