Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Πληροφορικής
Μάθημα: Τεχνητή Νοημοσύνη, 2024–25
Διδάσκων: Ι. Ανδρουτσόπουλος

Ασκήσεις μελέτης της 4ης διάλεξης

4.1. (α) Αποδείξτε ότι αν η h είναι συνεπής, τότε $h(n_1) \leq c(n \rightarrow \ldots \rightarrow n_k) + h(n_k)$, για οποιοδήποτε μονοπάτι $n_1 \rightarrow \ldots \rightarrow n_k$. (β) Αποδείξτε ότι κάθε συνεπής h είναι και αποδεκτή. (γ) Αποδείξτε ότι αν οι $h_1, \ldots, h_k$ είναι αποδεκτές, τότε είναι αποδεκτή και η $h(n) = \max\{h_1(n), \ldots, h_k(n)\}$. (δ) Αποδείξτε ότι αν οι $h_1, \ldots, h_k$ είναι συνεπείς, τότε είναι συνεπής και η $h(n) = \max\{h_1(n), \ldots, h_k(n)\}$. (ε) Εξηγήστε γιατί με *ιδανική* ευρετική συνάρτηση, η πολυπλοκότητα χρόνου του αλγορίθμου A^* γίνεται $O(b \cdot d)$.

α) Έχουμε ως δεδομένο ότι η h είναι συνεπής. Άρα ισχύει ότι:

$$h(n) \leq c(n \rightarrow n') + h(n'), \qquad \text{για κάθε } n, n'$$

Επομένως για τους κόμβους οποιουδήποτε μονοπατιού $n_1 \rightarrow \ldots \rightarrow n_k$ θα ισχύουν τα παρακάτω :

$$\begin{gathered} h(n_1) \leq c(n_1 \rightarrow n_2) + h(n_2) \\ h(n_2) \leq c(n_2 \rightarrow n_3) + h(n_3) \\ \ldots \\ h(n_{k-1}) \leq c(n_{k-1} \rightarrow n_k) + h(n_k) \end{gathered}$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες, προκύπτει:

$$h(n_1) \leq \sum_{i=2}^{k} c(n_{i-1} \rightarrow n_i) + h(n_k) \Rightarrow h(n_1) \leq c(n_1 \rightarrow \cdots \rightarrow n_k) + h(n_k)$$

β) Για να είναι αποδεκτή μια ευρετική, πρέπει να ισχύει ότι $h(n) \leq C(n)^*$, για κάθε n, όπου $C(n)^*$ το κόστος του βέλτιστου μονοπατιού από τον n ως κόμβο τελικής κατάστασης. Έστω ότι η $h(n)$ είναι συνεπής. Τότε, από το προηγούμενο σκέλος, χρησιμοποιώντας ως μονοπάτι $(n = n_1) \rightarrow \ldots \rightarrow n_k$ το βέλτιστο μονοπάτι από τον n ως κόμβο τελικής κατάστασης (όπου n_k ο κόμβος τελικής κατάστασης στην οποία τελειώνει το βέλτιστο μονοπάτι) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $h(n_k) = 0$, αφού n_k είναι κόμβος τελικής κατάστασης, παίρνουμε:

$$h(n) = h(n_1) \leq c(n_1 \rightarrow \cdots \rightarrow n_k) + h(n_k) = C(n)^* + 0$$

Άρα η $h(n)$ είναι και αποδεκτή.

γ) Αφού όλες οι $h_1, h_2, \ldots, h_k$ είναι αποδεκτές, θα ισχύουν για κάθε n τα εξής:

$$\begin{gathered} h_1(n) \leq C(n)^* \\ h_2(n) \leq C(n)^* \\ \ldots \\ h_k(n) \leq C(n)^* \end{gathered}$$

Όλες οι τιμές $h_i(n)$ συγκρίνονται με το ίδιο $C(n)^*$, επειδή αυτό είναι το βέλτιστο κόστος από τον n ως τελική κατάσταση και είναι πάντα το ίδιο ανεξαρτήτως ευρετικής.

Η $h(n) = \max\{h_1(n), h_2(n), \ldots, h_k(n)\}$ θα έχει σε κάθε n την τιμή μιας εκ των $h_i(n)$ $(1 \leq i \leq k)$ και αφού ισχύουν οι παραπάνω ισχυρισμοί για τα $h_i(n)$, θα έχουμε $h(n) = h_i(n) \leq C(n)^*$, άρα η $h(n)$είναι αποδεκτή.

