Ασφαλιστικά Μαθηματικά
Συνοπτικές σημειώσεις

Από την Θεωρία Θνησιμότητας

Συνάρτηση Επιβίωσης :

Η s(x) δίνει την πιθανότητα άτομο ηλικίας μηδέν , ζήσει πέραν της ηλικίας x.

$$s(x)=\begin{cases}\text{όταν x=0} & \text{s(x)=1}\\ \text{όταν ο<x<ω} & \text{συνεχής και φθίνουσα}\\ \text{όταν } x\geq \omega & \text{s(x)=0}\end{cases}$$

Όπου ω είναι η εσχάτη ή οριακή ηλικία και παριστάνει την ηλικία στην οποία δεν θα υπάρχει επιζών από την αρχική ομάδα.
Παραδείγματα:

α) $$s(x)=\begin{cases}\text{s(x)=1} & \text{όταν x=0}\\ 1-\dfrac{x}{100} & \text{όταν ο<x<100}\\ \text{s(x)=0} & \text{όταν } x\geq 100\end{cases}$$

β) $$s(x)=\frac{\sqrt{100-x}}{10}$$

Πίνακας θνησιμότητας ή βιομετρικός πίνακας:

Το ℓ_x δηλώνει τον αριθμό των ατόμων που βρίσκονται εν ζωή στην αρχή της ηλικίας x. Το d_x δηλώνει τον αριθμό των ατόμων που βρίσκονται εν ζωή στην αρχή της ηλικίας x αλλά δεν βρίσκονται εν ζωή στην αρχή της ηλικίας x +1.
$\ell_x = k\cdot s(x)$ και $d_x=\ell_x-\ell_{x+1}$ όπου το k είναι μια σταθερά ονομαζόμενη ρίζα ή βάση του πίνακα θνησιμότητας.
Ο παρακάτω πίνακας προέκυψε από το προηγούμενο β) παράδειγμα με βάση το $k=\ell_0$=100000 και για τιμές του x=0,1,2

Ηλικία x	ℓ_x	d_x
0	100000	501
1	99499	504
2	98995	506

Πιθανότητες :

Η πιθανότητα άτομο ηλικίας x να γίνει x+n : ${}_n p_x = \dfrac{\ell_{x+n}}{\ell_x}$

όταν n=1 γράφεται συνήθως p_x .

Η πιθανότητα άτομο ηλικίας x να μην γίνει x+n :

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = 1 - \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} = \frac{\ell_x - \ell_{x+n}}{\ell_x}$$

όταν n=1 γράφεται συνήθως q_x .

Η πιθανότητα άτομο ηλικίας x να γίνει x+m και
να πεθάνει μεταξύ των ηλικιών x+m και x+m+n :

$${}_{m|n} q_x = \frac{\ell_{x+m}}{\ell_x} \cdot \frac{\ell_{x+m} - \ell_{x+m+n}}{\ell_{x+m}} = \frac{\ell_{x+m} - \ell_{x+m+n}}{\ell_x}$$

Όταν n=1 είναι:

$${}_{m/} q_x = \frac{d_{x+m}}{\ell_x} = \frac{\ell_{x+m} - \ell_{x+m+1}}{\ell_x} = {}_m p_x \cdot q_{x+m}$$

Ένταση θνησιμότητας:

$$\mu_x = -\frac{d(\ell_x)}{dx} \cdot \frac{1}{\ell_x} = -\frac{d(\ell_0 \cdot s(x))}{dx} \cdot \frac{1}{\ell_0 \cdot s(x)} = -\frac{s'(x)}{dx} \cdot \frac{1}{s(x)}$$

είναι επίσης $\mu_x = -\dfrac{d(\ln \ell_x)}{dx}$.

Από όπου και έχουμε $\ell_x = \ell_0 \cdot e^{-\int_0^x \mu_\psi d\psi}$, $s(x) = e^{-\int_0^x \mu_\psi d\psi}$ καθώς και

$\ell_{x+n} = \ell_0 \cdot e^{-\int_0^{x+n} \mu_\psi d\psi}$ οπότε ${}_n p_x = \dfrac{\ell_{x+n}}{\ell_x} = e^{-\int_x^{x+n} \mu_\psi d\psi}$.

Με τον μετασχηματισμό $\psi = x + t$ με $0 \le t \le n$ έχουμε ${}_n p_x = e^{-\int_0^n \mu_{x+t} dt}$.

Κλασματικές ηλικίες :

Α. Υπόθεση ότι έχουμε ομοιόμορφη κατανομή θανόντων κατά την διάρκεια του έτους της ηλικίας x.

$\ell_{x+t} \simeq \ell_x - t \cdot d_x$ με $0 \le t \le 1$ οπότε έχουμε

${}_t p_x \simeq 1 - t \cdot q_x$, ${}_t q_x \simeq t \cdot q_x$

${}_{1-t} q_{x+t} \simeq \dfrac{(1-t) \cdot q_x}{1 - t \cdot q_x}$, $\mu_{x+t} \simeq \dfrac{q_x}{1 - t \cdot q_x}$

Β. Υπόθεση Balducci.

$$\frac{1}{\ell_{x+t}} \simeq \frac{1}{\ell_x} - t\left(\frac{1}{\ell_x} - \frac{1}{\ell_{x+1}}\right) \quad \text{με } 0 \le t \le 1$$ οπότε έχουμε

$${}_tq_x \simeq \frac{t \cdot q_x}{1-(1-t)q_x} \quad , \quad {}_{1-t}q_{x+t} \simeq (1-t)q_x \ , \ \mu_{x+t} \simeq \frac{q_x}{1-(1-t)q_x}.$$

<u>Νόμοι θνησιμότητας:</u>

1. Νόμος του De Moivre $\mu_x = (\omega - x)^{-1}$

   οπότε $s(x) = 1 - \frac{x}{\omega}$ με $0 \le x < \omega$

2. Νόμος του Gompertz $\mu_x = B \cdot c^x$

   οπότε $s(x) = e^{-m(c^x - 1)}$ με $B>0$, $c>1$, $m=\frac{B}{\ln c}, x \ge 0$

3. Νόμος του Makeham $\mu_x = A + B \cdot c^x$

   οπότε $s(x) = e^{-Ax - m(c^x - 1)}$ με $B>0$, $A \ge -B$, $c>1$, $m=\frac{B}{\ln c}, x \ge 0$

Από τις Ασφαλίσεις ζωής

Βασικά προγράμματα ασφαλίσεων ζωής

Ασφάλιση μελλοντικού κεφαλαίου (προικοδότησης).

Περιγραφή:
Άτομο ηλικίας x ετών ασφαλίζεται έτσι ώστε εάν βρίσκεται εν ζωή στην ηλικία x+n να εισπράξει 1 νομισματική μονάδα (εν περιπτώσει θανάτου του, πριν γίνει x+n ετών, δεν γίνεται καμιά καταβολή κανενός ποσού).

Ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο :

$$A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \frac{\ell_{x+n} \cdot \upsilon^{x+n}}{\ell_x \cdot \upsilon^x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Ράντες ζωής:

Παρούσα αξία ράντας ζωής ισόβιας ληξιπρόθεσμης όρου 1ν.μ. για άτομο ηλικίας x.

$$\alpha_x = \sum_{t=1}^{\omega-x-1} A_{\overset{1}{x}:\overline{t}|} = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{\omega-1}}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

όπου $D_x = \ell_x \cdot \upsilon^x$, $N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{\omega-1}$

Παρούσα αξία ράντας ζωής πρόσκαιρης n ετών ληξιπρόθεσμης όρου 1ν.μ. για άτομο ηλικίας x.

$$\alpha_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} A_{\overset{1}{x}:\overline{t}|} = \sum_{t=1}^{n} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

Παρούσα αξία ράντας ζωής μέλλουσας m ετών ισόβιας ληξιπρόθεσμης όρου 1ν.μ. για άτομο ηλικίας x.

$$_{m|}\alpha_x = \frac{N_{x+m+1}}{D_x} = \alpha_x - \alpha_{x:\overline{m}|}$$

Παρούσα αξία ράντας ζωής μέλλουσας m ετών πρόσκαιρης n ετών ληξιπρόθεσμης όρου 1ν.μ. για άτομο ηλικίας x.

$$_{m|}\alpha_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x} = \alpha_{x:\overline{m+n}|} - \alpha_{x:\overline{m}|}$$

Προκαταβλητέες ράντες ζωής:

Ισόβια: $$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

Πρόσκαιρη n ετών : $$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Μέλλουσα ισόβια: $${}_{m|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+m}}{D_x}$$

Μέλλουσα m ετών και πρόσκαιρη n ετών: $${}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$$

Σχέσεις μεταξύ των ραντών

$$\ddot{a}_x = 1 + \alpha_x \;,\; \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 + \alpha_{x:\overline{n-1|}} \;,\; {}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = {}_{m-1|}\alpha_{x:\overline{n|}},$$
$${}_{m|}\ddot{a}_x = {}_{m-1|}\alpha_x \;,\; A_{x:\overline{n|}}^{\;\;1} = \alpha_{x:\overline{n|}} - \alpha_{x:\overline{n-1|}}$$

Για την εύρεση της αξίας ενός οιοδήποτε ποσού σε μια άλλη χρονική στιγμή διαφορετική από αυτήν στην οποία αναφέρεται και λαμβάνεται υπ'όψιν πέραν του σχετικού επιτοκίου και η επιβίωσης θα πρέπει να χρησιμοποιείται με τα κατάλληλα x ,n ο χρηματοοικονομικός συντελεστής $A_{x:\overline{n|}}^{\;\;1}$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η τελική αξία της $\alpha_{x:\overline{n|}}$.

Έχουμε μια ράντα που η παρούσα της αξία $\alpha_{x:\overline{n|}}$ αναφέρεται στην ηλικία x είναι ληξιπρόθεσμη πρόσκαιρη με n όρους , και θέλουμε να βρούμε την αξία της την χρονική στιγμή x+n.

$$s_{x:\overline{n|}} = \alpha_{x:\overline{n|}} \cdot \frac{1}{A_{x:\overline{n|}}^{\;\;1}} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \cdot \frac{1}{\frac{D_{x+n}}{D_x}} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_{x+n}}$$

Γενικός τρόπος υπολογισμού των εκφράσεων του ενιαίου καθαρού ασφαλίστρου (της παρούσας αξίας) στις ράντες ζωής (ληξιπρόθεσμες ή προκαταβλητέες).

$$\frac{N_\psi - N_{\psi+n}}{D_x}$$

Όπου

ψ είναι η ηλικία στην οποία γίνεται η καταβολή του <u>πρώτου</u> όρου της ράντας.
n είναι το πλήθος όλων των πληρωμών και
x είναι η ηλικία στην οποία ζητείται η αξία όλων των πληρωμών της ράντας.

Παράδειγμα:
Ζητείται η αξία της ράντας ζωής $_{5|}\ddot{a}_{30:\overline{12|}}$ στην ηλικία 38.
Ο πρώτος όρος της ράντας καταβάλλεται στην ηλικία 35 ($\psi = 35$)
Το πλήθος των όρων της ράντας είναι 12 ($n = 12$)
Η ηλικία στη οποία ζητείται η αξία είναι 38 ($x = 38$)
Οπότε έχουμε : $\frac{N_{35} - N_{47}}{D_{38}}$ ως αξία της ράντας στην ηλικία 38.
Το ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε εάν χρησιμοποιούσαμε τον κατάλληλο χρηματοοικονομικό συντελεστή :

$$_{5|}\ddot{a}_{30:\overline{12|}} \cdot \frac{1}{A_{30:\overline{8|}}^{\;\;1}} = \frac{N_{30+5} - N_{30+5+12}}{D_{30}} \cdot \frac{1}{\frac{D_{38}}{D_{30}}} = \frac{N_{35} - N_{47}}{D_{38}}$$

<u>Ασφάλιση σε περίπτωση θανάτου</u>

Περιγραφή:
Άτομο ηλικίας x ασφαλίζεται έτσι ώστε οποτεδήποτε συμβεί ο θάνατός του να εισπράξουν οι δικαιούχοι του 1 ν. μ. στο τέλος του έτους.
Το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο (ή παρούσα αξία της ασφάλισης) που πληρώνει ο ασφαλισμένος με την έναρξη της ασφάλισης στην ηλικία x συμβολίζεται με A_x.

$$A_x \cdot \ell_x = 1 \cdot d_x \cdot \upsilon + 1 \cdot d_{x+1} \cdot \upsilon^2 + \cdots + 1 \cdot d_{x+n-1} \cdot \upsilon^n + \cdots$$

Εάν θέσουμε $C_x = d_x \cdot \upsilon^{x+1}$ και $M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots$ θα έχουμε

$$A_x = \frac{d_x \cdot \upsilon + d_{x+1} \cdot \upsilon^2 + \cdots + d_{x+n-1} \cdot \upsilon^n + \cdots}{\ell_x}$$

$$A_x = \frac{d_x \cdot \upsilon^{x+1} + d_{x+1} \cdot \upsilon^{x+2} + \cdots + d_{x+n-1} \cdot \upsilon^{x+n} + \cdots}{\ell_x \cdot \upsilon^x}$$

$$A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1} + \cdots}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}$$

