

Ασκήσεις μελέτης της 21^{ης} διάλεξης

21.1. (α) Παραστήστε σε πρωτοβάθμια κατηγορηματική λογική τη σημασία της ακόλουθης ελληνικής πρότασης:

Κάθε σκύλος φοβάται ακριβώς μία (πιθανώς διαφορετική) γάτα.

Απάντηση:

$$\begin{aligned} & \neg \forall x (IsDog(x) \Rightarrow \exists y (IsCat(y) \wedge IsAfraidOf(x, y) \wedge \\ & \quad \neg \forall z ((IsCat(z) \wedge IsAfraidOf(x, z)) \Rightarrow z \equiv y))) \end{aligned}$$

(β) Συμπληρώστε παρακάτω τον ορισμό της σημασίας ενός νέου ποσοδείκτη « $\exists!$ » (υπάρχει ακριβώς ένα), ώστε η ελληνική πρόταση του σκέλους (α) να μπορεί να παρασταθεί συντομότερα. Με $\|\xi\|^{i,g}$ παριστάνουμε τη σημασία της έκφρασης ξ , όταν χρησιμοποιείται η ερμηνεία i και η ανάθεση τιμών g . Συμβολίστε με D το σύνολο των οντοτήτων του μοντέλου.

Αν β μεταβλητή και ϕ τύπος, τότε:

- $\|\exists! \beta \phi\|^{i,g} = T$, αν _____
 και _____
- Σε κάθε άλλη περίπτωση, $\|\exists! \beta \phi\|^{i,g} = F$.

Απάντηση:

Αν β μεταβλητή και ϕ τύπος, τότε:

- $\|\exists! \beta \phi\|^{i,g} = T$, αν για κάποιο $o \in D$, $\|\phi\|^{i,g[\beta \rightarrow o]} = T$ και για κάθε άλλο $o' \in D$, $\|\phi\|^{i,g[\beta \rightarrow o']} = F$
- Σε κάθε άλλη περίπτωση, $\|\exists! \beta \phi\|^{i,g} = F$.

(γ) Γράψτε τώρα συντομότερα τη λογική παράσταση του νοήματος της ελληνικής πρότασης του σκέλους (α), χρησιμοποιώντας (και) το νέο ποσοδείκτη:

Απάντηση:

$$\forall x (IsDog(x) \Rightarrow \exists! y (IsCat(y) \wedge IsAfraidOf(x, y)))$$

21.2. (α) Ορίστε σε κατηγορηματική λογική την έννοια της μεταβατικής σχέσης δύο ορισμάτων χρησιμοποιώντας έναν τύπο της μορφής $\forall R (Transitive(R) \Leftrightarrow \dots)$. (β) Εξηγήστε γιατί ο τύπος κατηγορηματικής λογικής που χρησιμοποιήσατε στο προηγούμενο σκέλος δεν είναι πρώτου βαθμού. (γ) Ορίστε τι ακριβώς σημαίνει $\alpha \models \beta$ στην περίπτωση που τα α και β είναι τύποι της πρωτοβάθμιας κατηγορηματικής λογικής χωρίς ελεύθερες μεταβλητές.

Απάντηση:

(α) Ορισμός μεταβατικής σχέσης δύο ορισμάτων σε κατηγορηματική λογική:

$$\forall R \text{ Transitive}(R) \Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \Rightarrow R(x,z))$$

(β) Ο παραπάνω τύπος δεν είναι τύπος πρωτοβάθμιας κατηγορηματικής λογικής, διότι παραβιάζει το συντακτικό της ΠΚΛ, αφού το R χρησιμοποιείται τόσο ως σύμβολο σχέσης όσο και ως μεταβλητή, κάτι που απαγορεύεται από το συντακτικό της ΠΚΛ (τουλάχιστον όπως το έχουμε εμείς ορίσει). Επίσης, στο σημασιολογικό επίπεδο, η ερμηνεία του συμβόλου σχέσης Transitive θα έπρεπε να ήταν το σύνολο όλων των μεταβατικών σχέσεων δύο ορισμάτων, δηλαδή ένα σύνολο από σύνολα ζευγών αντικειμένων του κόσμου, κάτι που δεν το επιτρέπει η σημασιολογία της ΠΚΛ.

(γ) Στην περίπτωση της ΠΚΛ, $\alpha \models \beta$ σημαίνει ότι για κάθε μοντέλο M και ερμηνεία i για τα οποία ισχύει $\|\alpha\|^{M,i} = T$, ισχύει και $\|\beta\|^{M,i} = T$. (Αφού δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές, οι αναθέσεις τιμών δεν μας απασχολούν – βλ. διαφάνεια 16 για σύγκριση.)