δ) Έστω ότι η $h(n) = \max\{h_1(n), h_2(n), \dots, h_k(n)\}$ δεν είναι συνεπής, παρ' όλο που οι $h_1, h_2, \dots, h_k$ είναι συνεπείς. Τότε θα πρέπει να ισχύει για κάποια *n* και *n'* ότι:

$$h(n) > h(n') + c(n \to n')$$

Αφού η τιμή $h(n)$ είναι μια εκ των τιμών $h_1(n), h_2(n), \dots, h_k(n)$, τότε από την προηγούμενη σχέση λαμβάνουμε:

$$h(n) = h_i(n) > h(n') + c(n \to n') \text{ (1)}$$

όπου $1 \leq i \leq k$.

Ωστόσο, αφού η h_i είναι συνεπής, θα ισχύει το εξής:

$$h_i(n) \leq c(n \to n') + h_i(n')$$

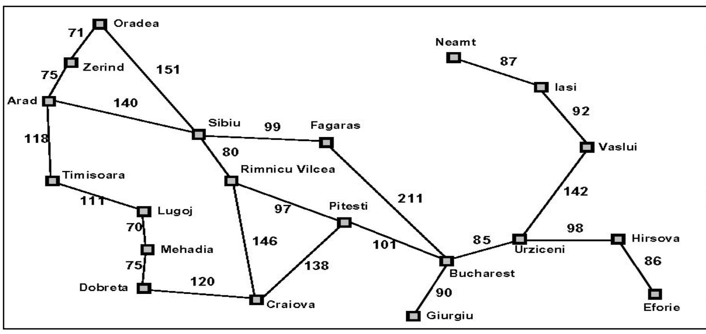
Αφού όμως $h(n') = \max\{h_1(n'), h_2(n'), \dots, h_k(n')\}$, τότε $h_i(n') \leq h(n')$, οπότε από την προηγούμενη σχέση λαμβάνουμε:

$$h_i(n) \leq c(n \to n') + h(n') \text{ (2)}$$

Οι (1) και (2) αποτελούν άτοπο, οπότε η h είναι συνεπής.

ε) Η ιδανική ευρετική μάς καθοδηγεί να επιλέγουμε και να επεκτείνουμε κόμβους μόνο επί του βέλτιστου μονοπατιού. Οι κόμβοι αυτοί είναι *d*, όσοι και το βάθος της ρηχότερης λύσης. Σε κάθε κόμβο κατά μήκος του βέλτιστου μονοπατιού παράγουμε όλα τα παιδιά του κόμβου, δηλαδή *b* παιδιά στη χειρότερη περίπτωση. Στη συνέχεια, ακολουθώντας την εκτίμηση της ιδανικής ευρετικής, επιλέγουμε το παιδί που συμμετέχει στο βέλτιστο μονοπάτι. Συνεπώς κάνουμε *d* βήματα κατά μήκος του βέλτιστου μονοπατιού και σε κάθε βήμα παράγουμε στη χειρότερη περίπτωση *b* παιδιά. Άρα η πολυπλοκότητα χρόνου θα είναι O(*bd*).

4.2. Χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο A* (χωρίς κλειστό σύνολο) για να βρούμε στον παρακάτω γράφο ένα μονοπάτι από την Craiova στο Βουκουρέστι. Οι ακμές παριστάνουν οδούς και οι ετικέτες των ακμών τα μήκη των οδών. Χρησιμοποιούμε ως ευρετική συνάρτηση την ευθεία απόσταση μέχρι το Βουκουρέστι (βλ. πίνακα).

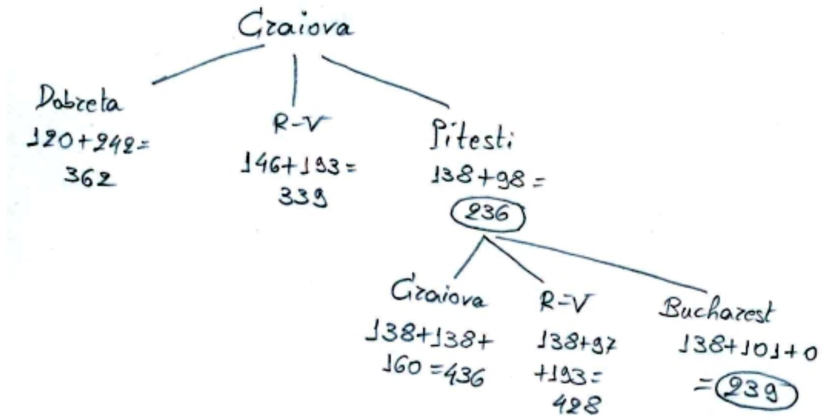


Straight–line distance to Bucharest	
Arad	366
Bucharest	0
Craiova	160
Dobreta	242
Eforie	161
Fagaras	178
Giurgiu	77
Hirsova	151
Iasi	226
Lugoj	244
Mehadia	241
Neamt	234
Oradea	380
Pitesti	98
Rimnicu Vilcea	193
Sibiu	253
Timisoara	329
Urziceni	80
Vaslui	199
Zerind	374

(Σχήμα από το βιβλίο των Russel και Norvig.)

