



Τεχνητή Νοημοσύνη

4η διάλεξη (2025-26)

Ίων Ανδρουτσόπουλος

<http://www.aueb.gr/users/ion/>

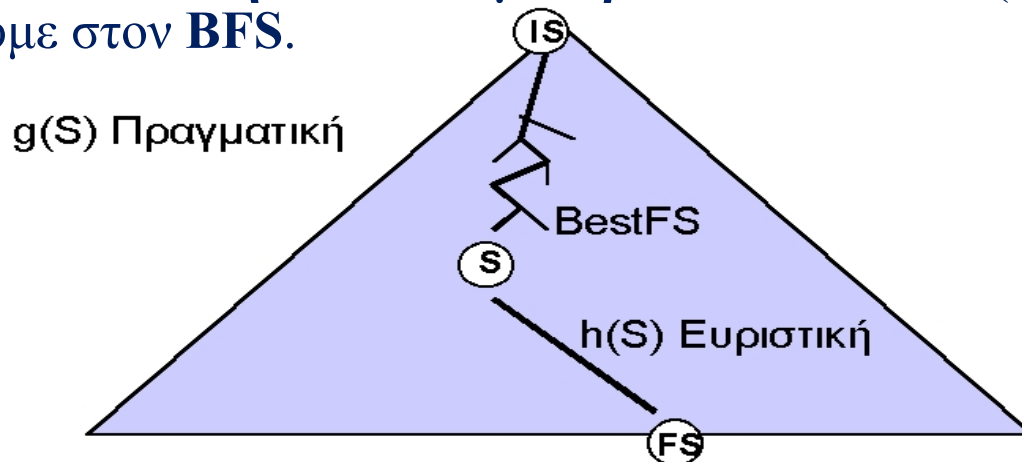
Οι διαφάνειες αυτής της διάλεξης βασίζονται κυρίως στα βιβλία *Τεχνητή Νοημοσύνη των Βλαχάβα κ.ά.*, 3η έκδοση, Β. Γκιούρδας Εκδοτική, 2006 και *Artificial Intelligence – A Modern Approach* των S. Russel και P. Norvig, 2^η και 4^η έκδοση, Prentice Hall, 2003 και 2020. Τα περισσότερα σχήματα των διαφανειών προέρχονται από αντίστοιχες διαφάνειες των δύο βιβλίων.

Τι θα ακούσετε σήμερα

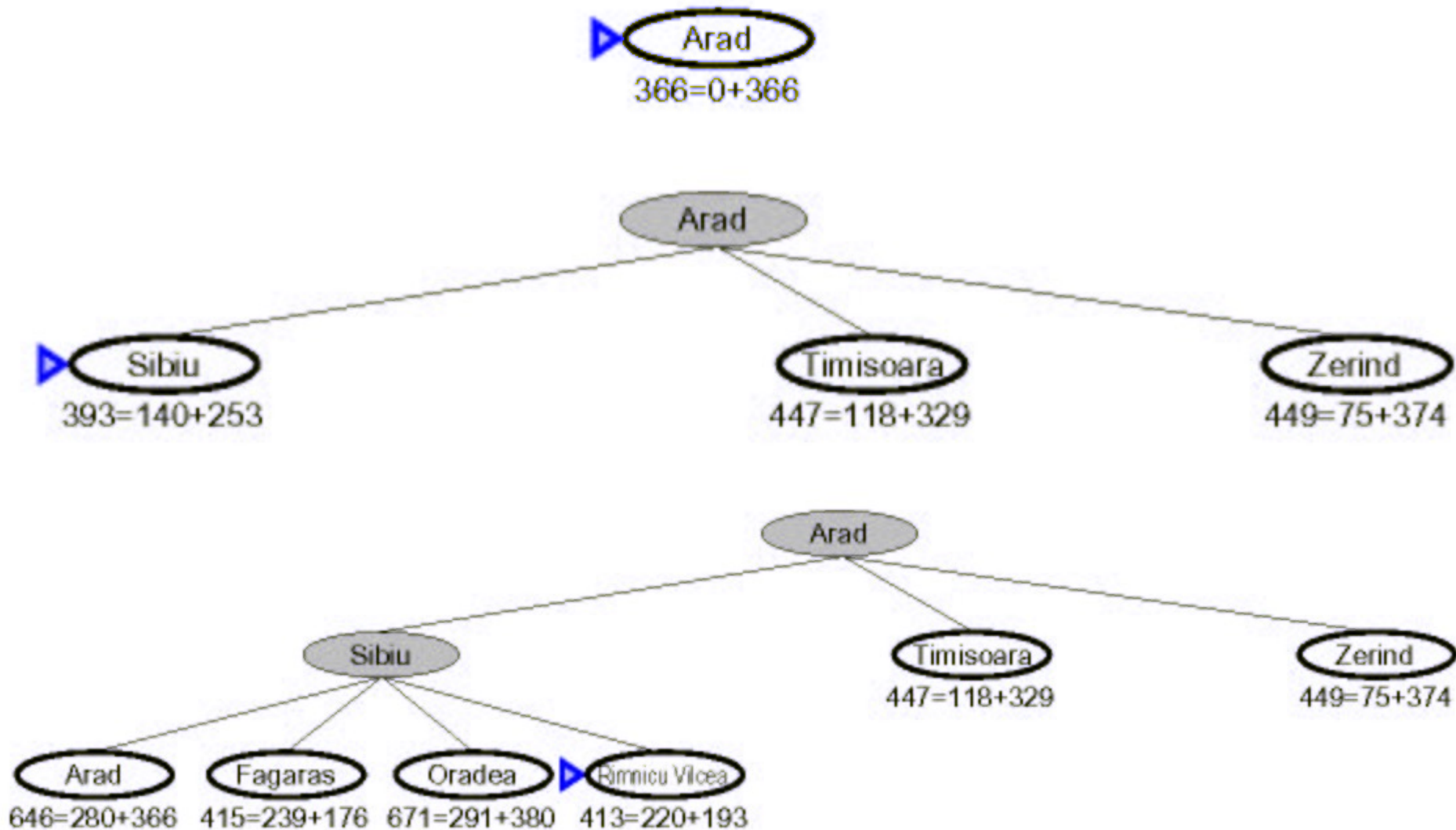
- Αναζήτηση με τον αλγόριθμο A^* .
- Αποδεκτές και συνεπείς ευρετικές συναρτήσεις.
- Επινόηση ευρετικών συναρτήσεων.
- Αναρρίχηση λόφου και παραλλαγές.

