Γραφικά και Οπτικοποίηση
Αρχές και Αλγόριθμοι

Θ. Θεοχάρης
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Γ. Παπαϊωάννου
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ν. Πλατής
Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου

Ν. Μ. Πατρικαλάκης
Massachusetts Institute of Technology

Με συνεισφορές των
P. Dutré
A. Nasri, F. A. Salem, και G. Turkiyyah

Εκδόσεις Συμμετρία
Αθήνα 2010

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή ενός εκ των συγγραφέων.

Κεντρική διάθεση:
Εκδόσεις Συμμετρία
Ιωάννου Θεολόγου 80, 157 73 Ζωγράφου
Τηλ. 210 77 07 114, 210 77 02 033

Copyright © 2010: Θ. Θεοχάρης, Γ. Παπαϊωάννου, Ν. Πλατής, Ν. Μ. Πατρικαλάκης

Γλωσσική επιμέλεια: Γεωργία Ρίζου

Απαγορεύεται η με οποιονδήποτε τρόπο μερική ή ολική ανατύπωση, αναδημοσίευση ή φωτοτύπηση του παρόντος βιβλίου χωρίς την έγγραφη άδεια των συγγραφέων, σύμφωνα με τις κείμενες διατάξεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας.

ISBN: 978-960-266-296-0

Το εξώφυλλο βασίζεται στη συνθετική εικόνα του M. Denko *Waiting for Spring*, την οποία μετονομάσαμε *Το αδύνατο*. Εμπροσθόφυλλο: τελική εικόνα. Οπισθόφυλλο: τρία στάδια της δημιουργίας της τελικής εικόνας (πλέγμα μοντέλων πάνω σε φωτισμένες 3Δ επιφάνειες, φωτισμένες 3Δ επιφάνειες, τελική εικόνα).

1η εκτύπωση Μάιος 2010

Εκτύπωση: Σ. Αθανασόπουλος – Ε. Παπαδάμη & Σία Ε.Ε.
Ιωάννου Θεολόγου 80, 157 73 Ζωγράφου — Τηλ. 210 77 10 548, 210 77 02 033, 210 77 07 114, 210 77 10 581
http://www.simmetria.gr/

Περιεχόμενα

Πρόλογος στην Ελληνική έκδοση **ix**

Πρόλογος **xi**

1 Εισαγωγή **1**
1.1 Σύντομη ιστορία 1
1.2 Εφαρμογές 6
1.3 Έννοιες 7
1.4 Σωλήνωση γραφικών 8
1.5 Καταχωρητές εικόνας 13
1.6 Υλικό γραφικών 17
1.7 Συμβάσεις 27

2 Αλγόριθμοι σχεδίασης **29**
2.1 Εισαγωγή 29
2.2 Μαθηματικές καμπύλες και πεπερασμένες διαφορές 31
2.3 Σχεδίαση ευθείας 34
2.4 Σχεδίαση κύκλου 37
2.5 Έλεγχοι εσωτερικού σημείου 40
2.6 Σχεδίαση πολυγώνου 41
2.7 Προοπτική διόρθωση 49
2.8 Αντιταύτιση στο χώρο 50
2.9 Αλγόριθμοι αποκοπής στις 2Δ 56
2.10 Ασκήσεις 70

3 Συστήματα συντεταγμένων και μετασχηματισμοί στις 2Δ και 3Δ **73**
3.1 Εισαγωγή 73
3.2 Συσχετισμένοι μετασχηματισμοί 74
3.3 2Δ συσχετισμένοι μετασχηματισμοί 76
3.4 Σύνθετοι Μετασχηματισμοί 80
3.5 2Δ ομογενείς συσχετισμένοι μετασχηματισμοί 82
3.6 Παραδείγματα 2Δ μετασχηματισμών 84
3.7 3Δ ομογενείς συσχετισμένοι μετασχηματισμοί 93
3.8 Παραδείγματα 3Δ μετασχηματισμών 96
3.9 Quaternions® 106
3.10 Γεωμετρικές ιδιότητες 111

3.11 Ασκήσεις 112

4 Προβολές και μετασχηματισμοί παρατήρησης 115
4.1 Εισαγωγή 115
4.2 Προβολές 116
4.3 Παραδείγματα προβολών 122
4.4 Μετασχηματισμός παρατήρησης 127
4.5 Προεκταμένος μετασχηματισμός παρατήρησης 133
4.6 Περικοπή στο οπτικό πεδίο και μετασχηματισμός παρατήρησης . 137
4.7 Ο μετασχηματισμός πεδίου παράστασης 138
4.8 Ασκήσεις 138

5 Περικοπή και Απομάκρυνση Κρυμμένων Επιφανειών 141
5.1 Εισαγωγή 141
5.2 Περικοπή πίσω όψεων 143
5.3 Περικοπή στο οπτικό πεδίο 144
5.4 Περικοπή παρεμποδιζομένων 149
5.5 Απομάκρυνση κρυμμένων επιφανειών 155
5.6 Βελτίωση απόδοσης 165
5.7 Ασκήσεις 169

6 Αναπαράσταση και απλοποίηση μοντέλων 171
6.1 Εισαγωγή 171
6.2 Επισκόπηση μορφών μοντέλων 171
6.3 Ιδιότητες πολυγωνικών μοντέλων 173
6.4 Δομές δεδομένων για πολυγωνικά μοντέλα 175
6.5 Απλοποίηση πολυγωνικών μοντέλων 179
6.6 Ασκήσεις 185

7 Παραμετρικές καμπύλες και επιφάνειες 187
7.1 Εισαγωγή 187
7.2 Καμπύλες Bézier 188
7.3 Καμπύλες B-spline 201
7.4 Ρητές καμπύλες Bézier και B-spline 216
7.5 Καμπύλες παρεμβολής 221
7.6 Επιφάνειες 233
7.7 Ασκήσεις 241

8 Υποδιαίρεση για τα γραφικά και την οπτικοποίηση 243
8.1 Εισαγωγή 243
8.2 Συμβολισμοί 244
8.3 Καμπύλες υποδιαίρεσης 245
8.4 Επιφάνειες υποδιαίρεσης 248
8.5 Επεξεργασία των επιφανειών υποδιαίρεσης 262

8.6 Ανάλυση επιφανειών υποδιαίρεσης® 269
8.7 Εφαρμογές υποδιαίρεσης στα πεπερασμένα στοιχεία® 275
8.8 Ασκήσεις 291

9 Διαχείριση σκηνής 293
9.1 Εισαγωγή 293
9.2 Γράφοι σκηνής 296
9.3 Κατανεμημένη σχεδίαση σκηνής 309
9.4 Ασκήσεις 313

10 Αρχές Οπτικοποίησης 315
10.1 Εισαγωγή 315
10.2 Μέθοδοι Επιστημονικής Εξερεύνησης 317
10.3 Δεδομένα και μετασχηματισμοί τους 318
10.4 Δοκιμασμένες αρχές γραφημάτων 322
10.5 Τονική απεικόνιση 324
10.6 Θέματα αντίληψης 328
10.7 Οπτικοποίηση πολυδιάστατων δεδομένων 331
10.8 Ασκήσεις 333

11 Το Χρώμα στα Γραφικά και στην Οπτικοποίηση 335
11.1 Εισαγωγή 335
11.2 Αποχρώσεις γκρι (grayscale) 335
11.3 Χρωματικά μοντέλα 342
11.4 Θέματα διαδικτύου 352
11.5 Εικόνες υψηλού δυναμικού εύρους - ΥΔΕ (High Dynamic Range Images - HDR) 353
11.6 Ασκήσεις 356

12 Μοντέλα και αλγόριθμοι φωτισμού 359
12.1 Εισαγωγή 359
12.2 Φυσική της αλληλεπίδρασης φωτός-αντικειμένων I 360
12.3 Το μοντέλο φωτισμού Lambert® 364
12.4 Το μοντέλο φωτισμού Phong 367
12.5 Διανύσματα μοντέλου Phong 373
12.6 Αλγόριθμοι φωτισμού με βάση το μοντέλο Phong 381
12.7 Το μοντέλο φωτισμού Cook–Torrance® 389
12.8 Το μοντέλο φωτισμού Oren–Nayar® 396
12.9 Το μοντέλο φωτισμού Strauss® 401
12.10 Ανισοτροπική ανακλαστικότητα 405
12.11 Παρεμπόδιση διάχυτου φωτισμού (Ambient Occlusion) 407
12.12 Πηγαίος κώδικας shaders 412
12.13 Ασκήσεις 416

13 Σκιές **419**
13.1 Εισαγωγή . . . 419
13.2 Σκιές και πηγές φωτός . . . 421
13.3 Ο αλγόριθμος πολυεδρικών σκιών . . . 423
13.4 Εικόνες σκιών . . . 438
13.5 Ασκήσεις . . . 452

14 Υφή **455**
14.1 Εισαγωγή . . . 455
14.2 Παραμετρική απεικόνιση υφής . . . 456
14.3 Δημιουργία συντεταγμένων υφής . . . 462
14.4 Σμίκρυνση και μεγέθυνση υφής . . . 477
14.5 Συναρτησιακή υφή . . . 486
14.6 Μετασχηματισμοί στο χώρο της υφής . . . 494
14.7 Αναπαράσταση αναγλύφου . . . 495
14.8 Άτλαντες υφής$^{\circledast}$ . . . 505
14.9 Ιεραρχίες υφής . . . 516
14.10 Ασκήσεις . . . 516

15 Παρακολούθηση ακτίνων **519**
15.1 Εισαγωγή . . . 519
15.2 Οι αρχές της παρακολούθησης ακτίνων . . . 520
15.3 Ο αναδρομικός αλγόριθμος παρακολούθησης ακτίνων . . . 527
15.4 Εκπομπή ακτίνων . . . 535
15.5 Διάσχιση σκηνής για ανίχνευση τομών . . . 539
15.6 Προβλήματα του αλγόριθμου παρακολούθησης ακτίνων . . . 549
15.7 Κατανεμημένη παρακολούθηση ακτίνων$^{\circledast}$ . . . 551
15.8 Ασκήσεις . . . 554