(α) Σχεδιάστε το δέντρο αναζήτησης που κατασκευάζει ο αλγόριθμος μέχρι να ανακαλύψει το πρώτο μονοπάτι από την Craiova στο Βουκουρέστι. Το δέντρο να δείχνει και πώς αξιολογείται κάθε κόμβος.

Απάντηση:



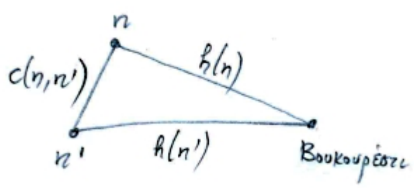
(β) Είναι αποδεκτή η ευρετική που χρησιμοποιούμε; Ναι ή όχι και γιατί;

Ναι, η ευρετική είναι αποδεκτή, γιατί επιστρέφει πάντα την ευθεία απόσταση ως την πόλη-στόχο, που είναι υπο-εκτίμηση της πραγματικής (οδικής) απόστασης.

(γ) Μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι ο αλγόριθμος θα ανακαλύπτει πάντα το συντομότερο μονοπάτι προς το Βουκουρέστι, από όποια πόλη του χάρτη και αν ξεκινήσουμε; Ναι ή όχι και γιατί;

Τα κόστη των μεταβάσεων είναι πάντα θετικά, ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης είναι πεπερασμένος και ξέρουμε ότι τότε ο A* είναι πλήρης, δηλαδή βρίσκει πάντα λύση αν υπάρχει. Εδώ υπάρχει πάντα λύση (υπάρχει πάντα ένα μονοπάτι μέχρι το Βουκουρέστι), επομένως βρίσκει πάντα λύση. Η λύση που βρίσκει είναι και βέλτιστη (δηλαδή βρίσκει το συντομότερο μονοπάτι), γιατί η ευρετική είναι αποδεκτή και ξέρουμε ότι με αποδεκτή ευρετική ο A* είναι βέλτιστος.

(δ) Είναι συνεπής η ευρετική που χρησιμοποιούμε; Ναι ή όχι και γιατί;

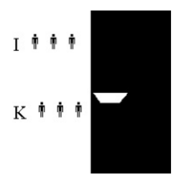


Ναι, γιατί για κάθε κόμβο (πόλη) n στον οποίο βρισκόμαστε, η ευρετική εκτίμηση, δηλαδή η ευθεία απόσταση από τον n ως το στόχο (το Βουκουρέστι) είναι πάντα μικρότερη από (ή ίση με) την πραγματική (οδική, άρα μεγαλύτερη από την ευθεία) απόσταση από τον n ως έναν άλλο γειτονικό κόμβο n' (άλλη γειτονική πόλη) συν την ευρετική (ευθεία απόσταση) από τον n' ως το στόχο. Δηλαδή ισχύει $h(n) \leq c(n,n') + h(n')$.

(ε) Αν προσθέσουμε κλειστό σύνολο, μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι ο αλγόριθμος θα ανακαλύπτει πάντα το συντομότερο μονοπάτι προς το Βουκουρέστι, από όποια πόλη του χάρτη και αν ξεκινήσουμε; Ναι ή όχι και γιατί;

Ναι, γιατί με συνεπή ευρετική ο A* παραμένει βέλτιστος ακόμα και όταν χρησιμοποιούμε κλειστό σύνολο.

4.3. Θεωρήστε ότι στο πρόβλημα των κανιβάλων και των ιεραποστόλων υπάρχουν αρχικά τρεις κανίβαλοι και τρεις ιεραπόστολοι στην αριστερή όχθη του ποταμού. Στόχος μας είναι να μεταφέρουμε με τη βάρκα όλους τους ανθρώπους στη δεξιά όχθη. Η βάρκα χωρά το πολύ δύο άτομα και δεν μπορεί να μετακινηθεί χωρίς επιβάτες. Δεν επιτρέπεται ο αριθμός των κανιβάλων σε κάποια όχθη να υπερβεί ποτέ τον αριθμό των ιεραποστόλων στην ίδια όχθη.



Οι δυνατές κινήσεις σε κάθε κατάσταση είναι η μετακίνηση ενός ή δύο ανθρώπων με τη βάρκα στην απέναντι όχθη. Λύση είναι κάθε ακολουθία κινήσεων που πετυχαίνει τον επιθυμητό στόχο. Το κόστος μιας λύσης είναι ο συνολικός αριθμός μετακινήσεων της βάρκας.