Αναζήτηση A^*

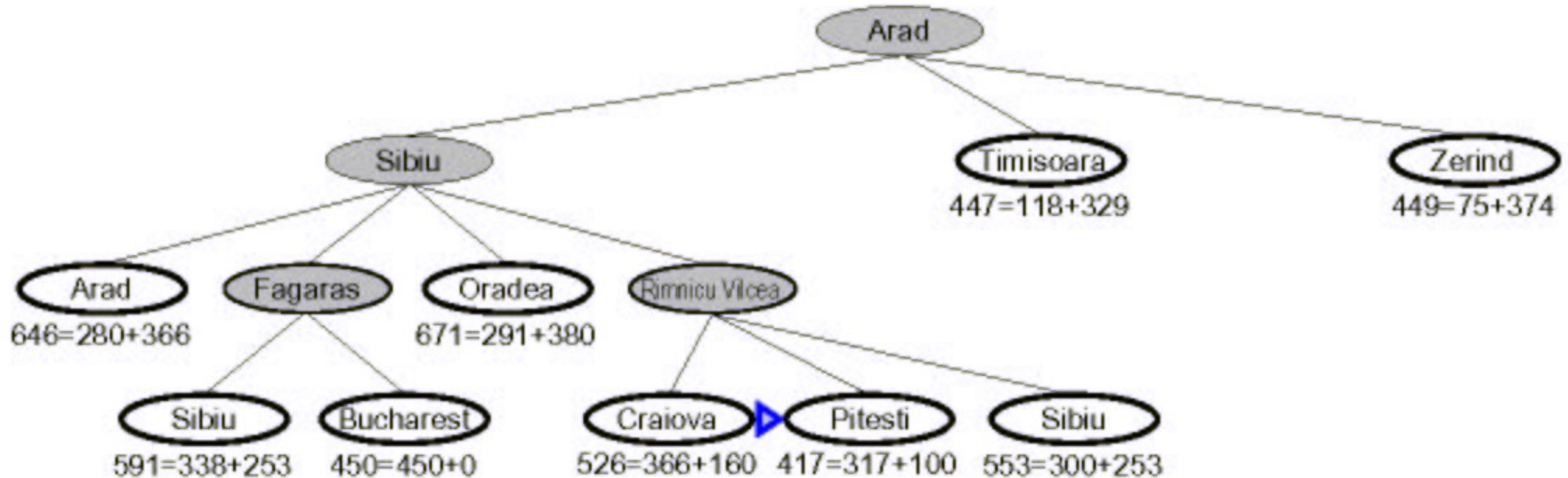
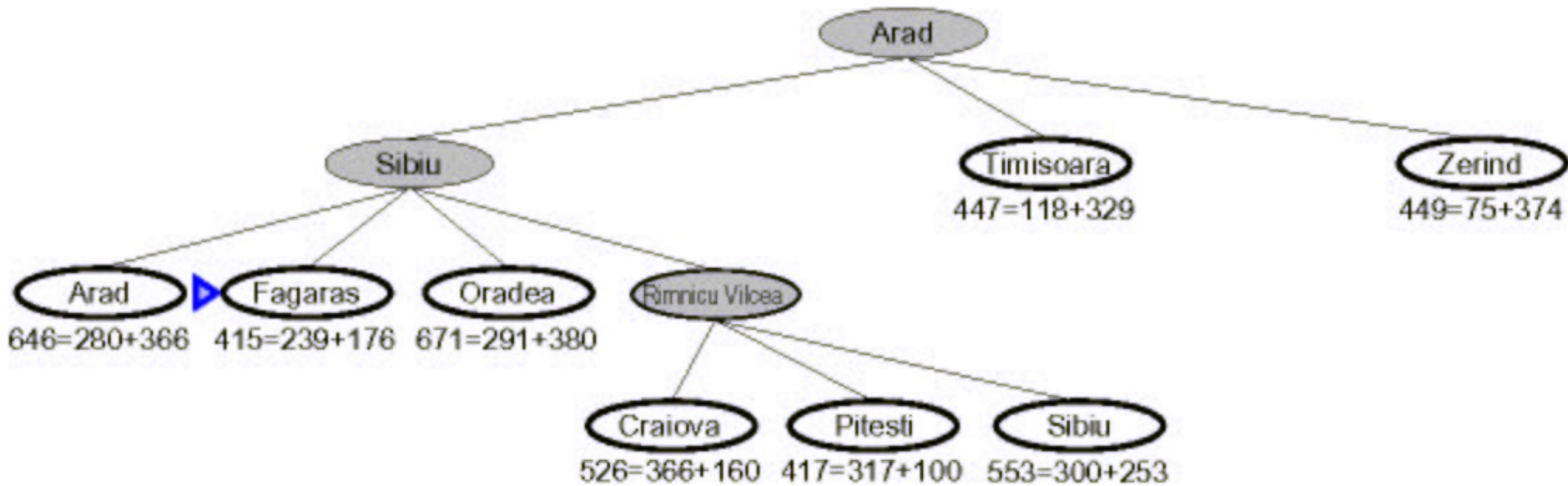
- Όπως στον BestFS, αλλά επεκτείνουμε τον κόμβο με το μικρότερο $f(n) = h(n) + g(n)$.
 - $h(n) = h(s(n))$, όπου $s(n)$ η κατάσταση που αντιστοιχεί στον κόμβο n .
 - $g(n)$: το κόστος από τη ρίζα ως τον n .
- Προσπαθεί να διαλέξει το **μονοπάτι με το μικρότερο** συνολικά κόστος από τη ρίζα ως κάποια τελική κατάσταση.
 - Ενώ ο **BestFS αγνοεί το $g(n)$** .
 - Αν $h(n) = \text{σταθερά}$, τότε ο A^* γίνεται ο «αλγόριθμος αναζήτησης ομοιόμορφου κόστους». Παρόμοιος με τον αλγόριθμο του Dijkstra, ο οποίος βρίσκει βέλτιστο μονοπάτι προς **κάθε κόμβο** του γράφου αναζήτησης.
 - Αν **επιπλέον τα κόστη όλων των μεταβάσεων είναι ίσα** (και θετικά), καταλήγουμε στον **BFS**.