16 Αλγόριθμοι ολικού φωτισμού **555**
16.1 Εισαγωγή . . . 555
16.2 Φυσική της αλληλεπίδρασης φωτός-αντικειμένων II . . . 555
16.3 Ολοκλήρωση Monte Carlo . . . 563
16.4 Υπολογίζοντας τον άμεσο φωτισμό . . . 565
16.5 Έμμεσος φωτισμός . . . 580
16.6 Radiosity . . . 596
16.7 Συμπεράσματα . . . 601
16.8 Ασκήσεις . . . 602

17 Βασικές τεχνικές συνθετικής κίνησης **605**
17.1 Εισαγωγή . . . 605
17.2 Τεχνικές χαμηλού επιπέδου για συνθετική κίνηση . . . 607
17.3 Συνθετική κίνηση στερεών σωμάτων . . . 621
17.4 Σκελετική κίνηση . . . 622

17.5 Παραμορφώσιμα μοντέλα βασισμένα στη φυσική 627
17.6 Συστήματα σωματιδίων 628
17.7 Ασκήσεις 630

18 Αλγόριθμοι Οπτικοποίησης **633**
18.1 Εισαγωγή 633
18.2 Οπτικοποίηση βαθμωτών δεδομένων 636
18.3 Οπτικοποίηση διανυσματικών δεδομένων 649
18.4 Ασκήσεις 660

Α Διανυσματικοί και συσχετισμένοι χώροι **663**
Α.1 Διανυσματικοί χώροι 663
Α.2 Συσχετισμένοι χώροι 670

Β Στοιχεία διαφορικής γεωμετρίας **673**
Β.1 Καμπύλες 673
Β.2 Επιφάνειες 678

Γ Έλεγχοι τομής **685**
Γ.1 Τομή δύο ευθειών στο επίπεδο 685
Γ.2 Τομή ευθείας-επιπέδου 687
Γ.3 Τομή ευθείας-τριγώνου 687
Γ.4 Τομή ευθείας-σφαίρας 688
Γ.5 Τομή ευθείας-κυρτού πολυέδρου 690

Δ Υπολογισμοί στερεών γωνιών **693**

Ε Στοιχεία θεωρίας σημάτων **697**
Ε.1 Δειγματοληψία 697
Ε.2 Το πεδίο των συχνοτήτων 698
Ε.3 Συγκερασμός και φιλτράρισμα 700
Ε.4 Θεώρημα δειγματοληψίας 703

Βιβλιογραφία **705**

Ευρετήριο **727**
Ελληνικοί όροι 727
Αγγλικοί όροι 735

Πρόλογος στην Ελληνική έκδοση

Η Ελληνική έκδοση του βιβλίου ξεκίνησε με τη μετάφραση από τους συγγραφείς της ορολογίας του χώρου στα Ελληνικά. Αυτό έγινε λαμβάνοντας υπόψη τις συμβουλές ειδικών από παρεμφερείς περιοχές, την καθιερωμένη ορολογία και την εκτίμηση των συγγραφέων όπου αυτό ήταν απαραίτητο. Η μετάφραση αυτή αποτελεί το ευρετήριο του βιβλίου και ελπίζουμε ότι θα φανεί χρήσιμη στον αναγνώστη γενικότερα. Κατά την συγγραφή του βιβλίου ήταν ένα πολύτιμο εργαλείο για την χρήση σταθερών όρων από τους πολλαπλούς συγγραφείς / μεταφραστές.

Η συγγραφική αυτή πολλαπλότητα έκανε απαραίτητη τη φιλολογική επιμέλεια του βιβλίου από τη φιλόλογο Γεωργία Ρίζου, την οποία θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε ιδιαίτερα.

Θα θέλαμε επίσης να ευχαριστήσουμε τον Αντώνη Δανελάκη και την Εύη Σαΐτη για την συνέπεια και προσοχή που έδειξαν κατά τη δημιουργία του εποπτικού υλικού που συνοδεύει το βιβλίο, καθώς και το προσωπικό των εκδόσεων Συμμετρία. Το βιβλίο υποστηρίζεται από πλήρες ηλεκτρονικό υλικό το οποίο μπορείτε να βρείτε στην ηλεκτρονική διεύθυνση http://graphics.cs.aueb.gr/cgvizbook.

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς φοιτητές που μελετούν τα γραφικά και την οπτικοποίηση. Απευθύνεται επίσης σε επαγγελματίες που επιθυμούν να αποκτήσουν γνώση των τεχνικών στις οποίες βασίζονται τα εργαλεία που χρησιμοποιούν ή αναπτύσσουν. Εστιάζεται σε καθιερωμένες αρχές και αλγόριθμους αλλά και σε νέες μεθόδους που κατά την κρίση των συγγραφέων θα έχουν διαχρονικότητα.

Η μεγάλη ανάπτυξη των γραφικών και της οπτικοποίησης οδηγεί τους ερευνητές σε αυξανόμενη εξειδίκευση. Η τεράστια βιβλιογραφία απαιτεί την συνέργεια πολλών συγγραφέων. Αν και αυτό συνεπάγεται προβλήματα συνέπειας και ύφους γραφής, πιστεύουμε ότι αντισταθμίζεται από την περισσότερο εξειδικευμένη γνώση που τελικά παρέχει. Η ενοποίηση των χαρακτηριστικών των κεφαλαίων απαίτησε σημαντική προσπάθεια και ο αναγνώστης ελπίζουμε να συγχωρήσει διαφορές που ενδέχεται να υπάρχουν ακόμα.

Η αρχική συγγραφική ομάδα αποτελείτο από τέσσερα άτομα τα οποία στην πορεία συμπληρώθηκαν από κορυφαίους συνεργάτες για την συγγραφή δύο εξειδικευμένων κεφαλαίων. Συγγραφέας του Κεφαλαίου 16 (μοντέλα ολικού φωτισμού) είναι ο P. Dutré. Το Κεφάλαιο 8 (τεχνικές υποδιαίρεσης στα γραφικά και στην οπτικοποίηση) ανέλαβε ο A. Nasri (που έγραψε τις περισσότερες Ενότητες και συντόνισε το κεφάλαιο), η F. A. Salem (Ενότητα ανάλυσης επιφανειών υποδιαίρεσης) και ο G. Turkiyyah (πεπερασμένα στοιχεία υποδιαίρεσης).

Μια καινοτομία του βιβλίου αυτού είναι η ενοποιημένη κάλυψη των γραφικών και της οπτικοποίησης, περιλαμβάνοντας σημαντικά τρέχοντα θέματα όπως: γράφους σκηνής, επιφάνειες υποδιαίρεσης, μοντέλα πολλαπλής ανάλυσης, σκιές, παρεμπόδιση διάχυτου φωτισμού, παρακολούθηση σωματιδίων, οπτικοποίηση βαθμωτών και διανυσματικών δεδομένων, σκελετική συνθετική κίνηση και εικόνες υψηλού δυναμικού εύρους. Το υλικό έχει αναπτυχθεί, βελτιωθεί και χρησιμοποιηθεί εκτενώς σε μαθήματα γραφικών και οπτικοποίησης.

Για να εκμεταλλευτεί πλήρως το περιεχόμενο, ο αναγνώστης πρέπει να έχει γνώση βασικές αρχών αλγορίθμων και γραμμικής άλγεβρας. Ορισμένες Ενότητες, κυρίως προχωρημένες, απαιτούν επίσης και άλλες γνώσεις όπως αρχές επεξεργασίας σήματος. Τα Παραρτήματα συνοψίζουν κάποιες από τις προαπαιτούμενες αυτές γνώσεις.

Κάθε κεφάλαιο τελειώνει με μια λίστα ασκήσεων. Αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν τόσο σαν εργασίες μαθήματος από τους διδάσκοντες όσο και σαν ασκήσεις κατανόησης από τους διδασκόμενους. Μια σταθερή ροή μικρών, μέτριων και μεγάλων εργασιών βοηθά σημαντικά την κατανόηση. Το Κεφάλαιο 3 (συστήματα συντεταγ-

μένων και μετασχηματισμοί) περιλαμβάνει επίσης ένα μεγάλο αριθμό παραδειγμάτων που αφορούν 2Δ και 3Δ μετασχηματισμούς. Καθώς το περιεχόμενο του κεφαλαίου αυτού πρέπει να κατανοηθεί καλά, τα παραδείγματα αυτά μπορούν να αποτελέσουν τη βάση φροντιστηριακών μαθημάτων ή να χρησιμοποιηθούν από τους διδασκόμενους για εξάσκηση.

Το περιεχόμενο του βιβλίου μπορεί να αποτελέσει τη βάση ενός βασικού και ενός προχωρημένου μαθήματος στα γραφικά, με τρόπο που ένας φοιτητής που παρακολουθεί μόνο το πρώτο να αποκτά μια ολοκληρωμένη εικόνα του αντικειμένου. Προχωρημένες Ενότητες υποδεικνύονται από έναν αστερίσκο ⊛. Το μάθημα της οπτικοποίησης μπορεί είτε να αποτελεί συνέχεια του πρώτου μαθήματος γραφικών, όπως προτείνεται παρακάτω, είτε να αποτελεί ένα αυτόνομο μάθημα οπότε τα προχωρημένα θέματα γραφικών που περιλαμβάνει, πρέπει να αντικατασταθούν από πιο βασικά.

Μάθημα 1: Γραφικά–Βασικό.

Αυτό είναι ένα πρώτο προπτυχιακό μάθημα στα γραφικά.