(α) Αφαιρούμε τον περιορισμό που δεν επιτρέπει ο αριθμός των κανιβάλων σε κάποια όχθη να υπερβεί τον αριθμό των ιεραποστόλων στην ίδια όχθη.

(α1) Ποιος είναι (ως συνάρτηση του n) ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων μέχρι το στόχο (την τελική κατάσταση), αν βρισκόμαστε σε κατάσταση όπου η βάρκα βρίσκεται **δεξιά** (επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένας άνθρωπος στη δεξιά όχθη) και υπάρχουν συνολικά $n > 0$ άνθρωποι στην **αριστερή** όχθη; Εξηγήστε τον υπολογισμό σας.

Στην περίπτωση αυτή, η βέλτιστη ακολουθία κινήσεων είναι να πάει ένας άνθρωπος που βρίσκεται στα δεξιά τη βάρκα αριστερά, να επιστρέψει δεξιά με δύο ανθρώπους κ.ο.κ. μέχρι να έχουν έρθει όλοι οι άνθρωποι στα δεξιά, κάτι που απαιτεί $2 \cdot n$ κινήσεις (διασχίσεις).

(α2) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων μέχρι το στόχο, αν βρισκόμαστε σε κατάσταση όπου η βάρκα βρίσκεται **αριστερά** και υπάρχουν συνολικά $n > 0$ άνθρωποι στην **αριστερή** όχθη; Δώστε δύο ξεχωριστές απαντήσεις για $n = 1$ και $n > 1$; Εξηγήστε τον υπολογισμό σας.

Αν $n = 1$, τότε προφανώς χρειάζεται μόνο μία διάσχιση. Αν $n > 1$, τότε χρειάζονται $2 \cdot (n - 1) - 1 = 2n - 3$ διασχίσεις· για $n = 2$, προφανώς χρειάζεται πάλι μόνο μία διάσχιση, όσες προβλέπει σωστά ο τύπος· για $n = 3$, η βάρκα πρέπει να πάει δεξιά με δύο ανθρώπους, να γυρίσει αριστερά με έναν και να ξαναπάει δεξιά πάλι με δύο, συνολικά 3 διασχίσεις, όσες προβλέπει ο τύπος κ.ο.κ.

(β) Αφαιρούμε τώρα και τον περιορισμό ότι στη βάρκα χωράνε το πολύ δύο άτομα.

(β1) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων μέχρι το στόχο, αν βρισκόμαστε σε κατάσταση όπου η βάρκα βρίσκεται **δεξιά** και υπάρχουν συνολικά $n > 0$ άνθρωποι στην **αριστερή** όχθη; Εξηγήστε τον υπολογισμό σας.

Στην περίπτωση αυτή πρέπει η βάρκα να πάει αριστερά με έναν επιβάτη (ή και περισσότερους) και κατόπιν να γυρίσει δεξιά με όλους τους ανθρώπους της αριστερής όχθης, επομένως δύο κινήσεις.

(β2) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων μέχρι το στόχο, αν βρισκόμαστε σε κατάσταση όπου η βάρκα βρίσκεται **αριστερά** και υπάρχουν συνολικά $n > 0$ άνθρωποι στην **αριστερή** όχθη; Εξηγήστε τον υπολογισμό σας.

Προφανώς αρκεί μία διάσχιση.

(γ) Επιστρέφουμε στο αρχικό πρόβλημα, όπου δεν έχει αφαιρεθεί κανένας περιορισμός. Βασιζόμενοι στις απαντήσεις που δώσατε στα σκέλη (α) και (β), γράψτε τους τύπους δύο **αποδεκτών** ευρετικών συναρτήσεων $h_1(s)$ και $h_2(s)$, για κάθε δυνατή κατάσταση s του αρχικού προβλήματος. Εξηγήστε πώς προέκυψαν οι δύο ευρετικές και γιατί είναι αποδεκτές.

Ως $h_1(s)$ και $h_2(s)$ θα χρησιμοποιήσουμε τα ακριβή κόστη των βέλτιστων λύσεων από την s ως την τελική κατάσταση στα απλοποιημένα προβλήματα των σκελών (α) και (β) αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι το ακριβές βέλτιστο κόστος λύσης σε ένα απλοποιημένο πρόβλημα (που έχει προκύψει με αφαίρεση περιορισμών) είναι αποδεκτή ευρετική του αρχικού προβλήματος (αφού στο αρχικό πρόβλημα απαιτούνται περισσότερες ή το πολύ ίσες κινήσεις).

