



Τεχνητή Νοημοσύνη

21η διάλεξη (2025-26)

Ίων Ανδρουτσόπουλος

<http://www.aueb.gr/users/ion/>

Τι θα ακούσετε σήμερα

- Σημασιολογία πρωτοβάθμιας κατηγορηματικής λογικής.

Υπενθύμιση: συντακτικό ΠΚΛ

τύπος $\rightarrow$ ατομικός_τύπος

| (τύπος σύνδεσμος τύπος)

| ποσοδείκτης μεταβλητή τύπος

| $\neg$ τύπος

ατομικός_τύπος $\rightarrow$ σύμβολο_σχέσης(όρος, ...) | όρος = όρος

όρος $\rightarrow$ σταθερά | μεταβλητή |

σύμβολο_συνάρτησης(όρος, ...)

σύνδεσμος $\rightarrow \wedge \mid \vee \mid \Rightarrow \mid \Leftrightarrow$

ποσοδείκτης $\rightarrow \forall \mid \exists$

σταθερά $\rightarrow A \mid X_1 \mid \text{John} \mid \text{Mary} \mid \dots$

μεταβλητή $\rightarrow a \mid x \mid s \mid \dots$

σύμβολο_σχέσης $\rightarrow \text{IsFatherOf} \mid \text{HasColor} \mid \text{IsKing} \mid \dots$

σύμβολο_συνάρτησης $\rightarrow \text{FatherOf} \mid \text{LeftLeg} \mid \dots$

Τα σύνολα των
σταθερών, μεταβλητών,
συμβόλων σχέσεων,
συμβόλων συναρτήσεων
θεωρούμε ότι είναι ανά
δύο ξένα.

Μοντέλα της ΠΚΛ

- Η ΠΚΛ θεωρεί ότι ο κόσμος αποτελείται από **αντικείμενα** και **σχέσεις**.
 - **Αντικείμενα**: συγκεκριμένοι άνθρωποι, σπίτια, χρώματα, αριθμοί, αιώνες...
 - **Σχέσεις**: η σχέση αδελφού, ιδιοκτησίας, ...
- Μπορούμε να σκεφτόμαστε τις **σχέσεις** ως **σύνολα από n -άδες** αντικειμένων του κόσμου.
 - Η σχέση αδελφού (σχέση 2 ορισμάτων):
 $\{ \langle \text{† Γιάννης}, \text{† Μαρία} \rangle, \langle \text{† Γιώργος}, \text{† Άννα} \rangle, \dots \}$
 - Η σχέση που συνδέει τους γονείς με κάθε τους παιδί (σχέση 3 ορισμάτων):
 $\{ \langle \text{† Γιάννης}, \text{† Μαρία}, \text{† Άννα} \rangle, \langle \text{† Γιάννης}, \text{† Μαρία}, \text{† Δημήτρης} \rangle, \langle \text{† Γιώργος}, \text{† Άννα}, \text{† Κώστας} \rangle, \dots \}$
- **Ιδιότητες**: π.χ. η ιδιότητα να είναι κάποιος άνθρωπος, έξυπνος, ...
 - Μπορούμε να σκεφτόμαστε τις ιδιότητες ως **σχέσεις ενός ορίσματος**, επομένως ως σύνολα αντικειμένων (1-άδων).
 - Η ιδιότητα άνθρωπος: $\{ \text{† Γιάννης}, \text{† Μαρία}, \text{† Άννα}, \text{† Γιώργος}, \dots \}$

Μοντέλα της ΠΚΛ – συνέχεια

- Κάποιες από τις σχέσεις είναι **συναρτήσεις**.
 - Αν μια σχέση είναι συνάρτηση, **δεν μπορεί να υπάρχουν περισσότερα του ενός αποτελέσματα** για τα ίδια υπόλοιπα ορίσματα.
 - Η συνάρτηση μιας μεταβλητής που επιστρέφει τον πατέρα κάθε ανθρώπου (σχέση 2 ορισμάτων, το 2ο όρισμα είναι το αποτέλεσμα):
 $\{ \langle \text{† Γιάννης}, \text{† Γιώργος} \rangle, \langle \text{† Άννα}, \text{† Γιώργος} \rangle, \dots \}$
 - Η συνάρτηση δύο μεταβλητών που επιστρέφει το πρώτο παιδί δύο γονέων (σχέση 3 ορισμάτων, το 3ο είναι το αποτέλεσμα):
 $\{ \langle \text{† Γιάννης}, \text{† Μαρία}, \text{† Άννα} \rangle, \langle \text{† Γιώργος}, \text{† Άννα}, \text{† Δημήτρης} \rangle, \dots \}$
- Κάθε **μοντέλο** της ΠΚΛ αποτελείται από τα αντικείμενα και τις σχέσεις ενός κόσμου.
 - Το μοντέλο είναι μια αφηρημένη παράσταση του κόσμου.
- Οι **λογικές υψηλότερου βαθμού** (higher order logics) επιτρέπουν και σχέσεις μεταξύ σχέσεων (και ιδιότητες σχέσεων).
 - Δηλαδή επιτρέπουν οι σχέσεις να χρησιμοποιηθούν και ως αντικείμενα.