- Κεφάλαιο 1 (Εισαγωγή).
- Κεφάλαιο 2 (Αλγόριθμοι σχεδίασης).
- Κεφάλαιο 3 (Συστήματα συντεταγμένων και μετασχηματισμοί στις 2Δ και 3Δ). Η Ενότητα 3.9 (Quaternions) δεν περιλαμβάνεται.
- Κεφάλαιο 4 (Προβολές και μετασχηματισμοί παρατήρησης). Εξαιρείται η Ενότητα 4.5 (Προεκταμένος μετασχηματισμός παρατήρησης).
- Κεφάλαιο 5 (Περικοπή και απομάκρυνση κρυμμένων επιφανειών). Εξαιρείται η Ενότητα 5.4 (Περικοπή παρεμποδιζομένων). Περιορίστε την Ενότητα 5.5 (Απομάκρυνση κρυμμένων επιφανειών) στον αλγόριθμο Z-buffer.
- Κεφάλαιο 6 (Αναπαράσταση και απλοποίηση μοντέλων).
- Κεφάλαιο 7 (Παραμετρικές καμπύλες και επιφάνειες). Καμπύλες Bézier και επιφάνειες Bézier τανυστικό γινόμενο.
- Κεφάλαιο 9 (Διαχείριση σκηνής).
- Κεφάλαιο 11 (Το χρώμα στα γραφικά και στην οπτικοποίηση).
- Κεφάλαιο 12 (Μοντέλα και αλγόριθμοι φωτισμού). Εξαιρούνται τα προχωρημένα θέματα: Ενότητα 12.3 (Το μοντέλο φωτισμού Lambert), Ενότητα 12.7 (Το μοντέλο φωτισμού Cook-Torrance), Ενότητα 12.8 (Το μοντέλο φωτισμού Oren–Nayar) και Ενότητα 12.9 (Το μοντέλο φωτισμού Strauss), καθώς και η Ενότητα 12.10 (Ανισοτροπική ανακλαστικότητα) και η Ενότητα 12.11 (Παρεμπόδιση διάχυτου φωτισμού).
- Κεφάλαιο 13 (Σκιές). Εξαιρείται η Ενότητα 13.4 (Εικόνες σκιών).

- Κεφάλαιο 14 (Υφή). Εξαιρείται η Ενότητα 14.4 (Σμίκρυνση και μεγέθυνση υφής), η Ενότητα 14.5 (Συναρτησιακή υφή), η Ενότητα 14.6 (Μετασχηματισμοί στο χώρο της υφής), η Ενότητα 14.7 (Αναπαράσταση αναγλύφου), η Ενότητα 14.8 (Άτλαντες υφής), και η Ενότητα 14.9 (Ιεραρχίες υφής).

- Κεφάλαιο 17 (Βασικές τεχνικές συνθετικής κίνησης). Εισάγετε μόνο τις βασικές έννοιες συνθετικής κίνησης και εξαιρέστε την Ενότητα για την παρεμβολή περιστροφής (σελίδα 610), καθώς και την Ενότητα 17.3 (Συνθετική κίνηση στερεών σωμάτων), την Ενότητα 17.4 (Σκελετική κίνηση), την Ενότητα 17.5 (Παραμορφώσιμα μοντέλα βασισμένα στη φυσική), και την Ενότητα 17.6 (Συστήματα σωματιδίων).

Μάθημα 2: Γραφικά–Προχωρημένο.

Η ακόλουθη επιλογή είναι κατάλληλη είτε για ένα δεύτερο προπτυχιακό μάθημα γραφικών είτε για ένα μεταπτυχιακό μάθημα κι έχει προαπαιτούμενο το βασικό μάθημα γραφικών.

- Κεφάλαιο 3 (Συστήματα συντεταγμένων και μετασχηματισμοί στις 2Δ και 3Δ). Ανασκόπηση του Κεφαλαίου και εισαγωγή της προχωρημένης Ενότητας 3.9 (Quaternions).

- Κεφάλαιο 4 (Προβολές και μετασχηματισμοί παρατήρησης). Ανασκόπηση του Κεφαλαίου και εισαγωγή της προχωρημένης Ενότητας 4.5 (Προεκταμένος μετασχηματισμός παρατήρησης).

- Κεφάλαιο 5 (Περικοπή και απομάκρυνση κρυμμένων επιφανειών). Ανασκόπηση του Κεφαλαίου και εισαγωγή της προχωρημένης Ενότητας 5.4 (Περικοπή παρεμποδιζομένων). Επίσης παρουσίαση του ακόλουθου υλικού από την Ενότητα 5.5 (Απομάκρυνση κρυμμένων επιφανειών): αλγόριθμος BSP, αλγόριθμος ταξινόμησης κατά βάθος, αλγόριθμος εκπομπής ακτίνων και βελτίωση απόδοσης.

- Κεφάλαιο 7 (Παραμετρικές καμπύλες και επιφάνειες). Ανασκόπηση των καμπύλων Bézier και επιφανειών Bézier τανυστικό γινόμενο και εισαγωγή καμπύλων B-spline, ρητών καμπύλων B-spline, καμπύλων παρεμβολής, και επιφανειών B-spline τανυστικό γινόμενο.

- Κεφάλαιο 8 (Υποδιαίρεση για τα γραφικά και την οπτικοποίηση).

- Κεφάλαιο 12 (Μοντέλα και αλγόριθμοι φωτισμού). Ανασκόπηση του Κεφαλαίου αυτού και εισαγωγή των προχωρημένων θεμάτων: Ενότητα 12.3 (Το μοντέλο φωτισμού Lambert), Ενότητα 12.7 (Το μοντέλο φωτισμού Cook-Torrance), Ενότητα 12.8 (Το μοντέλο φωτισμού Oren–Nayar) και Ενότητα 12.9 (Το μοντέλο φωτισμού Strauss), καθώς και Ενότητα 12.10 (Ανισοτροπική ανακλαστικότητα) και Ενότητα 12.11 (Παρεμπόδιση διάχυτου φωτισμού).

- Κεφάλαιο 13 (Σκιές). Ανασκόπηση του Κεφαλαίου αυτού και εισαγωγή Ενότητας 13.4 (Εικόνες σκιών).

- Κεφάλαιο 14 (Υφή). Ανασκόπηση του Κεφαλαίου αυτού και εισαγωγή Ενότητας 14.4 (Σμίκρυνση και μεγέθυνση υφής), Ενότητας 14.5 (Συναρτησιακή υφή), Ενότητας 14.6 (Μετασχηματισμοί στο χώρο της υφής), Ενότητας 14.7 (Αναπαράσταση αναγλύφου), Ενότητας 14.8 (Άτλαντες υφής), και Ενότητας 14.9 (Ιεραρχίες υφής).

- Κεφάλαιο 15 (Παρακολούθηση ακτίνων).

- Κεφάλαιο 16 (Αλγόριθμοι ολικού φωτισμού).

- Κεφάλαιο 17 (Βασικές τεχνικές συνθετικής κίνησης). Ανασκόπηση του Κεφαλαίου αυτού και εισαγωγή της Ενότητας για την παρεμβολή περιστροφής (σελίδα 610), καθώς και της Ενότητας 17.3 (Συνθετική κίνηση στερεών σωμάτων), της Ενότητας 17.4 (Σκελετική κίνηση), της Ενότητας 17.5 (Παραμορφώσιμα μοντέλα βασισμένα στη φυσική), και της Ενότητας 17.6 (Συστήματα σωματιδίων).

Μάθημα 3: Οπτικοποίηση.

Τα παρακάτω αντικείμενα προορίζονται για ένα μάθημα οπτικοποίησης που έχει σαν προαπαιτούμενο το βασικό μάθημα γραφικών. Διαφορετικά, κάποιες από τις προτεινόμενες ενότητες πρέπει να αντικατασταθούν από ενότητες του βασικού μαθήματος γραφικών.

- Κεφάλαιο 6 (Αναπαράσταση και απλοποίηση μοντέλων). Ανασκόπηση του Κεφαλαίου αυτού.

- Κεφάλαιο 3 (Συστήματα συντεταγμένων και μετασχηματισμοί στις 2Δ και 3Δ). Ανασκόπηση.

- Κεφάλαιο 11 (Το χρώμα στα γραφικά και στην οπτικοποίηση). Ανασκόπηση.

- Κεφάλαιο 8 (Υποδιαίρεση για τα γραφικά και την οπτικοποίηση).

- Κεφάλαιο 15 (Παρακολούθηση ακτίνων).

- Κεφάλαιο 17 (Βασικές τεχνικές συνθετικής κίνησης). Ανασκόπηση του Κεφαλαίου αυτού και εισαγωγή της Ενότητας 17.3 (Συνθετική κίνηση στερεών σωμάτων) και της Ενότητας 17.6 (Συστήματα σωματιδίων).

- Κεφάλαιο 10 (Αρχές Οπτικοποίησης).

- Κεφάλαιο 18 (Αλγόριθμοι Οπτικοποίησης).

Σχετικά με το εξώφυλλο

Το εξώφυλλο βασίζεται στην συνθετική δημιουργία του M. Denko *Waiting for Spring*, την οποία έχουμε μετονομάσει *Το Αδύνατο*. Μπροστινό εξώφυλλο: τελική συνθετική εικόνα. Πίσω εξώφυλλο: τρία βήματα της δημιουργίας συνθετικής εικόνας.

Ευχαριστίες

Τα χρόνια που αφιερώθηκαν στην σύνταξη του βιβλίου αυτού δημιούργησαν την ανάγκη πολλών ευχαριστιών. Πρέπει να ευχαριστήσουμε καταρχήν τους Γ. Πασσαλή, Π. Κατσαλούλη και Β. Σουλτάνη για τα σχήματα που δημιούργησαν, όπως επίσης τον Ε. Σαγκριώτη για τον έλεγχο των φυσικών αρχών του φωτισμού. Ο A. Nasri ευχαριστεί τη χρηματοδότηση με αριθμό 111135-788129 από το Αμερικανικό Πανεπιστήμιο της Βηρυτού καθώς και τη χρηματοδότηση με αριθμό 111135-022139 από το Lebanese National Council for Scientific Research. Τέλος ευχαριστούμε τους συναδέλφους από ολόκληρο τον κόσμο που παρείχαν εικόνες: P. Hall, A. Helgeland, L. Kobbelt, Λ. Περιβολιώτης, G. Ward, D. Zorin, Γ. Δρεττάκης και M. Stamminger.