Έστω n ο συνολικός αριθμός ανθρώπων που στην κατάσταση s βρίσκονται στην αριστερή όχθη. Τότε:

$h_1(s) =$ *$2 \cdot n$, αν η βάρκα βρίσκεται δεξιά στην s και $n > 0$,*
1, αν η βάρκα βρίσκεται αριστερά στην s και $n = 1$,
$2 \cdot n - 3$, αν η βάρκα βρίσκεται αριστερά στην s και $n > 1$,
0, αν $n = 0$.

$h_2(s) =$ *2, αν η βάρκα βρίσκεται δεξιά στην s και $n > 0$,*
1, αν η βάρκα βρίσκεται αριστερά στην s και $n > 0$,
0, αν $n = 0$.

(δ) Αν χρησιμοποιήσουμε μία από τις δύο ευρετικές του σκέλους (γ) και τον αλγόριθμο A* χωρίς κλειστό σύνολο, είναι σίγουρο ότι θα βρούμε λύση; Γιατί;

Ναι, γιατί το κόστος κάθε κίνησης είναι θετικό (>0) και ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης (αριθμός δυνατών κινήσεων σε κάθε κατάσταση) είναι πεπερασμένος. Στην περίπτωση αυτή γνωρίζουμε ότι ο A είναι πλήρης, δηλαδή αν υπάρχει λύση, σίγουρα τη βρίσκει. Και γνωρίζουμε ότι το πρόβλημα έχει λύση (βλ. διαφάνειες).*

(ε) Είναι σίγουρο ότι η λύση που θα βρούμε στο σκέλος (δ) θα είναι βέλτιστη; Γιατί;

Ναι, γιατί γνωρίζουμε ότι με αποδεκτή ευρετική ο A είναι βέλτιστος.*

(στ) Είναι σίγουρο ότι η λύση που θα βρούμε στο σκέλος (δ) θα είναι βέλτιστη ακόμη κι αν χρησιμοποιήσουμε κλειστό σύνολο; Γιατί;

Ναι, γιατί γνωρίζουμε (βλ. διαφάνειες) ότι όταν το κόστος κάθε μετάβασης είναι θετικό, οι ευρετικές που προκύπτουν με αφαίρεση περιορισμών είναι συνεπείς. Και με συνεπή ευρετική, γνωρίζουμε ότι ο A παραμένει βέλτιστος, ακόμα και όταν χρησιμοποιείται κλειστό σύνολο.*

(ζ) Ποια από τις δύο ευρετικές του σκέλους (γ) είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε και γιατί;

Είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε την h_1, γιατί είναι μεν και οι δύο αποδεκτές, αλλά η h_1 κυριαρχεί επί της h_2 ($h_1(s) \geq h_2(s)$, για κάθε s), που σημαίνει ότι δίνει ακριβέστερες προβλέψεις (προβλέπει πιο καλά το ακριβές βέλτιστο κόστος λύσης από την s ως την τελική κατάσταση), κάτι που γνωρίζουμε ότι βοηθά τον A να εστιαστεί σε μικρότερο τμήμα του χώρου αναζήτησης.*

4.4. Σε ένα πανεπιστημιακό τμήμα πρέπει να κατασκευαστεί το πρόγραμμα των εξετάσεων. Υπάρχουν n μαθήματα προς εξέταση ($M_1, \ldots, M_n$), k διαθέσιμες ημέρες εξετάσεων ($H_1, \ldots, H_k$), επιτρέπεται να εξεταστεί το πολύ ένα μάθημα ανά ημέρα και κάθε μάθημα πρέπει να εξεταστεί ακριβώς μία ημέρα. Θεωρήστε ότι $n < k$, οπότε τουλάχιστον μία ημέρα μένει πάντα ελεύθερη. Υπάρχουν, επίσης, r περιορισμοί ($\Pi_1, \ldots, \Pi_r$), κάθε ένας από τους οποίους απαγορεύει να εξεταστεί ένα συγκεκριμένο μάθημα μία συγκεκριμένη ημέρα (π.χ. ο Π_{18} ενδέχεται να απαγορεύει να εξεταστεί το M_{14} την H_7, ο Π_{19} ενδέχεται να απαγορεύει να εξεταστεί το M_{14} την H_{12}). Θεωρήστε ότι υπάρχει πάντα πρόγραμμα εξετάσεων που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς. Εξηγήστε πώς θα μπορούσε να κατασκευαστεί το πρόγραμμα των εξετάσεων χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο A*, ξεκινώντας από ένα πρόγραμμα εξετάσεων που το κατασκευάζει ένας άνθρωπος και το οποίο καθορίζει τις ημέρες εξέτασης όλων των μαθημάτων, αλλά δεν ικανοποιεί ενδεχομένως όλους τους περιορισμούς.