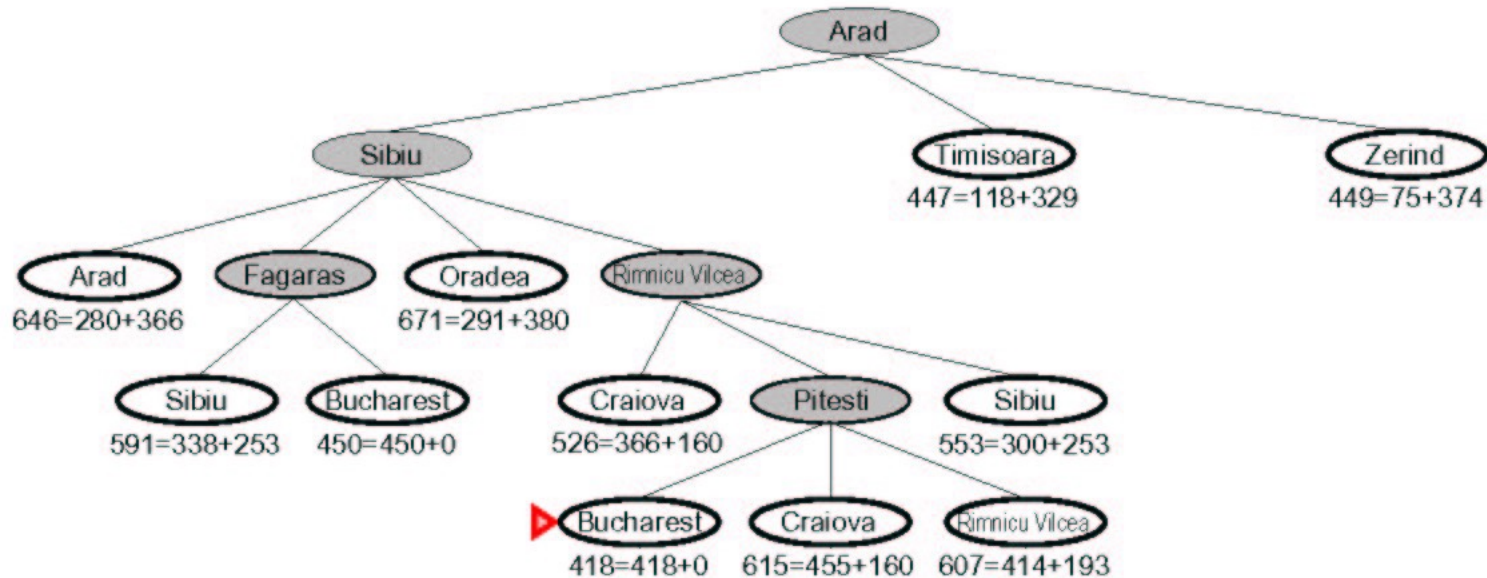
Αναζήτηση A*



Αναζήτηση A*



Αναζήτηση A*

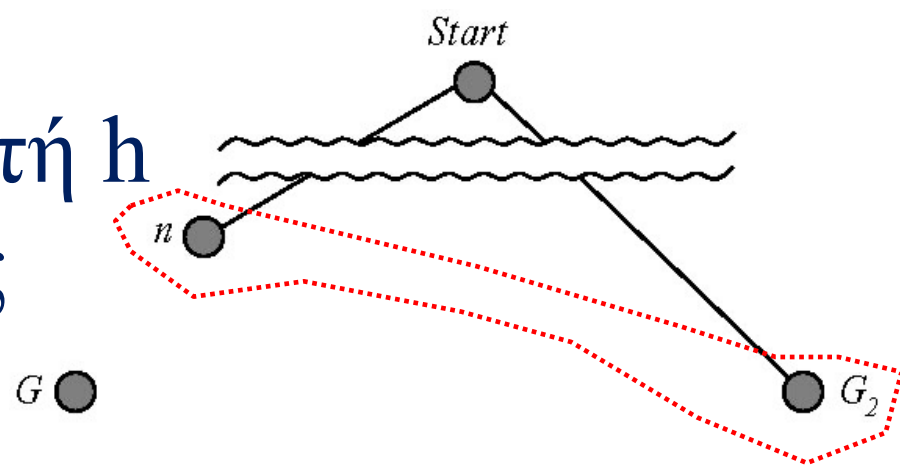


Βρήκε το βέλτιστο μονοπάτι! Αντίθετα από τον BestFS (βλ. διαφάνειες προηγούμενης διάλεξης).

Χαρακτηριστικά του A^*

- **Πλήρης**, αν το b είναι πεπερασμένο και το κόστος κάθε μετάβασης είναι > 0 .
 - **Αποκλείεται να παγιδευτούμε σε άπειρο κλαδί**, γιατί όσο προχωράμε σε βάθος κατά μήκος του άπειρου κλαδιού, **αυξάνεται το $g(n)$** , οπότε θα αναγκαζόμαστε κάθε τόσο να κάνουμε κάποιο βήμα και κατά μήκος του βέλτιστου μονοπατιού.
- **Βέλτιστος**, αν η h είναι **αποδεκτή** (η απόδειξη ακολουθεί).
 - **Αποδεκτή** ευρετική συνάρτηση: $h(n) \leq C(n)^*$.
 - $C(n)^*$: το **πραγματικό κόστος** του βέλτιστου μονοπατιού από τον n σε έναν κόμβο τελικής κατάστασης.
 - Π.χ. η ευθεία απόσταση είναι πάντα μικρότερη από την οδική.
- **Πολυπλοκότητα** χώρου και χρόνου:
 - **Εκθετική** στη χειρότερη περίπτωση αλλά **μια καλή ευρετική μπορεί να μειώσει πολύ** τον απαιτούμενο χρόνο και χώρο.

