

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΤΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΤΟΥ ΟΠΑ

1

x	47	48	49	50	51
$l_x$	440000	396000	348480	299692	254738
$d_x$	44000	47520	48788	44954	43306
$q_x$	0.10	0.12	0.14	0.15	0.17

2

$$q_x^* = 1 - e^{-\int_0^1 (\mu_{x+t} - c) dt} = 1 - e^{-\int_0^1 \mu_{x+t} dt} \cdot e^{\int_0^1 (-c) dt} \Rightarrow$$

$$q_x^* = 1 - p_x \cdot e^c = \frac{q_x}{2} \rightarrow c = \ln \frac{2 - q_x}{2(1 - q_x)}$$

3

α)

$$s(x) = \frac{N-x}{N} \rightarrow s(x) = \frac{99-x}{99}, \quad s'(x) = -\frac{1}{99} < 0 \text{ συνεχής και}$$

φθίνουσα  $s(0)=1, s(\omega)=0 \rightarrow \omega=99$

β)

$$s(30) = \frac{99-30}{99}, \quad s(35) = \frac{99-35}{99}, \quad \frac{s(35)}{s(30)} = \frac{64/99}{69/99} = \frac{64}{69} = 0.927536$$

γ)

$$l_0 = 99000, \quad l_1 = s(1) \cdot l_0 = \frac{99-1}{99} \cdot 99000 = 98000,$$

$$l_2 = s(2) \cdot l_0 = 97000, \quad l_3 = s(3) \cdot l_0 = 96000$$

$$d_0 = d_1 = d_2 = 1000$$

4

$$0.5 = e^{-\int_0^{0.4} (F+e^{2x}) dx} = e^{-0.4F - \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{0.4}} = e^{-0.4F - 0.6128} \Rightarrow F = 0.20$$

5 Μια λύση είναι :

$$\frac{\ell_{70+0.5} - \ell_{71+0.5}}{\ell_{70}} = \frac{\ell_{70} - 0.5(\ell_{70} - \ell_{71}) - (\ell_{71} - 0.5(\ell_{71} - \ell_{72}))}{\ell_{70}} =$$
$$\frac{0.5\ell_{70} - 0.5\ell_{72}}{\ell_{70}} = 0.5 - 0.5 \frac{\ell_{72}}{\ell_{70}} = 0.5 \left(1 - \frac{\ell_{71}}{\ell_{70}} \cdot \frac{\ell_{72}}{\ell_{71}}\right) = 0.5(1 - p_{70}p_{71}) =$$
$$0.5(1 - (1 - q_{70})(1 - q_{71})) = 0.5(1 - (1 - 0.025)(1 - 0.04)) = 0.032$$

Μια άλλη λύση είναι :

$${}_{0.5}p_{70} - {}_{1.5}p_{70} = {}_{0.5}p_{70} - p_{70} \cdot {}_{0.5}p_{71} = (1 - {}_{0.5}q_{70}) - (1 - q_{70})(1 - {}_{0.5}q_{71}) =$$
$$(1 - 0.5 \cdot q_{70}) - (1 - q_{70})(1 - 0.5 \cdot q_{71}) =$$
$$(1 - 0.5 \cdot 0.025) - (1 - 0.025)(1 - 0.5 \cdot 0.04) = 0.032$$

Μια άλλη λύση είναι :

Η πιθανότητα άτομο 70 ετών να γίνει 70+1/2 είναι:

$${}_{0.5}p_{70} = 1 - {}_{0.5}q_{70} = 1 - 0.5 \cdot q_{70} = 0.9875$$

Η πιθανότητα άτομο 70+1/2 ετών να γίνει 71 είναι:

$${}_{0.5}p_{70+0.5} = {}_{1-0.5}p_{70+0.5} = 1 - {}_{1-0.5}q_{70+0.5} = 1 - \frac{(1-0.5) \cdot q_{70}}{1-0.5 \cdot q_{70}} = 0.987342$$

Η πιθανότητα άτομο 71 ετών να γίνει 71+1/2 είναι:

$${}_{0.5}p_{71} = 1 - {}_{0.5}q_{71} = 1 - 0.5 \cdot q_{71} = 0.98$$

Το γινόμενο  $({}_{0.5}p_{70+0.5}) \cdot ({}_{0.5}p_{71})$  δίνει την πιθανότητα άτομο 70+1/2 να γίνει

71+1/2 οπότε η παράσταση  ${}_{0.5}p_{70} \cdot (1 - ({}_{0.5}p_{70+0.5}) \cdot ({}_{0.5}p_{71})) =$

$$= (1 - 0.5 \cdot q_{70}) \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{0.5 \cdot q_{70}}{1 - 0.5 \cdot q_{70}}\right) \cdot (1 - 0.5 \cdot q_{71})\right)$$

Δίνει την πιθανότητα άτομο 70 ετών να γίνει 70+1/2 και να μην γίνει 71+1/2

$$(1 - 0.5 \cdot 0.025) \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{0.5 \cdot 0.025}{1 - 0.5 \cdot 0.025}\right) \cdot (1 - 0.5 \cdot 0.04)\right) = 0.032$$

6

(i)

$$s(0) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} s(x) = 0 \quad s'(x) = -\frac{1}{4} x^2 e^{-\frac{x^3}{12}} < 0 \quad \text{με } x > 0 \text{ άρα φθίνουσα}$$

$$\mu_x = -\frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{-\frac{1}{4} x^2 e^{-\frac{x^3}{12}}}{e^{-\frac{x^3}{12}}} = \frac{1}{4} x^2$$

(ii)

$$s(0) = 1 \text{ και } s(12) = 0$$

Η  $s(x)$  δεν είναι φθίνουσα στο  $[0,12]$  διότι η  $s'(x) > 0$  σε υποσύνολο του  $[0,12]$ .

0.306676 και 8.07428 ρίζες της  $s'(x) = 0$

7

$s(0)=1$ , λύνοντας την  $1 - 0.005 \cdot x - 0.00005 \cdot x^2 = 0$  είναι  $\omega=100$  δηλ.  $s(100)=0$

Η  $s'(x) = -0.005 - 0.0001x$  είναι αρνητική για κάθε  $x > 0$  άρα φθίνουσα η δοθείσα.

$$s(1) = 0.99495, \quad s(2) = 0.98980, \quad s(3) = 0.98455$$

$$I_0 = 100000 \cdot s(0) = 100000 \cdot 1 = 100000,$$

$$I_1 = 100000 \cdot s(1) = 100000 \cdot 0.99495 = 99495,$$

$$I_2 = 100000 \cdot s(2) = 100000 \cdot 0.98980 = 98980,$$

$$I_3 = 100000 \cdot s(3) = 100000 \cdot 0.98455 = 98455$$

x	0	1	2
$I_x$	100000	99495	98980
$d_x$	505	515	525
$p_x$	0.99495	0.994824	0.994696

8

$$s(x) = e^{-\int_0^x \mu_x dt} = e^{-\int_0^x \frac{Ac^t}{1+Bc^t} dt} = e^{-\frac{A}{B \ln c} [\ln \frac{1+Bc^x}{1+B}]} = \left( \frac{1+Bc^x}{1+B} \right)^{-\frac{A}{B \ln c}}$$

9

$$\begin{aligned}
e^{-\int_0^{10} (\mu_{50+t} + \theta) dt} &= e^{-\int_0^{10} (\mu_{50+t} + 0.001(10-t)) dt} \\
e^{-\int_0^{10} \mu_{50+t} dt} \cdot e^{-\int_0^{10} 0.001(10-t) dt} &= {}_{10}p_{50} \cdot e^{-\int_0^{10} 0.001(10-t) dt} \\
\frac{l_{60}}{l_{50}} \cdot e^{-0.05} &= \frac{7593.220}{8703.470} \cdot 0.95122942 = \\
0.87243594 \cdot 0.95122942 &= 0.82988673
\end{aligned}$$

10

$$\begin{aligned}
{}_{1.75}p_{45.5} &= {}_{0.5}p_{45.5} \cdot {}_{p_{46}} \cdot {}_{0.25}p_{47} = \\
{}_{1-0.5}p_{45+0.5} \cdot {}_{p_{46}} \cdot {}_{0.25}p_{47} &= \\
(1 - {}_{1-0.5}q_{45+0.5}) \cdot (1 - q_{46}) \cdot (1 - {}_{0.25}q_{47}) &= \\
(1 - \frac{(1-0.5) \cdot q_{45}}{1-0.5 \cdot q_{45}}) \cdot (1 - q_{46}) \cdot (1 - 0.25 \cdot q_{47}) &= \\
\frac{1 - q_{45}}{1 - 0.5 \cdot q_{45}} \cdot (1 - q_{46}) \cdot (1 - 0.25 \cdot q_{47}) &= 0.9889706
\end{aligned}$$

H

$$\frac{l_{47+1/4}}{l_{45+1/2}} = \frac{l_{47} - \frac{1}{4}(l_{47} - l_{48})}{l_{45} - \frac{1}{2}(l_{45} - l_{46})} = \frac{3l_{47} + l_{48}}{2(l_{45} + l_{46})} = 0.9889706$$