(α) Τι θα παρίστανε κάθε κατάσταση του χώρου αναζήτησης και πώς;

Κάθε κατάσταση θα ήταν ένα διάνυσμα $<\theta_1, ..., \theta_k>$, με $\theta_i \in \{0, 1, 2, 3, ..., n\}$. Αν $\theta_i = m$, την H_i εξετάζεται το M_m. Αν $\theta_i = 0$, την H_i δεν εξετάζεται μάθημα. Για κάθε μάθημα, το διάνυσμα θα καθόριζε ακριβώς μία ημέρα εξέτασης.

(β) Ποιοι θα ήταν οι τελεστές μετάβασης; (Ενδέχεται να χρειάζεται μόνο ένας.)

Μετακίνηση ενός μαθήματος M_m από την ημέρα του H_i σε κενή ημέρα H_j. Δηλαδή ενώ στην τρέχουσα κατάσταση $\theta_i = m$ και $\theta_j = 0$, στη νέα κατάσταση $\theta_i = 0$ και $\theta_j = m$, χωρίς άλλη αλλαγή στη νέα κατάσταση.

(γ) Ποια θα ήταν μια *αποδεκτή* ευρετική συνάρτηση;

Ο συνολικός αριθμός μαθημάτων που παραβιάζουν περιορισμούς Π_i στο πρόγραμμα εξετάσεων της κατάστασης που αξιολογείται.

(δ) Γιατί είναι αποδεκτή η ευρετική συνάρτηση που προτείνατε στο σκέλος (γ); (Θεωρήστε δεδομένο ότι οι ευρετικές που προκύπτουν με αφαίρεση περιορισμών είναι αποδεκτές.)

Επιτρέπουμε να εξεταστούν περισσότερα του ενός μαθήματα ανά ημέρα, οπότε ο τελεστής μετάβασης μπορεί να μετακινήσει ένα μάθημα σε οποιαδήποτε ημέρα, ακόμη και μη κενή. Τότε το ακριβές βέλτιστο κόστος λύσης (ο ελάχιστος αριθμός μεταβάσεων) ισούται με τον αριθμό μαθημάτων που παραβιάζουν περιορισμούς Π_i: κάθε τέτοιο μάθημα πρέπει να μετακινηθεί (με μία κίνηση) σε ημέρα όπου δεν παραβιάζει περιορισμούς. Το ακριβές βέλτιστο κόστος λύσης του απλοποιημένου προβλήματος είναι αποδεκτή ευρετική του αρχικού προβλήματος.

(ε) Είναι σίγουρο ότι θα καταφέρουμε να βρούμε πρόγραμμα εξετάσεων που να ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς και γιατί;

Ναι, γιατί υπάρχει πρόγραμμα που δεν παραβιάζει περιορισμούς (υπάρχει τελική κατάσταση), με τον τελεστή μετάβασης (β) μπορούμε να φτάσουμε πάντα σε αυτό από την αρχική κατάσταση (υπάρχει λύση) και ο A* είναι πλήρης (αφού εδώ δεν έχουμε ποτέ άπειρα παιδιά και το κόστος, που εδώ είναι ο αριθμός μεταβάσεων, είναι αύξουσα συνάρτηση του βάθους).

(στ) Τι ακριβώς εξασφαλίζουμε χρησιμοποιώντας αποδεκτή ευρετική σε αυτό το πρόβλημα; Είναι χρήσιμο αυτό και γιατί;

Εξασφαλίζουμε ότι ο A* θα βρει τη βέλτιστη λύση, το συντομότερο μονοπάτι από το αρχικό σε πρόγραμμα που δεν παραβιάζει περιορισμούς. Αυτό δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμο, γιατί μας ενδιαφέρει κυρίως να βρούμε πρόγραμμα που δεν παραβιάζει περιορισμούς, όχι πόσες τροποποιήσεις του αρχικού προγράμματος χρειάστηκαν. Όσο λιγότερες είναι οι τροποποιήσεις, όμως, τόσο ευκολότερο ίσως είναι να τις ελέγξει όποιος έφτιαξε το αρχικό πρόγραμμα και να τις αποδεχθεί.