Απόδειξη ότι με αποδεκτή h ο A^* είναι βέλτιστος



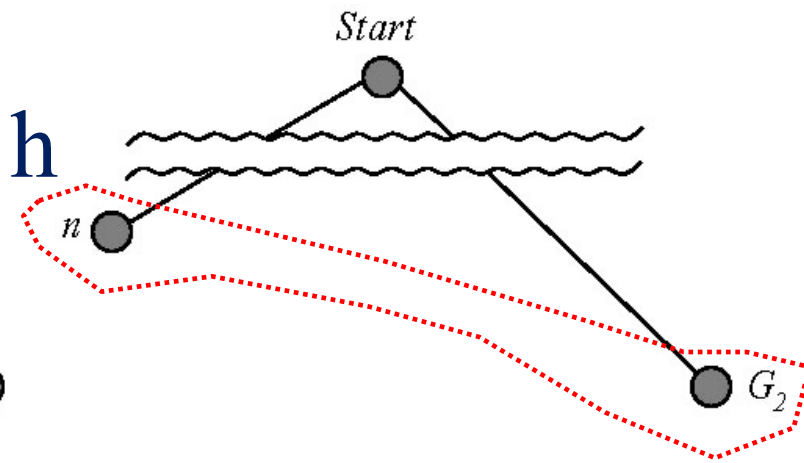
- Ας υποθέσουμε ότι ο A^* επιστρέφει λύση (μονοπάτι) που τελειώνει σε **τελικό κόμβο G_2** και ότι η λύση αυτή είναι **μη βέλτιστη**, παρ' όλο που η h είναι **αποδεκτή**.
- Θα δείξουμε ότι αυτό είναι αδύνατον (**άτοπο**) να συμβεί.
- Έστω ότι η **βέλτιστη λύση** καταλήγει στον **τελικό κόμβο G** .
- Έστω C^* το **κόστος της βέλτιστης λύσης** (από τη ρίζα ως τον G).
- **Αμέσως πριν** ο A^* επιστρέψει τη λύση που τελειώνει στον G_2 , δηλαδή αμέσως πριν βγάλει τον G_2 από το μέτωπο και διαπιστώσει ότι είναι κόμβος τελικής κατάστασης, θα υπάρχει **στο μέτωπο ο G_2 και ένας κόμβος n** (παιδί της ρίζας ή ο G ή κάποιος κόμβος μεταξύ τους) που θα συμμετέχει στο μονοπάτι της βέλτιστης λύσης.

συνεχίζεται...

Απόδειξη ότι με αποδεκτή h ο A^* είναι βέλτιστος

συνέχεια...

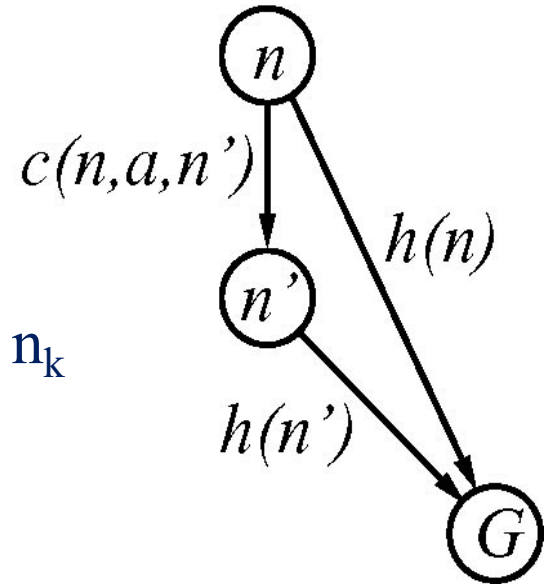
G ●



- Τότε: $f(G_2) = g(G_2) + h(G_2) = g(G_2) > C^*$.
 - $h(G_2) = 0$, αφού πρόκειται για τελική κατάσταση.
 - $g(G_2) > C^*$, αφού πρόκειται για μη βέλτιστη λύση.
- Και: $f(n) = g(n) + h(n) \leq g(n) + C(n)^* = C^*$.
 - $h(n) \leq C(n)^*$, αφού η h είναι αποδεκτή.
- Επομένως $f(n) < f(G_2)$. Άρα θα προτιμήσει να βγάλει από το μέτωπο και να ελέγξει (και επεκτείνει) τον n πριν βγάλει από το μέτωπο τον G_2 , αντίθετα από ό,τι υποθέσαμε (**άτοπο**).
 - Υποθέσαμε ότι βρισκόμαστε αμέσως πριν βγάλει από το μέτωπο τον G_2 .

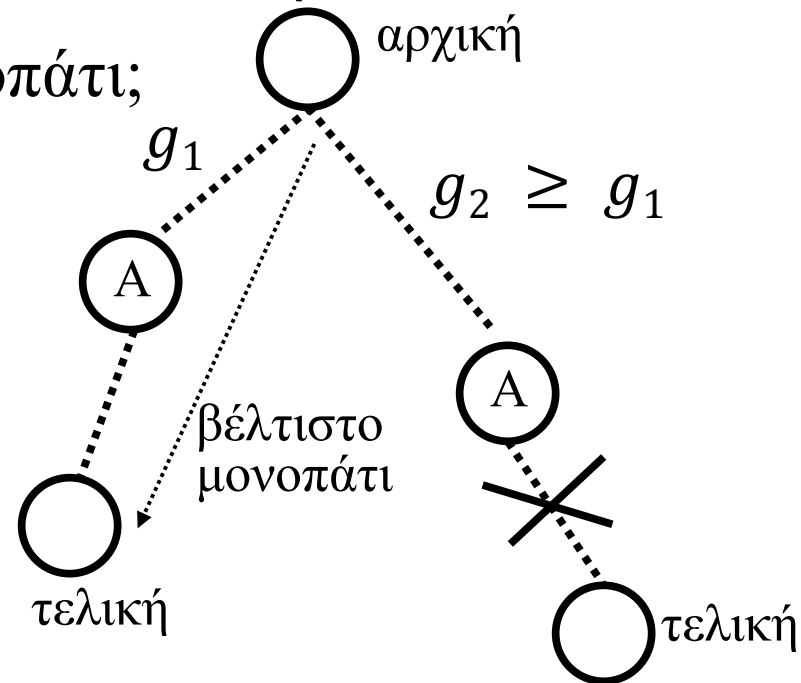
A^* και συνεπείς h

- **Συνεπής** σημαίνει: $h(n) \leq c(n, a, n') + h(n')$
 - Για κάθε κόμβο n , παιδί n' του n και κάθε τελεστή a που οδηγεί από τον n στον n' .
- Έπεται: $h(n_1) \leq c(n_1 \rightarrow \dots \rightarrow n_k) + h(n_k)$
 - Για οποιοδήποτε μονοπάτι από τον n_1 στον n_k με οποιουσδήποτε τελεστές (άσκηση).
- Κάθε **συνεπής h** είναι και **αποδεκτή**.
 - Προκύπτει από το προηγούμενο για βέλτιστο μονοπάτι από n_1 ως τελική n_k (άσκηση).
 - Συνήθως (όχι πάντα) οι αποδεκτές h που μπορούμε να σκεφτούμε είναι και συνεπείς.
- Με συνεπή h , το **πρώτο μονοπάτι** με το οποίο φτάνει ο A^* ως **κάθε κατάσταση** (κάθε ετικέτα, όχι μόνο τελική) είναι το **βέλτιστο** ως αυτήν. (Η απόδειξη ακολουθεί.)