Μοντέλα της ΠΚΛ – συμβολισμοί

- **D**: το σύνολο όλων των **αντικειμένων** του κόσμου.
- **R_n**: το σύνολο όλων των **σχέσεων** η ορισμάτων του κόσμου.
 - Μια σχέση είναι ένα σύνολο n-άδων αντικειμένων του D.
 - **R₁**: οι **ιδιότητες** του κόσμου (σχέσεις ενός ορίσματος).
- **F_n**: Το υποσύνολο του **R_{n+1}** που είναι **συναρτήσεις**.
 - Συναρτήσεις n μεταβλητών (το n+1-στό όρισμα της σχέσης είναι το αποτέλεσμα της συνάρτησης).
 - Π.χ. η συνάρτηση που επιστρέφει το πρώτο παιδί δύο γονέων (συνάρτηση δύο μεταβλητών) $\in F_2 \subset R_3$.

Ερμηνεία της ΠΚΛ

- Μια ερμηνεία της ΠΚΛ καθορίζει τι παριστάνουν τα σύμβολα της ΠΚΛ σε έναν κόσμο.
 - Η ερμηνεία είναι μια συνάρτηση i από **σύμβολα** της ΠΚΛ σε **στοιχεία του μοντέλου**.
- Απεικονίζει:
 - Κάθε **σταθερά** σε ένα **στοιχείο του D** (σε ένα αντικείμενο).
 - Π.χ. τη σταθερά John στο αντικείμενο $\P$ Γιάννης.
 - Κάθε **σύμβολο σχέσης** n ορισμάτων σε ένα **στοιχείο του R_n** (σε μια σχέση n ορισμάτων, σύνολο n -άδων αντικειμένων).
 - Π.χ. το IsBrotherOf στη σχέση $\{ \langle \P \text{ Γιάννης}, \P \text{ Μαρία} \rangle, \langle \P \text{ Γιώργος}, \P \text{ Άννα} \rangle, \dots \}$ του R_2 .
 - Κάθε **σύμβολο συνάρτησης** n μεταβλητών σε ένα **στοιχείο του F_n** (σε μία συνάρτηση n μεταβλητών).
 - Π.χ. το FirstDaughterOf στη συνάρτηση $\{ \langle \P \text{ Γιάννης}, \P \text{ Μαρία}, \P \text{ Άννα} \rangle, \dots \}$.

Ανάθεση τιμών

- Μια ανάθεση τιμών καθορίζει **τι παριστάνουν οι μεταβλητές** της ΠΚΛ.
 - Η ερμηνεία δεν το καθορίζει αυτό.
 - Η ανάθεση τιμών είναι μια συνάρτηση που απεικονίζει **κάθε μεταβλητή** της ΠΚΛ **σε ένα αντικείμενο** του D.
 - Π.χ. την x στο αντικείμενο $\uparrow$ Γιάννης.
- Συμβολισμός που θα μας χρειαστεί:
 - Αν g είναι μια ανάθεση τιμών, τότε με $g[\beta \rightarrow o]$ συμβολίζουμε μια άλλη ανάθεση τιμών, που είναι η ίδια με την g εκτός του ότι απεικονίζει τη μεταβλητή β στο αντικείμενο o .
 - Π.χ. η $g[y \rightarrow \uparrow \text{Μαρία}]$ είναι ακριβώς ίδια με την g , αλλά απεικονίζει την y στο αντικείμενο $\uparrow \text{Μαρία}$.
- Θεωρούμε ότι κάθε ποσοδείκτης εισάγει τη δική του μεταβλητή. (Απλοποιεί τον ορισμό της ανάθεσης τιμών.)