11

$$\begin{aligned}
p^9 &= \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \cdot \frac{l_{x+3}}{l_{x+2}} \cdot \frac{l_{x+4}}{l_{x+3}} \cdot \frac{l_{x+5}}{l_{x+4}} \cdot \frac{l_{x+6}}{l_{x+5}} \cdot \frac{l_{x+7}}{l_{x+6}} \cdot \frac{l_{x+8}}{l_{x+7}} \cdot \frac{l_{x+9}}{l_{x+8}} \rightarrow \\
p^9 &= \frac{l_{x+9}}{l_x} = \frac{1}{8} \rightarrow p^3 = \frac{1}{2} \rightarrow p^6 = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

12

$$\begin{aligned}\mu_x^{\Pi 2} &= 2\mu_x^{\Pi 1} \Rightarrow p_x^{\Pi 2} = e^{-\int_x^{x+1} \mu_x^{\Pi 2} dx} = e^{-2 \int_x^{x+1} \mu_x^{\Pi 1} dx} = (p_x^{\Pi 1})^2 \Rightarrow \\ 1 - q_x^{\Pi 2} &= (1 - q_x^{\Pi 1})^2 = 1 - 2q_x^{\Pi 1} + (q_x^{\Pi 1})^2 \Rightarrow \\ q_x^{\Pi 2} &= 2q_x^{\Pi 1} - (q_x^{\Pi 1})^2 \Rightarrow q_x^{\Pi 2} < 2q_x^{\Pi 1}\end{aligned}$$

13

$$\begin{aligned}{}_{4/14}q_{50} &= \frac{l_{54} - l_{68}}{l_{50}} = \frac{l_{54}}{l_{50}} - \frac{l_{68}}{l_{60}} \cdot \frac{l_{60}}{l_{50}} = {}_4p_{50} - {}_8p_{60} \cdot {}_{10}p_{50} \\ {}_4p_{50} &= e^{-(0.05) \cdot (4)} = 0.818731, \quad {}_{10}p_{50} = e^{-(0.05) \cdot (10)} = 0.606531 \\ {}_8p_{60} &= e^{-(0.04) \cdot (8)} = 0.726149 \\ {}_{18}p_{50} &= {}_{10}p_{50} \cdot {}_8p_{60} = 0.606531 \cdot 0.726149 = 0.440432 \\ {}_{4/14}q_{50} &= {}_4p_{50} - {}_{18}p_{50} = 0.818731 - 0.440432 = 0.378299\end{aligned}$$

14

$$\begin{aligned}s(60) &= \frac{e^{-(0.10) \cdot (60)} + e^{-(0.08) \cdot (60)}}{2} = 0.00535425 \\ s(61) &= \frac{e^{-(0.10) \cdot (61)} + e^{-(0.08) \cdot (61)}}{2} = 0.00491994 \\ q_{60} &= 1 - \frac{s(61)}{s(60)} = 1 - \frac{0.00491994}{0.00535425} = 0.0811148\end{aligned}$$

15

$$s(x) = e^{-\mu x}, \quad {}_t p_x = e^{-\mu t}$$

16

$$\begin{aligned}l_x &= l_0 \cdot e^{-\int_0^x \mu_v dv} = l_0 \cdot \left( \frac{100 - x}{(x + 1) \cdot 100} \right)^2 \\ l_1 - l_4 &= \left( \frac{99}{2} \right)^2 - \left( \frac{96}{5} \right)^2 \simeq 2082\end{aligned}$$

17

Υπόθεση ομοιόμορφης κατανομής θανάτων

$$l_{x+\frac{1}{3}} - l_{x+1} = l_x - \frac{1}{3}(l_x - l_{x+1}) - l_{x+1} = \frac{2}{3}(l_x - l_{x+1}) = 4620$$

Υπόθεση Balducci

$$l_x - l_{x+\frac{2}{3}} = l_x - \frac{l_x \cdot l_{x+1}}{l_{x+1} + \frac{2}{3}(l_x - l_{x+1})} = 5040$$

18

$$\max \left\{ l_{x+t}^{(A)} - l_{x+t}^{(B)} \right\} = \max \left\{ (100 - 75t) - \frac{100 \cdot 25}{25 + t \cdot 75} \right\}$$

Με  $t = \frac{1}{3}$  έχουμε την μέγιστη τιμή 25

19

$${}_{70}p_0 = s(70) = \frac{1}{2}, \quad \mu_x = \frac{1}{3} \cdot 0.8 \frac{1}{64 - 0.8x} \Rightarrow \mu_{70} = \frac{1}{30}$$

20

$$q_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - \frac{l_0 \cdot e^{\int_0^{x+1} k d\psi}}{l_0 \cdot e^{\int_0^x k d\psi}} = 1 - e^{\int_x^{x+1} k d\psi} = 1 - e^{-k}$$

21

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{l_{x+n} \cdot v^{x+n}}{l_x \cdot v^x} = \frac{v^{x+n} \cdot l_0 \cdot e^{-\int_0^{x+n} \mu_\psi d\psi}}{v^x \cdot l_0 \cdot e^{-\int_0^x \mu_\psi d\psi}} = v^n \cdot e^{-\int_x^{x+n} \mu_\psi d\psi}$$

$$A_{20:\overline{25}|}^1 = v^{25} \cdot e^{-\int_{20}^{45} \frac{1}{100-\psi} d\psi} = 0.295303 \cdot \frac{11}{16} = 0.203021$$

$$100000 \cdot 0.203021 = 20302.10$$

22

$$R \cdot \ddot{a}_{40:\overline{20}|} = 100000 \cdot A_{40:\overline{25}|}^1 + 100000 \cdot A_{40:\overline{25}|}^{\frac{1}{v}}$$

$$R = 100000 \cdot \frac{M_{40} - M_{65} + D_{65}}{N_{40} - N_{60}} = 3042.23$$

23

$$R(1_x + 1_{x+1}v + \dots) = 4000(1 + 0.0425)^1 v d_x + 4000(1 + 0.0425)^2 v^2 d_{x+1} + \dots$$

$$R(1_x + 1_{x+1}v + \dots)v^x = 4000(d_x + d_{x+1} + \dots)v^x$$

$$R(D_x + D_{x+1} + \dots) = 4000I_x v^x$$

$$RN_x = 4000D_x \Rightarrow R = 4000 \frac{D_x}{N_x} = 4000 \frac{1}{\ddot{a}_x} = 4000(P_x + d)$$

$$R = 4000 \left( 0.01 + \frac{0.0425}{1.0425} \right) = 203.07$$

24

$$P \cdot \ddot{a}_{45:\overline{10}|} = 10000({}_{10}/\ddot{a}_{45}) + P(IA_{45:\overline{10}|}^1)$$

$$P = 10000 \frac{N_{55}}{(N_{45} - N_{55}) - (R_{45} - R_{55} - 10M_{55})}$$

$$P = 10000 \frac{10500}{13500 - (8500 - 10 \cdot 500)} = 10500$$

25

Θα πρέπει να υπολογισθούν οι παρούσες αξίες των δύο τρόπων πληρωμής στην ηλικία του ασφαλισμένου.

$$\alpha) 20000 \cdot \ddot{a}_x = 20000 \frac{N_x}{D_x}$$

$$\beta) 10000 \cdot \ddot{a}_x + 1100 \cdot (Ia)_x = 10000 \cdot \frac{N_x}{D_x} + 1100 \cdot \frac{S_{x+1}}{D_x}$$

Παρατίθενται τα αριθμητικά αποτελέσματα για δύο διαφορετικές ηλικίες.

Για  $x = 50$  έχουμε α) 289510.10 ν.μ. και β) 307766.90 ν.μ.

Για  $x = 60$  έχουμε α) 226117.70 ν.μ. και β) 210225.60 ν.μ.

26

$$R \cdot \ddot{a}_{40:\overline{10}|} = 20000 \frac{D_{50}}{D_{40}} + 10000 A_{40:\overline{10}|}^1$$

$$R = \frac{20000 \cdot D_{50} + 10000(M_{40} - M_{50})}{N_{40} - N_{50}} = 1574.55$$

$$R' = \frac{10000 \cdot (M_{40} - M_{46}) + 20000 \cdot D_{50}}{N_{40} - N_{50} - 7 \cdot M_{46} - M_{47} - M_{48} - M_{49} + 10 \cdot M_{50}} = 1582.98$$

27

$$P \cdot \ddot{a}_{40:\overline{5}|} = P \cdot (IA)_{40:\overline{5}|}^1 + 5P \cdot A_{45:\overline{3}|}^1 A_{40:\overline{5}|}^1 + 12 \cdot 10^4 \cdot \ddot{a}_{48:\overline{23}|} A_{40:\overline{8}|}^1$$

$$P \cdot \left( \ddot{a}_{40:\overline{5}|} - (IA)_{40:\overline{5}|}^1 - 5A_{45:\overline{3}|}^1 A_{40:\overline{5}|}^1 \right) = 12 \cdot 10^4 \cdot \ddot{a}_{48:\overline{23}|} A_{40:\overline{8}|}^1$$

$$P \cdot \left( \frac{N_{40} - N_{45}}{D_{40}} - \frac{R_{40} - R_{45} - 5M_{45}}{D_{40}} - 5 \frac{M_{45} - M_{48}}{D_{45}} \cdot \frac{D_{45}}{D_{40}} \right) = 12 \cdot 10^4 \frac{N_{48} - N_{71}}{D_{48}} \cdot \frac{D_{48}}{D_{40}}$$

$$P \cdot (N_{40} - N_{45} - R_{40} + R_{45} + 5M_{45} - 5M_{45} + 5M_{48}) = 12 \cdot 10^4 (N_{48} - N_{71})$$

$$P = 12 \cdot 10^4 \frac{N_{48} - N_{71}}{N_{40} - N_{45} - R_{40} + R_{45} + 5M_{48}}$$

$$P = 247311.30$$

28

Από το  $d = 0.05$  έχουμε  $v = 0.95$

Από την 1<sup>η</sup> προσφορά έχουμε την τιμή του  $p_x$

$$608 + 350 \cdot v \cdot p_x = 1000 \cdot v \cdot q_x + 1000 \cdot v^2 \cdot p_x \cdot q_{x+1} + 1000 \cdot v^2 \cdot p_x \cdot p_{x+1}$$

$$608 + 350 \cdot v \cdot p_x = 1000 \cdot v \cdot q_x + 1000 \cdot v^2 p_x (q_{x+1} + p_{x+1})$$

$$608 + 350 \cdot 0.95 \cdot p_x = 1000 \cdot 0.95 \cdot q_x + 1000 \cdot 0.95^2 \cdot p_x \Rightarrow p_x = 0.9$$