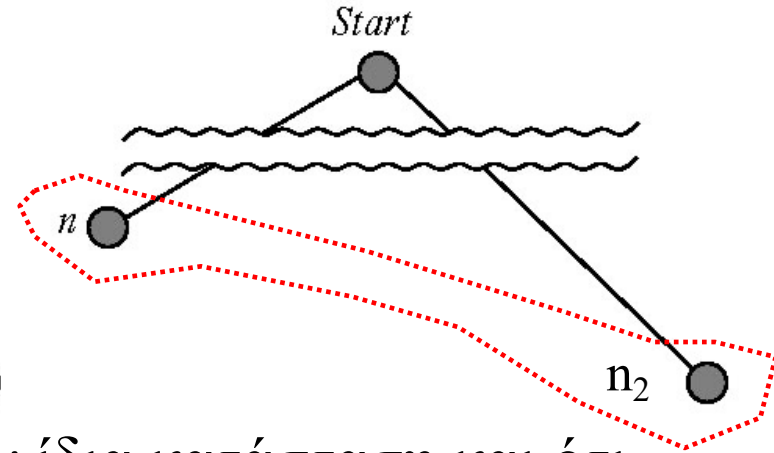


A^* και κλειστό σύνολο

- Με συνεπή h , ο A^* παραμένει **βέλτιστος** και όταν χρησιμοποιούμε **κλειστό σύνολο**.
- Το κλειστό σύνολο ίσως μας αναγκάσει να **διακόψουμε την εξερεύνηση ενός μονοπατιού** κάτω από έναν κόμβο κατάστασης A την οποία έχουμε ξανασυναντήσει.
- **Μήπως χάνουμε το βέλτιστο** μονοπάτι;
- **Όχι**, γιατί αφού η h είναι συνεπής, το προηγούμενο μονοπάτι με το οποίο είχαμε φτάσει σε A ήταν το **συντομότερο** μέχρι A .
 - Και τα δύο υποδέντρα των A είναι ίδια.



Απόδειξη ότι με συνεπή h το πρώτο μονοπάτι με το οποίο ο A^* φτάνει σε κάθε κατάσταση είναι βέλτιστο ως αυτήν



- Έστω ότι οι n_1 και n_2 αντιστοιχούν στην ίδια κατάσταση και ότι $g(n_2) > g(n_1)$, αλλά ο A^* φτάνει στον n_2 πριν τον n_1 .
 - «Φτάνει» στον n_2 όταν τον βγάζει από το μέτωπο, τον ελέγχει και ενδεχομένως τον επεκτείνει.
- Όταν φτάνει στον n_2 , θα υπάρχει στο μέτωπο και ένας κόμβος n στο μονοπάτι με το οποίο θα φτάσει ο A^* από τη ρίζα στον n_1 .
- Αφού επιλέγει τον n_2 , $f(n_2) \leq f(n)$, άρα $g(n_2) + h(n_2) \leq g(n) + h(n)$.
- Όμως $h(n) \leq c(n \rightarrow \dots \rightarrow n_1) + h(n_1)$, αφού η h είναι συνεπής.
 - Χρησιμοποιούμε εδώ ως $n \rightarrow \dots \rightarrow n_1$ το μονοπάτι με το οποίο θα φτάσει ο A^* από τον n στο n_1 .
- Άρα: $g(n_2) + h(n_2) \leq g(n) + c(n \rightarrow \dots \rightarrow n_1) + h(n_1)$.
- Οπότε: $g(n_2) \leq g(n) + c(n \rightarrow \dots \rightarrow n_1) = g(n_1)$, **άτοπο**.
 - $h(n_2) = h(n_1)$, αφού αντιστοιχούν στην ίδια κατάσταση.

Επινόηση ευρετικών συναρτήσεων

7	2	4
5		6
8	3	1

1	2	3
4	5	6
7	8	

Θεωρούμε σε αυτό το παράδειγμα μοναδιαίο κόστος για κάθε κίνηση.

- h_1 : Αριθμός πλακιδίων **εκτός θέσεως**. Είναι **αποδεκτή** η h_1 ;
 - Είναι αποδεκτή, γιατί κάθε εκτός θέσεως πλακίδιο πρέπει να μετακινηθεί τουλάχιστον μία φορά (και κάθε κίνηση μετακινεί ένα μόνο πλακίδιο).
 - Άρα θα χρειαστούμε **τουλάχιστον τόσες κινήσεις** όσα είναι τα εκτός θέσεως πλακίδια. Η ευρετική **υποεκτιμά** τις κινήσεις που θα χρειαστούμε.
- h_2 : Άθροισμα αποστάσεων **Manhattan** όλων των πλακιδίων από τις τελικές τους θέσεις. Είναι **αποδεκτή** η h_2 ;
 - Αποδεκτή, γιατί κάθε πλακίδιο πρέπει να μετακινηθεί τουλάχιστον τόσα τετράγωνα και κάθε κίνηση μετακινεί ένα πλακίδιο κατά ένα τετράγωνο.
 - Και αυτή η ευρετική **υποεκτιμά** τις κινήσεις που θα χρειαστούμε.

Αφαίρεση περιορισμών

- Το ακριβές βέλτιστο κόστος (από την τρέχουσα κατάσταση ως τελική) όταν αγνοούνται κάποιοι περιορισμοί αποτελεί αποδεκτή ευρετική του αρχικού προβλήματος.
 - Αν μπορούν να τοποθετηθούν **πολλά πλακίδια στην ίδια θέση**, ο ακριβής βέλτιστος αριθμός κινήσεων είναι η h_2 .
 - Αν επιπλέον ένα πλακίδιο μπορεί να μετακινηθεί **οπουδήποτε με μία κίνηση**, ο ακριβής βέλτιστος αριθμός κινήσεων είναι h_1 .
 - Οι h_1, h_2 είναι τα **ακριβή βέλτιστα κόστη** (από την τρέχουσα ως τελική κατάσταση) στα δύο **απλοποιημένα προβλήματα**.
- Αν το **κόστος** κάθε μετάβασης είναι ≥ 0 , τότε οι ευρετικές που κατασκευάζονται αφαιρώντας περιορισμούς είναι και **συνεπείς** (βλ. άσκηση μελέτης).
- Θέλουμε το ακριβές βέλτιστο κόστος (από την τρέχουσα κατάσταση ως τελική) στο απλοποιημένο πρόβλημα (η h) να μπορεί να **υπολογιστεί πολύ εύκολα!**