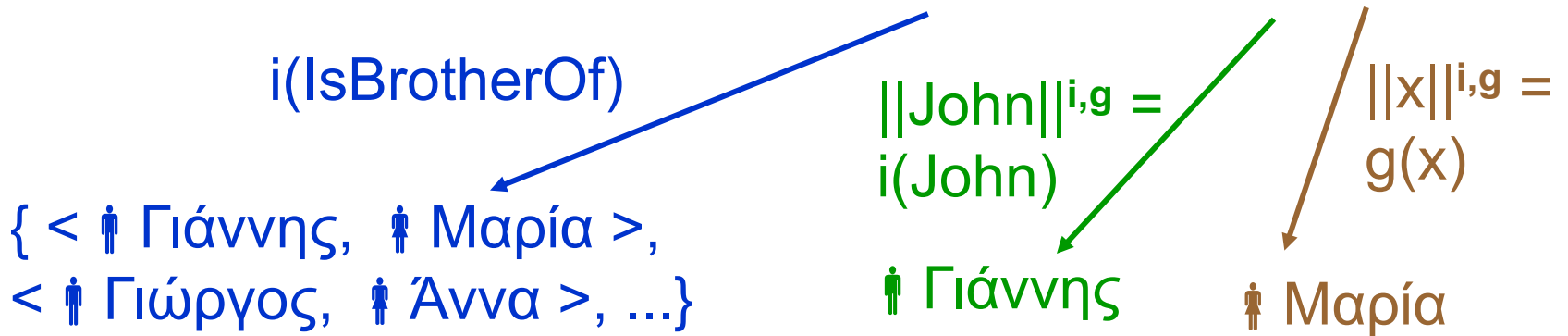
Σημασιολογία ΠΚΛ

- $\|\xi\|^{i,g}$: η σημασία της έκφρασης ξ με την ερμηνεία i και την ανάθεση τιμών g . (Παραλείπουμε το M για συντομία.)
- Αν κ **σταθερά**, $\|\kappa\|^{i,g} = i(\kappa)$.
- Αν β **μεταβλητή**, $\|\beta\|^{i,g} = g(\beta)$.
- Αν τ_1, τ_2 **όροι**, $\|\tau_1 = \tau_2\|^{i,g} = T$ (αληθές) αν $\|\tau_1\|^{i,g} = \|\tau_2\|^{i,g}$. Διαφορετικά F (ψευδές).
- Αν ϕ **τύπος**, $\|\neg\phi\|^{i,g} = T$ αν $\|\phi\|^{i,g} = F$. Διαφορετικά F .
- Αντίστοιχα οι ορισμοί για:
 - $\|(\phi \wedge \psi)\|^{i,g}, \|(\phi \vee \psi)\|^{i,g}, \|(\phi \Rightarrow \psi)\|^{i,g}, \|(\phi \Leftrightarrow \psi)\|^{i,g}$.
 - Όπως στην προτασιακή λογική.

Σημασιολογία ΠΚΛ – συνέχεια

- Αν $\sigma(\tau_1, \dots, \tau_n)$ **ατομικός τύπος**,
 - $\|\sigma(\tau_1, \dots, \tau_n)\|^{i,g} = T$, αν $\langle \|\tau_1\|^{i,g}, \dots, \|\tau_n\|^{i,g} \rangle \in i(\sigma)$.
 - Διαφορετικά F.

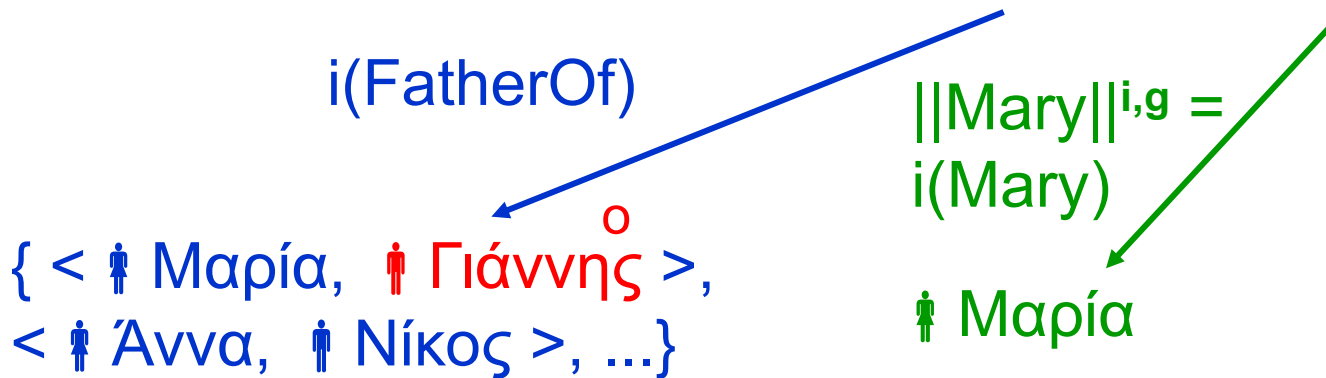
- Π.χ. ποια είναι η σημασία του $\text{IsBrotherOf}^{T_1, T_2}(\text{John}, x)$;



