• Ο υπόχωρος που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{u}_1=(1,-1,1)$, $\vec{u}_2=(3,4,-2)$ ταυτίζεται με τον υπόχωρο που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{v}_1=(9,5,-1)$ και $\vec{v}_2=(-17,-11,3)$;

Απ. Ορίζουμε $U=L(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$, $V=L(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$,

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 9 & 5 & -1 \\ -17 & -11 & 3 \end{bmatrix}.$$

Προφανώς

$U=$ Γραμμοχώρο του A, $V=$ Γραμμοχώρο του B

Από γνωστό θεώρημα οι πίνακες A και B θα έχουν τον ίδιο γραμμοχώρο εάν και μόνον εάν έχουν την ίδια γραμμοκανονική μορφή.

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -3 & 3 & -3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/7 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \end{bmatrix}.$$

$$B=\begin{bmatrix} 9 & 5 & -1 \\ -17 & -11 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} 17 & \frac{85}{9} & -\frac{17}{9} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 5/9 & -1/9 \\ -17 & -11 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 5/9 & -1/9 \\ 0 & -14/9 & 10/9 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 5/9 & -1/9 \\ 0 & 1 & -5/7 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 0 & -5/9 & 25/63 \end{matrix} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/7 \\ 0 & 1 & -5/7 \end{bmatrix}.$$

Οι πίνακες A και B έχουν την ίδια γραμμοκανονική μορφή άρα έχουν τον ίδιο γραμμοχώρο και επομένως

$V=U$.

- Έστω πίνακας A μεγέθους $n\times m$. Να αποδειχθεί ότι $\rho(A)\leq \min\{m,n\}$. (Με $\rho(A)$ συμβολίζουμε τον βαθμό του πίνακα A.)

Απ. Επειδή ο A είναι μεγέθους $n\times m$, έχουμε:

Γραμμοχώρος του A υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.
Στηλοχώρος του A υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Επομένως

Διάσταση γραμμοχώρου του $A \leq m$.

Διάσταση στηλοχώρου του $A \leq n$.

Όμως από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας,

διάσταση του γραμμοχώρου του $A =$

$=$ διάσταση στηλοχώρου του $A = \varrho(A)$.

Άρα $\varrho(A) \leq \min\{m, n\}$.

- Θεωρούμε το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0$$

Να βρεθεί η διάσταση του υπόχωρου των λύσεων του παραπάνω ομογενούς συστήματος.

Απ. Από γνωστό Θεώρημα έχουμε ότι:

«Τα διανύσματα $\vec{z}$ που αποτελούν λύσεις του ομογενούς γραμμικού συστήματος $A\vec{x}=\vec{0}$, το οποίο έχει n εξισώσεις και m μεταβλητές, σχηματίζουν υπόχωρο του $\mathbb{R}^m$, διάστασης $m-\varrho(A)$.»

Επομένως για να λύσουμε την άσκηση, αρκεί να βρούμε τον βαθμό του πίνακα A.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} -1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 5/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & -5/2 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 3/2 & -3/2 & 5/2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 5/3 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & -5/2 \end{bmatrix} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 1/2 & -1/2 & 5/6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άρα $\varrho(A)=2$ και επομένως ο υπόχωρος των λύσεων του $A\vec{x}=\vec{0}$ θα είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ διάστασης $4-\varrho(A)=2$.

- Έστω πίνακας A μεγέθους 23×15 και βαθμού 10. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων που ικανοποιούν το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$A^T\vec{x}=\vec{0};$$

Απ. Επειδή ο πίνακας A είναι μεγέθους 23×15, ο A^T θα είναι πίνακας μεγέθους 15×23. Επομένως το σύστημα $A^T\vec{x}=\vec{0}$ θα έχει 15 εξισώσεις και 23 μεταβλητές. Άρα χρησιμοποιώντας το θεώρημα που αναφέραμε στην επίλυση της προηγούμενης άσκησης, το σύνολο των λύσεων του $A^T\vec{x}=\vec{0}$ θα είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{23}$ διάστασης $23-\rho(A^T)$. Όμως $\rho(A^T)=\rho(A)=10$. Επομένως το σύνολο των λύσεων του $A^T\vec{x}=\vec{0}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{23}$ διάστασης 13. Σε ένα τέτοιο υπόχωρο, ο μέγιστος αριθμός Γ.Α. που θα υπάρχουν είναι 13 (όσα συμμετέχουν σε μια βάση αυτού του υπόχωρου). Άρα ο μέγιστος αριθμός Γ.Α. διανυσμάτων που ικανοποιούν το $A^T\vec{x}=\vec{0}$ είναι 13.

- Έστω πίνακας A μεγέθους 5×7 με βαθμό 4. Αληθεύει ότι το γραμμικό σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ είναι συμβατό για κάθε διάνυσμα $\vec{b}$ που ανήκει στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^5$;

<u>Απ.</u> Από γνωστό θεώρημα έχουμε ότι:

«Το σύνολο των διανυσμάτων $\vec{b}$ για τα οποία το $A\vec{x}=\vec{b}$ είναι συμβατό, ταυτίζεται με τον στηλοχώρο του πίνακα A».

Άρα το $A\vec{x}=\vec{b}$ θα είναι συμβατό για κάθε διάνυσμα $\vec{b}$ που ανήκει στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^5$ $\Longleftrightarrow$ ο στηλοχώρος του A ταυτίζεται με τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^5$.

Ο στηλοχώρος όμως του A δεν μπορεί να ταυτίζεται με τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^5$, διότι

διάσταση στηλοχώρου του $A=\rho(A)=4$, ενώ $\dim(\mathbb{R}^5)=5$.

Επομένως το $A\vec{x}=\vec{b}$ <u>δεν είναι</u> συμβατό για κάθε $\vec{b}$ που ανήκει στο $\mathbb{R}^5$.