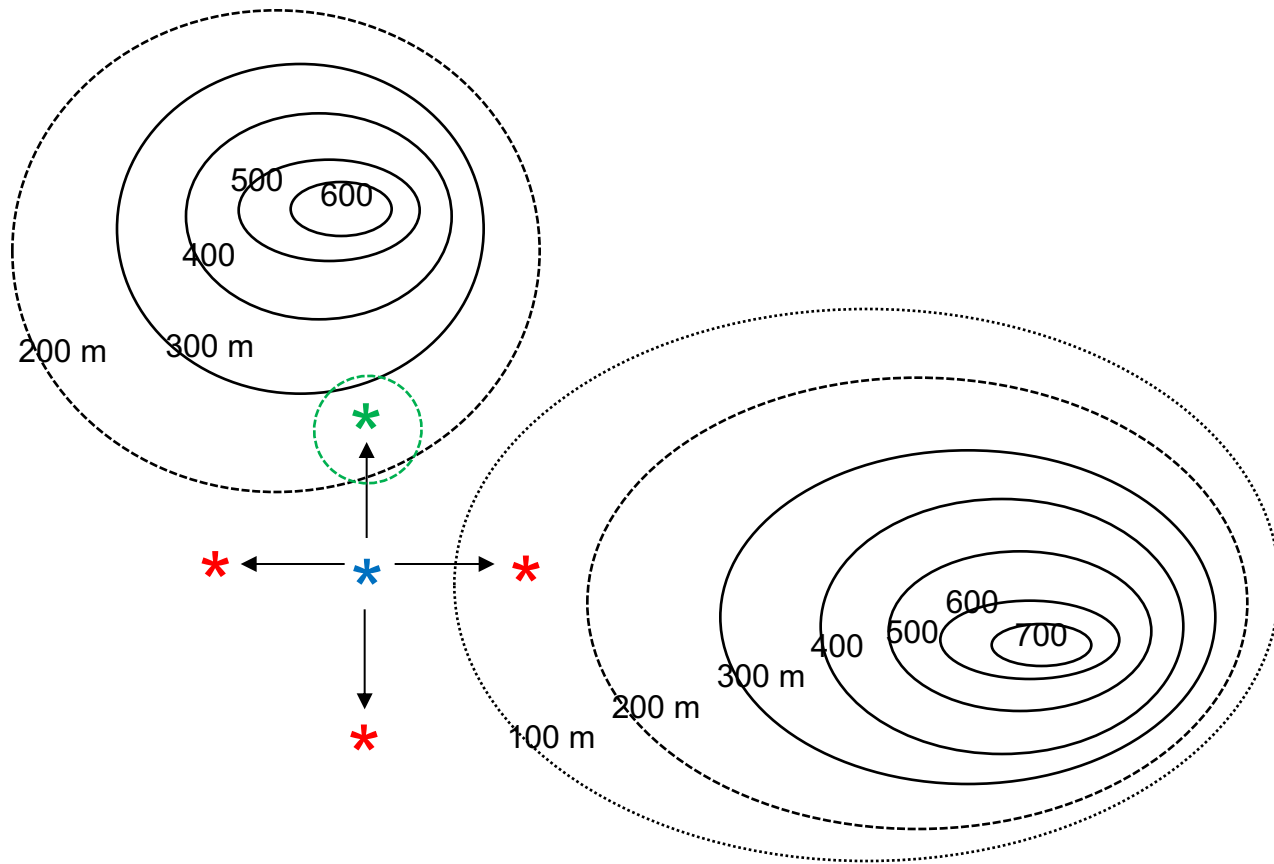
Αξιολόγηση ευρετικών

- Για κάθε αποδεκτή ευρετική, $h(n) \leq C^*(n)$.
- Αν επιπλέον $h_2(n) \geq h_1(n)$ για κάθε n , τότε η h_2 κυριαρχεί επί της h_1 .
 - Η h_2 δίνει **ακριβέστερες προβλέψεις** από την h_1 , προβλέψεις πιο κοντά στο $C^*(n)$.
 - Βοηθά τον A^* να επικεντρωθεί σε **μικρότερο μέρος του χώρου αναζήτησης**.
 - Με ιδανική ευρετική, ο A^* προχωρά μόνο κατά μήκος του βέλτιστου μονοπατιού.
- Αν έχουμε **πολλές ευρετικές** και δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι μία κυριαρχεί επί των άλλων:
 - Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε $h(n) = \max\{h_1(n), \dots, h_k(n)\}$
 - Αν οι h_1, \dots, h_k είναι αποδεκτές, τότε είναι και η h . (Άσκηση.)
 - Αν οι h_1, \dots, h_k είναι συνεπείς, τότε είναι και η h . (Άσκηση.)

