Τεχνητή Νοημοσύνη

4ο φροντιστήριο (2023-24)

Επιμέλεια: Σοφία Ελευθερίου,
Φοίβος Χαραλαμπάκος

- **Κανονική συζευκτική μορφή (CNF):**

$$(p_{1,1} \vee \cdots \vee p_{1,k_1}) \wedge \cdots \wedge (p_{n,1} \vee \cdots \vee p_{n,k_2})$$

- **Πρόταση Horn:** Διάζευξη λεκτικών από τα οποία το πολύ ένα είναι θετικό.
- **Οριστική πρόταση:** Πρόταση Horn με ακριβώς ένα θετικό λεκτικό

  $\neg \mathrm{p}_1 \vee \neg \mathrm{p}_2 \vee \cdots \neg p_k \vee \mathrm{p}$

  Ισοδύναμη με $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_k \Rightarrow p$
- **Γεγονός***:* Οριστική πρόταση χωρίς αρνητικά λεκτικά (p)
- **Περιορισμός ακεραιότητας**: Οριστική πρόταση χωρίς θετικό λεκτικό

  $\neg \mathrm{p}_1 \vee \neg \mathrm{p}_2 \vee \cdots \neg p_k$

  Ισοδύναμη με $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_k \Rightarrow \mathrm{FALSE}$

F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Άσκηση 9.1

Θεωρήστε ως βάση γνώσης (ΒΓ) τους τύπους που προέκυψαν από τη μετατροπή σε CNF στην άσκηση 8.2 της προηγούμενης διάλεξης. Πώς θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο PL-FC-Entails, ενδεχομένως τροποποιώντας τη ΒΓ, ώστε να περιλαμβάνει διαφορετικούς τύπους που να παριστάνουν, όμως, τις ίδιες γνώσεις με την αρχική ΒΓ; Δείξτε τα βήματα που θα έκανε ο PL-FC-Entails.

Βάση γνώσης: $B\Gamma = \neg B_{1,1} \wedge \left(\neg B_{1,1} \vee \mathrm{P}_{1,2} \vee \mathrm{P}_{2,1}\right) \wedge \left(\neg \mathrm{P}_{1,2} \vee B_{1,1}\right) \wedge \left(\neg \mathrm{P}_{2,1} \vee B_{1,1}\right)$

Αρχικά μετατρέπουμε κάθε διαζευκτική πρόταση σε οριστική πρόταση (ένα ακριβώς θετικό λεκτικό)

$\neg B_{1,1} = \mathrm{NB}_{1,1}$

$\neg B_{1,1} \vee \mathrm{P}_{1,2} \vee \mathrm{P}_{2,1} = \neg\mathrm{NP}_{1,2} \vee \neg\mathrm{NP}_{2,1} \vee \mathrm{NB}_{1,1}$

$\neg\mathrm{P}_{1,2} \vee B_{1,1} = \neg\mathrm{NB}_{1,1} \vee \mathrm{NP}_{1,2}$

$\neg\mathrm{P}_{2,1} \vee B_{1,1} = \neg\mathrm{N}B_{1,1} \vee \mathrm{NP}_{2,1}$

Κατόπιν μετατρέπουμε κάθε οριστική πρόταση στην ισοδύναμη συνεπαγωγή

R_1: $\mathrm{NB}_{1,1}$

R_2: $\mathrm{NP}_{1,2} \wedge \mathrm{NP}_{2,1} \Rightarrow \mathrm{NB}_{1,1}$

R_3: $\mathrm{NB}_{1,1} \Rightarrow \mathrm{NP}_{1,2}$

R_4: $\mathrm{N}B_{1,1} \Rightarrow \mathrm{NP}_{2,1}$

Άσκηση 9.1 (Συνέχεια)

Βάση γνώσης

R_1: $\mathrm{NB}_{1,1}$

R_2: $\mathrm{NP}_{1,2} \wedge \mathrm{NP}_{2,1} \Rightarrow \mathrm{NB}_{1,1}$

R_3: $\mathrm{NB}_{1,1} \Rightarrow \mathrm{NP}_{1,2}$

R_4: $NB_{1,1} \Rightarrow \mathrm{NP}_{2,1}$

Συμπεράσματα: Πίνακας ευρετηριασμένος κατά σύμβολο. Αρχικά ψευδής.

