# Τεχνητή Νοημοσύνη

*4η διάλεξη (2024-25)*

Ίων Ανδρουτσόπουλος

http://www.aueb.gr/users/ion/

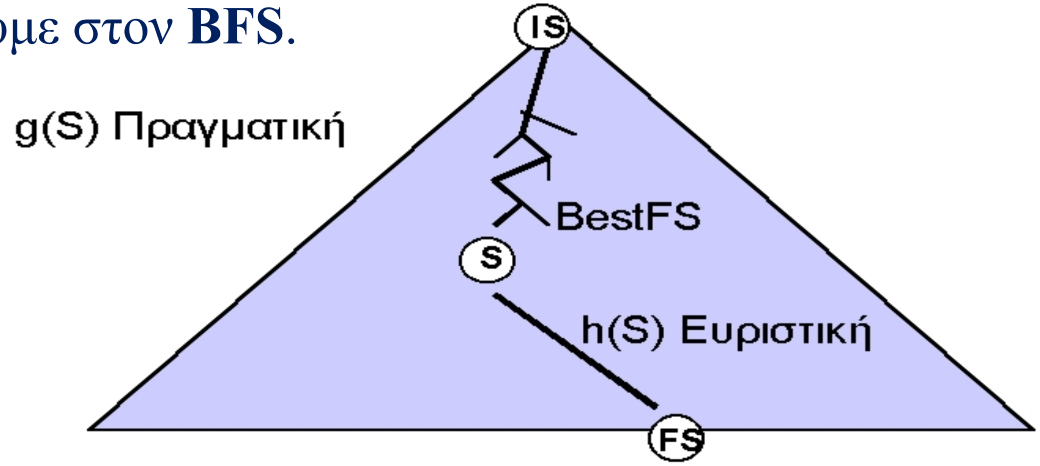
Οι διαφάνειες αυτής της διάλεξης βασίζονται κυρίως στα βιβλία *Τεχνητή Νοημοσύνη* των Βλαχάβα κ.ά., 3η έκδοση, Β. Γκιούρδας Εκδοτική, 2006 και *Artificial Intelligence – A Modern Approach* των S. Russel και P. Norvig, 2η και 4η έκδοση, Prentice Hall, 2003 και 2020. Τα περισσότερα σχήματα των διαφανειών προέρχονται από αντίστοιχες διαφάνειες των δύο βιβλίων.

# Τι θα ακούσετε σήμερα

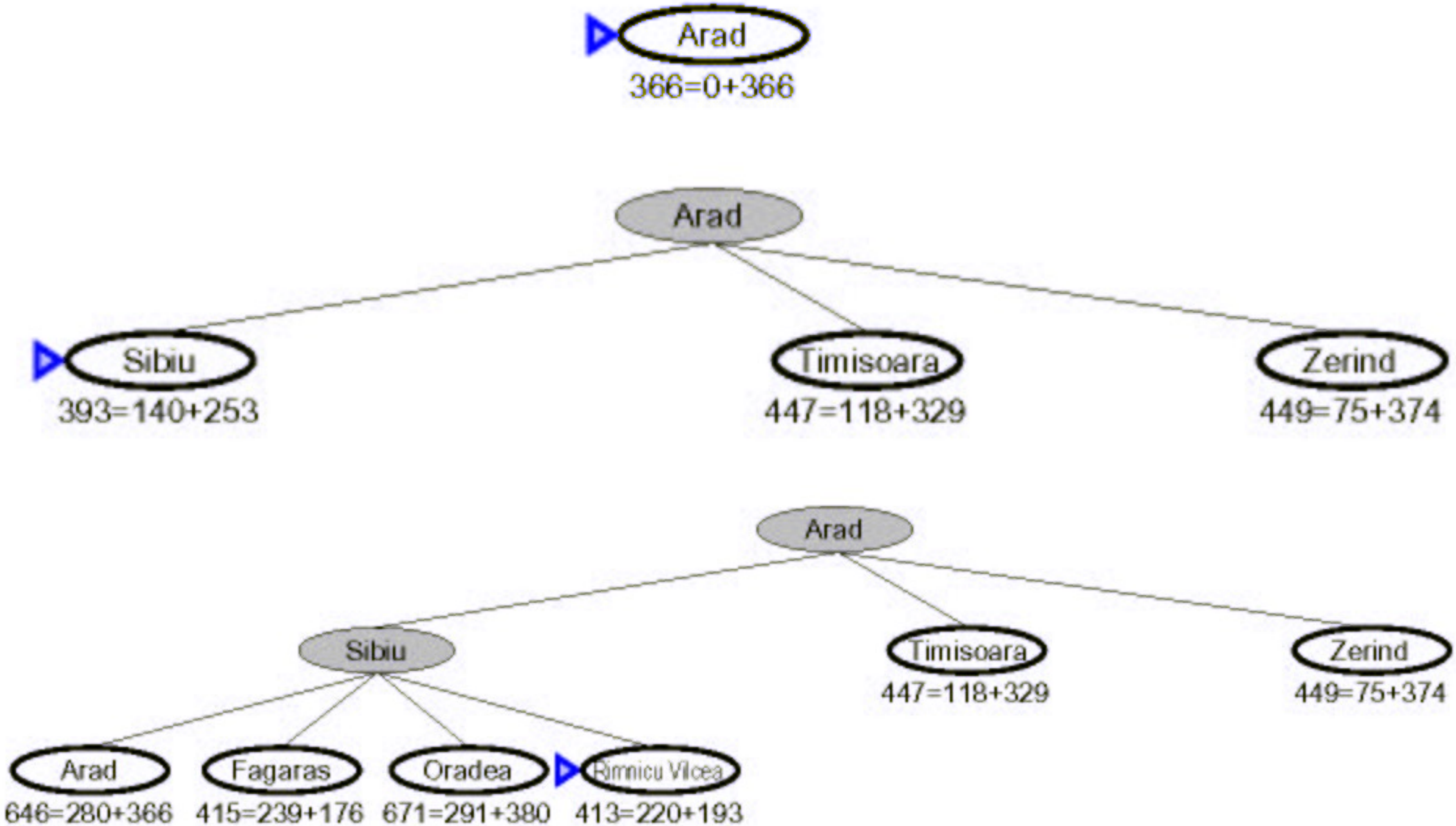
- Αναζήτηση με τον αλγόριθμο A*.
- Αποδεκτές και συνεπείς ευρετικές συναρτήσεις.
- Επινόηση ευρετικών συναρτήσεων.
- Αναρρίχηση λόφου και παραλλαγές.

