$\textcircled{1}$

- Δίνεται η τετραγωνική μορφή $Q = X^T A X$, όπου $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 8 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 5 \end{bmatrix}$.

Να προσδιορισθεί το είδος της.

Απ. Για να βρούμε το είδος της τ.μ. Q, αρκεί να βρούμε τις ιδιοτιμές ενός συμμετρικού πίνακα που ορίζει την παραπάνω τετραγωνική μορφή. Ένας τέτοιος πίνακας είναι ο πίνακας

$$S = \frac{A + A^T}{2} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 8 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 4 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 5 \end{bmatrix}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 & 12 & 12 \\ 12 & 10 & 10 \\ 12 & 10 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 6 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Θα βρούμε τις ιδιοτιμές του S.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 6 \\ 6 & 5-\lambda & 5 \\ 6 & 5 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 5 \\ 5 & 5-\lambda \end{vmatrix} + (-1)(6) \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 5-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ (6) \begin{vmatrix} 6 & 5-\lambda \\ 6 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)\left[(5-\lambda)^2 - 25\right] - 6\left[30 - 6\lambda - 30\right] + 6\left[30 - 30 + 6\lambda\right] =$$

$$= \ldots\ldots = \lambda\left[-\lambda^2 + 14\lambda + 32\right] = 0$$

Επομένως οι ιδιοτιμές του S είναι

$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 16.$

Επειδή ο S έχει και θετική και αρνητική ιδιοτιμή, η τ.μ. Q είναι ΑΟΡΙΣΤΗ.

• (i) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Να προσδιορισθεί το είδος της τετραγωνικής μορφής $Q = X^T A X$

όπου $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

Απ. (i) $|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 4\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left[4 - 4\lambda + \lambda^2 - 4\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\lambda(\lambda - 4) = 0$$

Άρα έχουμε τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$.

Θα βρούμε στην συνέχεια, τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις παραπάνω ιδιοτιμές.

Για $\lambda_1 = 0$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} -2 & -2 & 0 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + x_2 + 0x_3 = 0$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

$$0x_1 + 0x_2 + x_3 = 0$$

Επομένως $X_0 : \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Για $\lambda_2 = 1$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} -2 & -4 & 0 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

$$0x_1 + x_2 + 0x_3 = 0$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0.$$

Επομένως

$$x_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Για $\lambda_3 = 4$.

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -2 & 2 & 0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 - x_2 + 0x_3 = 0$$

$$0x_1 + 0x_2 + x_3 = 0$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

Επομένως

$$X_4 : \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Για να βρούμε το είδος της τετραγωνικής μορφής $Q = X^T A X$, όπου $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, αρκεί να βρούμε τις ιδιοτιμές ενός συμμετρικού πίνακα που ορίζει την παραπάνω τετραγωνική μορφή. Ένας τέτοιος πίνακας είναι ο πίνακας

$$S = \frac{A + A^T}{2}$$ που αποτελεί το συμμετρικό μέρος του A.

Όμως

$$S = \frac{A + A^T}{2} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}}{2} =$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Τις ιδιοτιμές όμως του S, τις έχουμε ήδη βρεί στο ερώτημα (i). Είναι οι $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$. και επειδή $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$, η Q είναι θετικά ημιορισμένη.

- Δίνεται η τετραγωνική μορφή $Q = X^T A X$ όπου $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -6 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(i) Να προσδιορισθεί το είδος της.
(ii) Να βρεθεί η αλλαγή καρτεσιανών συντεταγμένων που την διαγωνοποιεί.

Απ. Θα βρούμε πρώτα ένα συμμετρικό πίνακα που ορίζει την Q. Ένας τέτοιος πίνακας είναι ο

$$S = \frac{A + A^T}{2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Θα βρούμε τις ιδιοτιμές του S.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (4-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ (-2)(-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (4-\lambda)\big((2-\lambda)(3-\lambda)-4\big) +$$

$$+ (-2)(+2)(2-\lambda) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$(4-\lambda)(6-3\lambda-2\lambda+\lambda^2-4) - 8 + 4\lambda = 0 \Longleftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \lambda(-\lambda^2+9\lambda-18)=0$

$$\lambda_1=0,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=6.$$

Επομένως επειδή $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$, η Q είναι θετικά ημιορισμένη.

(ii) Θα βρούμε αρχικά βάσεις για τους υπόχωρους των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του S.

Για $\lambda_1=0$.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 - \frac{x_3}{2} = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{matrix}$$

Άρα $X_0 : \begin{pmatrix} t/2 \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Για $\lambda_2=3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{matrix}$$

Άρα

$$X_3: \begin{pmatrix} 2t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Για $\lambda_3 = 6$.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \cdots\cdots \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{x_3}{2} = 0. \end{matrix}$$

Άρα

$$X_6: \begin{pmatrix} -t \\ t/2 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως $P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

και άρα η αλλαγή μεταβλητών που διαγωνοποιεί την Q είναι

η $X' = PX$.