4.5. α) Αν **υπάρχει** λύση και ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης είναι πεπερασμένος και το σύνολο καταστάσεων είναι πεπερασμένο και το κόστος λύσης είναι αύξουσα συνάρτηση του βάθους (και μόνο), ο αλγόριθμος **A* με κλειστό σύνολο και αποδεκτή αλλά όχι συνεπή ευρετική**:

___βρίσκει πάντα λύση και μάλιστα βέλτιστη ___δεν βρίσκει πάντα λύση
_X_βρίσκει πάντα λύση, αλλά όχι σίγουρα βέλτιστη.

Αφού το κόστος λύσης είναι αύξουσα συνάρτηση του βάθους (και μόνο), το κόστος λύσης αυξάνεται κάθε φορά που κάνουμε μια μετάβαση, άρα το κόστος κάθε μετάβασης είναι θετικό.

Γνωρίζουμε ότι αν ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης είναι πεπερασμένος και το κόστος κάθε μετάβασης είναι θετικό, ο A^* είναι πλήρης. Επομένως, αφού υπάρχει λύση, θα την βρει. Όταν χρησιμοποιείται αποδεκτή ευρετική χωρίς κλειστό σύνολο, ξέρουμε επίσης ότι ο A^* είναι βέλτιστος. Με κλειστό σύνολο, όμως, αν η ευρετική είναι απλά αποδεκτή και όχι συνεπής, τότε ο A^* δεν επιστρέφει σίγουρα τη βέλτιστη λύση, γιατί ενδέχεται το μονοπάτι της βέλτιστης λύσης να πριονίζεται λόγω της χρήσης του κλειστού συνόλου. Επομένως, στην περίπτωση αυτού του ερωτήματος, ο A^* βρίσκει πάντα λύση, αλλά όχι σίγουρα βέλτιστη λύση.

β) Αν **υπάρχει** λύση και ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης είναι πεπερασμένος και το σύνολο καταστάσεων είναι πεπερασμένο και το κόστος λύσης είναι αύξουσα συνάρτηση του βάθους (και μόνο), ο αλγόριθμος **A* με κλειστό σύνολο και συνεπή ευρετική**:

_X_βρίσκει πάντα λύση και μάλιστα βέλτιστη ___δεν βρίσκει πάντα λύση

___βρίσκει πάντα λύση, αλλά όχι σίγουρα βέλτιστη.

Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, στην περίπτωση αυτή ο A^* είναι πλήρης και άρα, αφού υπάρχει λύση, θα την βρει. Ξέρουμε, επίσης, ότι με συνεπή ευρετική, ο A^* παραμένει βέλτιστος ακόμα και όταν χρησιμοποιείται κλειστό σύνολο. Επομένως, θα επιστρέψει τη βέλτιστη λύση.

γ) Αν **δεν** υπάρχει λύση και ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης είναι πεπερασμένος και το σύνολο καταστάσεων είναι πεπερασμένο, ο αλγόριθμος **A* με κλειστό σύνολο και μη αποδεκτή ευριστική**:

_X_τερματίζει πάντα ___δεν τερματίζει ποτέ ___άλλοτε τερματίζει και άλλοτε δεν τερματίζει.

Αφού το σύνολο των (δυνατών) καταστάσεων είναι πεπερασμένο, τα μόνα άπειρα κλαδιά του δέντρου αναζήτησης που είναι δυνατόν να προκύψουν αντιστοιχούν σε κύκλους του γράφου καταστάσεων. Αφού, όμως, χρησιμοποιείται κλειστό σύνολο, οι άπειρες επαναλήψεις που εμπεριέχονται σε αυτά τα άπειρα κλαδιά θα πριονιστούν. Επομένως, αφού και ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης είναι πεπερασμένος, το δέντρο αναζήτησης που θα ψάξει ο A^* είναι πεπερασμένο. Αφού δεν υπάρχει λύση, ο A^* θα το ψάξει ολόκληρο και θα τερματίσει. Το ότι η ευρετική είναι μη αποδεκτή δεν παίζει ρόλο εδώ.

δ) Ο αλγόριθμος **A* χωρίς κλειστό σύνολο** έχει:

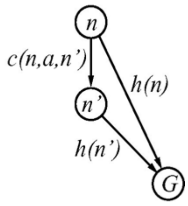
___καλύτερη _X_χειρότερη ___την ίδια

πολυπλοκότητα **χώρου** από/με τον αλγόριθμο **αναρρίχησης λόφου χωρίς κλειστό σύνολο**.

Χωρίς κλειστό σύνολο, ο αλγόριθμος αναρρίχησης λόφου κρατά σε κάθε βήμα του στη μνήμη το πολύ την τρέχουσα κατάσταση και τα b παιδιά της (τα οποία αξιολογεί, προκειμένου να επιλέξει την επόμενη κατάσταση στην οποία θα μεταβεί). Αντιθέτως, ο A^* κρατά στη μνήμη εν γένει πολλούς κόμβους του μετώπου της αναζήτησης (και τους προγόνους τους, αν θέλουμε να μας επιστρέψει το μονοπάτι της λύσης). Στη χειρότερη περίπτωση, μια ιδιαίτερα κακή ευρετική μπορεί να αναγκάσει τον A^* να κρατήσει (π.χ. αμέσως πριν τερματίσει ανεπιτυχώς) στο μέτωπο της αναζήτησης όλους τους εκθετικά πολλούς (ως προς το βάθος) κόμβους του μέγιστου βάθους.