# Αναζήτηση A*

- Όπως στον BestFS, αλλά επεκτείνουμε τον κόμβο με το μικρότερο **f(n) = h(n) + g(n)**.
  - **h(n) = h(s(n))**, όπου s(n) η κατάσταση που αντιστοιχεί στον κόμβο n.
  - **g(n)**: το κόστος από τη ρίζα ως τον n.
- Προσπαθεί να διαλέξει το **μονοπάτι με το μικρότερο** συνολικά κόστος από τη ρίζα ως κάποια τελική κατάσταση.
  - Ενώ ο **BestFS αγνοεί** το **g(n)**.
  - Αν **h(n) = σταθερά**, τότε ο A* γίνεται ο «**αλγόριθμος αναζήτησης ομοιόμορφου κόστους**». Παρόμοιος με τον **αλγόριθμο του Dijkstra**, ο οποίος βρίσκει βέλτιστο μονοπάτι προς **κάθε κόμβο** του γράφου αναζήτησης.
  - Αν **επιπλέον** τα **κόστη** όλων των **μεταβάσεων** είναι **ίσα** (και **θετικά**), καταλήγουμε στον **BFS**.

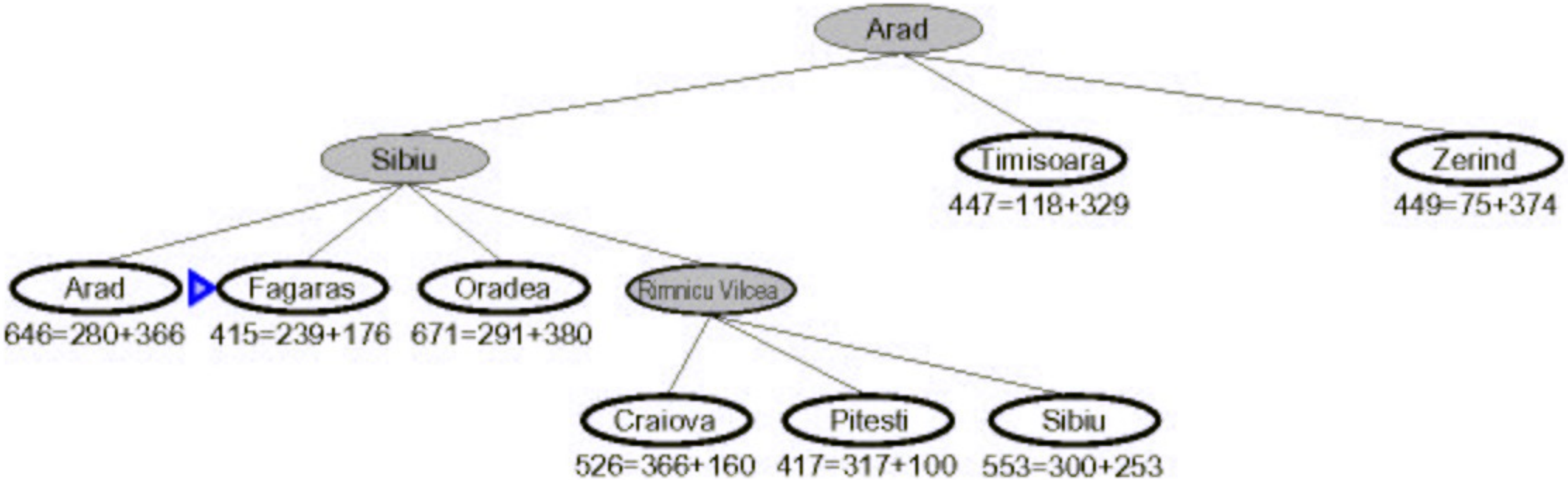


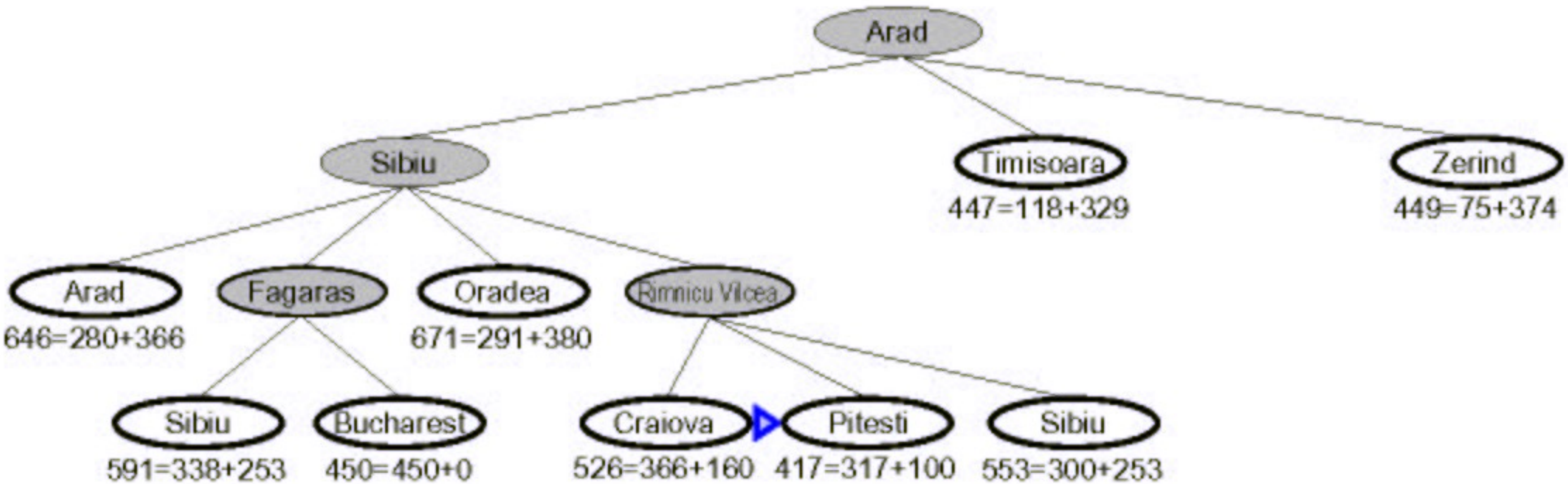
# Αναζήτηση A*



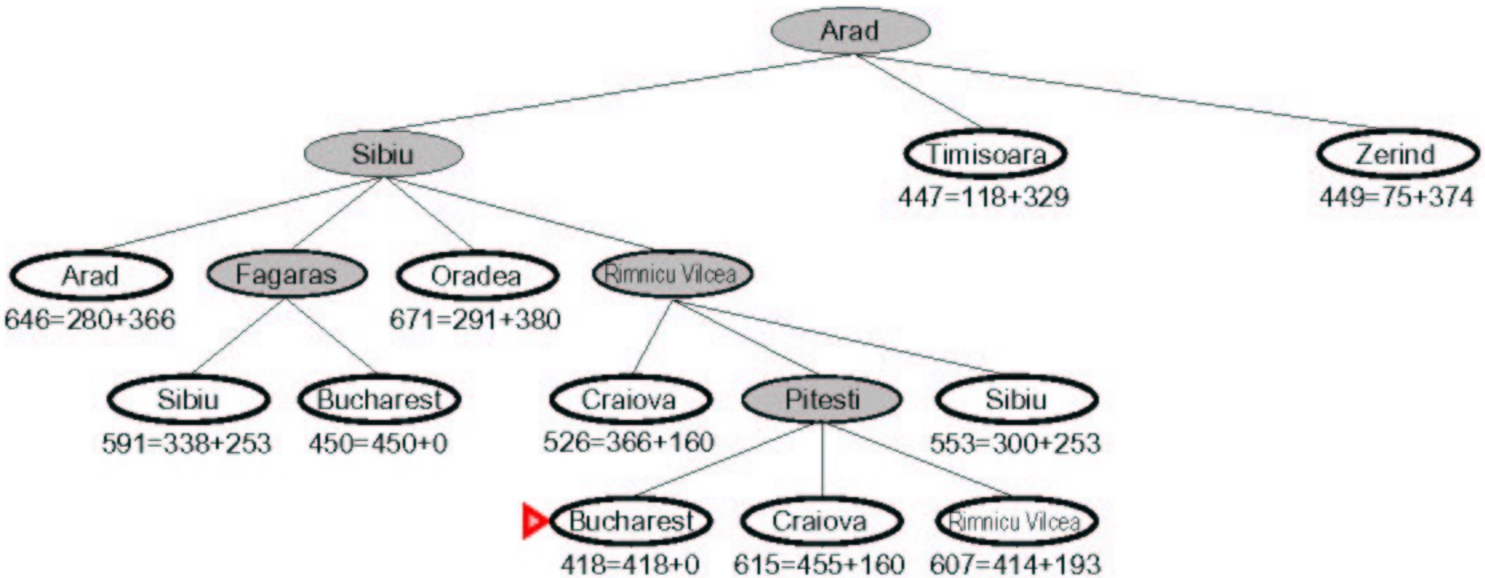
Arad
366=0+366
Arad
Sibiu
393=140+253
Timisoara
447=118+329
Zerind
449=75+374
Arad
Sibiu
Timisoara
447=118+329
Zerind
449=75+374
Arad
646=280+366
Fagaras
415=239+176
Oradea
671=291+380
Rimnicu Vilcea
413=220+193

# Αναζήτηση A*


Arad
Sibiu
Timisoara
447=118+329
Zerind
449=75+374
Arad
646=280+366
Fagaras
415=239+176
Oradea
671=291+380
Rimnicu Vilcea
Craiova
