• Δίνεται ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 8\end{bmatrix}.$$

Να διαπιστωθεί ότι είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

Απ. Ο τετραγωνικός πίνακας A

είναι αντιστρέψιμος $\Longleftrightarrow |A|\neq 0$.

Επομένως για να διαπιστώσουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, θα πρέπει να βρούμε την ορίζουσα του A.

Έχουμε $|A|=(1)A_{11}+(0)A_{12}+(2)A_{13}$

όπου $A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 8\end{vmatrix}=-11$

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 8\end{vmatrix}=-4$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=6$$

Επομένως

$$|A|=(1)(-11)+(0)(-4)+(2)(6)=1\neq 0$$

και άρα ο A είναι αντιστρέψιμος.

Τώρα για την εύρεση του αντίστροφου του A, έχουμε ότι:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{*} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^{T}.$$

Τους συμπαράγοντες A_{11}, A_{12}, A_{13} τους ξέρουμε από προηγούμενως, άρα θα πρέπει να βρούμε πρώτα τους υπόλοιπους συμπαράγοντες των στοιχείων του A.

Έχουμε

$$A_{21} = (-1)^{3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{22} = (-1)^{4} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{23} = (-1)^{5} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{4} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{32} = (-1)^{5} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = (-1)^{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Άρα

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\begin{bmatrix}-11 & -4 & 6\\ 2 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix}-11 & 2 & 2\\ -4 & 0 & 1\\ 6 & -1 & -1\end{bmatrix}.$$

- Να βρεθούν οι τιμές του m, για τις οποίες το παρακάτω ομογενές σύστημα έχει μη-μηδενικές λύσεις.

$$\begin{aligned} mx+y+z&=0\\ x+my+z&=0\\ x+y+mz&=0\end{aligned}$$

Απ. Ξέρουμε ότι:

Ένα ομογενές σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$ ν εξισώσεων με ν μεταβλητές, έχει ως μόνη λύση την μηδενική $\iff$ $|A|\neq 0$.

Επομένως θα πρέπει να εξετάσουμε για ποιές τιμές του m, $|A|=0$.

Έχουμε ότι:

$$A=\begin{bmatrix}m & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & 1 & m\end{bmatrix}$$

και

$$|A| = m\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= m(m^2-1)-(m-1)+(1-m)$$

$$= (m-1)\left(m(m+1)-1-1\right)$$

$$= (m-1)(m^2+m-2).$$

Επομένως
$|A|=0$ όταν $m=1$ ή $m=-2$.
Άρα το ομογενές σύστημα της άσκησης θα έχει μη-μηδενικές λύσεις για τις παραπάνω τιμές του m.

- Έστω αντιστρέψιμος πίνακας A μεγέθους 4×4 και έστω B ο πίνακας που προκύπτει από τον A εναλλάσσοντας τις δύο πρώτες γραμμές του A και προσθέτοντας στην τέταρτη γραμμή το διπλάσιο της τρίτης γραμμής. Είναι ο B αντιστρέψιμος πίνακας;

Απ. Γνωρίζουμε ότι:

α) Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος $\iff |A|\neq 0$.

β) Πρόσθεση σε γραμμή πίνακα, πολλαπλάσιο άλλης γραμμής, δεν αλλάζει την ορίζουσά του, ενώ εναλλαγή δύο γραμμών του, αλλάζει το πρόσημο αυτής.

Επειδή ο A είναι αντιστρέψιμος, από την (α) έχουμε ότι $|A| \neq 0$. Επομένως κάνοντας χρήση της (β) προκύπτει ότι $|B| \neq 0$.
Άρα χρησιμοποιώντας και πάλι την (α), συμπεραίνουμε ότι ο B είναι αντιστρέψιμος πίνακας.

- Έστω πίνακας A μεγέθους $\nu \times \nu$, του οποίου τα διανύσματα στηλών είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Πόσες λύσεις θα έχει το ομογενές σύστημα $A^T X = 0$;

Απ. Επειδή τα διανύσματα στηλών του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αυτό σημαίνει ότι αυτά αποτελούν βάση για τον στηλοχώρο του. Άρα $\varrho(A) = \nu$. Όμως

$$\varrho(A) = \varrho(A^T).$$ Επομένως

$$\varrho(A^T) = \nu.$$

Τώρα από γνωστό θεώρημα, γνωρίζουμε

ότι:

Ένα ομογενές σύστημα $BX=0$, ν εξισώσεων με ν μεταβλητές έχει ως μόνη λύση την μηδενική $\Longleftrightarrow \rho(B)=\nu$.

Άρα κάνοντας χρήση του παραπάνω θεωρήματος και επειδή $\rho(A^T)=\nu$, συμπεραίνουμε ότι το ομογενές σύστημα $A^TX=0$, θα έχει ως μόνη λύση την μηδενική.

- Να δοθεί παράδειγμα τετραγωνικών πινάκων A και B έτσι ώστε ο A+B να μην είναι αντιστρέψιμος παρ' όλο που οι A και B είναι αντιστρέψιμοι.

Απ. Θεωρούμε τους πίνακες

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι, διότι $|A|=-2\neq 0$, $|B|=2\neq 0$. Αντίθετα ο πίνακας

$$A+B=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$ δεν είναι αντιστρέψιμος διότι $|A+B|=0$.