1

Εισαγωγή

Δεν υπάρχει αστυνομία για τη ζωγραφική—απλώς διασκεδάστε.
—Valerie Kent

1.1 Σύντομη ιστορία

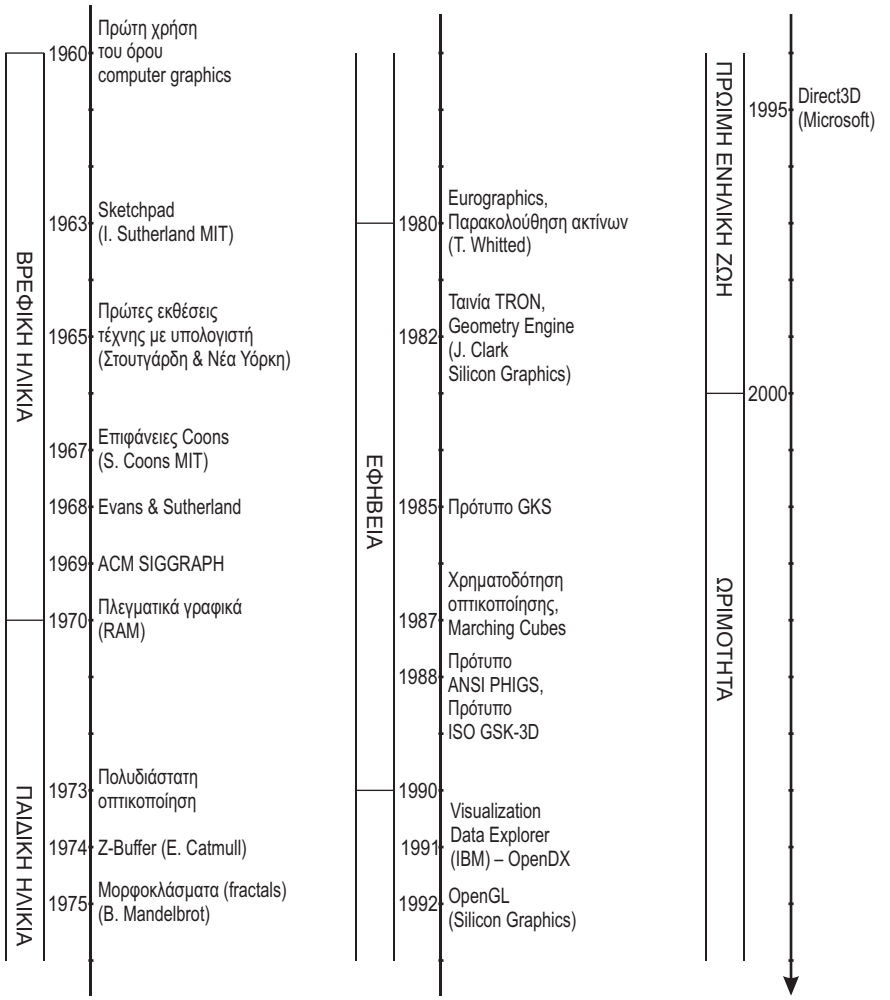
Από τις πέντε αισθήσεις μας, η όρασή μας είναι αυτή που προσπαθούμε να ικανοποιήσουμε τις περισσότερες φορές. Το σπίτι στο οποίο ζούμε, το αυτοκίνητο που οδηγούμε, ακόμη και τα ρούχα που φοράμε, επιλέγονται συχνά με βάση την οπτική τους ποιότητα. Αυτό δεν αποτελεί σύμπτωση, καθώς η όραση είναι η αίσθηση με τη μεγαλύτερη δυνατότητα μεταφοράς πληροφορίας και έτσι μας παρέχει γρηγορότερη προειδοποίηση για επικείμενους κινδύνους, ή για εκμεταλλεύσιμες ευκαιρίες, συγκριτικά με οποιαδήποτε άλλη αίσθηση.

Αυτή η ενότητα παρουσιάζει μία επισκόπηση των ορόσημων στην ιστορία των γραφικών με υπολογιστή και της οπτικοποίησης, τα οποία αποτυπώνονται επίσης στο Σχήμα 1.1. Πολλές από τις έννοιες που εμφανίζονται για πρώτη φορά εδώ θα αναπτυχθούν σε επόμενες ενότητες αυτού του κεφαλαίου.

1.1.1 Νηπιακή ηλικία

Η οπτική παρουσίαση χρησιμοποιείται εδώ και αιώνες για την παροχή πληροφορίας, καθώς οι εικόνες είναι κατανοητές πολύ εύκολα από τους ανθρώπους — μία εικόνα αξίζει χίλιες λέξεις, όπως πολλοί λένε. Η ιστορία μας ξεκινά όταν ο ψηφιακός υπολογιστής πρωτοχρησιμοποιήθηκε για την παροχή οπτικής πληροφορίας. Ο όρος *γραφικά υπολογιστή* (*computer graphics*) γεννήθηκε γύρω στο 1960 για να περιγράψει την εργασία των ερευνητών που προσπαθούσαν να δημιουργήσουν διανυσματικές εικόνες χρησιμοποιώντας έναν ψηφιακό υπολογιστή. Η πρωτοποριακή εργασία του Ivan Sutherland, το σύστημα Sketchpad [Suth63] που δημιουργήθηκε στο MIT το 1963, αποτελούσε μία προσπάθεια για τη δημιουργία μίας αποτελεσματικής αμφίδρομης διεπαφής μεταξύ ανθρώπου και υπολογιστή. Έθεσε τη βάση για έναν αριθμό σημαντικών εννοιών που όρισαν το πεδίο αυτό, όπως:

- οι ιεραρχικές λίστες απεικόνισης,
- η διάκριση μεταξύ του χώρου των αντικειμένων και του χώρου της εικόνας,
- τα διαδραστικά γραφικά χρησιμοποιώντας φωτεινή γραφίδα (light pen).



Σχήμα 1.1: *Ορόσημα στην ιστορία των γραφικών και της οπτικοποίησης.*

Εκείνη την εποχή χρησιμοποιούνταν *διανυσματικές οθόνες*, οι οποίες απεικόνιζαν τυχόντα διανύσματα από μία *λίστα απεικόνισης* (*display list*), μία ακολουθία στοιχειωδών εντολών σχεδίασης. Το μήκος της λίστας απεικόνισης περιοριζόταν από τις απαιτήσεις ρυθμού ανανέωσης της τεχνολογίας απεικόνισης (βλ. Ενότητα 1.6.1).

Καθώς αυξανόταν το ενδιαφέρον για συνθετικές εικόνες, οι δύο πρώτες εκθέσεις *τέχνης με υπολογιστή* πραγματοποιήθηκαν το 1965 στη Στουτγάρδη και στη Νέα Υόρκη.

Το 1967 γεννήθηκε μία σημαντική έννοια μοντελοποίησης, η οποία θα έφερνε επανάσταση στη γεωμετρική σχεδίαση με υπολογιστή (computer-aided geometric design – CAGD). Οι *επιφάνειες Coons* [Coon67], οι οποίες αναπτύχθηκαν από τον Steven Coons του MIT, επέτρεπαν την κατασκευή σύνθετων επιφανειών από στοιχειώδη τμή-

ματα που μπορούσαν να συνδεθούν μεταξύ τους, παρέχοντας περιορισμούς συνέχειας στα σύνορά τους. Οι επιφάνειες Coons ήταν ο πρόδρομος των επιφανειών Bézier και B-spline που χρησιμοποιούνται σήμερα ευρέως στη γεωμετρική σχεδίαση με υπολογιστή.

Περίπου εκείνη την εποχή σχηματίστηκαν και οι πρώτες εταιρείες με αντικείμενο σχετικό με τα γραφικά με υπολογιστή. Σημειώνουμε ιδιαίτερα την Evans & Sutherland, η οποία ιδρύθηκε το 1968 και από τότε έχει επιτελέσει πολλές πρωτοποριακές συνεισφορές στα γραφικά και στην οπτικοποίηση.

Καθώς το ενδιαφέρον για το νέο πεδίο αυξανόταν στην ερευνητική κοινότητα, ιδρύεται το 1969 το σημαντικό συνέδριο ACM SIGGRAPH.

1.1.2 Παιδική ηλικία

Η εισαγωγή της — βασισμένης σε ημιαγωγούς — μνήμης τυχαίας προσπέλασης (RAM) γύρω στο 1970 επέτρεψε την κατασκευή των πρώτων *καταχωρητών πλαισίου εικόνας* (βλ. Ενότητα 1.5.2). Γεννήθηκαν έτσι οι *πλεγματικές οθόνες* και στη συνέχεια, τα *πλεγματικά γραφικά*. Ο καταχωρητής πλαισίου διαχώρισε τη δημιουργία μίας εικόνας από την ανανέωση της συσκευής απεικόνισης και επέτρεψε έτσι την παραγωγή πολύπλοκων συνθετικών εικόνων, όπως και επιφανειών γεμισμένων με χρώμα, η οποία δεν ήταν προηγουμένως εφικτή σε διανυσματικές οθόνες. Αυτή η εξέλιξη πυροδότησε το ενδιαφέρον για *φωτορεαλιστικούς αλγορίθμους*, οι οποίοι μπορούσαν να προσομοιώσουν την πραγματική εμφάνιση αντικειμένων, μία ερευνητική περιοχή η οποία παραμένει ενεργή από τότε.

Το 1973 έγινε μία πρώτη προσπάθεια για την οπτικοποίηση πολυδιάστατων συνόλων δεδομένων, τα οποία είναι δύσκολο να αντιληφθούμε, καθώς ο εγκέφαλός μας δεν είναι συνηθισμένος να αντιμετωπίζει περισσότερες από τρεις διαστάσεις. Ο Chernoff [Cher73] αντιστοίχισε διαστάσεις των δεδομένων σε χαρακτηριστικά του ανθρώπινου προσώπου, όπως το μήκος της μύτης ή η καμπυλότητα του στόματος, βασιζόμενος στην έμφυτη ικανότητα των ανθρώπων να «διαβάζουν» αποτελεσματικά ανθρώπινα πρόσωπα.