Περιγραφή:
Άτομο ηλικίας x ασφαλίζεται έτσι ώστε οποτεδήποτε συμβεί ο θάνατός του μέσα στα επόμενα n έτη να εισπράξουν οι δικαιούχοι του 1 ν. μ. στο τέλος του έτους.
Το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο (ή παρούσα αξία της ασφάλισης) που πληρώνει ο ασφαλισμένος με την έναρξη της ασφάλισης στην ηλικία x συμβολίζεται με $A^1_{x:\overline{n|}}$.
Το σύμβολο $A^1_{x:\overline{n|}}$ είναι διαφορετικό από το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο μελλοντικού κεφαλαίου $A_{x:\overline{n|}}^{\;\;1}$ που αναφέρθηκε προηγούμενα.
Η θέση του 1 στο σύμβολο δηλώνει την διαφορετική σημασία του καθενός.

$$A^{1}_{x:\overline{n}|}\cdot \ell_x = 1\cdot d_x \cdot \upsilon + 1\cdot d_{x+1}\cdot \upsilon^2 + \cdots + 1\cdot d_{x+n-1}\cdot \upsilon^n$$

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{d_x\cdot\upsilon + d_{x+1}\cdot\upsilon^2 + \cdots + d_{x+n-1}\cdot\upsilon^n}{\ell_x}$$

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{d_x\cdot\upsilon^{x+1} + d_{x+1}\cdot\upsilon^{x+2} + \cdots + d_{x+n-1}\cdot\upsilon^{x+n}}{\ell_x\cdot\upsilon^x}$$

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Περιγραφή:
Άτομο ηλικίας x ασφαλίζεται έτσι ώστε οποτεδήποτε συμβεί ο θάνατός του σε ηλικία μεγαλύτερη από την x+m να εισπράξουν οι δικαιούχοι του 1 ν. μ. στο τέλος του έτους.
Έχουμε δηλαδή μια ισόβια ασφάλιση σε περίπτωση θανάτου μέλλουσα m ετών.
Το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο (ή παρούσα αξία της ασφάλισης) που πληρώνει ο ασφαλισμένος στην έναρξη της ασφάλισης στην ηλικία x συμβολίζεται με ${}_{m|}A_x$.

$${}_{m|}A_x = A_x - A^{1}_{x:\overline{m}|} = \frac{M_x}{D_x} - \frac{M_x - M_{x+m}}{D_x} = \frac{M_{x+m}}{D_x}$$

<u>Μικτή Ασφάλιση</u>
Περιγραφή:
Άτομο ηλικίας x ασφαλίζεται έτσι ώστε οποτεδήποτε συμβεί ο θάνατός του μέσα στα επόμενα n έτη να εισπράξουν οι δικαιούχοι του 1 ν. μ. στο τέλος του έτους ενώ εάν επιζήσει και γίνει x+n ετών να εισπράξει ο ίδιος τη 1 ν. μ.
Το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο (ή παρούσα αξία της ασφάλισης) που πληρώνει ο ασφαλισμένος με την έναρξη της ασφάλισης στην ηλικία x συμβολίζεται με $A_{x:\overline{n}|}$.

$$A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

Έχουμε δηλαδή τον συνδυασμό της ασφάλισης μελλοντικού κεφαλαίου και της πρόσκαιρης ασφάλισης σε περίπτωση θανάτου.
Το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο σε αυτήν την περίπτωση είναι το άθροισμα των επιμέρους ασφαλίστρων των δύο ασφαλίσεων.
Χρήση του συμβόλου $A_{x:\overline{n}|}$ προϋποθέτει ότι το ασφαλισμένο ποσό είναι το ίδιο είτε πεθάνει ο ασφαλισμένος είτε επιζήσει.

<u>Περιοδικά Ασφάλιστρα</u>

Για να βρούμε το περιοδικό ασφάλιστρο μιας ασφάλισης βασιζόμαστε στην οικονομική ισοδυναμία: ‘’ Η παρούσα αξία των περιοδικών πληρωμών πρέπει να ισούται με την παρούσα αξία της ασφάλισης’’.

Η οικονομική αρχή μπορεί να γραφεί και ως εξής: $P\cdot\ddot{a} = A \rightarrow P = \dfrac{A}{\ddot{a}}$

Όπου P είναι το καθαρό ετήσιο ασφάλιστρο.
Το $\ddot{a}$ είναι η παρούσα αξία της κατάλληλης προκαταβλητέας ράντας ζωής.
Το A είναι το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο της θεωρούμενης μορφής ασφάλισης.

Ασφάλιση μελλοντικού κεφαλαίου για άτομο ηλικίας x και για n περιόδους $A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$

Στην περίπτωση των περιοδικών πληρωμών θα έχουμε προκαταβλητέα ράντα.
$A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ όπου το $P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$ είναι ο όρος της προκαταβλητέας ράντας.
Θεωρούμε ότι η πληρωμή γίνεται στην αρχή κάθε περιόδου και για όλη την διάρκεια της ασφάλισης, Εάν το πλήθος των πληρωμών είναι μικρότερο από την διάρκεια της ασφάλισης τότε το σύμβολο $P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$ και η εξίσωση τροποποιείται αναλόγως.
Π.χ. Άτομο ηλικίας 30 ετών ασφαλίζεται έτσι ώστε <u>εάν γίνει</u> 60 ετών να εισπράξει 100000 ν.μ. ενώ θα πληρώνει ετήσια ασφάλιστρα τα 20 πρώτα έτη της ασφάλισης. Με ασφαλισμένο ποσό 1 ν.μ. η εξίσωση θα είναι $A_{30:\overline{30}|}^{\;\;\;\;1} = P \cdot \ddot{a}_{30:\overline{20}|}$ από την οποία έχουμε

$$P = \frac{A_{30:\overline{30}|}^{\;\;\;\;1}}{\ddot{a}_{30:\overline{20}|}} = \frac{\frac{D_{60}}{D_{30}}}{\frac{N_{30} - N_{50}}{D_{30}}} = \frac{D_{60}}{N_{30} - N_{50}} = \frac{624.974}{52488.327 - 15722.552} = 0.01699881$$

στην συνέχεια πολλαπλασιάζοντας με 100000 θα έχουμε το ζητούμενο περιοδικό ασφάλιστρο για τα 20 πρώτα έτη της ασφάλισης που είναι 1700 ν.μ. περίπου.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται ορισμένα περιοδικά ασφάλιστρα.