Από την 2<sup>η</sup> προσφορά και εξισώνοντας τις παρούσες αξίες των δύο προσφορών

$$608 + 350 \cdot v \cdot p_x = P + P \cdot v \cdot p_x \Rightarrow P = \frac{608 + 350 \cdot v \cdot p_x}{1 + v \cdot p_x} = 489.08 \text{ v.μ.}$$

29

$$A_{45} = A_{45:\overline{15}|}^1 + A_{45:\overline{15}|}^1 \cdot A_{60}$$

$${}_{15}P_{45} = \frac{A_{45}}{\ddot{a}_{45:\overline{15}|}} = \frac{A_{45:\overline{15}|}^1 + A_{45:\overline{15}|}^1 \cdot A_{60}}{\ddot{a}_{45:\overline{15}|}} = P_{45:\overline{15}|}^1 + P_{45:\overline{15}|}^1 \cdot A_{60} = P_{45:\overline{15}|}^1 + (P_{45:\overline{15}|} - P_{45:\overline{15}|}^1) \cdot A_{60}$$

$$\Rightarrow 0.038 = P_{45:\overline{15}|}^1 + (0.056 - P_{45:\overline{15}|}^1) \cdot (0.625) \Rightarrow P_{45:\overline{15}|}^1 = 0.008$$



30

$${}_m/q_x = {}_m p_x \cdot q_{x+m}, A_{30:\overline{3}|}^1 = v \cdot q_{30} + v^2 \cdot {}_1/p_{30} + v^3 \cdot {}_2/q_{30}$$

$$A_{30:\overline{3}|}^1 = \frac{0.01}{1.04} + \frac{0.99 \times 0.02}{(1.04)^2} + \frac{0.99 \times 0.98 \times 0.03}{(1.04)^3} = 0.053796725$$

$$\ddot{a}_{30:\overline{3}|} = 1 + \frac{0.99}{1.04} + \frac{0.99 \times 0.98}{(1.04)^2} = 2.848927515$$

$$\left(1000 \cdot P_{30:\overline{3}|}^1\right) = 1000 \frac{A_{30:\overline{3}|}^1}{\ddot{a}_{30:\overline{3}|}} = 1000 \cdot \frac{0.053796725}{2.848927515} = 18.88315$$

$$A_{31:\overline{3}|}^1 = \frac{0.02}{1.04} + \frac{0.98 \times 0.03}{(1.04)^2} + \frac{0.98 \times 0.97 \times 0.04}{(1.04)^3} = 0.080215919$$

$$\ddot{a}_{31:\overline{3}|} = 1 + \frac{0.98}{1.04} + \frac{0.98 \times 0.97}{(1.04)^2} = 2.82119, \left(1000 \cdot P_{30:\overline{3}|}^1\right) \cdot \ddot{a}_{31:\overline{3}|} = X \cdot A_{31:\overline{3}|}^1$$

$$53.272954 = X(0.080215919), X = 664$$

31

$$v = 0.90 \Rightarrow d = 0.10, A_x = 1 - d \cdot \ddot{a}_x = 1 - (0.10)(5) = 0.5$$

$$K = \frac{5000A_x - 5000 \cdot v \cdot q_x}{\ddot{a}_x} = \frac{5000 \cdot 0.5 - 5000 \cdot 0.90 \cdot 0.05}{5} = 455$$

32

$$1000 \cdot A_{35} + K \cdot (IA)_{35} = K \cdot \ddot{a}_{35}$$

$$K = \frac{1000 \cdot A_{35}}{(\ddot{a}_{35} - (IA)_{35})} = \frac{1000 \cdot 0.42898}{(11.99143 - 6.16761)} = 73.66$$

33

$$d = 0.05 \Rightarrow v = 0.95$$

1<sup>ος</sup> τρόπος

$$\begin{aligned} 608 + 350 \cdot v \cdot p_x &= 1000 \cdot v \cdot q_x + 1000 \cdot v^2 \cdot p_x \cdot q_{x+1} + 1000 \cdot v^2 \cdot p_x \cdot p_{x+1} = \\ &= 1000 \cdot v \cdot q_x + 1000 \cdot v^2 \cdot p_x (q_{x+1} + p_{x+1}) = 1000 \cdot v \cdot (1 - p_x) + 1000 \cdot v^2 \cdot p_x \\ &\Rightarrow p_x = 0.90 \end{aligned}$$

2<sup>ος</sup> τρόπος

$$608 + 350(0.95)(0.90) = K(1 + (0.95)(0.90))$$

$$K = \frac{299.25 + 608}{1.855} = 489.08$$

34

$$K = \left( 10000 \cdot \ddot{a}_{40:\overline{25}|} + 2500 \frac{S_{41} - S_{65} - 24 \cdot N_{65}}{D_{40}} \right) \cdot 1.04 + 0.05 \cdot K$$

$$0.95 \cdot K = \left( 10000 \cdot \ddot{a}_{40:\overline{25}|} + 2500 \frac{S_{41} - S_{65} - 24 \cdot N_{65}}{D_{40}} \right) \cdot 1.04$$

$$0.95 \cdot K = 2500 \left( \frac{4 \cdot (N_{40} - N_{65}) + S_{41} - S_{65} - 24 \cdot N_{65}}{D_{40}} \right) \cdot 1.04$$

$$0.95 \cdot K = 2600 \left( \frac{4 \cdot N_{40} + S_{41} - S_{65} - 28 \cdot N_{65}}{D_{40}} \right)$$

$$K = 2736.84 \left( \frac{4 \cdot N_{40} + S_{41} - S_{65} - 28 \cdot N_{65}}{D_{40}} \right)$$

$$K = 2736.84 \left( \frac{4 \cdot 30008.399 + 376943.800 - 32817.185 - 28 \cdot 4309.990}{1745.622} \right) = 538520.$$

35

Με χρήση των στοιχείων της παραπάνω άσκησης 34 και βρίσκοντας την παρούσα αξία της ασφάλισης στην έναρξη αυτής, έχουμε

$$0.95 \cdot 538520 = \left( 10000 \ddot{a}_{30:\overline{10}|} + 2500 \frac{S_{31} - S_{40} - 9N_{40}}{D_{30}} \right) 1.04 + 100 \frac{D_{40}}{D_{30}} + Y \frac{N_{40} - N_{55}}{D_{30}} 1.04$$

$$0.95 \cdot 538520 = \left( 10000 \frac{N_{30} - N_{40}}{D_{30}} + 2500 \frac{S_{31} - S_{40} - 9N_{40}}{D_{30}} \right) 1.04 + 100 \frac{D_{40}}{D_{30}} + Y \frac{N_{40} - N_{55}}{D_{30}} 1.04$$

$$Y = 45782.30$$

Οπότε το σταθερό ποσό για τα υπόλοιπα έτη της ασφάλισης είναι 45782.30

Μια άλλη λύση είναι να εξισώσουμε αναδρομικό και προοπτικό αποθεματικό στο τέλος του 10<sup>ου</sup> έτους.