Ο Edward Catmull εισήγαγε τον *καταχωρητή βάθους* (*Z-buffer*) (βλ. Ενότητα 1.5.3) το 1974, ο οποίος θα έφερνε επανάσταση στην απομάκρυνση κρυμμένων επιφανειών κατά την κατασκευή συνθετικών εικόνων και θα γινόταν καθιερωμένο τμήμα των επιταχυντών γραφικών που χρησιμοποιούνται σήμερα πρακτικά σε όλους τους προσωπικούς υπολογιστές.

Το 1975, ο Benoit Mandelbrot [Mand75] εισήγαγε τα *μορφοκλάσματα* (*fractals*), τα οποία είναι αντικείμενα μη ακέραιας διάστασης που διαθέτουν αυτο-ομοιότητα σε διάφορες κλίμακες. Τα μορφοκλάσματα χρησιμοποιήθηκαν αργότερα για τη μοντελοποίηση φυσικών αντικειμένων και μοτίβων όπως δένδρα, φύλλα, ακτογραμμές και πολύ συχνά σε επιδείξεις οπτικοποιήσεων.

1.1.3 Εφηβεία

Στην Ευρώπη, το αυξανόμενο ενδιαφέρον για τα γραφικά με υπολογιστή οδήγησε στην ίδρυση της επιστημονικής εταιρείας Eurographics το 1980. Την ίδια χρονιά η πρωτότυπη εργασία [Whit80] του Turner Whitted έθεσε τη βάση για την παρακολούθηση ακτίνων. Η παρακολούθηση ακτίνων είναι μία κομψή τεχνική σύνθεσης εικόνας που ολοκληρώνει, στον ίδιο αλγόριθμο, την οπτικοποίηση επιφανειών ταξινομημένων σωστά ως προς το βάθος με περίπλοκα φαινόμενα φωτισμού όπως ανακλάσεις, διαθλάσεις και σκιές (βλ. Κεφάλαιο 15).

Το 1982 κυκλοφόρησε το *TRON*, η πρώτη ταινία που περιλάμβανε εκτεταμένη χρήση συνθετικών εικόνων. Την ίδια χρονιά, ο James Clark εισήγαγε την Geometry Engine [Clar82], μία ακολουθία μονάδων υλικού που αναλάμβανε τα γεωμετρικά στάδια της σωλήνωσης γραφικών (βλ. Ενότητα 1.4), επιταχύνοντας έτσι την εκτέλεσή τους και απελευθερώνοντας τον κεντρικό επεξεργαστή από το αντίστοιχο φορτίο. Αυτό οδήγησε στην ίδρυση μίας καινοτόμου εταιρείας, της Silicon Graphics (SGI), η οποία έγινε γνωστή για το επαναστατικό υλικό σύνθεσης εικόνων που κατασκεύασε καθώς και για τη βιβλιοθήκη IrisGL, πρόδρομο του προτύπου προγραμματισμού γραφικών OpenGL. Ανάλογες μονάδες υλικού χρησιμοποιούνται πλέον σε όλους τους επιταχυντές γραφικών.

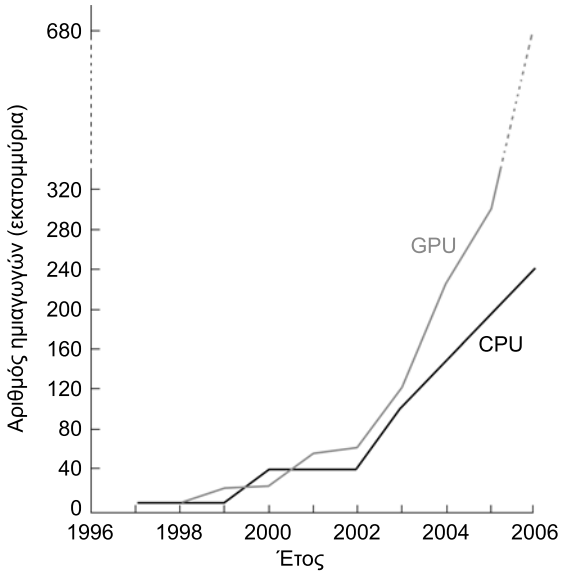
Η εξάπλωση της χρήσης της τεχνολογίας των γραφικών απαιτούσε την καθιέρωση προτύπων. Το πρώτο αξιοσημείωτο τέτοιο πρότυπο, το GKS (Graphical Kernel System), εμφανίστηκε το 1975. Επρόκειτο για ένα διδιάστατο πρότυπο που όπως ήταν αναμενόμενο, ακολουθήθηκε από τα τριδιάστατα πρότυπα ANSI PHIGS και ISO GKS-3D· και τα δύο το 1988.

Το 1987 ήταν ένα έτος ορόσημο για την οπτικοποίηση. Μια αναφορά από το Εθνικό Ίδρυμα Επιστημών των Η.Π.Α. έθεσε τη βάση για την αναγνώριση και τη χρηματοδότηση του πεδίου. Την ίδια χρονιά εμφανίστηκε ένας κλασικός αλγόριθμος οπτικοποίησης, ο *marching cubes* [Lore87], ο οποίος έλυσε το πρόβλημα της οπτικοποίησης ανεπεξέργαστων τριδιάστατων δεδομένων μετατρέποντάς τα σε μοντέλα επιφανειών. Το 1987 ήταν επίσης σημαντικό για τη βιομηχανία των γραφικών, καθώς καθιερωμένες εταιρείες κατέρρευσαν και νέες εμφανίστηκαν.

Αυτή την περίοδο έγιναν ευρέως διαθέσιμοι διδιάστατοι επιταχυντές γραφικών (βλ. Ενότητα 1.6.1).

1.1.4 Πρώιμη ενήλικη ζωή

Κατά τη δεκαετία του 1990 εμφανίστηκαν προϊόντα που θα ενίσχυαν σημαντικά την εφαρμογή των γραφικών και της οπτικοποίησης. Η IBM εισήγαγε τον Visualization Data Explorer το 1991, ο οποίος ήταν παρόμοιος σε σύλληψη με το Application Visualization System (AVS) [Upso89] που είχε αναπτυχθεί από μία ομάδα εταιρειών κατά τα τέλη της δεκαετίας του 1980. Ο Visualization Data Explorer μετεξελίχθηκε σε ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο ανοικτό σύστημα οπτικοποίησης με την ονομασία OpenDX [Open07a]. Τα συστήματα OpenDX και AVS επέτρεπαν σε μη προγραμματιστές να συνθέσουν προκαθορισμένες μονάδες λογισμικού για την εισαγωγή, μετατρο-



Σχήμα 1.2: *Η άνοδος των επιταχυντών γραφικών: η μαύρη γραμμή δείχνει τον αριθμό ημιαγωγών που περιέχονται σε κεντρικούς επεξεργαστές (CPU) ενώ η γκρίζα γραμμή δείχνει τον αριθμό ημιαγωγών σε επιταχυντές γραφικών (GPU).*

πή και απεικόνιση — στατική ή κινούμενη — δεδομένων σε ένα επαναχρησιμοποιούμενο δίκτυο ροής δεδομένων, ενώ προγραμματιστές μπορούσαν να γράψουν τις δικές τους επαναχρησιμοποιήσιμες μονάδες.

Επίσης εμφανίστηκαν de facto πρότυπα γραφικών με τη μορφή διεπαφών προγραμματισμού (Application programming interfaces – APIs). Η SGI εισήγαγε την OpenGL [Open07b] το 1992 και η Microsoft ανέπτυξε το Direct3D το 1995. Και τα δύο πρότυπα έγιναν πολύ δημοφιλή για τον προγραμματισμό γραφικών.

Κατά τα μέσα της δεκαετίας του 1990 εισήχθησαν μαζικά στην αγορά οι τριδιάστατοι επιταχυντές γραφικών.

1.1.5 Ωριμότητα

Στη νέα χιλιετία, ο ρυθμός ανάπτυξης των επιταχυντών γραφικών ξεπέρασε κατά πολύ αυτόν των κεντρικών επεξεργαστών (βλ. Σχήμα 1.2). Ωθούμενοι από τις αυξανόμενες ανάγκες της αγοράς παιχνιδιών στον υπολογιστή, οι επιταχυντές γραφικών συνεχώς προικίζονταν με νέες δυνατότητες και γίνονταν πιο προσιτοί.

Αυτή την περίοδο, οι επιταχυντές τριδιάστατων γραφικών καθιερώνονται ως ένα αναπόσπαστο τμήμα κάθε προσωπικού υπολογιστή. Πολλές δημοφιλείς εφαρμογές λογισμικού τους απαιτούν. Οι ικανότητες των επιταχυντών γραφικών ενισχύθηκαν ενώ έφθινε η έννοια του εξειδικευμένου σταθμού εργασίας για γραφικά. Η δυνατότητα παραγωγής υψηλού επιπέδου συνθετικής εικόνας για τα γραφικά και την οπτικοποίηση είναι πλέον διαθέσιμη σε όλους.

1.2 Εφαρμογές

Τα όρια μεταξύ εφαρμογών των γραφικών και εφαρμογών της οπτικοποίησης τείνουν να είναι δυσδιάκριτα. Τα πεδία εφαρμογών αλληλοκαλύπτονται, και είναι τόσο πολυπληθή που θα ήταν αδύνατο να δοθεί ένας εξαντλητικός κατάλογος. Μία επιλογή από σημαντικές εφαρμογές είναι η εξής:

Ειδικά εφέ για ταινίες και διαφημίσεις. Αν και δεν φαίνεται να υπάρχει σύνδεση μεταξύ της χρήσης ειδικών εφέ και της εισπρακτικής επιτυχίας, τα ειδικά εφέ είναι αναπόσπαστο τμήμα της τρέχουσας παραγωγής ταινιών και διαφημίσεων. Η ικανότητα παρουσίασης του αδύνατου ή του ανύπαρκτου είναι τόσο διεγερτική που, αν χρησιμοποιηθεί προσεκτικά, δύναται να παράγει πολύ ελκυστικά αποτελέσματα. Έχουν επίσης εμφανιστεί ταινίες που δημιουργήθηκαν εξ ολοκλήρου με συνθετικές εικόνες, οι περισσότερες των οποίων αποδείχθηκαν πολύ επιτυχημένες.