Ισόβια ασφάλιση θανάτου	$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{M_x}{N_x}$
Πρόσκαιρη ασφάλιση θανάτου n ετών	$P_{x:\overline{n}|}^{1} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$
Μικτή ασφάλιση (n ετών)	$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$
Ασφάλιση μελλοντικού κεφαλαίου n ετών	$P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$
Ισόβια ασφάλιση θανάτου με τα ασφάλιστρα να πληρώνονται τα πρώτα t έτη	${}_tP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} = \frac{M_x}{N_x - N_{x+t}}$
Πρόσκαιρη ασφάλιση θανάτου και πρόσκαιρη πληρωμή t ασφαλίστρων, t<n .	${}_tP_{x:\overline{n}|}^{1} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{1}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+t}}$
Μικτή ασφάλιση n ετών με πρόσκαιρη πληρωμή t ασφαλίστρων, t<n .	${}_tP_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+t}}$

Με την ίδια οικονομική αρχή υπολογίζονται και ετήσια ασφάλιστρα που δεν είναι σταθερά. Σαν παράδειγμα θεωρείστε μια ισόβια ασφάλιση σε περίπτωση θανάτου όπου το ετήσιο ασφάλιστρο των τριών πρώτων ετών είναι το μισό από το ετήσιο ασφάλιστρο των υπολοίπων ετών.
Εάν πάρουμε ως P το ασφάλιστρο των τριών πρώτων ετών θα έχουμε:

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{3|}} + {}_{3|}\ddot{a}_x \cdot 2P = A_x \Rightarrow$$

$$P = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{3|}} + 2\,{}_{3|}\ddot{a}_x} = \frac{\frac{M_x}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+3}}{D_x} + 2\frac{N_{x+3}}{D_x}} = \frac{M_x}{N_x + N_{x+3}}$$

Εμπορικά Ασφάλιστρα

Τα καθαρά ή μαθηματικά ασφάλιστρα επιβαρύνονται εν γένει με
i) τα έξοδα διαχείρισης, ιι) τα έξοδα κτήσεως και iii) τα έξοδα εισπράξεως.
Τα εμπορικά ασφάλιστρα υπολογίζονται με την εξίσωση των παρουσών αξιών των εμπορικών ασφαλίστρων και του αθροίσματος των παρουσών αξιών των ασφαλιζομένων κεφαλαίων και των παρουσών αξιών των εξόδων.
Εάν τα έξοδα εισπράξεως εκφράζονται σαν ποσοστό γ επί του εμπορικού ασφαλίστρου , τα έξοδα διαχείρισης σαν ποσοστό α επί του ασφαλιζομένου κεφαλαίου και τα έξοδα κτήσεως είναι β τότε θα έχουμε :
$P'\ddot{a} = A + \gamma P'\ddot{a} + \alpha\ddot{a} + \beta$ Όπου το ασφαλιζόμενο κεφάλαιο είναι 1 ν.μ. και το εμπορικό ασφάλιστρο είναι P'. Εάν αντικαταστήσουμε $A = P\ddot{a}$ προκύπτει

$$P' = \frac{1}{1-\gamma}\left(P + \frac{\beta}{\ddot{a}} + \alpha\right)$$

Η διαφορά $P' - P$ είναι η επιβάρυνση του ασφαλιστηρίου συμβολαίου.

Ράντες ζωής με μεταβλητούς όρους.

Ισόβια προκαταβλητέα ράντα ζωής της οποίας οι όροι διαφέρουν μεταξύ τους και είναι 1,2,3,4,… καταβαλλόμενοι στην αρχή κάθε περιόδου (προκαταβλητέα).
Η περιγραφόμενη παραπάνω ράντα ονομάζεται *Αυξανόμενη Ράντα Ζωής* .
Την παρούσα αξία (ή το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο) αυτής της ράντας την δηλώνει το σύμβολο $(I\ddot{a})_x$.

$$(I\ddot{a})_x = \frac{S_x}{D_x} \text{ όπου } S_x = \sum_{t=0}^{\infty} N_{x+t} = \sum_{t=0}^{\infty}(t+1)D_{x+t}$$

Εάν είναι αυξανόμενη ληξιπρόθεσμη τότε οι όροι 1,2,3,4,… καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου και το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο αυτής είναι :

$$(Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x} \text{ όπου } S_x = \sum_{t=0}^{\infty} N_{x+t} = \sum_{t=0}^{\infty}(t+1)D_{x+t}$$

Το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο μιας αυξανόμενης προκαταβλητέας ράντας ζωής πρόσκαιρης n ετών είναι :

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n}}{D_x}$$

Το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο μιας ελαττούμενης προκαταβλητέας ράντας ζωής πρόσκαιρης n ετών όπου ο πρώτος όρος είναι n ν.μ. ο δεύτερος $n-1$ ν.μ. ο τρίτος $n-2$ ν.μ. $\cdots$ ο τελευταίος 1 ν.μ. είναι:

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{n \cdot N_x - S_{x+1} + S_{x+n+1}}{D_x}$$

<u>Ασφαλίσεις σε περίπτωση θανάτου με μεταβλητά τα ασφαλιζόμενα ποσά.</u>

Εάν έχουμε μια αυξανόμενη ισόβια ασφάλιση σε περίπτωση θανάτου όπου το ασφαλιζόμενο ποσό είναι 1ν.μ. για το πρώτο έτος, 2 ν.μ. για το δεύτερο έτος, 3 ν.μ. για το τρίτο έτος κ.λ.π. τότε το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο στην ηλικία x για αυτήν την ασφάλιση είναι :

$$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x}$$

Όπου $R_x = \sum_{t=0}^{\infty} M_{x+t} = \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) C_{x+t}$.

Εάν η προηγούμενη ασφάλιση είναι πρόσκαιρη ασφάλιση n ετών και όχι ισόβια τότε έχουμε :

$$(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n}}{D_x}$$

Εάν η πρόσκαιρη ασφάλιση n ετών σε περίπτωση θανάτου είναι ελαττούμενη δηλαδή αρχίζει με ασφαλισμένο ποσό n νομισματικών μονάδων στην ηλικία x και μετά τα ασφαλισμένα ποσά ελαττώνονται κατά 1 ν.μ. κάθε έτος μέχρι του n-στου έτους τότε το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο στην ηλικία x είναι :

$$(DA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{n \cdot M_{x+n} - R_{x+1} + R_{x+n+1}}{D_x}$$

Σχέσεις μεταξύ των ασφαλίστρων

Υπενθυμίζονται τα σύμβολα (*συναρτήσεις*) μετατροπής.

$$D_x = \ell_x \upsilon^x, \quad N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} \cdots \;, \; S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} \cdots$$

$$C_x = d_x \upsilon^{x+1} \;, M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} \cdots \;, \; R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} \cdots$$

Με χρήση της $d_t = \ell_t - \ell_{t+1}$ η $C_t = d_t \upsilon^{t+1}$ μας δίνει $C_t = \upsilon D_t - D_{t+1}$ ή

$C_t = D_t - D_{t+1} - d\, D_t$ όπου $d = 1\text{-}\upsilon = i\upsilon = \dfrac{i}{1+i}$

$$M_x = \sum_{t=x}^{\infty} C_t = \sum_{t=x}^{\infty} \left(D_t - D_{t+1} - d\, D_t \right) = D_x - d\, N_x$$

$$\frac{M_x}{D_x} = 1 - d\,\frac{N_x}{D_x} \Rightarrow \boxed{A_x = 1 - d\,\ddot{a}_x}$$