4.6. Αποδείξτε ότι στο πρόβλημα των πλακιδίων η ευρετική που μετρά τον αριθμό πλακιδίων εκτός θέσης είναι συνεπής. *Υπόδειξη*: Σκεφτείτε πώς μεταβάλλεται η τιμή $h(n)$ της ευρετικής όταν από έναν κόμβο n μεταβούμε σε έναν άλλο κόμβο n' όπου το πλακίδιο που μετακινήθηκε (i) μπήκε στη θέση του ή (ii) ήταν εκτός θέσης και παρέμεινε εκτός θέσης ή (iii) ήταν στη θέση του και μετακινήθηκε σε λάθος θέση.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι αν μεταβούμε από έναν κόμβο n σε έναν άλλον οποιονδήποτε κόμβο n' (χρησιμοποιώντας οποιονδήποτε τελεστή μετάβασης a, δηλαδή μετακίνηση πλακιδίου πάνω, κάτω, δεξιά ή αριστερά σε κενό τετράγωνο), τότε ισχύει η ανισότητα $h(n) \leq c(n, a, n') + h(n')$, όπου $c(n, a, n')$ το κόστος της μετακίνησης και $h(n), h(n')$ οι τιμές της *ευρετικής στους κόμβους* n *και* n' *αντίστοιχα. Υπάρχουν τρία δυνατά ενδεχόμενα, που αναφέρονται και στην υπόδειξη.*



(i) Η κίνηση μετακινεί στη σωστή θέση ένα πλακίδιο που βρισκόταν σε λανθασμένη θέση. Τότε $h(n') = h(n) - 1$ *και άρα* $c(n, a, n') + h(n') = 1 + h(n) - 1 = h(n)$*, οπότε η ανισότητα ισχύει (περίπτωση ισότητας).*

(ii) Η κίνηση μετακινεί σε λανθασμένη θέση ένα πλακίδιο που βρισκόταν στη σωστή θέση. Τότε $h(n') = h(n) + 1$ *και άρα* $c(n, a, n') + h(n') = 1 + h(n) + 1 \geq h(n)$*, οπότε η ανισότητα πάλι ισχύει.*

(iii) Η κίνηση μετακινεί ένα πλακίδιο από λανθασμένη θέση σε λανθασμένη θέση. Τότε $h(n') = h(n)$ *και* $c(n, a, n') + h(n') = 1 + h(n) \geq h(n)$*, οπότε η ανισότητα πάλι ισχύει.*

4.7. Αποδείξτε ότι οι ευρετικές που προκύπτουν με αφαίρεση περιορισμών είναι συνεπείς, αν τα κόστη των μεταβάσεων είναι πάντα ≥ 0 (και ίδια στο αρχικό και στο χαλαρωμένο πρόβλημα).

Όταν χρησιμοποιούμε την τεχνική αφαίρεσης περιορισμών, η ευρετική $h(n)$ *του αρχικού προβλήματος που κατασκευάζουμε είναι το ακριβές βέλτιστο κόστος λύσης του απλοποιημένου προβλήματος (του προβλήματος που προκύπτει με αφαίρεση περιορισμών από το αρχικό). Το ακριβές βέλτιστο κόστος λύσης, όμως, ενός προβλήματος (άρα και του απλοποιημένου) ικανοποιεί πάντα την τριγωνική ανισότητα του ορισμού της συνεπούς ευρετικής, για κάθε δυνατή μετάβαση (κίνηση) του (απλοποιημένου) προβλήματος, αν τα κόστος κάθε μετάβασης είναι πάντα* ≥ 0*. Τότε, επειδή οι δυνατές μεταβάσεις του αρχικού προβλήματος είναι υποσύνολο των δυνατών μεταβάσεων του απλοποιημένου (και θεωρούμε πως τα κόστη των μεταβάσεων είναι ίδια στο αρχικό και στο απλοποιημένο πρόβλημα), η* $h(n)$ *(το ακριβές κόστος του απλοποιημένου προβλήματος, που είναι η ευρετική του αρχικού) ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα του ορισμού της συνεπούς ευρετικής για κάθε δυνατή μετάβαση του αρχικού προβλήματος. Επομένως, η* $h(n)$ *είναι συνεπής στο αρχικό πρόβλημα.*