526=366+160
Pitesti
417=317+100
Sibiu
553=300+253


Arad
Sibiu
Timisoara
447=118+329
Zerind
449=75+374
Arad
646=280+366
Fagaras
Oradea
671=291+380
Rimnicu Vilcea
Sibiu
591=338+253
Bucharest
450=450+0
Craiova
526=366+160
Pitesti
417=317+100
Sibiu
553=300+253

# Αναζήτηση Α*

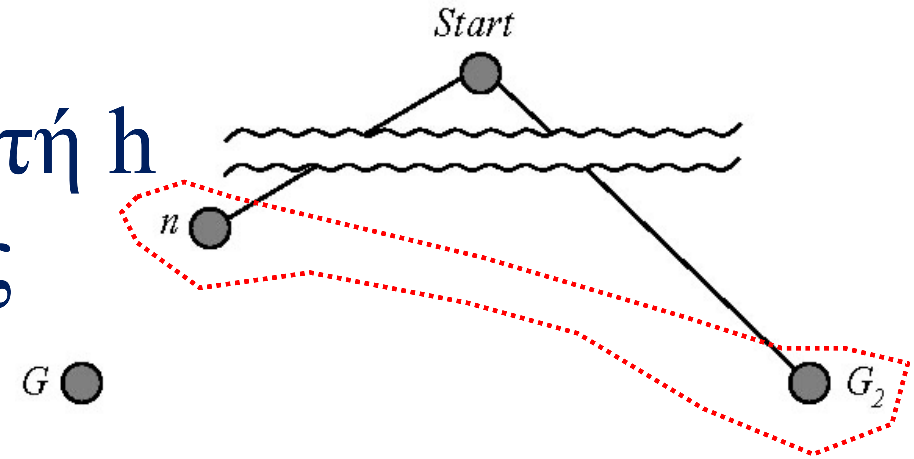



**Βρήκε το βέλτιστο** μονοπάτι! **Αντίθετα από τον BestFS** (βλ. διαφάνειες προηγούμενης διάλεξης).

# Χαρακτηριστικά του A*

- **Πλήρης**, αν το b είναι πεπερασμένο και το κόστος κάθε μετάβασης είναι > 0.
  - **Αποκλείεται να παγιδευτούμε σε άπειρο κλαδί**, γιατί όσο προχωράμε σε βάθος κατά μήκος του άπειρου κλαδιού, **αυξάνεται το g(n)**, οπότε θα αναγκαζόμαστε κάθε τόσο να κάνουμε κάποιο βήμα και κατά μήκος του βέλτιστου μονοπατιού.
- **Βέλτιστος**, αν η h είναι **αποδεκτή** (η απόδειξη ακολουθεί).
  - **Αποδεκτή** ευρετική συνάρτηση: $\mathbf{h(n) \leq C(n)^*}$.
  - $C(n)^*$: το **πραγματικό κόστος** του βέλτιστου μονοπατιού από τον n σε έναν κόμβο τελικής κατάστασης.
  - Π.χ. η ευθεία απόσταση είναι πάντα μικρότερη από την οδική.
- **Πολυπλοκότητα** χώρου και χρόνου:
  - **Εκθετική** στη χειρότερη περίπτωση αλλά **μια καλή ευρετική μπορεί να μειώσει πολύ** τον απαιτούμενο χρόνο και χώρο.