Από όπου έχουμε : $\boxed{P_x = \dfrac{1}{\ddot{a}_x} - d}$

Με ανάλογο τρόπο

$$M_x - M_{x+n} = \sum_{t=x}^{x+n-1} C_t = \sum_{t=x}^{x+n-1} \left(D_t - D_{t+1} - d\, D_t \right) = D_x - D_{x+n} - d\left(N_x - N_{x+n} \right)$$

$$M_x - M_{x+n} = D_x - D_{x+n} - d\left(N_x - N_{x+n} \right) \Rightarrow$$

$$A^1_{x:\overline{n}|} = 1 - A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} - d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \Rightarrow A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = 1 - d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \Rightarrow \boxed{A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \Rightarrow$$

$$\frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d \Rightarrow \boxed{P_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d}$$

Από την $M_x = D_x - d\, N_x \quad \Rightarrow \quad \sum_{t=x}^{\infty} M_t = \sum_{t=x}^{\infty} \left(D_t - d\, N_t \right) \Rightarrow \boxed{R_x = N_x - d\, S_x}$

Διαιρώντας με D_x έχουμε $\dfrac{R_x}{D_x} = \dfrac{N_x}{D_x} - d\,\dfrac{S_x}{D_x} \Rightarrow \boxed{(IA)_x = \ddot{a}_x - d\,(I\ddot{a})_x}$

<u>Κλασματικές ράντες ζωής</u>

Εάν το ποσό της 1 ν.μ. πληρώνεται τμηματικά m φορές το έτος τότε έχουμε καταβολή $\frac{1}{m}$ ν.μ. στις ηλικίες $x+\frac{1}{m}, x+\frac{2}{m}, x+\frac{3}{m}, \cdots$

Η παρούσα αξία αυτής της ισόβιας ληξιπρόθεσμης κλασματικής ράντας ζωής συμβολίζεται με $a_x^{(m)}$.

Η <u>προσεγγιστική</u> σχέση που συνδέει την κλασματική $a_x^{(m)}$ με την ετήσια a_x είναι:

$$\boxed{a_x^{(m)} \simeq a_x + \frac{m-1}{2m}}$$

Η αντίστοιχη <u>προσεγγιστική</u> σχέση που συνδέει την κλασματική προκαταβλητέα ράντα ζωής $\ddot{a}_x^{(m)}$ με την ετήσια $\ddot{a}_x$ είναι:

$$\boxed{\ddot{a}_x^{(m)} \simeq \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}}$$

Εάν έχουμε ράντες πρόσκαιρες τότε οι ανάλογες σχέσεις είναι:

$$\boxed{a_{x:\overline{n}|}^{(m)} \simeq a_{x:\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}\left(1-\frac{D_{x+n}}{D_x}\right)}$$ για την ληξιπρόθεσμη και

$$\boxed{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} \simeq \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\left(1-\frac{D_{x+n}}{D_x}\right)}$$ για την προκαταβλητέα

<u>Ασφαλίσεις σε περίπτωση θανάτου και πληρωμής του ασφαλισμένου ποσού μόλις συμβεί ο θάνατος.</u>

Με την υπόθεση ότι κατά την διάρκεια κάθε έτους ηλικίας ισχύει η ομοιόμορφη κατανομή τότε στην ισόβια ασφάλιση θανάτου έχουμε την σχέση :

$$\bar{A}_x \simeq \frac{i}{\delta} A_x$$

Όπου $\bar{A}_x$ είναι το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο για ισόβια ασφάλιση όπου το ασφαλισμένο ποσό πληρώνεται αμέσως μετά τον θάνατο του ασφαλισμένου.
Το A_x είναι το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο για ισόβια ασφάλιση όπου το ασφαλισμένο ποσό πληρώνεται στο τέλος του έτους του θανάτου .
Το $\delta = \ln(1+i)$ και i το επιτόκιο.

Με την υπόθεση ότι κατά την διάρκεια κάθε έτους ηλικίας ισχύει η ομοιόμορφη κατανομή τότε στην πρόσκαιρη ασφάλιση θανάτου έχουμε την σχέση :

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1} \simeq \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}|}^{1}$$

Όπου $\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1}$ είναι το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο για πρόσκαιρη ασφάλιση όπου το ασφαλισμένο ποσό πληρώνεται αμέσως μετά τον θάνατο του ασφαλισμένου.

Το $A^{1}_{x:\overline{n}|}$ είναι το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο για πρόσκαιρη ασφάλιση όπου το ασφαλισμένο ποσό πληρώνεται στο τέλος του έτους του θανάτου .
Μια άλλη υπόθεση είναι να θεωρήσουμε ότι όλες οι πληρωμές γίνονται στο μέσον κάθε έτους οπότε θα έχουμε :

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} \simeq (1+i)^{1/2} \cdot A^{1}_{x:\overline{n}|}$$

Ή προσεγγίζοντας $(1+i)^{1/2}$ με $\left(1+\frac{i}{2}\right)$

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} \simeq \left(1+\frac{i}{2}\right) \cdot A^{1}_{x:\overline{n}|}$$

<u>Παράδειγμα:</u>
Άτομο ηλικίας 35 ετών ασφαλίζεται έτσι ώστε αν μέσα στα επόμενα 30 έτη πεθάνει να πάρουν οι δικαιούχοι του (αμέσως μετά τον θάνατό του)10000ν.μ. ενώ αν επιζήσει να εισπράξει ο ίδιος αυτό το ποσό. Ζητείται το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο που θα πρέπει να πληρώσει .
Δίνοντας ιδιαίτερη προσοχή στον διαχωρισμό μεταξύ της ασφάλισης λόγω θανάτου και της ασφάλισης μελλοντικού κεφαλαίου και με χρήση του πίνακα PM 60/64 MKH όπου το επιτόκιο είναι $i = 0.0425$ έχουμε:

$$\bar{A}_{35:\overline{30}|} = \bar{A}^{1}_{35:\overline{30}|} + A_{35:\overline{30}|}^{\;\;\;\;\;\;\,1} \simeq \frac{i}{\delta} A^{1}_{35:\overline{30}|} + A_{35:\overline{30}|}^{\;\;\;\;\;\;\,1} = \frac{0.0425}{\ln(1+0.0425)} A^{1}_{35:\overline{30}|} + A_{35:\overline{30}|}^{\;\;\;\;\;\;\,1} =$$

$$1.021103 \cdot 0.128706 + 0.20454 \simeq 0.335962 \Rightarrow$$

$$10000 \cdot 0.335962 = 3359.62$$

Χρησιμοποιώντας και τις άλλες προσεγγίσεις έχουμε: 3359.53 και 3359.81
Τέλος η συνάρτηση μετατροπής $\bar{C}_x$ στην πράξη υπολογίζεται αναλογικά με την συνηθισμένη προσέγγιση $\bar{C}_x \simeq \frac{i}{\delta} C_x \simeq (1+i)^{1/2} C_x \simeq \left(1+\frac{i}{2}\right) C_x$.