F	F	F

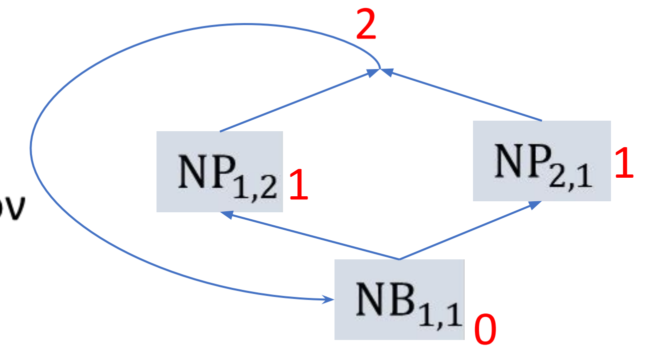
Μετρητές: Πίνακας ευρετηριασμένος κατά διαζευκτική πρόταση
Αριθμός προϋποθέσεων για την πυροδότηση

0	2	1	1

Ατζέντα: Πίνακας με τα γνωστά αληθή σύμβολα.

Ατζέντα $= [NB_{1,1}]$

- Εξάγουμε από την ατζέντα ένα αληθές αρχικό σύμβολο $(NB_{1,1})$. Αλλάζω σε True την αντίστοιχη τιμή στα συμπεράσματα.
- Σε κάθε πρόταση Horn όπου εμφανίζεται το σύμβολο αυτό ως προϋπόθεση μειώνω τον μετρητή της πρότασης κατά 1.
- Κάθε πρόταση με μηδενικό μετρητή γίνεται αληθής και εισάγεται το συμπέρασμά της στην ατζέντα. Οπότε θα έχω



T	F	F

0	2	0	0

Ατζέντα $= [\mathrm{NP}_{1,2}, \mathrm{NP}_{2,1}]$

Άσκηση 9.1 (Συνέχεια)

Βάση γνώσης

R_1: $\mathrm{NB}_{1,1}$

R_2: $\mathrm{NP}_{1,2} \land \mathrm{NP}_{2,1} \Rightarrow \mathrm{NB}_{1,1}$

R_3: $\mathrm{NB}_{1,1} \Rightarrow \mathrm{NP}_{1,2}$

R_4: $NB_{1,1} \Rightarrow \mathrm{NP}_{2,1}$

Μετρητές: Πίνακας ευρετηριασμένος κατά διαζευκτική πρόταση
Αριθμός προϋποθέσεων για την πυροδότηση

0	2	0	0

Ατζέντα: Πίνακας με τα γνωστά αληθή σύμβολα.

$\text{Ατζέντα} = [\mathrm{NP}_{1,2}, \mathrm{NP}_{2,1}]$

Συμπεράσματα: Πίνακας ευρετηριασμένος κατά σύμβολο. Αρχικά ψευδής.

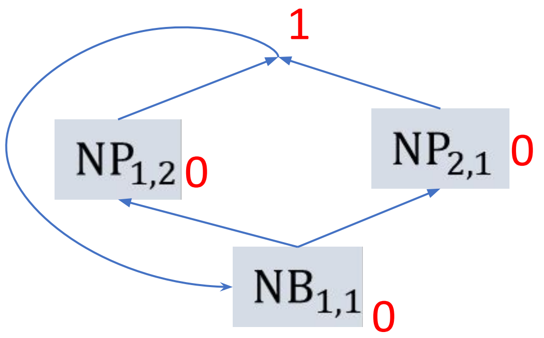
T	F	F

- Εξάγουμε από την ατζέντα το $\mathrm{NP}_{1,2}$ και αλλάζω σε True την αντίστοιχη τιμή στα συμπεράσματα.
- Η πρόταση R_2 έχει το $\mathrm{NP}_{1,2}$ ως προϋπόθεση οπότε μειώνεται ο μετρητής του κατά 1. Επομένως