Επιστημονική εξερεύνηση μέσω οπτικοποίησης. Η διερεύνηση των σχέσεων μεταξύ μεταβλητών ενός πολυδιάστατου συνόλου δεδομένων υποβοηθείται σημαντικά από την οπτικοποίηση. Τέτοια σύνολα δεδομένων προκύπτουν είτε από προσομοιώσεις είτε από πειράματα ή μετρήσεις. Μπορεί να προέρχονται από διάφορα πεδία, όπως ιατρική, γεωλογία και ωκεανολογία, φυσικές επιστήμες, οικονομικά, ακόμα και την ίδια την πληροφορική. Λεπτομερέστερη περιγραφή γίνεται στο Κεφάλαιο 10.

Διαδραστική προσομοίωση. Η άμεση διάδραση με τον άνθρωπο επιβάλλει επαχθείς απαιτήσεις επιδόσεων σε ένα ολοκληρωμένο σύστημα προσομοίωσης–οπτικοποίησης. Εφαρμογές όπως η προσομοίωση πτήσης και η εικονική πραγματικότητα απαιτούν αποδοτικούς αλγόριθμους και υλικό υψηλών επιδόσεων έτσι ώστε να επιτύχουν τον αναγκαίο ρυθμό διάδρασης και, συγχρόνως, να προσφέρουν την απαραίτητη αληθοφάνεια.

Παιχνίδια με υπολογιστή. Αρχικά μία υποτιμημένη περιοχή, τα παιχνίδια με υπολογιστή είναι πλέον η μεγαλύτερη βιομηχανία στο πεδίο των γραφικών. Έχουν επηρεάσει σε σημαντικό βαθμό την ανάπτυξη επιταχυντών γραφικών και αποδοτικών αλγορίθμων, οι οποίοι προσέφεραν στους χρήστες τη δυνατότητα παραγωγής ρεαλιστικής συνθετικής εικόνας με χαμηλό κόστος.

Γεωμετρική σχεδίαση με υπολογιστή και στερεά μοντελοποίηση. Χάρη στη γεωμετρική σχεδίαση με υπολογιστή και τη στερεά μοντελοποίηση, οι οποίες επιτρέπουν την εκκίνηση των κύκλων σχεδίασης πολύ πριν την κατασκευή του πρώτου πρωτοτύπου, έχει γίνει επανάσταση στη σχεδίαση πραγματικών προϊόντων. Τα συστήματα σχεδίασης, επεξεργασίας και μηχανολογίας με υπολογιστή (computer-aided design, manufacturing, engineering – CAD, CAM, CAE) χρησιμοποιούνται ευρέως στη βιομηχανία. Μεγάλες εταιρείες λογισμικού έχουν αναπτύξει και υποστηρίζουν αυτά τα πολύπλοκα υπολογιστικά συστήματα. Σχέδια (π.χ.

αεροπλάνων, αυτοκινήτων, πλοίων ή κτηρίων) μπορούν να αναπτυχθούν και να δοκιμαστούν σε προσομοίωση, να απεικονιστούν ρεαλιστικά και να επιδειχθούν σε πιθανούς πελάτες. Έτσι, η διαδικασία σχεδίασης έγινε πιο αποτελεσματική, πιο αποδοτική και πιο οικονομική.

Γραφικές διεπαφές. Οι γραφικές διεπαφές (graphical user interfaces – GUIs) συσχετίζουν αφηρημένες έννοιες, μη φυσικές οντότητες και διαδικασίες, με οπτικά αντικείμενα. Έτσι, οι νέοι χρήστες τείνουν να εξοικειώνονται γρηγορότερα με τις γραφικές διεπαφές από ότι με τις διεπαφές κειμένου· κάτι που εξηγεί την επιτυχία των γραφικών διεπαφών.

Τέχνη με υπολογιστή. Αν και οι πρώτες εκθέσεις τέχνης με υπολογιστή είχαν διοργανωθεί από επιστήμονες και οι συμμετοχές ήταν επίσης επιστήμονες, η τέχνη με υπολογιστή έχει πλέον κερδίσει την αναγνώριση της καλλιτεχνικής κοινότητας. Τα τριδιάστατα γραφικά θεωρούνται από τους καλλιτέχνες ένα εργαλείο και παράλληλα ένα αυτόνομο μέσο καλλιτεχνικής έκφρασης.

1.3 Έννοιες

Τα *γραφικά υπολογιστή* αξιοποιούν τις μεγάλες δυνατότητες μεταφοράς πληροφορίας του ανθρώπινου οπτικού καναλιού με την ψηφιακή σύνθεση και επεξεργασία οπτικού περιεχομένου· με αυτό τον τρόπο μπορούν να μεταφέρουν πληροφορία στους ανθρώπους με υψηλό ρυθμό.

Ένα σύνολο από στοιχειώδη αντικείμενα σχεδίασης, συνδυασμένα με συγκεκριμένους κανόνες και λειτουργίες χειρισμού ώστε να κατασκευαστούν ολοκληρωμένες οντότητες, αποτελεί μία τριδιάστατη *σκηνή* ή ένα διδιάστατο σχέδιο. Η σκηνή αποτελείται συνήθως από πολλά στοιχειώδη *μοντέλα* ανεξάρτητων αντικειμένων, τα οποία συλλέγονται από διάφορες πηγές. Τα βασικά δομικά στοιχεία των μοντέλων είναι *στοιχειώδη σχήματα* (primitives), τα οποία στην ουσία είναι μαθηματικές αναπαραστάσεις απλών σχημάτων όπως σημεία στο χώρο, ευθείες, καμπύλες, πολύγωνα, μαθηματικά στερεά, ή συναρτήσεις.

Συνήθως μία σκηνή ή ένα σχέδιο χρειάζεται να μετατραπεί σε μία μορφή κατάλληλη για ψηφιακή έξοδο σε ένα μέσο όπως μία οθόνη υπολογιστή ή ένας εκτυπωτής. Η πλειοψηφία των συσκευών οπτικής εξόδου μπορεί να διαβάσει, να ερμηνεύσει, και να παραγάγει έξοδο χρησιμοποιώντας ως είσοδο μία ψηφιογραφική εικόνα. Μία *ψηφιογραφική εικόνα* (raster image) είναι ένας διδιάστατος πίνακας διακριτών στοιχείων εικόνας (*εικονοστοιχείων* (picture elements – pixels)) που αναπαριστούν δείγματα αποχρώσεων.

Τα γραφικά υπολογιστή περιλαμβάνουν *αλγορίθμους* που παράγουν, από μία σκηνή ή ένα σχέδιο, μία ψηφιογραφική εικόνα που μπορεί να εμφανιστεί σε μία συσκευή απεικόνισης.[1] Αυτοί οι αλγόριθμοι βασίζονται σε *αρχές* από διάφορα πεδία που περιλαμβάνουν τη γεωμετρία, τα μαθηματικά, τη φυσική και τη φυσιολογία. Τα γραφικά

[1] Η διαδικασία είναι γνωστή στα αγγλικά ως *rendering*.

υπολογιστή είναι ένα πολύ ευρύ πεδίο και δεν θα μπορούσαν να καλυφθούν στο σύνολό τους από ένα μόνο σύγγραμμα.

Ο σκοπός της *οπτικοποίησης* είναι να εκμεταλλευτεί την οπτική παρουσίαση, ώστε να αυξήσει την κατανόηση από τον άνθρωπο μεγάλων συνόλων δεδομένων και των υποκείμενων φυσικών φαινομένων ή υπολογιστικών διαδικασιών. Αλγόριθμοι οπτικοποίησης εφαρμόζονται σε μεγάλα σύνολα δεδομένων και παράγουν ένα *αντικείμενο οπτικοποίησης*, το οποίο συνήθως είναι μία επιφάνεια ή ένα στερεό μοντέλο (βλέπε παρακάτω). Αλγόριθμοι γραφικών χρησιμοποιούνται στη συνέχεια για τον χειρισμό και την εμφάνιση αυτού του μοντέλου, υποβοηθώντας την κατανόηση του αρχικού συνόλου δεδομένων. Με τον τρόπο αυτό μπορούν να *ανακαλυφθούν* σχέσεις μεταξύ μεταβλητών και κατόπιν να επαληθευτούν πειραματικά ή να αποδειχθούν θεωρητικά. Σε ένα υψηλό επίπεδο αφαίρεσης, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η οπτικοποίηση είναι μια συνάρτηση που μετατρέπει ένα σύνολο δεδομένων σε ένα μοντέλο που μπορεί να απεικονιστεί:

$$\text{μοντέλο} = \text{οπτικοποίηση}\,(\text{σύνολο δεδομένων}).$$

Βασική — τόσο στα γραφικά όσο και στην οπτικοποίηση — είναι η έννοια της *μοντελοποίησης*, η οποία περιλαμβάνει τεχνικές για την αναπαράσταση των γραφικών αντικειμένων (βλ. Κεφάλαια 6, 7 και 8). Οι τεχνικές αυτές περιλαμβάνουν μοντέλα επιφανειών, όπως τα κοινά πολυγωνικά μοντέλα επιφανειών, τις καμπύλες πολυωνυμικές επιφάνειες και τις κομψές επιφάνειες υποδιαίρεσης, αλλά επίσης και μοντέλα στερεών. Εφόσον, σε μη διαφανή αντικείμενα, μπορούμε να δούμε μόνο το εξωτερικό τους, τα μοντέλα επιφανειών είναι τα πιο κοινά, καθώς μας απαλλάσσουν από την αποθήκευση και τον χειρισμό του εσωτερικού του αντικειμένου.