<u>Περιοδικά κλασματικά ασφάλιστρα</u>

Αν με $P^{(m)}$ συμβολίζεται το συνολικό ποσό του ετήσιου ασφαλίστρου που πληρώνεται σε m δόσεις, τότε το κλασματικό ασφάλιστρο αντιπροσωπεύει το $\frac{1}{m}$ του ετήσιου (δηλ. $\frac{1}{m}P^{(m)}$) και πληρώνεται στην αρχή κάθε περιόδου που αντιστοιχεί στο $\frac{1}{m}$ του έτους.

Συμβολικά θα έχουμε $P^{(m)} = \frac{A}{\ddot{a}^{(m)}}$ όπου A είναι η παρούσα αξία της ασφάλισης $\ddot{a}^{(m)}$ η παρούσα αξία της προκαταβλητέας κλασματικής ράντας ζωής και υπολογίζεται προσεγγιστικά από την $\ddot{a}^{(m)} = \ddot{a} - \frac{m-1}{2m}$.

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει δύο περιοδικά κλασματικά ασφάλιστρα.

Ισόβια ασφάλιση θανάτου	$P_x^{(m)}=\frac{A_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}\simeq\frac{M_x}{N_x-\frac{m-1}{2m}D_x}$ ή $P_x^{(m)}=\frac{A_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}=\frac{P_x\cdot\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}\simeq P_x\frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x-\frac{m-1}{2m}}$
Πρόσκαιρη ασφάλιση θανάτου n ετών	$P^{(m)}_{\overset{1}{x:\overline{n}\rceil}}=\frac{A^1_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}\rceil}}=P^1_{x:\overline{n}\rceil}\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}\rceil}}\simeq P^1_{x:\overline{n}\rceil}\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}-\frac{m}{2m}\left(1-\frac{D_{x+n}}{D_x}\right)}$ ή $P^{(m)}_{\overset{1}{x:\overline{n}\rceil}}\simeq\frac{P^1_{x:\overline{n}\rceil}}{1-\frac{m-1}{2m}(P^1_{x:\overline{n}\rceil}+d)}$

Παράδειγμα:
Άτομο ηλικίας 30 ετών ασφαλίζεται με ένα πρόγραμμα ράντα ζωής , βάσει του οποίου η μηνιαία πληρωμή είναι ίση με 20000ν.μ.
Αν η πρώτη πληρωμή θα καταβληθεί στην αρχή της ηλικίας των 40 ετών και μετά στην αρχή κάθε μήνα για 10 χρόνια, να υπολογισθεί το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο αυτού του προγράμματος ασφάλισης σε σύμβολα μετατροπής προσεγγιστικά.
Εδώ έχουμε μια ράντα ζωής προκαταβλητέα πρόσκαιρη μέλλουσα με τις πληρωμές να γίνονται 12 φορές το χρόνο.
Η παρούσα αξία αυτής της ράντας είναι:

$$_{m/}\ddot{a}^{(t)}_{x:\overline{n}\rceil}=\ddot{a}^{(t)}_{x:\overline{n+m}\rceil}-\ddot{a}^{(t)}_{x:\overline{m}\rceil}\simeq\ddot{a}_{x:\overline{n+m}\rceil}-\frac{t-1}{2t}\left(1-\frac{D_{x+n+m}}{D_x}\right)-\ddot{a}_{x:\overline{m}\rceil}+\frac{t-1}{2t}\left(1-\frac{D_{x+m}}{D_x}\right)\simeq$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n+m}\rceil}-\ddot{a}_{x:\overline{m}\rceil}-\frac{t-1}{2t}\left(\frac{D_{x+m}-D_{x+n+m}}{D_x}\right),t=12,x=30,n=10,m=10$$

$$_{10/}\ddot{a}^{(12)}_{30:\overline{10}\rceil}\simeq{}_{10/}\ddot{a}_{30:\overline{10}\rceil}-\frac{11}{24}\left(\frac{D_{40}-D_{50}}{D_{30}}\right)$$

$$_{10/}\ddot{a}^{(12)}_{30:\overline{10}\rceil}\simeq\frac{N_{40}-N_{50}}{D_{30}}-\frac{11}{24}\left(\frac{D_{40}-D_{50}}{D_{30}}\right)$$

Εδώ έχουμε ως ετήσιο ποσό $20000\times12=240000$ οπότε είναι :

$$240000\cdot{}_{10/}\ddot{a}^{(12)}_{30:\overline{10}\rceil}\simeq240000\left[\frac{N_{40}-N_{50}}{D_{30}}-\frac{11}{24}\left(\frac{D_{40}-D_{50}}{D_{30}}\right)\right]$$

ΑΠΟΘΕΜΑΤΙΚΑ ΑΣΦΑΛΙΣΕΩΝ

Θεωρούμε ομάδα 10000 ατόμων, όλα ηλικίας 60 ετών, που ασφαλίζονται με πρόγραμμα μικτής ασφάλισης 5 ετών και για ποσό 100000 ν.μ. που καταβάλλεται στο τέλος του έτους του θανάτου κάθε ασφαλισμένου. Τα ασφάλιστρα πληρώνονται κάθε χρόνο.
Στον παρακάτω πίνακα παρακολουθείται η εξέλιξη της ασφάλισης από την έναρξη μέχρι και την λήξη της.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Έτος	Εισπρακτέα ασφάλιστρα	Κεφάλαια στην αρχή του έτους (2)+(6)	Τόκος που προστίθεται	Πληρωμές Δικαιούχων θανόντων	Κεφάλαιο στο τέλος του έτους (3)+(4)-(5)	Εν ζωή άτομα	Κεφάλαιο ανά επιζώντα (6)/(7)
1	186010000	186010000	7905425	21100000	172815425	9789	17654
2	182085189	354900614	15083276	22500000	347483890	9564	36333
3	177899964	525383854	22328814	24000000	523712668	9324	56168
4	173435724	697148392	29628807	25500000	701277199	9069	77327
5	168692469	869969668	36973711	27100000	879843379	8798	100005

Η τελευταία στήλη (8) παρουσιάζει τι ποσό είναι διαθέσιμο για κάθε ευρισκόμενο εν ζωή ασφαλισμένο. Τα ποσά είναι στρογγυλοποιημένα οπότε υπάρχει και η διαφορά των 5 μονάδων στο τελικό ποσό που θεωρητικά είναι 100000 ν.μ., ποσό που παίρνουν οι επιζώντες με το τέλος της ασφαλιστικής περιόδου.
Τα ποσά αυτά μπορούν να υπολογισθούν άμεσα με τους παρακάτω τρόπους.
Και στις δύο περιπτώσεις θα είναι ίσα για την ίδια ασφάλιση και για την ίδια χρονική στιγμή.