T	T	F

0	1	0	0

$\text{Ατζέντα} = [\mathrm{NP}_{2,1}]$



Άσκηση 9.1 (Συνέχεια)

Βάση γνώσης

R_1: $\mathrm{NB}_{1,1}$

R_2: $\mathrm{NP}_{1,2} \land \mathrm{NP}_{2,1} \Rightarrow \mathrm{NB}_{1,1}$

R_3: $\mathrm{NB}_{1,1} \Rightarrow \mathrm{NP}_{1,2}$

R_4: $NB_{1,1} \Rightarrow \mathrm{NP}_{2,1}$

Μετρητές: Πίνακας ευρετηριασμένος κατά διαζευκτική πρόταση
Αριθμός προϋποθέσεων για την πυροδότηση

0	1	0	0

Ατζέντα: Πίνακας με τα γνωστά αληθή σύμβολα.

$$\text{Ατζέντα} = [\mathrm{NP}_{2,1}]$$

Συμπεράσματα: Πίνακας ευρετηριασμένος κατά σύμβολο. Αρχικά ψευδής.

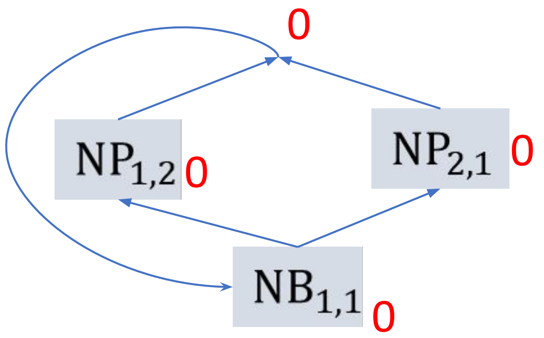
T	T	F

- Εξάγουμε από την ατζέντα το $\mathrm{NP}_{2,1}$ και αλλάζω σε True την αντίστοιχη τιμή στα συμπεράσματα.
- Η πρόταση R_2 έχει το $\mathrm{NP}_{2,1}$ ως προϋπόθεση οπότε μειώνεται ο μετρητής του κατά 1 και γίνεται μηδέν .
- Εισάγεται το συμπέρασμά της R_2 στην ατζέντα

T	T	T

0	0	0	0

$$\text{Ατζέντα} = [\mathrm{NB}_{1,1}]$$



Άσκηση 9.1 (Συνέχεια)

Βάση γνώσης

R_1: $\mathrm{NB}_{1,1}$

R_2: $\mathrm{NP}_{1,2} \land \mathrm{NP}_{2,1} \Rightarrow \mathrm{NB}_{1,1}$

R_3: $\mathrm{NB}_{1,1} \Rightarrow \mathrm{NP}_{1,2}$

R_4: $NB_{1,1} \Rightarrow \mathrm{NP}_{2,1}$

Μετρητές: Πίνακας ευρετηριασμένος κατά διαζευκτική πρόταση
Αριθμός προϋποθέσεων για την πυροδότηση

0	0	0	0

Ατζέντα: Πίνακας με τα γνωστά αληθή σύμβολα.

$\text{Ατζέντα} = [\mathrm{NB}_{1,1}]$

Συμπεράσματα: Πίνακας ευρετηριασμένος κατά σύμβολο. Αρχικά ψευδής.