Τα γραφικά περιλαμβάνουν την έννοια της *σωλήνωσης γραφικών* (graphics pipeline), η οποία είναι μια ακολουθία σταδίων που δημιουργεί μία ψηφιακή εικόνα, ξεκινώντας από ένα μοντέλο ή μία σκηνή:

$$\text{εικόνα} = \text{σωλήνωση γραφικών}\,(\text{μοντέλο}).$$

Ο όρος *σωλήνωση γραφικών* αναφέρεται στη συνήθη ακολουθία βημάτων που χρησιμοποιείται για την παραγωγή μίας ψηφιακής εικόνας από γεωμετρικά δεδομένα. Αυτή η ακολουθία, δε λαμβάνει υπόψη την αλληλεπίδραση του φωτός μεταξύ αντικειμένων της σκηνής και διαφοροποιείται ως προς αυτό το σημείο από προσεγγίσεις όπως η παρακολούθηση ακτίνων και ο ολικός φωτισμός (βλ. Κεφάλαια 15 και 16). Αυτή η προσέγγιση στην παραγωγή εικόνας αναφέρεται συχνά ως *άμεση δημιουργία εικόνας* ή *άμεση σχεδίαση* (direct rendering).

1.4 Σωλήνωση γραφικών

Ένα γραμμικό σχέδιο, μία μαθηματική έκφραση στον χώρο ή μία τριδιάστατη σκηνή, πρέπει να μετατραπούν σε τιμές αποχρώσεων[2] σ' έναν καταχωρητή γραφικών (βλ.

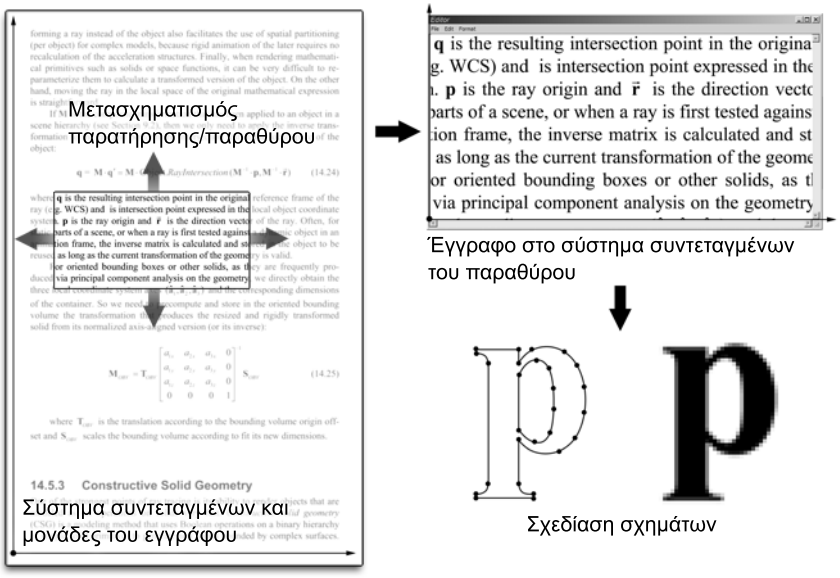
[2] Η διαδικασία είναι γνωστή στα αγγλικά ως *rasterization*.

Κεφάλαια 2 και 5) και κατόπιν να προωθηθούν για έξοδο σε μία κατάλληλη συσκευή, σ' ένα αρχείο, ή να χρησιμοποιηθούν για την παραγωγή άλλου περιεχομένου. Για να γίνει καλύτερα κατανοητή η αναγκαιότητα της ακολουθίας των λειτουργιών που εφαρμόζονται στα δεδομένα των γραφικών πρέπει να εξετάσουμε πώς αυτά ορίζονται και τι αντιπροσωπεύουν.

Από την οπτική γωνία του σχεδιαστή, αυτά τα σχήματα εκφράζονται ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων που ορίζει ένα χώρο μοντελοποίησης (ή ένα «καμβά σχεδίασης» στην περίπτωση των 2Δ γραφικών) χρησιμοποιώντας ένα σύστημα μονάδων που ορίζει ο χρήστης. Μπορούμε να σκεφτούμε αυτό τον χώρο ως την επιφάνεια εργασίας του πάγκου στο εργαστήριο ενός ξυλουργού. Ένα ή περισσότερα αντικείμενα δημιουργούνται συνδυάζοντας διάφορα κομμάτια και δίνοντάς τους μορφή με εργαλεία. Τα διάφορα στοιχεία τοποθετούνται στις κατάλληλες θέσεις και στάσεις, και διαμορφώνονται, λυγίζουν ή ομαδοποιούνται προκειμένου να σχηματίσουν τμήματα των αντικειμένων του τελικού έργου (ανατρέξτε στο Κεφάλαιο 9 σχετικά με ομαδοποιήσεις αντικειμένων). Τα κομμάτια αποτελούνται από διαφορετικά υλικά, χάρη στα οποία το αποτέλεσμα έχει την επιθυμητή όψη όταν φωτιστεί κατάλληλα. Για να απαθανατίσει ένα στιγμιότυπο του τελικού έργου, ο καλλιτέχνης θα απομακρύνει από την επιφάνεια τα ανεπιθύμητα αντικείμενα, θα τοποθετήσει ένα ζωγραφισμένο χαρτόνι ως υπόβαθρο πίσω από την τελική διάταξη των αντικειμένων, θα ανάψει και θα ρυθμίσει τα φώτα που θα φωτίσουν κατάλληλα την επιφάνεια εργασίας, και, τέλος, θα βρει ένα καλό σημείο από το οποίο θα τραβήξει μία ψηφιακή φωτογραφία της σκηνής. Σημειώνεται ότι το τελικό αποτέλεσμα είναι μία ψηφιακή εικόνα, η οποία ορίζει έναν *χώρο εικόνας* ο οποίος αποτελείται από εικονοστοιχεία και μετριέται με βάση αυτά. Από την άλλη μεριά, τα αντικείμενα που απεικονίζονται μοντελοποιούνται αρχικά σε έναν τριδιάστατο *χώρο αντικειμένων* και έχουν αντικειμενικές διαστάσεις. Η κάμερα μπορεί να κινηθεί μέσα στο δωμάτιο ώστε να επιλεγεί η κατάλληλη οπτική γωνία, και να αλλάξει παράγοντα μεγέθυνσης ώστε να συλλάβει το θέμα με μεγαλύτερη ή μικρότερη λεπτομέρεια.

Για σχέδια στις δύο διαστάσεις, οι έννοιες είναι παρόμοιες. Ας σκεφτούμε έναν καμβά στον οποίο κείμενο, γραμμικά σχέδια και άλλα σχήματα, τοποθετούνται σε συγκεκριμένες θέσεις, μετακινώντας τα πάνω σε ένα επίπεδο ή ζωγραφίζοντας απευθείας πάνω στον καμβά. Τα πάντα εκφράζονται στο σύστημα συντεταγμένων του καμβά, πιθανώς σε πραγματικές μονάδες. Κατόπιν, αυτό το μαθηματικά ορισμένο έγγραφο πρέπει να απεικονιστεί σε ένα παράθυρο, για παράδειγμα σε μία εφαρμογή επεξεργασίας κειμένου ή ψηφιακής στοιχειοθεσίας. Αυτό που ορίζουμε είναι ένα εικονικό παράθυρο στον πιθανώς άπειρο χώρο του καμβά του εγγράφου. Στη συνέχεια, «συλλαμβάνουμε» τα περιεχόμενα του παραθύρου σε έναν καταχωρητή εικόνας, μετατρέποντας τις μαθηματικές αναπαραστάσεις που είναι ορατές μέσα στο παράθυρο σε εντάσεις εικονοστοιχείων (Σχήμα 1.3).

Σκεπτόμενοι με όρους μίας υπολογιστικής διαδικασίας παραγωγής εικόνας, τα αντικείμενα εκφράζονται αρχικά σ' ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων. Χειριζόμαστε τα αντικείμενα ώστε να σχηματίσουμε τη σκηνή εφαρμόζοντας διάφορες λειτουργίες που τα παραμορφώνουν ή τα μετασχηματίζουν γεωμετρικά στο διδιάστατο ή στον τριδιάστατο χώρο. *Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί* χρησιμοποιούνται επίσης για να εκ-

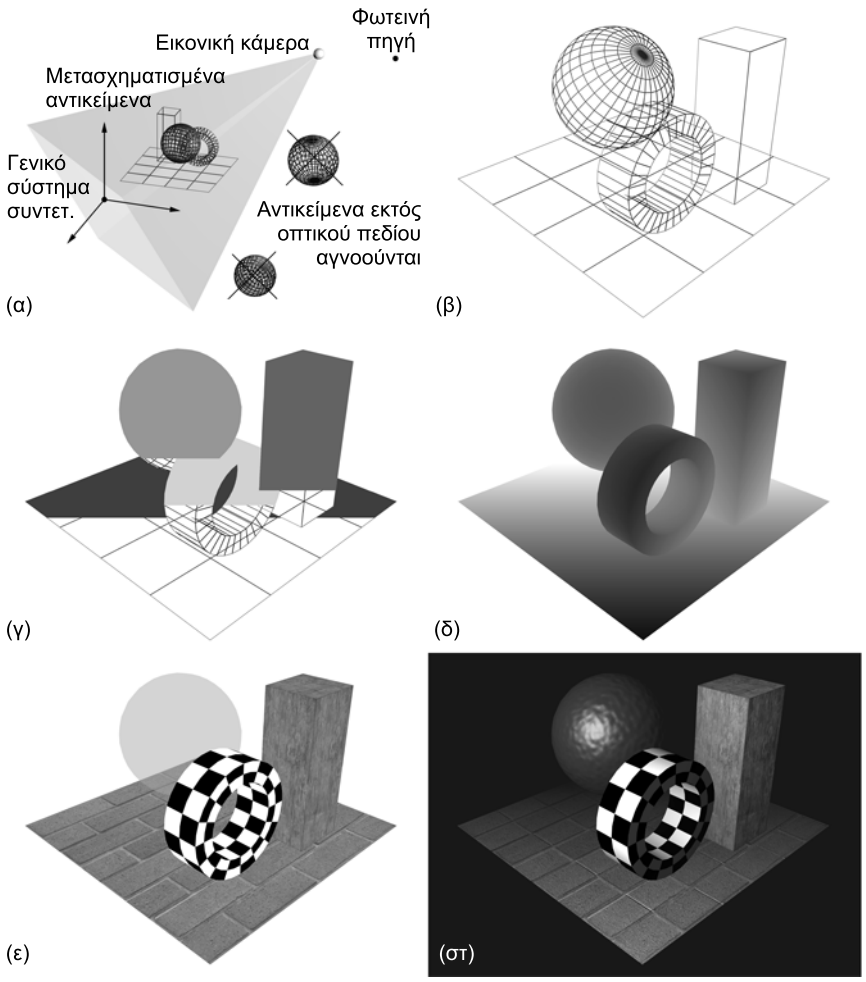


Σχήμα 1.3: *Βήματα σχεδίασης για ένα διδιάστατο έγγραφο.*

φραστούν όλα τα μοντέλα των αντικειμένων της σκηνής σε ένα κοινό σύστημα συντεταγμένων (Σχήμα 1.4(α) και Κεφάλαιο 3).