# Απόδειξη ότι με αποδεκτή h ο A* είναι βέλτιστος

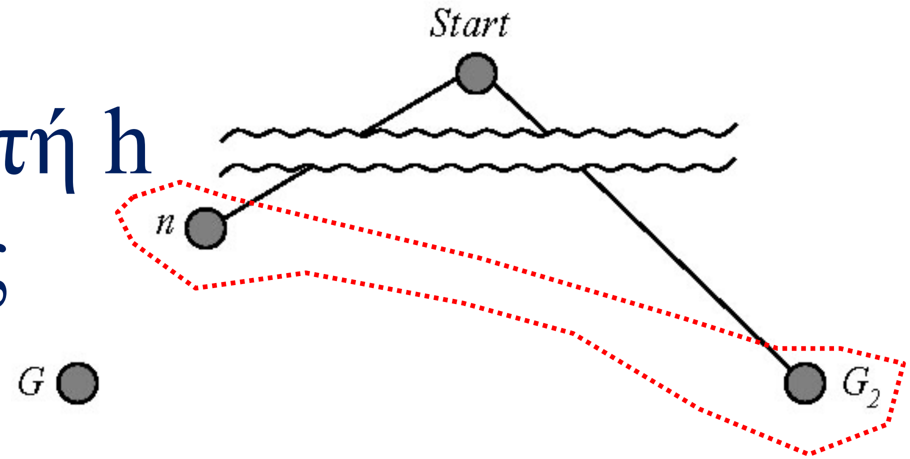



- Ας υποθέσουμε ότι ο A* επιστρέφει λύση (μονοπάτι) που τελειώνει σε **τελικό κόμβο $G_2$** και ότι η λύση αυτή είναι **μη βέλτιστη**, παρ' όλο που η h είναι **αποδεκτή**.
- Θα δείξουμε ότι αυτό είναι αδύνατον (**άτοπο**) να συμβεί.
- Έστω ότι η **βέλτιστη λύση** καταλήγει στον **τελικό κόμβο G**.
- Έστω **C*** το **κόστος της βέλτιστης** λύσης (από τη ρίζα ως τον G).
- **Αμέσως πριν** ο A* επιστρέψει τη λύση που τελειώνει στον $G_2$, δηλαδή αμέσως πριν βγάλει τον $G_2$ από το μέτωπο και διαπιστώσει ότι είναι κόμβος τελικής κατάστασης, θα υπάρχει **στο μέτωπο ο $G_2$ και ένας κόμβος n** (παιδί της ρίζας ή ο G ή κάποιος κόμβος μεταξύ τους) που θα συμμετέχει στο μονοπάτι της βέλτιστης λύσης.

συνεχίζεται...

# Απόδειξη ότι με αποδεκτή h ο A* είναι βέλτιστος

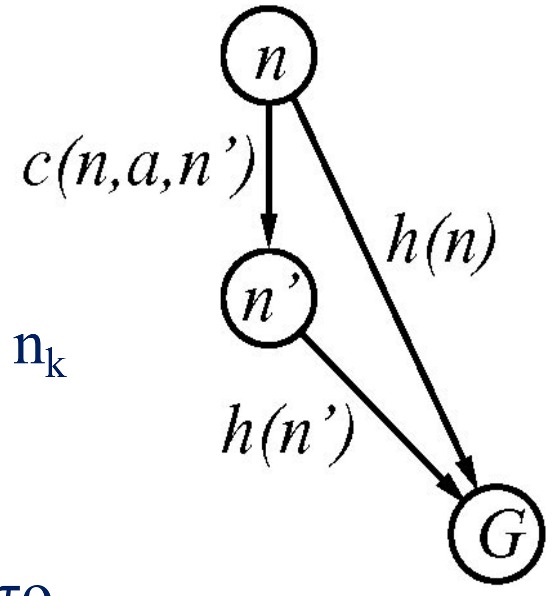
συνέχεια...




- Τότε: $f(G_2) = g(G_2) + h(G_2) = g(G_2) > C^*$.
  - $h(G_2) = 0$, αφού πρόκειται για τελική κατάσταση.
  - $g(G_2) > C^*$, αφού πρόκειται για μη βέλτιστη λύση.
- Και: $f(n) = g(n) + h(n) \leq g(n) + C(n)^* = C^*$.
  - $h(n) \leq C(n)^*$, αφού η h είναι αποδεκτή.
- Επομένως $\mathbf{f(n) < f(G_2)}$. Άρα θα προτιμήσει να βγάλει από το μέτωπο και να ελέγξει (και επεκτείνει) τον n πριν βγάλει από το μέτωπο τον $G_2$, αντίθετα από ό,τι υποθέσαμε (**άτοπο**).
  - Υποθέσαμε ότι βρισκόμαστε αμέσως πριν βγάλει από το μέτωπο τον $G_2$.

# A* και συνεπείς h

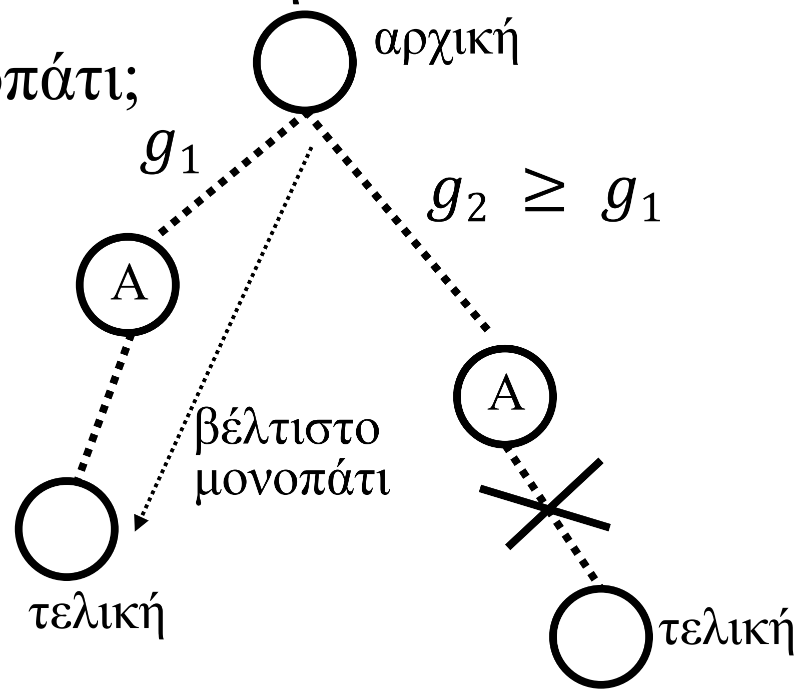
- **Συνεπής** σημαίνει: $h(n) \leq c(n, a, n') + h(n')$
  – Για κάθε κόμβο n, παιδί n' του n και κάθε τελεστή a που οδηγεί από τον n στον n'.