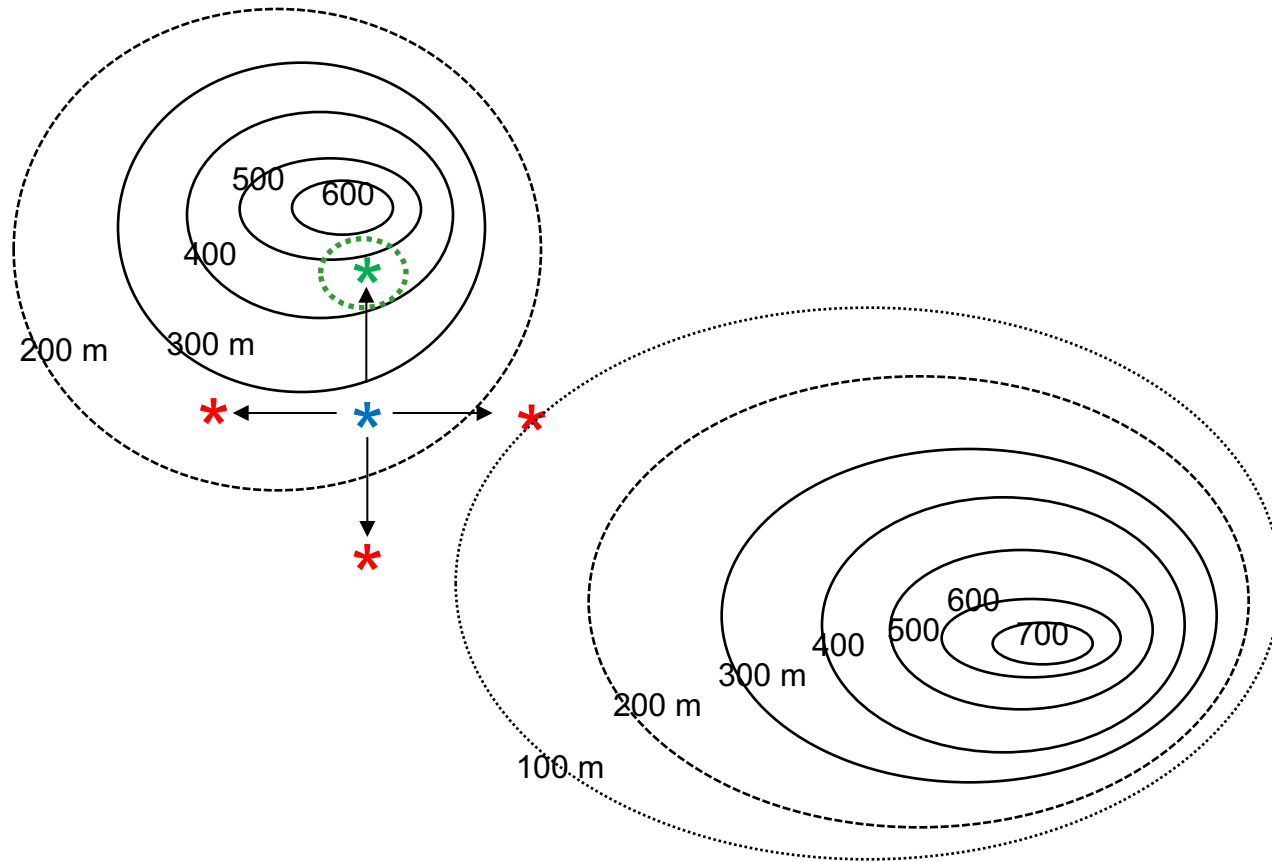
Αλγόριθμοι τοπικής αναζήτησης

- Κρατούν **μόνο μία κατάσταση** ή έναν πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων στο **μέτωπο**.
 - Πολύ μικρές απαιτήσεις μνήμης.
 - Δεν κρατούν στοιχεία για εναλλακτικές διαδρομές.
 - Επιλέγουν **σε κάθε βήμα μια γειτονική κατάσταση** και ξεχνούν όλες τις άλλες εναλλακτικές κατευθύνσεις.
- Συχνά δεν επιχειρούν να βρουν το βέλτιστο μονοπάτι αλλά τη **βέλτιστη κατάσταση**.
 - Μπορεί να μην έχουμε καν κριτήρια που να απαντούν αν μία κατάσταση είναι τελική ή όχι.
 - Έχουμε συνάρτηση («αντικειμενική συνάρτηση» ή συνάρτηση-στόχος) που αξιολογεί κάθε κατάσταση.
 - Στόχος: εύρεση κατάστασης που **μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί** την τιμή αυτής της συνάρτησης.

Αναρρίχηση λόφων (HC)



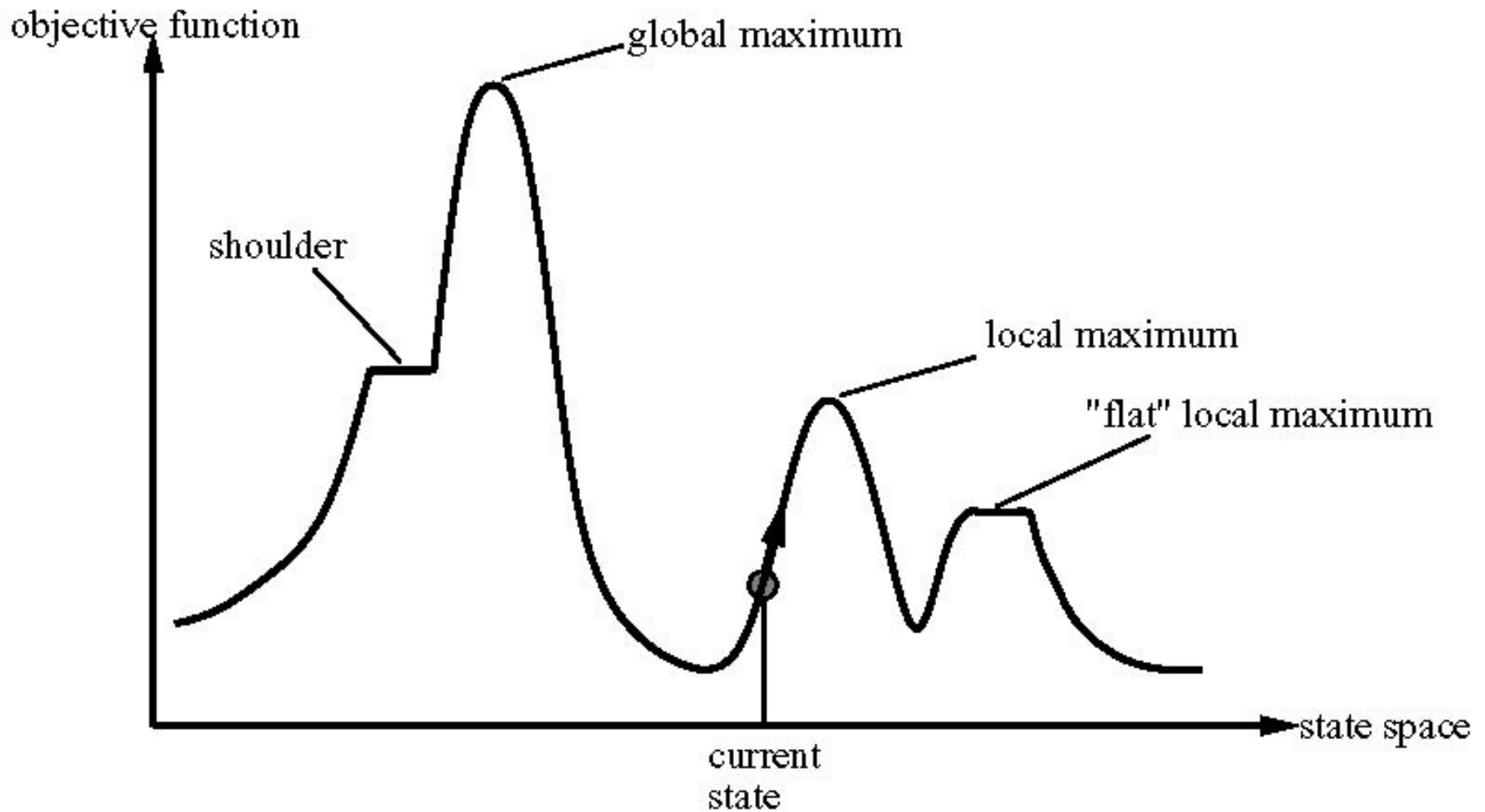
Αναρρίχηση λόφων (HC)



Αναρρίχηση λόφων (HC)

- Απλοϊκή στρατηγική **ορειβάτη** σε ομίχλη που προσπαθεί να **φτάσει στην κορυφή**.
 - Ποιο από τα σημεία που βλέπω γύρω μου είναι το πιο ψηλό (και πιο ψηλό από αυτό στο οποίο βρίσκομαι);
 - Πάω προς αυτό.
 - Δεν κρατάω κανένα άλλο γειτονικό σημείο στο μέτωπο.
- Πολύ **οικονομικός σε χρόνο και μνήμη**.
 - Πάντα μόνο ένας κόμβος στο μέτωπο.
- Προβλήματα:
 - Πιθανός εγκλωβισμός σε **τοπικό μέγιστο** (τοπική κορυφή).
 - Πιθανός εγκλωβισμός σε **οροπέδιο** (καμία άνοδος ορατή).