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟ

$$538520 \frac{D_{30}}{D_{40}} - \left( 10000 \frac{N_{30} - N_{40}}{D_{40}} + 2500 \frac{S_{31} - S_{40} - 9N_{40}}{D_{40}} \right) 1.04 - 0.05 \cdot 538520 \frac{D_{30}}{D_{40}}$$

ΠΡΟΟΠΤΙΚΟ

$$100 + Y \frac{N_{40} - N_{55}}{D_{40}} 1.04$$

Λύνοντας ως προς Y έχουμε Y=45782.30

36

$$R + R * \frac{D_{82}}{D_{80}} = 1000 * \frac{M_{80}}{D_{80}} + \frac{R}{2} * \frac{M_{80} - M_{81}}{D_{80}} + \frac{R}{2} * \frac{M_{82} - M_{83}}{D_{82}} * \frac{D_{82}}{D_{80}}$$

$$R = 2000 \frac{M_{80}}{2 * D_{80} + 2 * D_{82} - M_{80} + M_{81} - M_{82} + M_{83}}$$

$$R = 2000 \frac{M_{80}}{2 * D_{80} + 2 * D_{82} - C_{80} - C_{82}} = 492.22$$

37

α) Υπενθυμίζονται τα σύμβολα (ή οι συναρτήσεις) μετατροπής.

$$D_x = \ell_x v^x, \quad N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} \dots, \quad S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} \dots$$

$$C_x = d_x v^{x+1}, \quad M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} \dots, \quad R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} \dots$$

Με χρήση της  $d_t = \ell_t - \ell_{t+1}$  η  $C_t = d_t v^{t+1}$  μας δίνει  $C_t = v D_t - D_{t+1}$  ή

$$C_t = D_t - D_{t+1} - d D_t \text{ όπου } d = 1 - v = i v$$

$$M_x = \sum_{t=x}^{\infty} C_t = \sum_{t=x}^{\infty} (D_t - D_{t+1} - d D_t) = D_x - d N_x$$

$$\frac{M_x}{D_x} = 1 - d \frac{N_x}{D_x} \Rightarrow A_x = 1 - d \ddot{a}_x$$

β)  $P_{28} = \frac{M_{28}}{N_{28}}$  αλλά είναι

$$N_{28} = S_{28} - S_{29} = 97, \quad N_{29} = S_{29} - S_{30} = 93$$

$$D_{28} = N_{28} - N_{29} = 4 \Rightarrow M_{28} = D_{28} - d N_{28} = 4 - \frac{3}{103} 97$$

$$P_{28} = \frac{M_{28}}{N_{28}} = \frac{4 - \frac{3}{103} 97}{97} = 0.0121109$$

38

$$\text{Από την } C_t = v D_t - D_{t+1} \Rightarrow \sum_{t=x}^{x+n-1} C_t = \sum_{t=x}^{x+n-1} (v D_t - D_{t+1}) = v \cdot \sum_{t=x}^{x+n-1} D_t - \sum_{t=x}^{x+n-1} D_{t+1} \Rightarrow$$

$$M_x - M_{x+n} = v \cdot (N_x - N_{x+n}) - (N_{x+1} - N_{x+n+1}) \Rightarrow$$

$$\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = v \cdot \frac{(N_x - N_{x+n})}{D_x} - \frac{(N_{x+1} - N_{x+n+1})}{D_x} \Rightarrow \boxed{A_{x:\overline{n}|}^1 = v \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}}$$

$$\text{Ζητείται το } P_{x:\overline{10}|}^1 = \frac{A_{x:\overline{10}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{10}|}} = \frac{v \cdot \ddot{a}_{x:\overline{10}|} - a_{x:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{10}|}} = v - \frac{a_{x:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{10}|}} \text{ και έχουμε:}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{10}|} = a_{x:\overline{9}|} + 1, \quad a_{x:\overline{10}|} = (a_{x+1:\overline{9}|} + 1) \cdot v \cdot p_x$$

$$P_{x:\overline{10}|}^1 = v - \frac{(a_{x+1:\overline{9}|} + 1)}{a_{x:\overline{9}|} + 1} \cdot v \cdot p_x = 0.97 - \frac{8.5}{8.6} \cdot 0.99 \cdot 0.97 = 0.0208663$$

39

$$v \cdot p_x \cdot \ddot{a}_{x+1} = v \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{N_{x+1}}{D_{x+1}} = v \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{N_{x+1}}{v^{x+1} \cdot l_{x+1}} = \frac{N_{x+1}}{v^x l_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x} = a_x$$

40

$$A_{40:\overline{15}|}^1 = \frac{M_{40} - M_{55}}{D_{40}} = \frac{d_{40} \cdot v^{41} + d_{41} \cdot v^{42} + \dots + d_{54} \cdot v^{55}}{l_{40} \cdot v^{40}}$$

Είναι όμως  $d_x = l_x - l_{x+1} = (100 - x) - (100 - (x + 1)) = 1$  οπότε

$$A_{40:\overline{15}|}^1 = \frac{M_{40} - M_{55}}{D_{40}} = \frac{d_{40} \cdot v^{41} + d_{41} \cdot v^{42} + \dots + d_{54} \cdot v^{55}}{l_{40} \cdot v^{40}} = \frac{1 \cdot v^{41} + 1 \cdot v^{42} + \dots + 1 \cdot v^{55}}{l_{40} \cdot v^{40}} \Rightarrow$$

$$A_{40:\overline{15}|}^1 = \frac{v^1 + v^2 + \dots + v^{15}}{l_{40}} = \frac{v^{15} \cdot v - v}{l_{40} \cdot (v - 1)} = (v^{15} - 1) \cdot \frac{v}{v - 1} \cdot \frac{1}{l_{40}} \Rightarrow$$

$$A_{40:\overline{15}|}^1 = (0.743 - 1) \left( -\frac{1}{0.02} \right) \frac{1}{60} = 0.214154$$

$$10000 \cdot A_{40:\overline{15}|}^1 = 2141.54$$

41

Ζητείται η τελική αξία  $S_{40:\overline{10}|}^{(12)}$  της ληξιπρόθεσμης πρόσκαιρης κλασματικής ράντας  $a_{40:\overline{10}|}^{(12)}$ .

Είναι

$$s_{40:\overline{10}|}^{(12)} = a_{40:\overline{10}|}^{(12)} \cdot \frac{1}{A_{40:\overline{10}|}^1} \approx \frac{1}{A_{40:\overline{10}|}^1} \left[ a_{40:\overline{10}|} + \frac{12-1}{2 \cdot 12} (1 - A_{40:\overline{10}|}^1) \right] =$$

$$\frac{1}{A_{40:\overline{10}|}^1} \left[ \ddot{a}_{40:\overline{10}|} - 1 + A_{40:\overline{10}|}^1 + \frac{12-1}{2 \cdot 12} (1 - A_{40:\overline{10}|}^1) \right] =$$

$$\frac{\ddot{a}_{40:\overline{10}|}}{A_{40:\overline{10}|}^1} - \frac{13}{24} \left( \frac{1}{A_{40:\overline{10}|}^1} - 1 \right) = \frac{8.7}{0.712} - \frac{13}{24} \left( \frac{1}{0.712} - 1 \right) = 12$$

42

Έστω ότι  $m$  έτη από την έναρξη της ασφάλισης έχουμε:

$10^5 \cdot m \leq K$  και συγχρόνως  $10^5 \cdot (m+1) > K$ . Τότε θα έχουμε:

$$K = 10^5 a_{50} + K(A_{50} - A_{50+m+1} \cdot A_{50:1+m}^{-1}) - 10^5 \cdot (IA)_{51:\overline{m}}^1 \cdot A_{50:\overline{1}}^{-1} \Rightarrow$$

$$K(1 - (A_{50} - A_{50+m+1} \cdot A_{50:1+m}^{-1})) = 10^5 (a_{50} - (IA)_{51:\overline{m}}^1 \cdot A_{50:\overline{1}}^{-1}) \Rightarrow$$

$$K = 10^5 \frac{(a_{50} - (IA)_{51:\overline{m}}^1 \cdot A_{50:\overline{1}}^{-1})}{1 - (A_{50} - A_{50+m+1} \cdot A_{50:1+m}^{-1})} = 10^5 \frac{(\frac{N_{51}}{D_{50}} - \frac{R_{51} - R_{51+m} - m \cdot M_{51+m}}{D_{50}})}{1 - (\frac{M_{50}}{D_{50}} - \frac{M_{50+m+1}}{D_{50}})} =$$

$$K = 10^5 \frac{N_{51} - (R_{51} - R_{51+m} - m \cdot M_{51+m})}{D_{50} - M_{50} + M_{50+m+1}}$$

Το  $m=13$  δίνει  $1450556 > (13+1) \cdot 10^5$  που απορρίπτεται.

Με  $m=14$  έχω  $K = 1461468,30$  που είναι ακριβώς το  $B$ .

43

$$R \cdot \ddot{a}_{31:\overline{14}} = 3500 \cdot \ddot{a}_{50} \cdot A_{31:\overline{19}}^{-1} + 3000 \cdot A_{31}$$

$$R = \frac{3500 \cdot \frac{N_{50}}{D_{50}} \cdot \frac{D_{50}}{D_{31}} + 3000 \cdot \frac{M_{31}}{D_{31}}}{\frac{N_{31} - N_{45}}{D_{31}}} = \frac{3500 \cdot N_{50} + 3000 \cdot M_{31}}{N_{31} - N_{45}} = 2045.41$$

**Προοπτικό Αποθεματικό**

$$3500 \cdot \ddot{a}_{50} \cdot A_{44:\overline{6}}^{-1} + 3000 \cdot A_{44} - R =$$

$$3500 \cdot \frac{N_{50}}{D_{44}} + 3000 \cdot \frac{M_{44}}{D_{44}} - \frac{3500 \cdot N_{50} + 3000 \cdot M_{31}}{N_{31} - N_{45}} = 36877.68$$

**Αναδρομικό Αποθεματικό**

$$R \cdot \frac{N_{31} - N_{44}}{D_{44}} - 3000 \cdot \frac{M_{31} - M_{44}}{D_{44}} = 36877.68$$