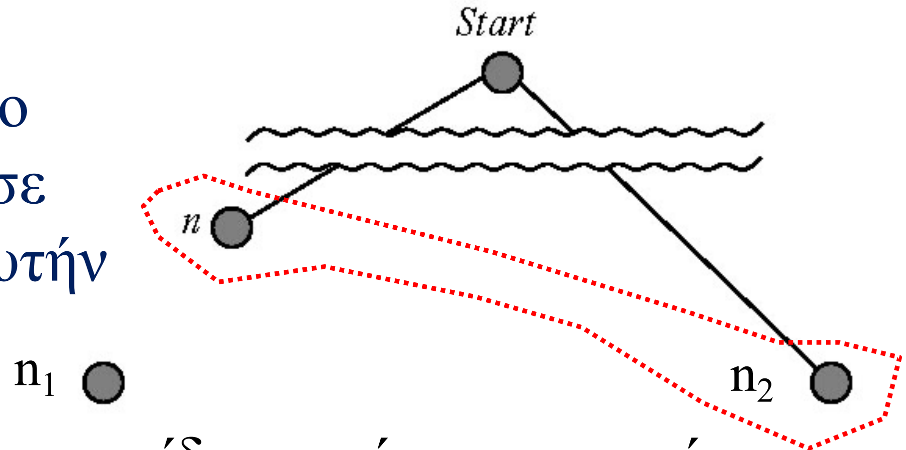

- Έπεται: $h(n_1) \leq c(n_1 \rightarrow \ldots \rightarrow n_k) + h(n_k)$
  – Για οποιοδήποτε μονοπάτι από τον $n_1$ στον $n_k$ με οποιουσδήποτε τελεστές (*άσκηση*).
- Κάθε **συνεπής h** είναι και **αποδεκτή**.
  – Προκύπτει από το προηγούμενο για βέλτιστο μονοπάτι από $n_1$ ως τελική $n_k$ (*άσκηση*).
  – Συνήθως (όχι πάντα) οι αποδεκτές h που μπορούμε να σκεφτούμε είναι και συνεπείς.
- Με συνεπή h, το **πρώτο μονοπάτι** με το οποίο φτάνει ο A* **ως κάθε κατάσταση** (κάθε ετικέτα, όχι μόνο τελική) είναι το **βέλτιστο** ως αυτήν. (Η απόδειξη ακολουθεί.)

# A* και κλειστό σύνολο

- Με συνεπή h, ο A* παραμένει **βέλτιστος** και όταν χρησιμοποιούμε **κλειστό σύνολο**.
- Το κλειστό σύνολο ίσως μας αναγκάσει να **διακόψουμε την εξερεύνηση ενός μονοπατιού** κάτω από έναν κόμβο κατάστασης A την οποία έχουμε ξανασυναντήσει.
- **Μήπως χάνουμε το βέλτιστο** μονοπάτι;
- **Όχι**, γιατί αφού η h είναι συνεπής, το **προηγούμενο μονοπάτι** με το οποίο είχαμε φτάσει **σε A ήταν το συντομότερο** μέχρι A.
  - Και τα δύο υποδέντρα των A είναι ίδια.



# Απόδειξη ότι με συνεπή h το πρώτο μονοπάτι με το οποίο ο A* φτάνει σε κάθε κατάσταση είναι βέλτιστο ως αυτήν




- Έστω ότι οι $n_1$ και $n_2$ αντιστοιχούν στην ίδια κατάσταση και ότι $g(n_2) > g(n_1)$, αλλά ο A* φτάνει στον $n_2$ πριν τον $n_1$.
  - «Φτάνει» στον $n_2$ όταν τον βγάζει από το μέτωπο, τον ελέγχει και ενδεχομένως τον επεκτείνει.
- Όταν φτάνει στον $n_2$, θα υπάρχει στο μέτωπο και ένας κόμβος n στο μονοπάτι με το οποίο θα φτάσει ο A* από τη ρίζα στον $n_1$.
- Αφού επιλέγει τον $n_2$, $f(n_2) \leq f(n)$, άρα $g(n_2) + h(n_2) \leq g(n) + h(n)$.
- Όμως $h(n) \leq c(n \rightarrow \ldots \rightarrow n_1) + h(n_1)$, αφού η h είναι συνεπής.
  - Χρησιμοποιούμε εδώ ως $n \rightarrow \ldots \rightarrow n_1$ το μονοπάτι με το οποίο θα φτάσει ο A* από τον n στο $n_1$.
- Άρα: $g(n_2) + h(n_2) \leq g(n) + c(n \rightarrow \ldots \rightarrow n_1) + h(n_1)$.
- Οπότε: $g(n_2) \leq g(n) + c(n \rightarrow \ldots \rightarrow n_1) = g(n_1)$, **άτοπο**.
  - $h(n_2) = h(n_1)$, αφού αντιστοιχούν στην ίδια κατάσταση.

# Επινόηση ευρετικών συναρτήσεων

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 2 | 4 |
| 5 | | 6 |
| 8 | 3 | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | |

Θεωρούμε σε αυτό το παράδειγμα μοναδιαίο κόστος για κάθε κίνηση.

- $\mathbf{h_1}$: Αριθμός πλακιδίων **εκτός θέσεως**. Είναι **αποδεκτή** η $h_1$;
  - Είναι αποδεκτή, γιατί κάθε εκτός θέσεως πλακίδιο πρέπει να μετακινηθεί τουλάχιστον μία φορά (και κάθε κίνηση μετακινεί ένα μόνο πλακίδιο).
  - Άρα θα χρειαστούμε **τουλάχιστον τόσες κινήσεις** όσα είναι τα εκτός θέσεως πλακίδια. Η ευρετική **υποεκτιμά** τις κινήσεις που θα χρειαστούμε.
- $\mathbf{h_2}$: Άθροισμα αποστάσεων **Manhattan** όλων των πλακιδίων από τις τελικές τους θέσεις. Είναι **αποδεκτή** η $h_2$;
  - Αποδεκτή, γιατί κάθε πλακίδιο πρέπει να μετακινηθεί τουλάχιστον τόσα τετράγωνα και κάθε κίνηση μετακινεί ένα πλακίδιο κατά ένα τετράγωνο.
  - Και αυτή η ευρετική **υποεκτιμά** τις κινήσεις που θα χρειαστούμε.

# Αφαίρεση περιορισμών

- Το ακριβές **βέλτιστο κόστος** (από την τρέχουσα κατάσταση ως τελική) όταν **αγνοούνται κάποιοι περιορισμοί** αποτελεί **αποδεκτή ευρετική** του **αρχικού προβλήματος**.
  - Αν μπορούν να τοποθετηθούν **πολλά πλακίδια στην ίδια θέση**, ο ακριβής βέλτιστος αριθμός κινήσεων είναι η $\mathbf{h_2}$.
  - Αν επιπλέον ένα πλακίδιο μπορεί να μετακινηθεί **οπουδήποτε με μία κίνηση**, ο ακριβής βέλτιστος αριθμός κινήσεων είναι $\mathbf{h_1}$.
  - Οι $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$ είναι τα **ακριβή βέλτιστα κόστη** (από την τρέχουσα ως τελική κατάσταση) στα δύο **απλοποιημένα προβλήματα**.
- Αν το **κόστος** κάθε μετάβασης είναι $\geq \mathbf{0}$, τότε οι ευρετικές που κατασκευάζονται αφαιρώντας περιορισμούς είναι και **συνεπείς** (βλ. άσκηση μελέτης).
- Θέλουμε το ακριβές βέλτιστο κόστος (από την τρέχουσα κατάσταση ως τελική) στο απλοποιημένο πρόβλημα (η h) να μπορεί να **υπολογιστεί πολύ εύκολα**!