<u>Προοπτικό Αποθεματικό</u>
Παρούσα αξία μελλοντικών υποχρεώσεων ασφαλιστικής εταιρείας —
Παρούσα αξία μελλοντικών υποχρεώσεων ασφαλισμένου

<u>Αναδρομικό Αποθεματικό</u>
Παρούσα αξία υποχρεώσεων που έχει εκπληρώσει ο ασφαλισμένος —
Παρούσα αξία υποχρεώσεων που έχει εκπληρώσει η ασφαλιστική εταιρεία

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί το αποθεματικό στο τέλος του 3ου έτους στην παραπάνω ασφάλιση.

<u>ΠΡΟΟΠΤΙΚΟ</u>

$$ {}_3V_{60:\overline{5}|} = A_{63:\overline{2}|} - P_{60:\overline{5}|}\cdot \ddot{a}_{63:\overline{2}|} = \frac{M_{63}-M_{65}+D_{65}}{D_{63}} - P_{60:\overline{5}|}\cdot \frac{N_{63}-N_{65}}{D_{63}} = $$

$$ \frac{M_{63}-M_{65}+D_{65}}{D_{63}} - \frac{M_{60}-M_{65}+D_{65}}{N_{60}-N_{65}}\cdot \frac{N_{63}-N_{65}}{D_{63}} \overset{\times 100000}{\Rightarrow} 56164.50 $$

<u>ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟ</u>

$$ {}_3V_{60:\overline{5}|} = P_{60:\overline{5}|}\cdot \ddot{a}_{60:\overline{3}|}\cdot \frac{1}{A_{60:\overline{3}|}^{\;\;\;1}} - A^{1}_{60:\overline{3}|}\cdot \frac{1}{A_{60:\overline{3}|}^{\;\;\;1}} = $$

$$ \frac{M_{60}-M_{65}+D_{65}}{N_{60}-N_{65}}\cdot \frac{N_{60}-N_{63}}{D_{60}}\cdot \frac{1}{\frac{D_{63}}{D_{60}}} - \frac{M_{60}-M_{63}}{D_{60}}\cdot \frac{1}{\frac{D_{63}}{D_{60}}} = $$

$$ \frac{M_{60}-M_{65}+D_{65}}{N_{60}-N_{65}}\cdot \frac{N_{60}-N_{63}}{D_{63}} - \frac{M_{60}-M_{63}}{D_{63}} \overset{\times 100000}{\Rightarrow} 56164.50 $$

Γενικότερα από τις δύο παρακάτω εκφράσεις με $t = 1, 2, 3, 4, 5$ μπορούμε να έχουμε την στήλη 8 του παραπάνω πίνακα αν πολλαπλασιάσουμε τα αποτελέσματα με 100000 διότι ότι προκύπτει είναι για ασφαλισμένο ποσό 1 ν.μ.

ΠΡΟΟΠΤΙΚΟ

$$ {}_{t}V_{60:\overline{5}|} = A_{60+t:\overline{5-t}|} - P_{60:\overline{5}|} \cdot \ddot{a}_{60+t:\overline{5-t}|} \quad \Rightarrow \quad \times 100000 $$

17653.20   36329.30   56164.50   77322.30   100000.

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟ

$$ {}_{t}V_{60:\overline{5}|} = P_{60:\overline{5}|} \cdot \ddot{a}_{60:\overline{t}|} \cdot \frac{1}{A_{60:\overline{t}|}^{\;\;1}} - A^{1}_{60:\overline{t}|} \cdot \frac{1}{A_{60:\overline{t}|}^{\;\;1}} \quad \Rightarrow \quad \times 100000 $$

17653.20   36329.30   56164.50   77322.30   100000.

Υπενθυμίζετε ότι οι αποκλίσεις στα αποτελέσματα οφείλονται στις στρογγυλοποιήσεις που έγιναν κατά την κατάστρωση του πίνακα.
Όπως π.χ. το ετήσιο ασφάλιστρο ενώ είναι 18600.95 λαμβάνεται 18601 .

ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ ΑΠΟΘΕΜΑΤΙΚΑ

Έχοντας υπ'όψιν ότι ${}_{0}V = 0$ η σχέση δύο διαδοχικών αποθεματικών είναι

$$ \boxed{\left({}_{t}V + P\right)(1+i) = 1 \cdot q_{x+t} + p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V} $$

Το i είναι το επιτόκιο , 1 είναι το ασφαλισμένο κεφάλαιο δηλαδή μία νομισματική μονάδα που καταβάλλεται στο τέλος του έτους σε περίπτωση θανάτου,
$x+t$ η ηλικία του ασφαλισμένου που στην έναρξη της ασφάλισης ήταν x ,
q_{x+t} , p_{x+t} οι πιθανότητες ο ασφαλισμένος να μην γίνει ή να γίνει $x+t+1$
${}_{t}V$ είναι το αποθεματικό της ασφάλισης στο τέλος του t έτους και
${}_{t+1}V$ το αποθεματικό της ασφάλισης στο τέλος του $t+1$ έτους.
Το P είναι το ασφάλιστρο που πληρώνεται στην αρχή του έτους
Εάν σε περίπτωση θανάτου υπάρχει ασφαλισμένο ποσό S που δίνεται στο τέλος του έτους του θανάτου ενώ αν υπάρχει και ποσό W που δίνεται στο τέλος του έτους λόγω επιβίωσης τότε η σχέση των αποθεματικών είναι

$$ \left({}_{t}V + P\right)(1+i) = S \cdot q_{x+t} + p_{x+t} \cdot \left({}_{t+1}V + W\right) $$

όπου το P είναι το ετήσιο ασφάλιστρο για αυτήν την ασφάλιση και ${}_{t}V$, ${}_{t+1}V$ τα αντίστοιχα αποθεματικά στο τέλος του t και $t+1$ έτους

Παράδειγμα:
Άτομο ηλικίας 75 ετών ασφαλίζεται έτσι ώστε εάν βρίσκεται εν ζωή στην ηλικία των 78 ετών να εισπράξει 1000 ν.μ. οπότε και λήγει η ασφάλιση. Εάν πεθάνει πριν γίνει 78 ετών τότε ο δικαιούχος του θα πάρει 1000 ν.μ. καθώς και το αντίστοιχο αποθεματικό υπολογιζόμενο στο τέλος του έτους του θανάτου.
Για αυτήν την ασφάλιση θα πληρώνει ασφάλιστρο π στην αρχή κάθε έτους.
Η θνησιμότητα ακολουθεί τον πίνακα PM 60/64 με επιτόκιο $i = 0.0425$
Να υπολογισθεί το π .