44

$$K = 10000 \cdot \frac{30}{\ddot{a}_{35}} + K \cdot A_{35:\overline{30}|}^1 \Rightarrow K = 10000 \cdot \frac{30/\ddot{a}_{35}}{1 - A_{35:\overline{30}|}^1} \text{ Λογω } A_{35:\overline{30}|} = A_{35:\overline{30}|}^1 + A_{35:\overline{30}|}^1$$

$$K = 10000 \cdot \frac{30/\ddot{a}_{35}}{1 - A_{35:\overline{30}|}^1} = 10000 \cdot \frac{(A_{35:\overline{30}|} - A_{35:\overline{30}|}^1) \cdot \ddot{a}_{65}}{1 - A_{35:\overline{30}|}^1} = 10000 \cdot \ddot{a}_{65} \cdot \frac{A_{35:\overline{30}|}^1}{1 - A_{35:\overline{30}|}^1} = 22659$$

$$\text{Αναδρομικό αποθεματικό} \Rightarrow K \cdot \frac{1}{A_{35:\overline{5}|}^1} - K \cdot A_{35:\overline{5}|}^1 \cdot \frac{1}{A_{35:\overline{5}|}^1} = 27954$$

$$\text{Προοπτικό αποθεματικό} \Rightarrow K \cdot A_{40:\overline{25}|}^1 + 10000 \cdot \ddot{a}_{65} \cdot A_{40:\overline{25}|}^1 = 27954$$

45

$$500 + K \cdot \ddot{a}_{30:\overline{25}|} \cdot A_{25:\overline{5}|}^1 = 10000 \cdot A_{25:\overline{35}|}^1 + 5000 \cdot A_{60} \cdot A_{25:\overline{35}|}^1 \rightarrow$$

$$K = \frac{10000 \cdot A_{25:\overline{35}|}^1 + 5000 \cdot A_{60} \cdot A_{25:\overline{35}|}^1 - 500}{\ddot{a}_{30:\overline{25}|} \cdot A_{25:\overline{5}|}^1} = 63.49$$

$$\text{Αναδρομικό αποθεματικό } 500 \cdot \frac{1}{A_{25:\overline{4}|}^1} - 10000 \cdot A_{25:\overline{4}|}^1 \cdot \frac{1}{A_{25:\overline{4}|}^1} =$$

$$500 \cdot \frac{D_{25}}{D_{29}} - 10000 \cdot \frac{M_{25} - M_{29}}{D_{25}} \cdot \frac{D_{25}}{D_{29}} = \frac{500 \cdot D_{25} - 10000 \cdot (M_{25} - M_{29})}{D_{29}} = 524.04$$

$$\text{Προοπτικό αποθεματικό } 10000 \cdot A_{29:\overline{31}|}^1 + 5000 \cdot A_{60} \cdot A_{29:\overline{31}|}^1 - K \cdot \ddot{a}_{30:\overline{25}|} \cdot A_{29:\overline{31}|}^1 = 524.04$$

46

$$\text{Σχέσεις που ισχύουν: } \ddot{a}_{40} = \ddot{a}_{40:\overline{20}|} + \ddot{a}_{60} * A_{40:\overline{20}|}^1, A_{40} = A_{40:\overline{20}|}^1 + A_{60} * A_{40:\overline{20}|}^1$$

$$\text{Αναδρομικό αποθεματικό για τα 20 αρχικά έτη: } {}_{20}V = P_1 * \ddot{a}_{40:\overline{20}|} * \frac{1}{A_{40:\overline{20}|}^1} - A_{40:\overline{20}|}^1 * \frac{1}{A_{40:\overline{20}|}^1}$$

$$\text{Προοπτικό αποθεματικό μετά την αλλαγή: } {}_{20}V = 0.75 * A_{60} - P_1 * \ddot{a}_{60}$$

Το παραπάνω σύστημα των 4 εξισώσεων μας δίνει:

$$A_{40:\overline{20}|}^1 = \frac{\ddot{a}_{40} - \ddot{a}_{40:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{60}} = 0.357, A_{40:\overline{20}|}^1 = A_{40} - A_{60} * \frac{\ddot{a}_{40} - \ddot{a}_{40:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{60}} = 0.106$$

$$P_1 = \frac{A_{40:\overline{20}|}^1 + \frac{3}{4} A_{60} * A_{40:\overline{20}|}^1}{\ddot{a}_{40}} = 0.0146 \Rightarrow \boxed{{}_{20}V = A_{60} - \frac{A_{40} * \ddot{a}_{60}}{\ddot{a}_{40}} - \frac{1}{4} A_{60} * \frac{\ddot{a}_{40:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{40}} = 0.24}$$

47

Μια λύση είναι

Υπολογισμός ετήσιου αρχικού ασφαλιστρού

$$\pi = 10000 \frac{A_{\overline{45:\overline{20}}}}{\ddot{a}_{\overline{45:\overline{20}}}} = 10000 \frac{\frac{D_{65} + M_{45} - M_{65}}{D_{45}}}{\frac{N_{45} - N_{65}}{D_{45}}} = 10000 \frac{D_{65} + M_{45} - M_{65}}{N_{45} - N_{65}} = 374.10 \text{ v.}\mu.$$

Συμβολίζοντας με  $K$  το ζητούμενο μειωμένο ποσό και εξισώνοντας το προοπτικό αποθεματικό στο τέλος του 15<sup>ου</sup> έτους πριν και μετά την μεταβολή έχουμε:

$$10000 {}_{15}V_{\overline{45:\overline{20}}} = 10000 \cdot A_{\overline{60:\overline{5}}} - \pi \cdot \ddot{a}_{\overline{60:\overline{5}}} = 10000 \cdot A_{\overline{60:\overline{5}}}^1 + K \cdot A_{\overline{60:\overline{5}}}^1 \rightarrow K = 7691.13 \text{ v.}\mu.$$

48

Από τον ορισμό του προοπτικού αποθεματικού είναι

$${}_tV_x = A_{x+t} - P_x \ddot{a}_{x+t} = 1 - d \ddot{a}_{x+t} - P_x \ddot{a}_{x+t} = 1 - (P_x + d) \ddot{a}_{x+t}$$

$$\text{Ισχύει όμως } P_x + d = \frac{1}{\ddot{a}_x} \text{ (σχέση 3.45 σελίδα 106) } \text{ } \text{όποτε } {}_tV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}$$

$$\text{Με } {}_tV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} \Rightarrow {}_{10}V_{35} = 1 - \frac{\ddot{a}_{45}}{\ddot{a}_{35}} = 0.150, \quad {}_{20}V_{35} = 1 - \frac{\ddot{a}_{55}}{\ddot{a}_{35}} = 0.354$$

$$\frac{\frac{\ddot{a}_{55}}{\ddot{a}_{35}}}{\frac{\ddot{a}_{45}}{\ddot{a}_{35}}} = \frac{0.646}{0.850} = 0.760 = \frac{\ddot{a}_{55}}{\ddot{a}_{45}} \text{ και } {}_{10}V_{45} = 1 - \frac{\ddot{a}_{55}}{\ddot{a}_{45}} = 1 - 0.760 = 0.240$$

49

**1η**

Οικονομική ισοδυναμία στην ηλικία 40

$$A_{40} = P_{40} \cdot \ddot{a}_{\overline{40:\overline{10}}} + P^* \cdot \ddot{a}_{\overline{50:\overline{10}}} \cdot A_{\overline{40:\overline{10}}}^1$$

$$\frac{M_{40}}{D_{40}} = \frac{M_{40}}{N_{40}} \cdot \frac{D_{40}}{D_{40}} + P^* \cdot \frac{N_{50} - N_{60}}{D_{50}} \cdot \frac{D_{50}}{D_{40}}$$

$$P^* = \frac{M_{40} \cdot N_{50}}{N_{40} \cdot (N_{50} - N_{60})}$$

**2η**

Εξίσωση αποθεματικών στην ηλικία 50

$$A_{50} - P^* \cdot \ddot{a}_{50:\overline{10}|} = P_{40} \cdot \ddot{a}_{40:\overline{10}|} \cdot \frac{1}{A_{40:\overline{10}|}^1} - A_{40:\overline{10}|}^1 \cdot \frac{1}{A_{40:\overline{10}|}^1}$$

$$\frac{M_{50}}{D_{50}} - P^* \cdot \frac{N_{50} - N_{60}}{D_{50}} = \frac{M_{40}}{N_{40}} \cdot \frac{N_{40} - N_{50}}{D_{40}} \cdot \frac{1}{\frac{D_{50}}{D_{40}}} - \frac{M_{40} - M_{50}}{D_{40}} \cdot \frac{1}{\frac{D_{50}}{D_{40}}}$$

$$P^* = \frac{M_{40} \cdot N_{50}}{N_{40} \cdot (N_{50} - N_{60})}$$

**3η**

Εξίσωση αποθεματικών στην ηλικία 60

$$A_{60} = P_{40} \cdot \ddot{a}_{40:\overline{10}|} \cdot \frac{1}{A_{40:\overline{20}|}^1} + P^* \cdot \ddot{a}_{50:\overline{10}|} \cdot \frac{1}{A_{50:\overline{10}|}^1} - A_{40:\overline{20}|}^1 \cdot \frac{1}{A_{40:\overline{20}|}^1}$$

$$\frac{M_{60}}{D_{60}} = \frac{M_{40}}{N_{40}} \cdot \frac{N_{40} - N_{50}}{D_{40}} \cdot \frac{1}{\frac{D_{60}}{D_{40}}} + P^* \cdot \frac{N_{50} - N_{60}}{D_{50}} \cdot \frac{1}{\frac{D_{60}}{D_{50}}} - \frac{M_{40} - M_{60}}{D_{50}}$$

$$P^* = \frac{M_{40} \cdot N_{50}}{N_{40} \cdot (N_{50} - N_{60})}$$

**4η**

Οικονομική ισοδυναμία στην ηλικία 50

$$P^* \cdot \ddot{a}_{50:\overline{10}|} = P_{40} \cdot \ddot{a}_{50}$$

$$P^* = \frac{P_{40} \cdot \ddot{a}_{50}}{\ddot{a}_{50:\overline{10}|}} = \frac{M_{40}}{N_{40}} \cdot \frac{\frac{D_{50}}{N_{50} - N_{60}}}{\frac{D_{50}}{D_{50}}} = \frac{M_{40} \cdot N_{50}}{N_{40} \cdot (N_{50} - N_{60})}$$