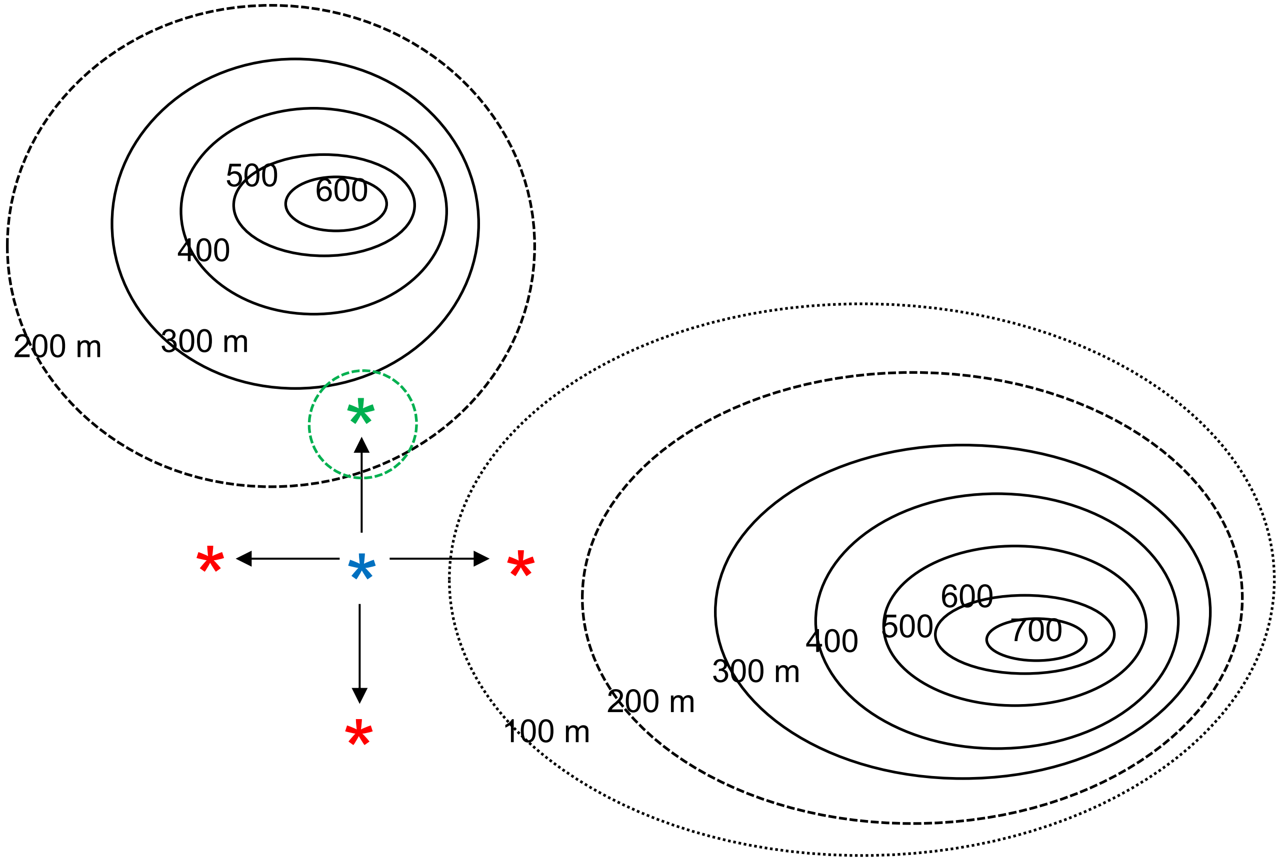
# Αξιολόγηση ευρετικών

- Για κάθε αποδεκτή ευρετική, $h(n) \leq C^*(n)$.
- Αν επιπλέον $\mathbf{h_2(n) \geq h_1(n)}$ για κάθε n, τότε η $h_2$ **κυριαρχεί** επί της $h_1$.
  - Η $h_2$ δίνει **ακριβέστερες προβλέψεις** από την $h_1$, προβλέψεις πιο κοντά στο $C^*(n)$.
  - Βοηθά τον Α* να επικεντρωθεί σε **μικρότερο μέρος του χώρου αναζήτησης**.
  - Με ιδανική ευρετική, ο Α* προχωρά μόνο κατά μήκος του βέλτιστου μονοπατιού.
- Αν έχουμε **πολλές ευρετικές** και δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι μία κυριαρχεί επί των άλλων:
  - Χρησιμοποιούμε: $\mathbf{h(n) = \max\{h_1(n), h_2(n), ..., h_k(n)\}}$
  - Αν οι $h_1, ..., h_k$ είναι αποδεκτές, τότε είναι και η h. *(Άσκηση.)*
  - Αν οι $h_1, ..., h_k$ είναι συνεπείς, τότε είναι και η h. *(Άσκηση.)*