- Εξετάζουμε αν το $\langle \|\text{John}\|^{i,g}, \|x\|^{i,g} \rangle \in i(\text{IsBrotherOf})$, δηλαδή αν το $\langle \text{♂ Γιάννης}, \text{♀ Μαρία} \rangle \in i(\text{IsBrotherOf})$.

Σημασιολογία ΠΚΛ – συνέχεια

- Αν $\rho(\tau_1, \dots, \tau_n)$ συναρτησιακός όρος, τότε
 - $\|\rho(\tau_1, \dots, \tau_n)\|^{i,g} = o$,
 - όπου $\langle \|\tau_1\|^{i,g}, \dots, \|\tau_n\|^{i,g}, o \rangle \in i(\rho)$.
- Π.χ. ποια είναι η σημασία του $\text{FatherOf}(\text{Mary})$



Σημασιολογία ΠΚΛ – συνέχεια

Πρέπει ο φ να αληθεύει
όποιο αντικείμενο o κι αν
παριστάνει η μεταβλητή β .

- Αν β μεταβλητή και φ τύπος, τότε:
 - $\|\forall\beta \varphi\|^{i,g} = T$, αν για κάθε $o \in D$, $\|\varphi\|^{i,g[\beta \rightarrow o]} = T$.
 - $\|\exists\beta \varphi\|^{i,g} = T$, αν για κάποιο $o \in D$, $\|\varphi\|^{i,g[\beta \rightarrow o]} = T$.
 - Διαφορετικά F .

Πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον
ένα αντικείμενο o , ώστε όταν το
παριστάνει η β να αληθεύει ο φ .

Σημασιολογία ΠΚΛ – συνέχεια

- **Ελεύθερη μεταβλητή:**

- Εμφάνιση μεταβλητής που δε βρίσκεται μέσα στην εμβέλεια ποσοδείκτη που την εισάγει.

- Π.χ. $\forall x_1 (\text{IsCat}(x_1) \Rightarrow \text{Likes}(x_1, x_2))$

Ελεύθερες μεταβλητές.

Δεν είναι ελεύθερη.