Θα γίνει χρήση της $\left({}_{t}V + P\right)(1+i) = S \cdot q_{x+t} + p_{x+t} \cdot \left({}_{t+1}V + W\right)$

Όπου $S=1000+{}_tV$, t=1,2,3 $({}_0V=0)$, $P=\pi$, $W=0$ για όλα τα t.

$$\left({}_tV+\pi\right)(1+i)=(1000+{}_{t+1}V)\cdot q_{x+t}+(1-q_{x+t})\cdot{}_{t+1}V\Rightarrow$$

Και είναι: $\left({}_tV+\pi\right)(1+i)=1000\cdot q_{x+t}+{}_{t+1}V\Rightarrow$

$${}_{t+1}V=\left({}_tV+\pi\right)(1+i)-1000\cdot q_{x+t}$$

Με $x=75$

$t=0 \quad\Rightarrow\quad {}_1V=1.0425\cdot\pi-1000\cdot q_{75}$

$t=1 \quad\Rightarrow\quad {}_2V=1.0425\cdot({}_1V+\pi)-1000\cdot q_{76}$

$t=2 \quad\Rightarrow\quad {}_3V=1.0425\cdot({}_2V+\pi)-1000\cdot q_{77}$

Με ${}_0V=0$, ${}_3V=1000$, $q_{75}=0.07692$, $q_{76}=0.083742$, $q_{77}=0.09114$

Έχουμε το σύστημα

$$\boxed{\begin{aligned}&{}_1V=1.0425\cdot\pi-1000\cdot q_{75}\\&{}_2V=1.0425\cdot({}_1V+\pi)-1000\cdot q_{76}\\&{}_3V=1000=1.0425\cdot({}_2V+\pi)-1000\cdot q_{77}\end{aligned}}$$

Η λύση του οποίου μας δίνει $\pi\simeq 386.85$

Από την σχέση $\left({}_tV+P\right)(1+i)=S\cdot q_{x+t}+p_{x+t}\cdot{}_{t+1}V$ έχουμε

$$\left({}_tV+P\right)(1+i)=S\cdot q_{x+t}+(1-q_{x+t})\cdot{}_{t+1}V={}_{t+1}V+q_{x+t}(S-{}_{t+1}V)$$

Η διαφορά $S-{}_{t+1}V$ ονομάζεται «κεφάλαιο υπό κίνδυνο».

S είναι το ασφαλισμένο ποσό που καταβάλλεται εν περιπτώσει θανάτου και ${}_{t+1}V$ το αποθεματικό στο τέλος του έτους

Το «αναμενόμενο κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο» είναι το γινόμενο $N\cdot q_{x+t}\cdot\left(S-{}_{t+1}V\right)$ όπου

N είναι ο αριθμός των εν ζωή ασφαλισμένων στην αρχή του έτους

q_{x+t} η πιθανότητα μη επιβίωσης (*από τον χρησιμοποιούμενο πίνακα*)

S το ασφαλισμένο ποσό σε περίπτωση θανάτου

${}_{t+1}V$ το αποθεματικό στο τέλος του έτους

Το «πραγματικό κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο» είναι το γινόμενο $n_d\cdot\left(S-{}_{t+1}V\right)$ όπου

n_d είναι ο πραγματικός αριθμός των θανόντων από τους ασφαλισμένους στην διάρκεια όλου του έτους. S το ασφαλισμένο ποσό σε περίπτωση θανάτου

${}_{t+1}V$ το αποθεματικό στο τέλος του έτους

Ως «κέρδος» ονομάζεται η διαφορά

«αναμενόμενο κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο» $-$

«πραγματικό κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο»

Το «κέρδος» μπορεί να θετικός ή αρνητικός αριθμός.

Οι όροι

«κεφάλαιο υπό κίνδυνο»,
«αναμενόμενο κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο»,
«πραγματικό κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο»

Συμβολίζονται, εν γένει, στην βιβλιογραφία με DSAR , EDS , ADS *αντίστοιχα.*

DSAR *(**D**eath **S**train **A**t **R**isk)*
EDS *(**E**xpected **D**eath **S**train)*
ADS *(**A**ctual **D**eath **S**train)*

<u>Παράδειγμα:</u>

Στην 1/Ιαν/1991 ένας μεγάλος αριθμός ατόμων ηλικίας 25 ετών ασφαλίσθηκε με απλή μικτή ασφάλιση για 40 έτη και με ασφαλισμένο ποσό 1000 ν.μ.
Στις 31/Δεκ/2007 υπήρχαν εν ζωή 8567 ασφαλισμένοι. Σε όλη την διάρκεια του 2008 έφυγαν από την ζωή 13 ασφαλισμένοι.
Να βρεθούν για το έτος 2008:
α) το «αναμενόμενο κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο»
β) το «πραγματικό κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο»
γ) το κέρδος (ή ζημιά) της ασφαλιστικής εταιρείας.

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση ${}_tV_{x:\overline{n}|} = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$ χωρίς να σημαίνει ότι είναι και απαραίτητη. Πίνακας θνησιμότητας PM 60/64 MKH

Εύρεσης του αποθεματικού στο τέλος του 2008.

Με χρήση της ${}_tV_{x:\overline{n}|} = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$ έχουμε το αποθεματικό:

$$1000 \cdot {}_{18}V_{25:\overline{40}|} = 1000\left(1 - \frac{\ddot{a}_{43:\overline{22}|}}{\ddot{a}_{25:\overline{40}|}}\right) = 1000\left(1 - \frac{13.60228}{18.87625}\right) = 279.3971$$

Χωρίς την χρήση της ${}_tV_{x:\overline{n}|} = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$ έχουμε το αποθεματικό :

$$1000 \cdot {}_{18}V_{25:\overline{40}|} = 1000 \cdot A_{43:\overline{22}|} - P \cdot \ddot{a}_{43:\overline{22}|} =$$

$$1000 \cdot \left(A_{43:\overline{22}|} - \frac{A_{25:\overline{40}|}}{\ddot{a}_{25:\overline{40}|}} \cdot \ddot{a}_{43:\overline{22}|}\right) = 279.40$$

Οπότε $1000 - 279.40 = 720.60$ είναι το κεφάλαιο υπό κίνδυνο.
Το αναμενόμενο κόστος ασφάλισης είναι $8567 \cdot q_{42} \cdot 720.60 \simeq 28328$
Το πραγματικό κόστος είναι $13 \cdot 720.60 = 9367.80$
Η διαφορά είναι θετική $28328 - 9367.80 = 18960.20$
Άρα για το έτος 2008 υπάρχει «κέρδος» για την εταιρεία.