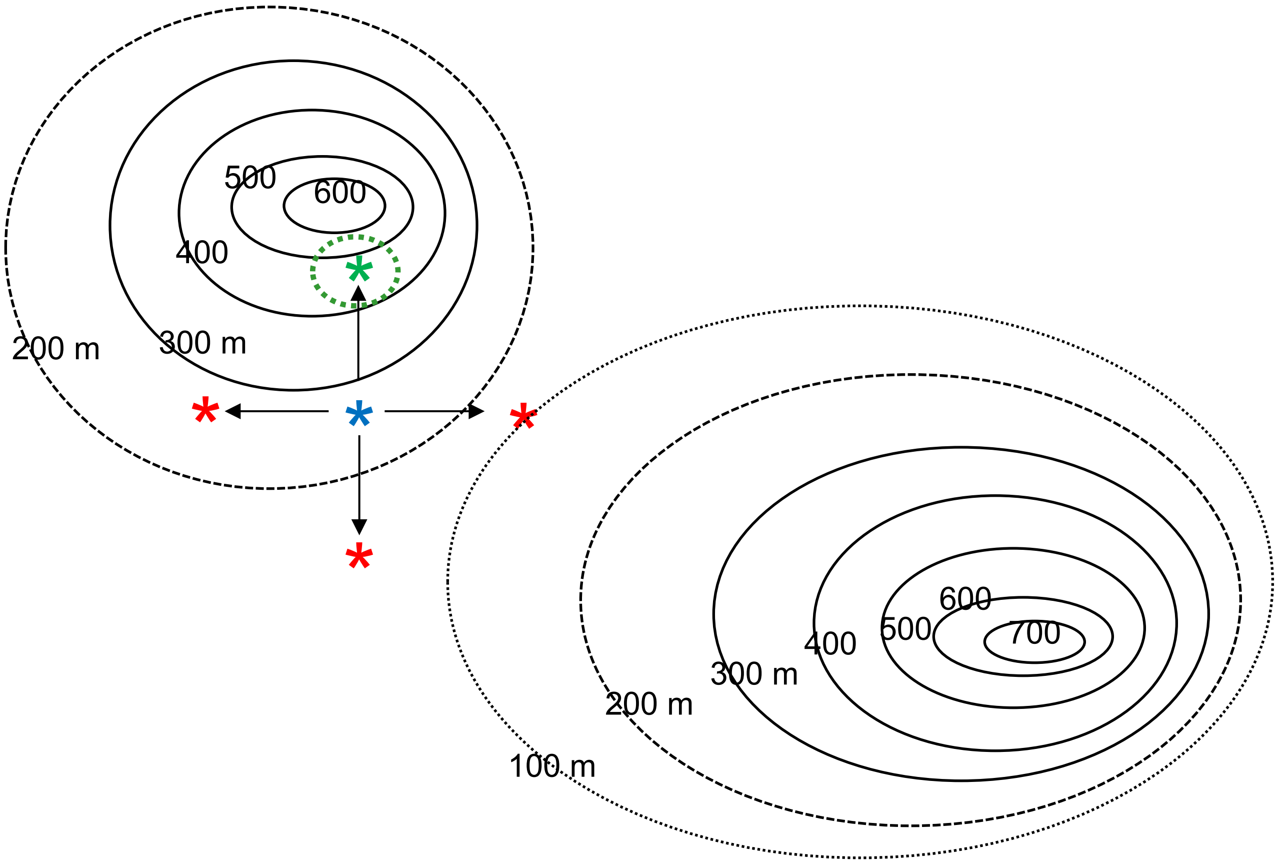
# Αλγόριθμοι τοπικής αναζήτησης

- Κρατούν **μόνο μία κατάσταση** ή έναν πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων στο **μέτωπο**.
  - Πολύ **μικρές απαιτήσεις μνήμης**.
  - **Δεν κρατούν** στοιχεία για **εναλλακτικές** διαδρομές.
  - Επιλέγουν **σε κάθε βήμα μια γειτονική** κατάσταση και ξεχνούν όλες τις άλλες εναλλακτικές κατευθύνσεις.
- Συχνά δεν επιχειρούν να βρουν το βέλτιστο μονοπάτι αλλά τη **βέλτιστη κατάσταση**.
  - Μπορεί να **μην έχουμε καν κριτήρια** που να απαντούν αν μία κατάσταση είναι **τελική ή όχι**.
  - Έχουμε συνάρτηση (**«αντικειμενική συνάρτηση»** ή συνάρτηση-στόχος) που **αξιολογεί κάθε κατάσταση**.
  - Στόχος: εύρεση κατάστασης που **μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί** την τιμή αυτής της συνάρτησης.

# Αναρρίχηση λόφων (HC)



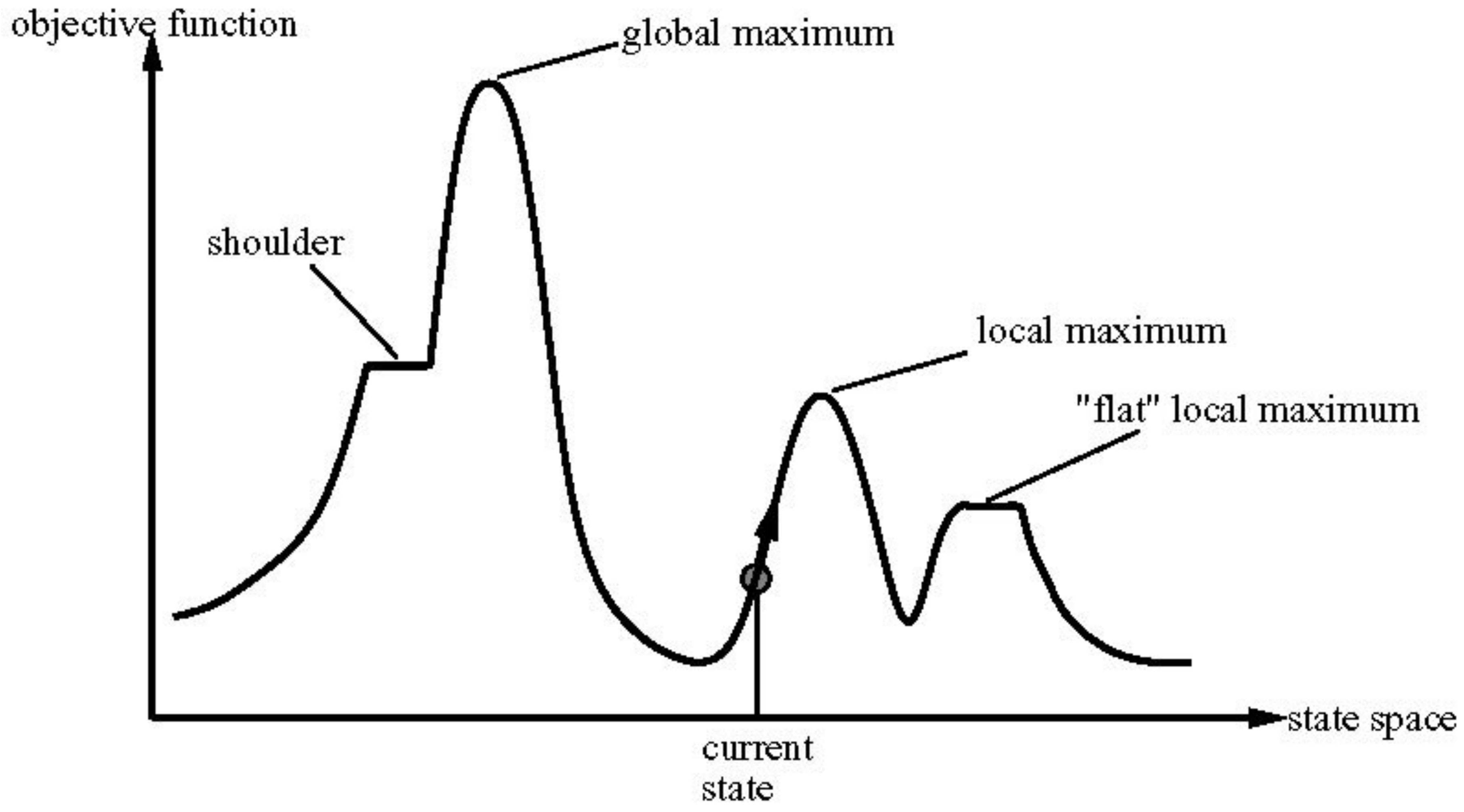
# Αναρρίχηση λόφων (HC)



# Αναρρίχηση λόφων (HC)

- Απλοϊκή στρατηγική **ορειβάτη** σε ομίχλη που προσπαθεί να **φτάσει στην κορυφή**.
  - Ποιο από τα σημεία που βλέπω γύρω μου είναι το πιο ψηλό (και πιο ψηλό από αυτό στο οποίο βρίσκομαι);
  - Πάω προς αυτό.
  - Δεν κρατάω κανένα άλλο γειτονικό σημείο στο μέτωπο.
- Πολύ **οικονομικός σε χρόνο και μνήμη**.
  - Πάντα μόνο ένας κόμβος στο μέτωπο.
- Προβλήματα:
  - Πιθανός εγκλωβισμός σε **τοπικό μέγιστο** (τοπική κορυφή).
  - Πιθανός εγκλωβισμός σε **οροπέδιο** (καμία άνοδος ορατή).