**50**

$${}_nV_x = (P_x - P_{x:n}^1) \cdot \frac{\ddot{a}_{x:n}}{A_{x:n}^1} = (P_x - P_{x:n}^1) \cdot \frac{1}{P_{x:n}^1} \Rightarrow$$

$$0.563 = \frac{(0.090 - P_{x:n}^1)}{0.00864} \Rightarrow P_{x:n}^1 = 0.090 - (0.00864)(0.563) = 0.0851$$



51

Έχουμε  $i = 0.06$  ,  $p_x = 1 - 0.65 = 0.35$  ,  $p_{x+1} = 1 - 0.85 = 0.15$  ,  $p_{x+2} = 1 - 1.00 = 0$

Θα γίνει χρήση της  ${}_tV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}$  Εδώ χρειάζονται  $\ddot{a}_x$  ,  $\ddot{a}_{x+1}$  και  $\ddot{a}_{x+2}$

$$\ddot{a}_{x+2} = 1 + \ddot{a}_{x+3} \cdot \frac{D_{x+3}}{D_{x+2}} = 1 + \ddot{a}_{x+3} \cdot \frac{l_{x+3}}{l_{x+2}} \cdot v = 1 + \ddot{a}_{x+3} \cdot p_{x+2} \cdot v = 1 + \ddot{a}_{x+3} \cdot 0 \cdot v = 1$$

$$\ddot{a}_{x+1} = 1 + \ddot{a}_{x+2} \cdot \frac{D_{x+2}}{D_{x+1}} = 1 + \ddot{a}_{x+2} \cdot \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \cdot v = 1 + \ddot{a}_{x+2} \cdot p_{x+1} \cdot v = 1 + 1 \cdot 0.15 \cdot \frac{1}{1.06} = 1.14151$$

$$\ddot{a}_x = 1 + \ddot{a}_{x+1} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x} = 1 + \ddot{a}_{x+1} \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v = 1 + \ddot{a}_{x+1} \cdot p_x \cdot v = 1 + 1.14151 \cdot 0.35 \cdot \frac{1}{1.06} = 1.37691$$

Οπότε από την  ${}_tV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}$  με  $t=1$  έχουμε:

$${}_1V_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+1}}{\ddot{a}_x} = 1 - \frac{1.14151}{1.37691} = 0.170965 \approx 0.171$$

52

α)

$$P \cdot \ddot{a}_{45:\overline{20}|} = 4000 \cdot (\bar{A}_{45:\overline{20}|}^1 + 1.5 \cdot \bar{A}_{45:\overline{10}|}^1) = 4000 \cdot \sqrt{1.0425} \cdot (A_{45:\overline{20}|}^1 + 1.5 \cdot A_{45:\overline{10}|}^1) \Rightarrow$$

$$P \cdot \ddot{a}_{45:\overline{20}|} = 4000 \cdot 1.021 \cdot (A_{45:\overline{20}|}^1 + 1.5 \cdot A_{45:\overline{10}|}^1) \Rightarrow$$

$$P = 4000 \cdot 1.021 \cdot \left( \frac{A_{45:\overline{20}|}^1 + 1.5 \cdot A_{45:\overline{10}|}^1}{\ddot{a}_{45:\overline{20}|}} \right) \simeq 81.62$$

β)

$${}_{10}V = 4000 \cdot \bar{A}_{55:\overline{10}|}^1 - P \cdot \ddot{a}_{55:\overline{10}|} = 4000 \cdot 1.021 \cdot A_{55:\overline{10}|}^1 - P \cdot \ddot{a}_{55:\overline{10}|} \simeq -26.59$$

γ)

Το αρνητικό ποσό οφείλεται στο ότι η κάλυψη που προσφέρεται στα πρώτα χρόνια της ασφάλισης είναι μεγαλύτερη από ότι το ασφάλιστρο καλύπτει.

Ο ασφαλισμένος έχει <<οφειλή >> ίση με το αρνητικό αποθεματικό.

Εάν λοιπόν κατά την πρώτη 10ετία σταματήσει η πληρωμή ασφαλίσεων, τότε η εταιρεία θα έχει ζημιά που δεν θα μπορεί να αναπληρωθεί.

δ)

Ακολουθούν κάποιες προτάσεις που θα μπορούσαν να αντιμετωπίσουν τη <<ζημιά>> της εταιρείας. Όπως π.χ.

Να επισπευσθεί η πληρωμή των ασφαλίσεων.

Τα ασφάλιστρα των πρώτων ετών να είναι μεγαλύτερα από αυτά των τελευταίων.

Το ποσόν κάλυψης των πρώτων ετών να μην έχει μεγάλη διαφορά από το ποσό κάλυψης των τελευταίων ετών.

Οιαδήποτε άλλη λογική πρόταση θα είναι επίσης δεκτή.

53

Θα γίνει χρήση των σχέσεων :  $A_x = 1 - d \cdot \ddot{a}_x$ ,  ${}_nV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_x}$

$$v = 0.90 \Rightarrow d = 0.10, \quad A_x = 1 - d \cdot \ddot{a}_x = 1 - (0.10)(5) = 0.5$$

$$\pi \cdot \ddot{a}_x = 5000 \cdot A_x - 5000 \cdot v \cdot q_x \Rightarrow \pi = 455$$

$${}_{10}V_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+10}}{\ddot{a}_x} \Rightarrow 0.2 = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+10}}{5} \Rightarrow \ddot{a}_{x+10} = 4$$

$$A_{x+10} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x+10} = 1 - (0.10) \cdot (4) = 0.6$$

$${}_{10}V = 5000 \cdot A_{x+10} - \pi \cdot \ddot{a}_{x+10} = 1180$$

54

Έστω  $P$  το ετήσιο ασφάλιστρο τότε η σχετική εξίσωση ισοδυναμίας είναι:

$$P \cdot \ddot{a}_{45:\overline{15}|} = 10000 \cdot A_{45:\overline{20}|}^1 + 20000 \cdot A_{45:\overline{20}|}^1 \Rightarrow$$

$$P \cdot \frac{N_{45} - N_{60}}{D_{45}} = 10000 \cdot \frac{M_{45} - M_{65}}{D_{45}} + 20000 \cdot \frac{D_{65}}{D_{45}} \Rightarrow$$

$$P = 10000 \frac{M_{45} - M_{65} + 2 \cdot D_{65}}{N_{45} - N_{60}} = 741.43$$

Το αποθεματικό  ${}_{13}V$  στο τέλος του 13<sup>ου</sup> έτους είναι:

$${}_{13}V = 10000 \cdot A_{58:\overline{7}|}^1 + 20000 \cdot A_{58:\overline{7}|}^1 - P \cdot \ddot{a}_{58:\overline{2}|} \Rightarrow$$

$${}_{13}V = 10000 \cdot \frac{M_{58} - M_{65}}{D_{58}} + 20000 \cdot \frac{D_{65}}{D_{58}} - P \cdot \frac{N_{58} - N_{60}}{D_{58}} \Rightarrow$$

$${}_{13}V = 10000 \cdot \frac{M_{58} - M_{65}}{D_{58}} + 20000 \cdot \frac{D_{65}}{D_{58}} - P \cdot \frac{N_{58} - N_{60}}{D_{58}} = 12507.26$$

Οπότε το «Κεφάλαιο υπό κίνδυνο» ανά ασφαλιστικό συμβόλαιο είναι

$$DSAR = 10000 - 12507.26 = -2507.26$$

«Το αναμενόμενο κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο» είναι

$$EDS = 199 \cdot q_{57} \cdot (-2507.26) = 199 \cdot 0.0162896 \cdot (-2507.26) = -8127.61$$

Το πραγματικό κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο είναι

$$ADS = 4 \cdot (-2507.26) = -10029.04$$

Οπότε «κέρδος ή ζημία»=  
 (αναμενόμενο κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο) –  
 (πραγματικό κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο)

$$EDS - ADS = -8127.61 - (-10029.04) = 1901.43$$

Εδώ η εταιρεία έχει «κέρδος» λόγω των περισσότερων θανάτων που συνέβησαν από όσους αναμένονταν.