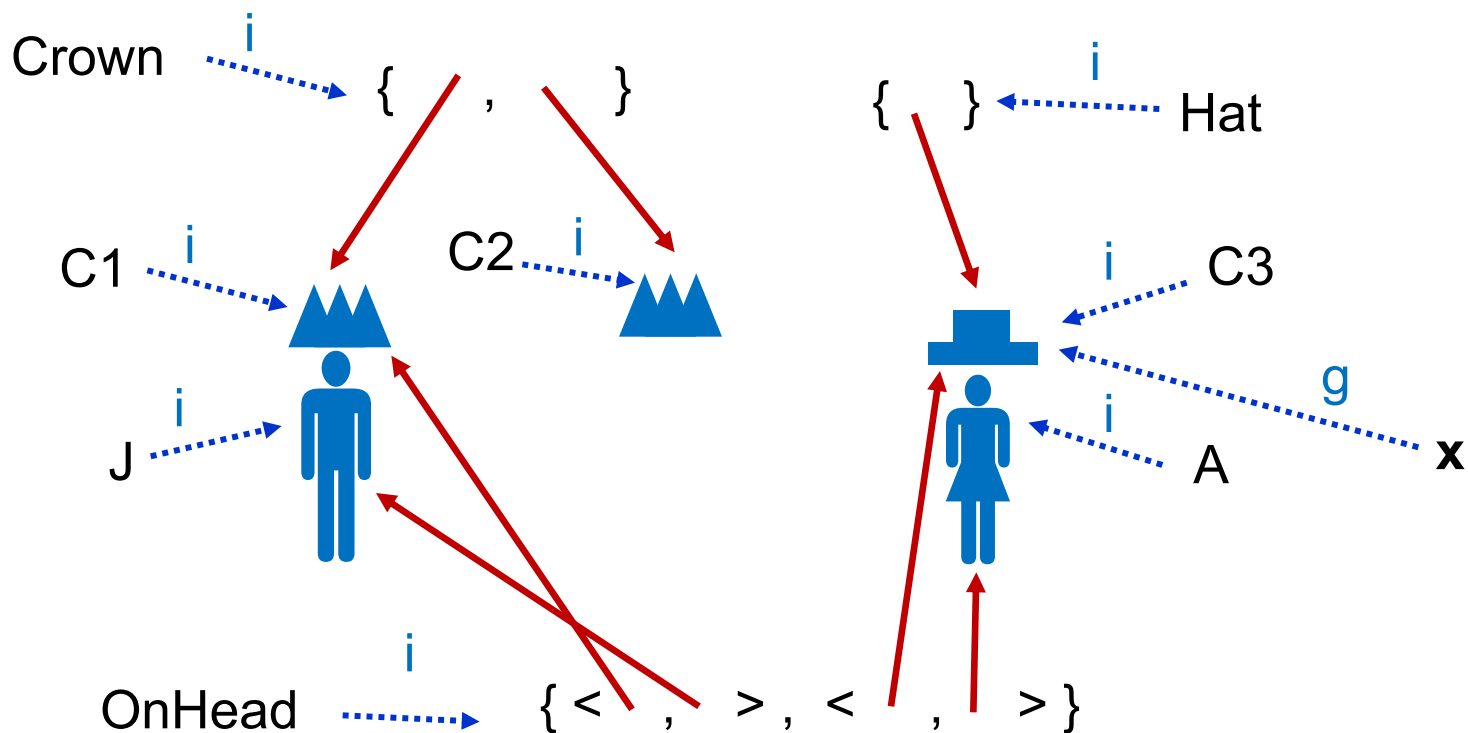
- Π.χ. $\exists x_1 (\text{IsCat}(x_1) \wedge (\text{IsDog}(x_2) \Rightarrow \forall x_2 (\text{Likes}(x_1, x_2))))$

- Για την παράσταση γνώσεων, θα χρησιμοποιούμε τύπους χωρίς ελεύθερες μεταβλητές.

- Αν ένας τύπος ϕ δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές, τότε το $\|\phi\|^{i,g}$ δεν εξαρτάται από την ανάθεση τιμών g .

- Γράφουμε απλά $\|\phi\|^i$.