T	T	T

- Εξάγουμε το $\mathrm{NB}_{1,1}$ από την ατζέντα το οποίο ανήκει στα συμπεράσματα και επομένως δεν πραγματοποιείται κάποια ενέργεια
- Η Ατζέντα είναι κενή και άρα ο αλγόριθμος τερματίζει.
- Τελικά συμπεραίνουμε την αλήθεια του τύπου $\mathrm{NP}_{1,2} \land \mathrm{NP}_{2,1}$ ή αλλιώς την αλήθεια του τύπου $\neg \mathrm{P}_{2,1} \land \neg \mathrm{P}_{1,2}$

Άσκηση 9.2

Παραστήστε σε πρωτοβάθμια κατηγορηματική λογική τις παρακάτω προτάσεις. Μπορείτε να παραστήσετε με $x = y$ το ότι οι μεταβλητές x και y παριστάνουν το ίδιο αντικείμενο. Χρησιμοποιούμε τα κατηγορήματα $Student(x)$, Clever(x), Passed(x, y), Course(x) κα

i) Ο Γιάννης είναι φοιτητής:

$$Student(John)$$

ii) Κάθε φοιτητής είναι έξυπνος:

$$\forall x\ \left(Student(x) \Rightarrow Clever(x)\right)$$

iii) Κάθε φοιτητής που έχει περάσει την Τεχνητή Νοημοσύνη είναι έξυπνος:

$$\forall x \left(\left(Student(x) \land Passed(x, AI)\right) \Rightarrow Clever(x)\right)$$

iv) Ο Γιάννης έχει περάσει τουλάχιστον ένα μάθημα:

$$\exists x\ \left(Course(x) \land Passed(John, x)\right)$$

v) Ο Γιάννης έχει περάσει ακριβώς ένα μάθημα.

$$\exists x\ \left(Course(x) \land Passed(John, x) \land \forall y\ \left(\left(Course(y) \land Passed(John, y)\right) \Rightarrow (x = y)\right)\right)$$

vi) Κάθε φοιτητής που έχει περάσει τουλάχιστον ένα μάθημα είναι έξυπνος.

$$\forall x\ \left(\left(Student(x) \land \exists y\ \left(Course(y) \land Passed(x, y)\right)\right) \Rightarrow Clever(x)\right)$$

Άσκηση 9.3

Παραστήστε σε πρωτοβάθμια κατηγορηματική λογική τα ακόλουθα. Χρησιμοποιούμε τα Dog(x), Cat(x), Likes(x,y), Bite(x,y)

i) Ο Μίλος και ο Σούζος είναι σκύλοι:

$$Dog(Milos) \land Dog(Suzos)$$

ii) Η Ψίτα και η Ράνα είναι γάτες:

$$Cat(Psita) \land Cat(Rana)$$

iii) Η Ψίτα συμπαθεί το Μίλο:

$$Likes(Psita, Milos)$$

iv) Τη Ράνα τη δάγκωσε ο Μίλος ή ο Σούζος:

$$Bite(Milos, Rana) \lor Bite(Suzos, Rana)$$

v) Κάποιος σκύλος δάγκωσε κάποια γάτα:

$$\exists x\ \exists y\ \left(Dog(x) \land Cat(y) \land Bite(x, y)\right)$$

vi) Καμία γάτα δε συμπαθεί το Σούζο:

$$\forall y\ \left(Cat(y) \Rightarrow \neg Likes(y, Suzos)\right)$$

vii) Αν κάποιος σκύλος δάγκωσε κάποια γάτα, τότε καμία γάτα δε συμπαθεί αυτό το σκύλο.

$$\forall x\ \left(\left(Dog(x) \land \exists y\ \left(Cat(y) \land Bite(x, y)\right)\right) \Rightarrow \forall z\ \left(Cat(z) \Rightarrow \neg Likes(z, x)\right)\right)$$

Άσκηση 9.4

Παραστήστε σε πρωτοβάθμια κατηγορηματική λογική τη σημασία των αντιστοίχων ελληνικών προτάσεων.

Υπάρχει μία γάτα που την αγαπά ο Μίλος.

$\exists y\ (Cat(y) \wedge Loves(Milos, y))$

Όλες οι γάτες νιαουρίζουν.

$\forall x\ (Cat(x) \Rightarrow Miaou(x))$

Κάθε γάτα που νιαουρίζει φοβάται έναν (πιθανώς διαφορετικό) σκύλο.

$\forall x\ ((Cat(x) \wedge Miaou(x)) \Rightarrow \exists y\ (Dog(y) \wedge AfraidOf(x, y)))$

Υπάρχει τουλάχιστον ένας σκύλος που τον φοβούνται (τον ίδιο όλες) οι γάτες που νιαουρίζουν.