55

Έστω  $P$  είναι το μηνιαίο ασφάλιστρο, η εξίσωση ισοδυναμίας είναι:

$$12 \cdot P \cdot \ddot{a}_{30:\overline{35}|}^{(12)} = 300 + 250 \cdot \bar{A}_{30} + 48000 \cdot \bar{A}_{30} + 2000 \cdot (\bar{IA})_{30} +$$

$$+ \frac{50}{100} \cdot 12P + (0.05 \cdot 12 \cdot P \cdot \ddot{a}_{30:\overline{35}|}^{(12)} - 0.05 \cdot P) \Rightarrow$$

$$12 \cdot 0.95 \cdot P \cdot \ddot{a}_{30:\overline{35}|}^{(12)} - 5.95 \cdot P = 300 + (250 + 48000) \cdot \bar{A}_{30} + 2000 \cdot (\bar{IA})_{30}$$

$$\ddot{a}_{30:\overline{35}|}^{(12)} = \ddot{a}_{30:\overline{35}|} - \frac{11}{24} \left( 1 - \frac{D_{65}}{D_{30}} \right) = 17.73325 - \frac{11}{24} \left( 1 - \frac{445.529}{2716.836} \right) =$$

$$17.73325 - \frac{11}{24} (1 - 0.1643563) = 17.73325 - 0.3830034 = 17.35025$$

$$\bar{A}_{30} = (1.0425)^{1/2} \cdot A_{30} = 1.02103 \cdot 0.21239 = 0.216855$$

$$(\bar{IA})_{30} = (1.0425)^{1/2} \cdot (IA)_{30} = 1.02103 \cdot 6.977255 = 7.12398$$

Οπότε

$$12 \cdot 0.95 \cdot P \cdot 17.35025 - 5.95 \cdot P =$$

$$300 + (250 + 48000) \cdot 0.216855 + 2000 \cdot 7.12398 \Rightarrow \boxed{P = 130.373}$$

56

Έστω  $P'$  είναι το μηνιαίο ασφάλιστρο.

Παρακάτω το πρώτο μέλος της ισοδυναμίας είναι το ίδιο με το παραπάνω μόνο που στη θέση του  $P$  είναι το  $P'$ .

$$\begin{aligned}
& 12 \cdot 0.95 \cdot P' \cdot \ddot{a}_{30:\overline{35}|}^{(12)} - 5.95 \cdot P' = 300 + 250 \cdot \bar{A}_{30} + \\
& 50000 \cdot \sqrt{1+i} \left( v \cdot q_x + v^2 p_x \cdot q_{x+1} \cdot (1+i) + v^3 {}_2p_x \cdot q_{x+2} \cdot (1+i)^2 + \dots \right) = \\
& 300 + 250 \cdot \bar{A}_{30} + \\
& 50000 \cdot v \cdot \sqrt{1+i} \left( q_x + v^1 p_x \cdot q_{x+1} \cdot (1+i) + v^2 {}_2p_x \cdot q_{x+2} \cdot (1+i)^2 + \dots \right) = \\
& 300 + 250 \cdot \bar{A}_{30} + 50000 \cdot v^{0.5} (q_x + p_x \cdot q_{x+1} + {}_2p_x \cdot q_{x+2} + \dots) = \\
& 300 + 250 \cdot \bar{A}_{30} + \\
& 50000 \cdot v^{0.5} \left( \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_{x+1}} + \frac{l_{x+2}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+2} - l_{x+3}}{l_{x+2}} + \dots \right) = \\
& 300 + 250 \cdot \bar{A}_{30} + 50000 \cdot v^{0.5} (1) = 300 + 250 \cdot \sqrt{1+i} \cdot A_{30} + \frac{50000}{\sqrt{1+i}} = \\
& 300 + 54.2137 + 48970.20 \Rightarrow \\
& 12 \cdot 0.95 \cdot P' \cdot 17.35025 - 5.95 \cdot P' = 49324.40 \Rightarrow \boxed{P' \approx 257.11}
\end{aligned}$$

57

Η οικονομική ισοδυναμία στην έναρξη της ασφάλισης είναι :

$$\begin{aligned}
& 12 \cdot P \cdot \ddot{a}_{35:\overline{30}|}^{(12)} = (245000 + 300) \cdot A_{35:\overline{30}|} + 5000 \cdot (IA)_{35:\overline{30}|}^1 + \\
& (155000 - 150) \cdot A_{35:\overline{30}|}^1 + 0.03 \cdot 12P \cdot \ddot{a}_{35:\overline{30}|}^{(12)} - 0.03 \cdot P + 250 + 0.5 \cdot 12 \cdot P
\end{aligned}$$

Η επίλυση της εξίσωσης δίνει  $P \approx 694.80$

Μια εντελώς παραπλήσια παρουσίαση με το ίδιο αποτέλεσμα  $P \approx 694.80$  είναι:

$$\begin{aligned}
& 12 \cdot P \cdot \ddot{a}_{35:\overline{30}|}^{(12)} = 250000 \cdot A_{35:\overline{30}|} + 5000 \cdot (IA)_{36:\overline{29}|}^1 \cdot A_{35:1}^1 + 300 \cdot A_{35:\overline{30}|}^1 + \\
& 150000 \cdot A_{35:\overline{30}|}^1 + 150 \cdot A_{35:\overline{30}|}^1 + 0.03 \cdot 12P \cdot \ddot{a}_{35:\overline{30}|}^{(12)} - 0.03 \cdot P + 250 + 0.5 \cdot 12 \cdot P
\end{aligned}$$

58

Έστω  $P$  το ετήσιο ασφάλιστρο τότε η σχετική εξίσωση ισοδυναμίας είναι:

$$\begin{aligned}
& P \cdot \ddot{a}_{45:\overline{15}|} = 10000 \cdot A_{45:\overline{20}|}^1 + 20000 \cdot A_{45:\overline{20}|}^1 \Rightarrow \\
& P \cdot \frac{N_{45} - N_{60}}{D_{45}} = 10000 \cdot \frac{M_{45} - M_{65}}{D_{45}} + 20000 \cdot \frac{D_{65}}{D_{45}} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$P = 10000 \frac{M_{45} - M_{65} + 2 \cdot D_{65}}{N_{45} - N_{60}} = 741.43$$

Το αποθεματικό  ${}_{13}V$  στο τέλος του  $13^{\text{ου}}$  έτους είναι:

$${}_{13}V = 10000 \cdot A_{58:\overline{7}|}^1 + 20000 \cdot A_{58:\overline{7}|}^1 - P \cdot \ddot{a}_{58:\overline{2}|} \Rightarrow$$

$${}_{13}V = 10000 \cdot \frac{M_{58} - M_{65}}{D_{58}} + 20000 \cdot \frac{D_{65}}{D_{58}} - P \cdot \frac{N_{58} - N_{60}}{D_{58}} \Rightarrow$$

$${}_{13}V = 10000 \cdot \frac{M_{58} - M_{65}}{D_{58}} + 20000 \cdot \frac{D_{65}}{D_{58}} - P \cdot \frac{N_{58} - N_{60}}{D_{58}} = 12507.26$$

Οπότε το «Κεφάλαιο υπό κίνδυνο» ανά ασφαλιστικό συμβόλαιο είναι

$$DSAR = 10000 - 12507.26 = -2507.26$$

«Το αναμενόμενο κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο» είναι

$$EDS = 199 \cdot q_{57} \cdot (-2507.26) = 199 \cdot 0.0162896 \cdot (-2507.26) = -8127.61$$

Το πραγματικό κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο είναι

$$ADS = 4 \cdot (-2507.26) = -10029.04$$

Οπότε «κέρδος ή ζημία»=

(αναμενόμενο κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο) –

(πραγματικό κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο)

$$EDS - ADS = -8127.61 - (-10029.04) = 1901.43$$

Εδώ η εταιρεία έχει «κέρδος» λόγω των περισσότερων θανάτων που συνέβησαν από όσους αναμένονταν.

59

$$P \cdot \ddot{a}_{30:\overline{20}|} = 75000 \cdot A_{30:\overline{25}|}^1 \Rightarrow$$

$$P = 75000 \cdot \frac{A_{30:\overline{25}|}^1}{\ddot{a}_{30:\overline{20}|}} = 75000 \cdot \frac{\frac{M_{30} - M_{55}}{D_{30}}}{\frac{N_{30} - N_{50}}{D_{30}}} = 75000 \cdot \frac{M_{30} - M_{55}}{N_{30} - N_{50}}$$

$$P = 75000 \cdot \frac{577.024 - 395.279}{52488.327 - 15722.552} = 75000 \cdot \frac{181.746}{36765.776} = 370.751$$

$$P = 370.751$$

Το αποθεματικό ανά ασφαλισμένο στο τέλος του 20<sup>ου</sup> έτους

$${}_{20}V = 75000 \cdot A_{50:\overline{5}|}^1 - 0 = 75000 \cdot \frac{M_{50} - M_{55}}{D_{50}} = 3445.80$$

Το αποθεματικό ανά ασφαλισμένο στο τέλος του 19<sup>ου</sup> έτους

$${}_{19}V = 75000 \cdot A_{49:\overline{6}}^1 - P = 75000 \cdot \frac{M_{49} - M_{55}}{D_{49}} - 370.751 = \boxed{3498.50}$$

«Κεφάλαιο υπό κίνδυνο»

$$75000 - 3445.80 = 71554.20$$

«Αναμενόμενο κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο»

$$EDS = 738 \cdot q_{49} \cdot 71554.20 \approx 433862.30$$

«Πραγματικό κόστος ασφάλισης βάσει του κεφαλαίου υπό κίνδυνο»

$$ADS = 2 \cdot 71554.20 = 143108.40$$

$$EDS - ADS = 433862.30 - 143108.40 = 290753.90 \text{ δηλ. «κέρδος»}$$

**60**

$$P \cdot \ddot{a}_{40:\overline{20}} = 1000 \cdot A_{40:\overline{20}}^1 + 2000 \cdot A_{40:\overline{20}}^1 + 50(IA)_{40:\overline{20}}^1 \Rightarrow$$

$$P \cdot \frac{N_{40} - N_{60}}{D_{40}} = 1000 \frac{M_{40} - M_{60}}{D_{40}} + 2000 \frac{D_{60}}{D_{40}} + 50 \frac{R_{40} - R_{60} - 20 \cdot M_{60}}{D_{40}} \Rightarrow$$

$$P = \frac{1000(M_{40} - M_{60}) + 2000 \cdot D_{60} + 50(R_{40} - R_{60} - 20 \cdot M_{60})}{N_{40} - N_{60}} = 67.25$$

Το σταθερό ασφαλιστρο που θα πληρώνει είναι 67.25 ν.μ.