Αναρρίχηση λόφων



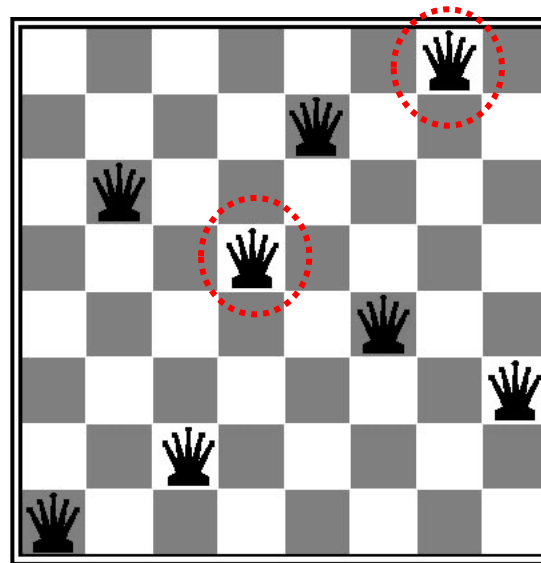
Αλγόριθμος αναρρίχησης λόφων (HC)

1. Κάνε τρέχουσα κατάσταση την **αρχική**.
2. **Επέκτεινε** την τρέχουσα κατάσταση και **αξιολόγησε** τις καταστάσεις-παιδιά.
3. **Αν δεν υπάρχει παιδί** του οποίου η αξία να είναι μεγαλύτερη από την αξία της τρέχουσας κατάστασης, **επίστρεψε** την τρέχουσα κατάσταση.
4. Κάνε τρέχουσα κατάσταση το παιδί με τη **μεγαλύτερη αξία**.
5. Πήγαινε στο βήμα 2.

Παράδειγμα τοπικού μεγίστου

18	12	14	13	13	12	14	14
14	16	13	15	12	14	12	16
14	12	18	13	15	12	14	14
15	14	14	♚	13	16	13	16
♚	14	17	15	♚	14	16	16
17	♚	16	18	15	♚	15	♚
18	14	♚	15	15	14	♚	16
14	14	13	17	12	14	12	18

$h = 17$



$h = 1$

Σε όλες τις
γειτονικές
καταστάσεις η
h γίνεται
μεγαλύτερη.

- **Τελική κατάσταση:** καμία βασίλισσα να μην απειλεί άλλη.
- **Μετάβαση:** μετακίνηση μιας βασίλισσας οπουδήποτε κατακόρυφα στη στήλη της.
 - Αν έχουμε δύο βασίλισσες σε μία στήλη, σίγουρα δεν πρόκειται για τελική κατάσταση.
- **Αντικειμενική συνάρτηση:** αριθμός ζευγών βασιλισσών που απειλούν η μία την άλλη (άμεσα ή έμμεσα).

Παραλλαγές HC

- **Πλάγια βήματα:**
 - Όταν δεν υπάρχει καλύτερος γείτονας, μετακινούμαστε μέχρι ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων προς μία ή περισσότερες κατευθύνσεις, ελπίζοντας ότι θα βρούμε καλύτερη κατάσταση (π.χ. περίπτωση «ώμου»).
 - Στις 8 βασίλισσες με 100 πλάγια βήματα, λύση για το 94% των αρχικών καταστάσεων, αντί 14% χωρίς πλάγια βήματα.
- HC με **πρώτη επιλογή:**
 - Επιλέγουμε το γείτονα με αξία μεγαλύτερη από την τρέχουσα κατάσταση που παράγουμε πρώτο.
 - Ενδέχεται να κοστίζει πολύ να παραγάγουμε και να αξιολογήσουμε όλους τους γείτονες.

Παραλλαγές HC – συνέχεια

- **Τυχαίες επανεκκινήσεις:**
 - Επαναλαμβάνουμε πολλές φορές την αναζήτηση, ξεκινώντας **κάθε φορά από άλλη αρχική κατάσταση** (αν γίνεται).
 - Αν η πιθανότητα επιτυχίας (π.χ. εύρεσης ολικού μεγίστου ή τελικής κατάστασης) σε μία επανάληψη είναι p , ο **αναμενόμενος αριθμός επιτυχιών** σε n επαναλήψεις (διωνυμική κατανομή) είναι $n \cdot p$.
 - Αν το τοπίο έχει **λίγες παγίδες**, εξαιρετική στρατηγική.
- **Στοχαστικός HC:**
 - Παράγουμε και αξιολογούμε όλους τους **γείτονες** και **επιλέγουμε τυχαία** μεταξύ αυτών που έχουν μεγαλύτερη αξία από την τρέχουσα κατάσταση.
 - Π.χ. επιλέγουμε με **πιθανότητα ανάλογη της αξίας** τους.
 - Μπορούμε να **επαναλάβουμε** πολλές φορές με διαφορετική αρχική κατάσταση και να κρατήσουμε την καλύτερη λύση.

Βιβλιογραφία

- Russel & Norvig (4^η έκδοση): ενότητα 3.5.2, εισαγωγή ενότητας 3.6, ενότητα 3.6.2, 3.6.6, κεφάλαιο 4 ως και ενότητα 4.1.1.
 - Όσοι ενδιαφέρονται μπορούν να διαβάσουν προαιρετικά και τα τμήματα του κεφ. 3 που εξαιρέθηκαν.
- Βλαχάβας κ.ά: υπόλοιπο κεφαλαίου 4, εκτός της ενότητας 4.3.4 (θα καλυφθεί στην επόμενη διάλεξη) και 4.4.1.
 - Ο αλγόριθμος A^* μπορεί να συνδυαστεί με επαναληπτική εκβάθυνση (βλ. προαιρετικά ενότητα 4.4.1).