$\exists y\ (Dog(y) \wedge \forall x\ ((Cat(x) \wedge Miaou(x)) \Rightarrow AfraidOf(x, y)))$

Κάθε σκύλος αγαπά <u>ακριβώς</u> μία (πιθανώς διαφορετική ανά σκύλο) γάτα.

$$\forall y\ (Dog(y) \Rightarrow \exists x\ (Cat(x) \wedge Likes(y, x) \wedge \\ \forall z\ (Cat(z) \wedge Likes(y, z) \Rightarrow z = x)))$$

Άσκηση 9.5

Πόσοι από τους παρακάτω τύπους προτασιακής λογικής είναι προτάσεις Horn;

i) $(A \wedge B) \Rightarrow C$

ii) $(A \vee B) \Rightarrow C$

iii) $\neg A \vee \neg B$

iv) $\neg A \wedge \neg B$

Πρόταση Horn: Διάζευξη λεκτικών από τα οποία το πολύ ένα είναι θετικό.

Ο τύπος i) είναι αφού είναι ισοδύναμος με τον $\neg A \vee \neg B \vee C$

Ο τύπος ii) δεν είναι αφού η υπόθεση δεν είναι σύζευξη.

Ο τύπος iii) είναι

Ο τύπος iv) den είναι αφού δεν έχω διάζευξη.

Διαφορές προτασιακής λογικής, κατηγορηματικής λογικής και ανώτερων τάξεων.

Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί (p_1)
Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος (p_2)
Άρα ο Σωκράτης είναι θνητός (p_3)

Στον προτασιακό λογισμό δεν δικαιολογείται γιατί έχουμε $\boldsymbol{p_1} \wedge \mathbf{p_2} \vdash \boldsymbol{p_3}$.
Ένα συμπέρασμα $\boldsymbol{\varphi} \vdash \boldsymbol{\psi}$ στηρίζεται στην εξωτερική σύνδεση των φ, ψ και όχι στην εσωτερική δομή τους. Πχ $\{\boldsymbol{\varphi} \Rightarrow \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi} \Rightarrow \boldsymbol{\tau}\} \vdash \boldsymbol{\varphi} \Rightarrow \boldsymbol{\tau}$

Στις παραπάνω προτάσεις συναντάμε:
Ιδιότητες (κατηγορήματα): άνθρωπος, θνητός
Αντικείμενα (σταθερές): Σωκράτης
Ποσοδείκτες: Όλοι

Στην κατηγορηματική λογική πρώτης τάξης οι μεταβλητές παριστάνουν αντικείμενα, τα σύμβολα παριστάνουν αντικείμενα, σχέσεις ή συναρτήσεις.
Στην προτασιακή λογική οι μεταβλητές παριστάνουν βασικές προτάσεις.
Στις λογικές ανώτερης τάξης οι μεταβλητές μπορούν να παριστάνουν και σχέσεις και συναρτήσεις και σύνολα σχέσεων.

Διαφορές προτασιακής λογικής, κατηγορηματικής λογικής και ανώτερων τάξεων.

Τα μοντέλα στην προτασιακή λογική είναι απλώς σύνολα τιμών αλήθειας για τις προτασιακές μεταβλητές.
Τα μοντέλα στην κατηγορηματική λογική περιέχουν αντικείμενα. Το σύνολο των αντικειμένων λέγεται πεδίο του μοντέλου.

Ερμηνεία: Στον προτασιακό λογισμό δεν έχω. Στην κατηγορηματική λογική η ερμηνεία αντιστοιχίζει

- Τα σύμβολα των σταθερών με αντικείμενα του πεδίου
- Τα σύμβολα των κατηγορημάτων με τις σχέσεις στο μοντέλο
- Τα σύμβολα των συναρτήσεων με τις συναρτήσεις του μοντέλου.