Το αναδρομικό αποθεματικό στο τέλος του 5<sup>ου</sup> έτους είναι:

$${}_5V = 67.25 \cdot \frac{N_{40} - N_{45}}{D_{45}} - 1000 \cdot \frac{M_{40} - M_{45}}{D_{45}} - 50 \cdot \frac{R_{40} - R_{45} - 5 \cdot M_{45}}{D_{45}} = 358.17$$

Αν  $S$  είναι το ζητούμενο σταθερό ασφαλισμένο ποσό θα έχουμε:

$$S \cdot A_{45:\overline{15}} - P \cdot \ddot{a}_{45:\overline{15}} = 358.17 \Rightarrow S = \frac{358.17 + 67.25 \cdot \ddot{a}_{45:\overline{15}}}{A_{45:\overline{15}}} = 1938.05$$

**61**

Έστω ότι το ασφαλισμένο ποσό είναι  $S$  θα έχουμε:

$$P \cdot \ddot{a}_{30:\overline{30}} = S \cdot A_{30} \Rightarrow P = S \frac{A_{30}}{\ddot{a}_{30:\overline{30}}} = S \frac{M_{30}}{N_{30} - N_{60}} =$$

$$S \frac{577.024}{52488.327 - 7065.889} = 0.01270351 \cdot S$$

Το αποθεματικό στο τέλος του 5<sup>ου</sup> έτους είναι:

$${}_5V = P \cdot \frac{\ddot{a}_{30:\overline{5}}}{A_{30:\overline{5}}^1} - S \cdot \frac{A_{30:\overline{5}}^1}{A_{30:\overline{5}}^1} = S \cdot \frac{M_{30}}{N_{30} - N_{60}} \cdot \frac{N_{30} - N_{35}}{D_{35}} - S \cdot \frac{M_{30} - M_{35}}{D_{35}} \Rightarrow$$

$${}_5V = S \left( \frac{M_{30}}{N_{30} - N_{60}} \cdot \frac{N_{30} - N_{35}}{D_{35}} - \frac{M_{30} - M_{35}}{D_{35}} \right) = 0.061031 \cdot S$$

Οπότε

$$S \cdot A_{35:n}^1 = 0.061031 \cdot S \Rightarrow A_{35:n}^1 = 0.061031 \Rightarrow$$

$$\frac{M_{35} - M_{35+n}}{D_{35}} = 0.061031 \Rightarrow M_{35+n} = 418.56$$

Είναι  $M_{35+17} = 426.221$  ,  $M_{35+n} = 418.56$  ,  $M_{35+18} = 416.245$

$$M_{35+17} - M_{35+18} = 9.976 \quad M_{35+17} - M_{35+n} = 7.66$$

$$\frac{7.66}{9.976} = 0.7678$$

Οπότε η διάρκεια κάλυψης θα είναι προσεγγιστικά 17 έτη 9 μήνες και 6 ημέρες.

62

Άτομο ηλικίας 32 ετών ασφαλιζεται έτσι ώστε όποτε συμβεί ο θάνατός του να πάρουν οι δικαιούχοι του 10000 ν.μ. στο τέλος του έτους. Στην ηλικία των 42 ετών θα αρχίσει να εισπράττει 1000 ν.μ. ετησίως και για όσο βρίσκεται εν ζωή. Ποιο είναι το ετήσιο ασφάλιστρο που θα πληρώνει μέχρι και την ηλικία των 41 ετών;

Εύρεση ασφαλίστρου:

$$R \cdot \ddot{a}_{32:\overline{10}} = 10000 \cdot A_{32} + 1000 \cdot \ddot{a}_{42} \cdot A_{32:\overline{10}} \Rightarrow R = 1568.32 \text{ ν.μ.}$$

Στο τέλος του 6<sup>ου</sup> έτους από την έναρξη της ασφάλισης και πριν πληρώσει το 7<sup>ο</sup> ασφάλιστρο ο ασφαλισμένος δηλώνει ότι έχει οικονομική αδυναμία να πληρώσει τα επόμενα ασφάλιστρα και ζητά να γίνουν οι εξής αλλαγές:

Το ασφάλιστρο να γίνει το 75% του αρχικού ασφαλίστρου.

Το ασφαλισμένο ποσό σε περίπτωση θανάτου να ελαττωθεί καταλλήλως έτσι ώστε το ποσό που θα εισπράττει από την ηλικία των 42 ετών να παραμείνει 1000 ν.μ. Να μην γίνει καμία άλλη τροποποίηση.

Να βρεθεί το ποσό που θα καταβληθεί σε περίπτωση θανάτου.

Πρώτος τρόπος

Εύρεση ασφαλισμένου ποσού με εξίσωση αποθεματικών στο τέλος του 6<sup>ου</sup> έτους  
ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟ ΑΠΟΘΕΜΑΤΙΚΟ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ 6ου ΕΤΟΥΣ

$${}_6V = R \cdot \ddot{a}_{32:\overline{6}} \cdot \frac{1}{A_{32:\overline{6}}^1} - 10000 \cdot A_{32:\overline{6}}^1 \cdot \frac{1}{A_{32:\overline{6}}^1} = R \cdot \frac{N_{32} - N_{38}}{D_{38}} - 10000 \cdot \frac{M_{32} - M_{38}}{D_{38}} = 10850.10$$

ΠΡΟΟΠΤΙΚΟ ΑΠΟΘΕΜΑΤΙΚΟ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ 6ου ΕΤΟΥΣ

$${}_6V = K \cdot A_{38} + 1000 \cdot \ddot{a}_{42} \cdot A_{38:\overline{4}}^1 - 0.75 \cdot R \cdot \ddot{a}_{38:\overline{4}} = K \cdot \frac{M_{38}}{D_{38}} + 1000 \cdot \frac{N_{42}}{D_{38}} - 0.75 \cdot R \cdot \frac{N_{38} - N_{42}}{D_{38}}$$

Η εξίσωση των δύο αποθεματικών μας δίνει το  $K=4756.74$  ν.μ.

Δεύτερος τρόπος

Εύρεση ασφαλισμένου ποσού με οικονομική ισοδυναμία στην έναρξη της ασφάλισης.

Είναι :  $R = 1568.32$  οπότε  $0.75 \cdot R = 1176.24$

$$1568.32 \cdot \ddot{a}_{32:\overline{6}} + 1176.24 \cdot \ddot{a}_{38:\overline{4}} \cdot A_{32:\overline{6}}^1 = 10000 \cdot A_{32:\overline{6}}^1 + K \cdot A_{38} \cdot A_{32:\overline{6}}^1 + 1000 \cdot \ddot{a}_{42} \cdot A_{32:\overline{10}}^1$$

Λύση της εξίσωσης δίνει  $K=4756.74$  ν.μ.

Τρίτος τρόπος

Εύρεση ασφαλισμένου ποσού με οικονομική ισοδυναμία στην ηλικία των 38 ετών.

Στην περίπτωση αυτή ο ασφαλισμένος καταβάλλει το αποθεματικό στο τέλος του 6<sup>ου</sup> έτους και τα 4 μειωμένα ασφάλιστρα.

Είναι:  $R = 1568.32$  οπότε  $0.75 \cdot R = 1176.24$

$${}_6V + 1176.24 \cdot \ddot{a}_{38:\overline{4}|} = K \cdot A_{38} + 1000 \cdot \ddot{a}_{42} \cdot A_{38:\overline{6}|}^{\frac{1}{2}}$$

Λύση της εξίσωσης δίνει  $K=4756.74$  ν.μ.

Παρατήρηση:

Εάν αντί  $0,75R$  έχουμε  $0,5R$  τότε το αποτέλεσμα είναι αρνητικό που σημαίνει ότι ο δικαιούχος του ασφαλισμένου, θα έπρεπε να πληρώσει στην εταιρεία στο τέλος του έτους του θανάτου, κάτι που είναι ανεφάρμοστο και μη πραγματοποιήσιμο. Εάν θα πρέπει να είναι  $0,5R$  το ασφάλιστρο, τότε θα έχουμε και μείωση των 1000 ν.μ. και συγκεκριμένα γίνεται 990,22 ν.μ. με μηδενισμό του ασφαλισμένου ποσού σε περίπτωση θανάτου.

$${}_6V + 784.16 \cdot \ddot{a}_{38:\overline{4}|} = 0 \cdot A_{38} + K \cdot \ddot{a}_{42} \cdot A_{38:\overline{6}|}^{\frac{1}{2}}$$

$$K = 990.22$$

ΟΠΙΑ Τμήμα Πληροφορικής Ασκήσεις Ασφαλιστικών