Παράδειγμα

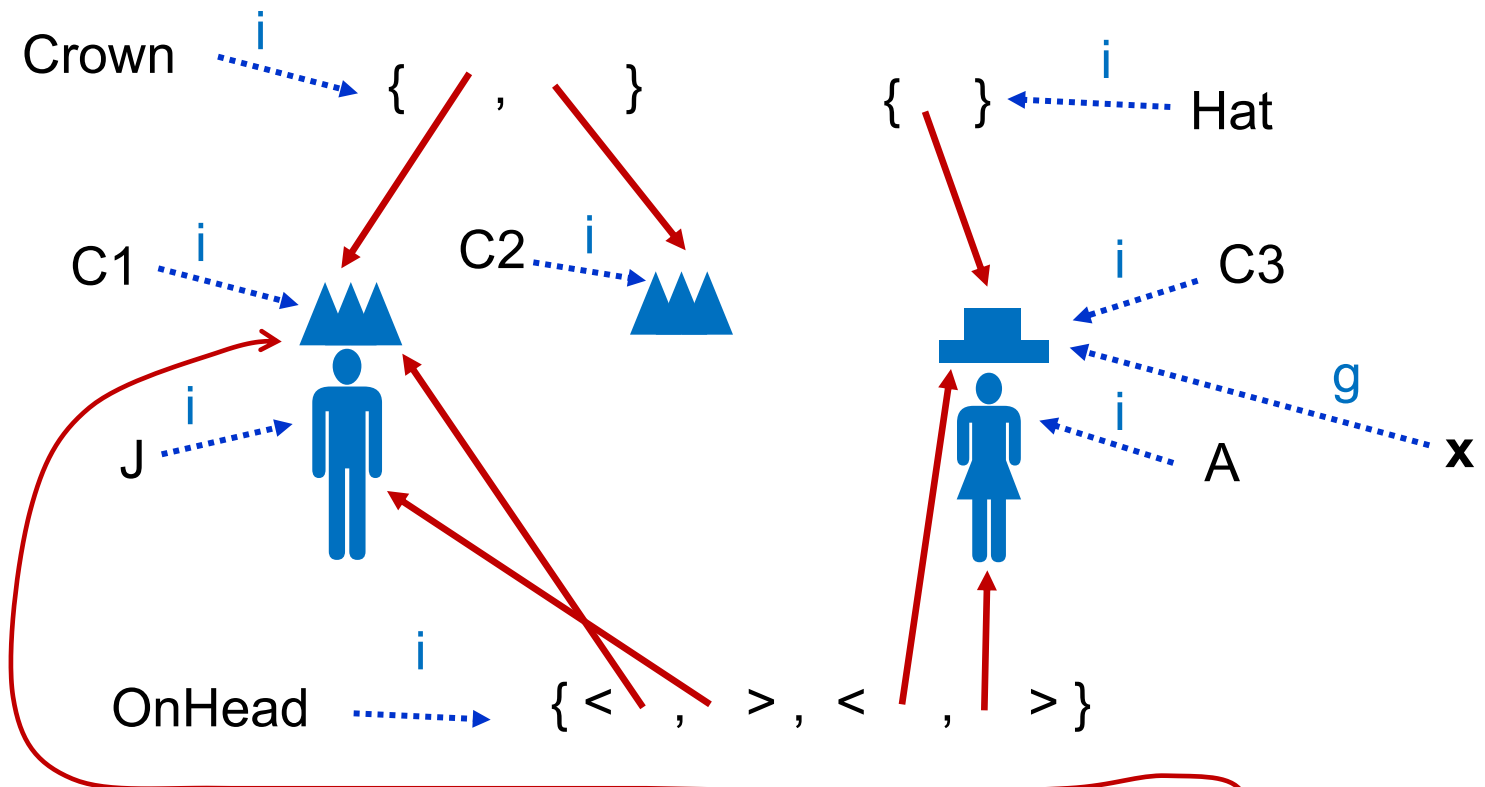


$$\| (\text{Crown}(C1) \wedge \text{OnHead}(C1, J)) \| ^i = T$$

$$\| (\text{Crown}(C2) \wedge \text{OnHead}(C2, J)) \| ^i = F$$

$$\| (\text{Hat}(C3) \wedge \text{OnHead}(C3, A)) \| ^i = T$$

Παράδειγμα – συνέχεια



$$\| (\text{Crown}(x) \wedge \text{OnHead}(x, J)) \|^{i,g} = \mathbf{F}$$

$$\| (\text{Crown}(x) \wedge \text{OnHead}(x, J)) \|^{i,g[x \rightarrow o]} = \mathbf{T}$$

$$\| \exists x (\text{Crown}(x) \wedge \text{OnHead}(x, J)) \|^{i} = \mathbf{T}$$

Τι σημαίνει $\psi \models \varphi$ στην ΠΚΛ;

- Στην ΠΚΛ, $\psi \models \varphi$ σημαίνει:

Για κάθε M, i, g :

αν $\|\psi\|^{M, i, g} = T$, τότε και $\|\varphi\|^{M, i, g} = T$.

- Αντίστοιχα στην ΠΚΛ, $\psi \equiv \varphi$ σημαίνει:

$\psi \models \varphi$ και $\varphi \models \psi$

ή (ισοδύναμος ορισμός):

Για κάθε M, i, g :

$\|\psi\|^{M, i, g} = T$ αν και μόνο αν $\|\varphi\|^{M, i, g} = T$.

Βιβλιογραφία

- Russel & Norvig (4^η έκδοση): ενότητα 8.2 ως και υπο-ενότητα 8.2.7.
 - Όσοι ενδιαφέρονται μπορούν να διαβάσουν προαιρετικά και τις υπόλοιπες ενότητες του κεφαλαίου 8.
- Βλαχάβας κ.ά: ενότητα 9.2.1 (χωρίς τα περί ενοποίησης). Ο όρος «μοντέλο» χρησιμοποιείται σε αυτές τις διαφάνειες με άλλο νόημα.