Άσκηση 10.1

Α) Παραστήστε σε πρωτοβάθμια κατηγορηματική λογική τη σημασία της ακόλουθης ελληνικής πρότασης:
Κάθε σκύλος φοβάται ακριβώς μία (πιθανώς διαφορετική) γάτα.

$$\forall x\left(IsDog(x) \Rightarrow \exists y\left(IsCat(y) \wedge IsAfraidOf(x,y) \wedge \forall z\left(\left(IsCat(z) \wedge IsAfraidOf(x,z)\right) \Rightarrow z = y\right)\right)\right)$$

Β) Συμπληρώστε παρακάτω τον ορισμό της σημασίας ενός νέου ποσοδείκτη «∃!» (υπάρχει ακριβώς ένα), ώστε η ελληνική πρόταση του σκέλους (α) να μπορεί να παρασταθεί συντομότερα. Με $||\xi||^{i,g}$ παριστάνουμε τη σημασία της έκφρασης ξ, όταν χρησιμοποιείται η ερμηνεία i και η ανάθεση τιμών g. Συμβολίστε με D το σύνολο των οντοτήτων του μοντέλου

Αν β μεταβλητή και φ τύπος, τότε:

- $||\ \exists!\ \beta\ \varphi||^{i,g} = T$, αν για κάποιο $o \in D$, $||\varphi||^{i,g[\beta\to o]} = T$ και για κάθε άλλο $o' \in D$, $||\varphi||^{i,g[\beta\to o']} = F$
- Σε κάθε άλλη περίπτωση, $||\ \exists!\ \beta\ \varphi||^{i,g} = F$.

Γ) Γράψτε τώρα συντομότερα τη λογική παράσταση του νοήματος της ελληνικής πρότασης του σκέλους (α), χρησιμοποιώντας (και) το νέο ποσοδείκτη:

$$\forall \boldsymbol{x}\left(IsDog(x) \Rightarrow \exists!\,\boldsymbol{y}\left(IsCat(y) \wedge IsAfraidOf(x,y)\right)\right)$$

Άσκηση 10.2

Α) Ορίστε σε κατηγορηματική λογική την έννοια της μεταβατικής σχέσης δύο ορισμάτων χρησιμοποιώντας έναν τύπο της μορφής $\forall R\ (Transitive(R) \Leftrightarrow\ \ldots)$.

$$\forall R\ Transitive(R) \Leftrightarrow \forall x\ \forall y\ \forall z\ ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \Rightarrow R(x,z))$$

Β) Εξηγήστε γιατί ο τύπος κατηγορηματικής λογικής που χρησιμοποιήσατε στο προηγούμενο σκέλος δεν είναι πρώτου βαθμού**.**

Ο παραπάνω τύπος δεν είναι τύπος πρωτοβάθμιας κατηγορηματικής λογικής, διότι παραβιάζει το συντακτικό της ΠΚΛ, αφού το R χρησιμοποιείται τόσο ως σύμβολο σχέσης όσο και ως μεταβλητή, κάτι που απαγορεύεται από το συντακτικό της ΠΚΛ. Επίσης, στο σημασιολογικό επίπεδο, η ερμηνεία του συμβόλου σχέσης Transitive θα έπρεπε να ήταν το σύνολο όλων των μεταβατικών σχέσεων δύο ορισμάτων, δηλαδή ένα σύνολο από σύνολα ζευγών αντικειμένων του κόσμου, κάτι που δεν το επιτρέπει η σημασιολογία της ΠΚΛ.

Γ) Ορίστε τι ακριβώς σημαίνει α ⊨ β στην περίπτωση που τα α και β είναι τύποι της πρωτοβάθμιας κατηγορηματικής λογικής χωρίς ελεύθερες μεταβλητές.

Στην περίπτωση της ΠΚΛ, α ⊨ β σημαίνει ότι για κάθε μοντέλο Μ και ερμηνεία i για τα οποία ισχύει $\| \alpha \|^{M,i} = T$, ισχύει και $\| \beta \|^{M,i} = T$. (Αφού δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές, οι αναθέσεις τιμών δεν μας απασχολούν.)