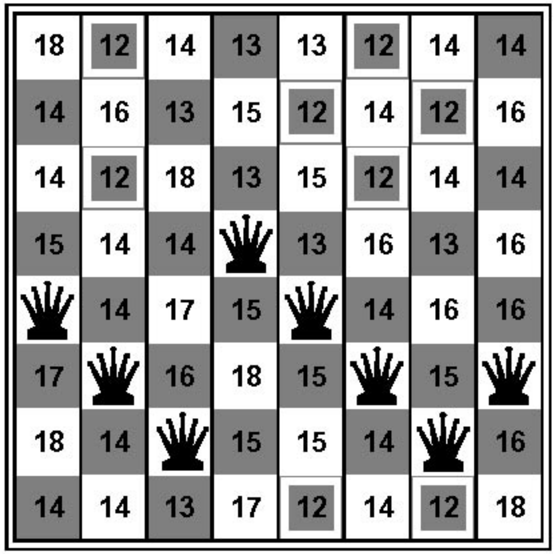
# Αναρρίχηση λόφων



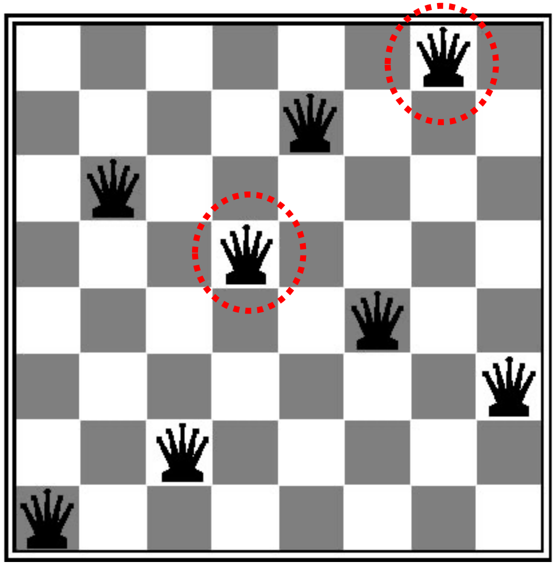
# Αλγόριθμος αναρρίχησης λόφων (HC)

1. Κάνε τρέχουσα κατάσταση την **αρχική**.
2. **Επέκτεινε** την τρέχουσα κατάσταση και **αξιολόγησε** τις καταστάσεις-παιδιά.
3. **Αν δεν υπάρχει παιδί** του οποίου η αξία να είναι μεγαλύτερη από την αξία της τρέχουσας κατάστασης, επίστρεψε την τρέχουσα κατάσταση.
4. Κάνε τρέχουσα κατάσταση το παιδί με τη **μεγαλύτερη αξία**.
5. Πήγαινε στο βήμα 2.

# Παράδειγμα τοπικού μεγίστου




h = 17



h = 1

Σε όλες τις γειτονικές καταστάσεις η h γίνεται μεγαλύτερη.

- **Τελική κατάσταση**: καμία βασίλισσα να μην απειλεί άλλη.
- **Μετάβαση**: μετακίνηση μιας βασίλισσας οπουδήποτε κατακόρυφα στη στήλη της.
  - Αν έχουμε δύο βασίλισσες σε μία στήλη, σίγουρα δεν πρόκειται για τελική κατάσταση.
- **Αντικειμενική συνάρτηση**: αριθμός ζευγών βασιλισσών που απειλούν η μία την άλλη (άμεσα ή έμμεσα).

# Παραλλαγές HC

- **Πλάγια βήματα**:
  - Όταν **δεν υπάρχει καλύτερος γείτονας**, μετακινούμαστε μέχρι ένα πεπερασμένο αριθμό **βημάτων προς μία ή περισσότερες κατευθύνσεις**, ελπίζοντας ότι θα βρούμε καλύτερη κατάσταση (π.χ. περίπτωση «ώμου»).
  - Στις 8 βασίλισσες με 100 πλάγια βήματα, λύση για το 94% των αρχικών καταστάσεων, αντί 14% χωρίς πλάγια βήματα.
- HC με **πρώτη επιλογή**:
  - Επιλέγουμε το **γείτονα** με αξία μεγαλύτερη από την τρέχουσα κατάσταση που **παράγουμε πρώτο**.
  - Ενδέχεται να κοστίζει πολύ να παραγάγουμε και να αξιολογήσουμε όλους τους γείτονες.

# Παραλλαγές HC – συνέχεια

- **Τυχαίες επανεκκινήσεις**:
  - Επαναλαμβάνουμε πολλές φορές την αναζήτηση, ξεκινώντας **κάθε φορά από άλλη αρχική** κατάσταση (αν γίνεται).
  - Αν η πιθανότητα επιτυχίας (π.χ. εύρεσης ολικού μεγίστου ή τελικής κατάστασης) σε μία επανάληψη είναι p, ο **αναμενόμενος αριθμός επιτυχιών** σε n επαναλήψεις (διωνυμική κατανομή) είναι **n·p**.
  - Αν το τοπίο έχει **λίγες παγίδες**, εξαιρετική στρατηγική.
- **Στοχαστικός** HC:
  - Παράγουμε και αξιολογούμε όλους τους **γείτονες** και **επιλέγουμε τυχαία** μεταξύ αυτών που έχουν μεγαλύτερη αξία από την τρέχουσα κατάσταση.
  - Π.χ. επιλέγουμε με **πιθανότητα ανάλογη της αξίας** τους.
  - Μπορούμε να **επαναλάβουμε** πολλές φορές με διαφορετική αρχική κατάσταση και να κρατήσουμε την καλύτερη λύση.

# Βιβλιογραφία

- Russel & Norvig (4η έκδοση): ενότητα 3.5.2, εισαγωγή ενότητας 3.6, ενότητα 3.6.2, 3.6.6, κεφάλαιο 4 ως και ενότητα 4.1.1.
  - Όσοι ενδιαφέρονται μπορούν να διαβάσουν προαιρετικά και τα τμήματα του κεφ. 3 που εξαιρέθηκαν.
- Βλαχάβας κ.ά: υπόλοιπο κεφαλαίου 4, εκτός της ενότητας 4.3.4 (θα καλυφθεί στην επόμενη διάλεξη) και 4.4.1.
  - Ο αλγόριθμος Α* μπορεί να συνδυαστεί με επαναληπτική εκβάθυνση (βλ. προαιρετικά ενότητα 4.4.1).