Τώρα, πρέπει να ορίσουμε τις παραμέτρους παρατήρησης μίας εικονικής κάμερας ή παραθύρου, μέσω του οποίου συλλαμβάνουμε την τριδιάστατη σκηνή ή σχεδιάζουμε την διδιάστατη γεωμετρία. Αυτό που ορίζουμε, είναι ένας μετασχηματισμός παρατήρησης και μία προβολή που απεικονίζει ό,τι είναι ορατό μέσω της εικονικής κάμερας σε μία επίπεδη περιοχή, η οποία αντιστοιχεί στην εμφανιζόμενη εικόνα (βλ. Κεφάλαιο 4). Ο *μετασχηματισμός παρατήρησης* εκφράζει τα αντικείμενα ως προς το σύστημα συντεταγμένων του παρατηρητή, καθώς μ' αυτό τον τρόπο απλοποιούνται σημαντικά οι διαδικασίες επεξεργασίας που ακολουθούν. Η *προβολή* μετατρέπει τα αντικείμενα στο χώρο προβολής της κάμερας. Με απλά λόγια, μετά από αυτό το βήμα η σκηνή μετασχηματίζεται ώστε να αντανακλά τον τρόπο με τον οποίο θα την αντιλαμβανόμασταν μέσω της εικονικής κάμερας. Για παράδειγμα, αν χρησιμοποιείται προοπτική προβολή (μοντέλο σημειακής κάμερας), τότε τα απομακρυσμένα αντικείμενα φαίνονται μικρότερα (προοπτική σμίκρυνση, βλ. Σχήμα 1.4(β)).

Η αποδοτικότητα είναι πολύ σημαντική στα γραφικά, ιδιαίτερα όταν υπάρχει άμεση διάδραση με τον χρήστη. Καθώς ένα μεγάλο ποσοστό από τα στοιχειώδη αντικείμενα που απαρτίζουν τη σκηνή είναι, στη γενική περίπτωση, μη ορατά από ένα συγκεκριμένο σημείο παρατήρησης, είναι ανώφελο να σχεδιάζονται καθώς δεν πρόκειται να φαίνονται στην τελική εικόνα. Η διαδικασία αφαίρεσης τέτοιων τμημάτων της σκηνής αναφέρεται ως *περικοπή*. Έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές περικοπής ώστε να αφαιρούνται όσο το δυνατόν περισσότερα τέτοια στοιχειώδη αντικείμενα, όσο το δυνατόν νωρίτερα στη σωλήνωση γραφικών. Αυτές οι τεχνικές περιλαμβάνουν



Σχήμα 1.4: *Λειτουργίες πάνω σε στοιχειώδη αντικείμενα κατά τη συνήθη σωλήνωση γραφικών άμεσης σχεδίασης. (α) Μετασχηματισμός της γεωμετρίας σ' ένα κοινό σύστημα συντεταγμένων και περικοπή στο οπτικό πεδίο. (β) Τα στοιχειώδη αντικείμενα μετά τον μετασχηματισμό παρατήρησης, την προβολή και την περικοπή πίσω όψεων. (γ) Σχεδίαση και (δ) ταξινόμηση κατά βάθος των τεμαχίων: όσο πιο σκοτεινή η απόχρωση, τόσο πιο κοντά στην εικονική κάμερα είναι το αντίστοιχο σημείο. (ε) Εκτίμηση χρώματος υλικών. (στ) Φωτοσκίαση και άλλες λειτουργίες (όπως ομίχλη).*

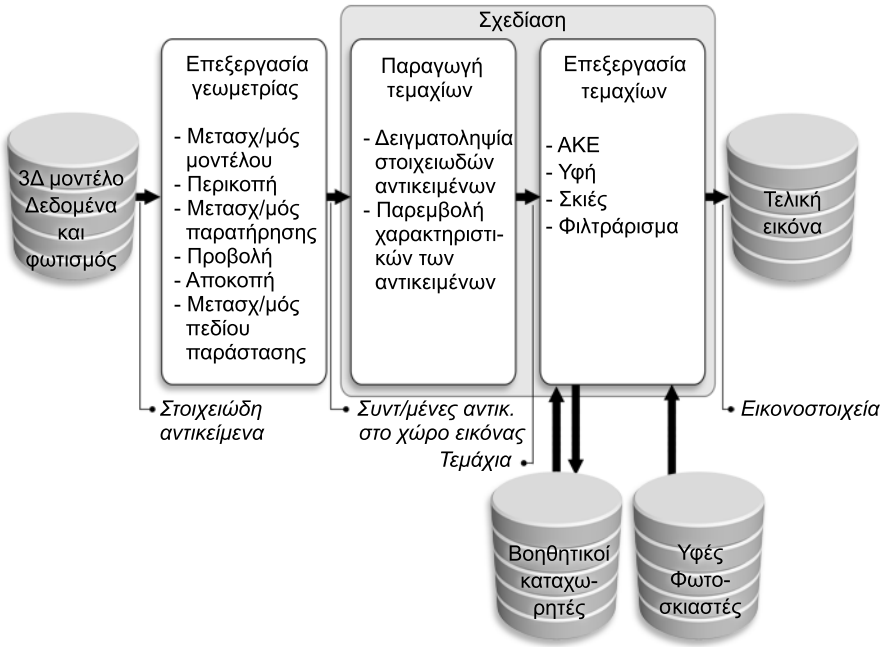
την περικοπή πίσω όψεων, την περικοπή ως προς το οπτικό πεδίο και την περικοπή παρεμποδιζομένων (βλ. Κεφάλαιο 5). Οι περισσότερες λειτουργίες περικοπής συνήθως πραγματοποιούνται μετά τον μετασχηματισμό παρατήρησης και πριν την προβολή.

Μετά την προβολή τους, τα στοιχειώδη αντικείμενα αποκόπτονται πάνω στα όρια του οπτικού πεδίου της εικονικής κάμερας και όλα τα ορατά τμήματα τελικά σχεδιάζονται. Στο στάδιο σχεδίασης, κάθε στοιχειώδες αντικείμενο δειγματοληπτείται στο χώρο της εικόνας και έτσι δημιουργείται ένας αριθμός *τεμαχίων* (fragments), δηλαδή στοιχείων δεδομένων που αντιπροσωπεύουν τις ιδιότητες της επιφάνειας σε κάθε δείγμα εικονοστοιχείου. Όταν υπολογίζεται ένα δείγμα της επιφάνειας, τα δεδομένα κάθε τεμαχίου παράγονται με παρεμβολή των παρεχόμενων δεδομένων του αντικειμένου. Για παράδειγμα, αν το αντικείμενο είναι ένα τρίγωνο στον χώρο, περιγράφεται πλήρως από τις τρεις κορυφές του. Οι παράμετροι της επιφάνειας σε αυτές τις κορυφές μπορεί να περιλαμβάνουν τη διεύθυνση του κάθετου διανύσματος στην επιφάνεια, το χρώμα, τη διαφάνεια, διάφορες άλλες παραμέτρους όπως συντεταγμένες υφής (βλ. Κεφάλαιο 14), και, φυσικά, τις συντεταγμένες των κορυφών που ορίζουν τη θέση του τριγώνου στον χώρο. Όταν σχεδιάζεται το τρίγωνο, για κάθε σημείο δειγματοληψίας στο εσωτερικό του τριγώνου, οι παρεχόμενες παράμετροι παρεμβάλλονται και προωθούνται ως δείγματα *τεμαχίων* (*fragments*) στο επόμενο στάδιο επεξεργασίας. Οι αλγόριθμοι σχεδίασης παράγουν συνεκτικά, πυκνά και κανονικά δείγματα των στοιχειωδών αντικειμένων ώστε να καλύπτουν πλήρως την περιοχή της τελικής εικόνας στην οποία προβάλλεται το σχήμα (Σχήμα 1.4(γ)).

Μολονότι τα τεμάχια αντιστοιχούν στις θέσεις δειγματοληψίας στην τελική εικόνα, δεν εμφανίζονται αμέσως, καθώς είναι σημαντικό να προσδιορίσουμε ποια από αυτά είναι όντως ορατά από το συγκεκριμένο σημείο παρατήρησης, δηλαδή δεν παρεμποδίζονται από άλλα τεμάχια που είναι πιο κοντά στο σημείο παρατήρησης. Αυτό είναι απαραίτητο, καθώς τα στοιχειώδη αντικείμενα που στέλνονται στο στάδιο σχεδίασης (επομένως και τα αντίστοιχα τεμάχια που δημιουργούνται) δεν είναι ταξινομημένα ως προς το βάθος. Η διαδικασία της απόρριψης των κρυμμένων τμημάτων (τεμαχίων) καλείται *απομάκρυνση κρυμμένων επιφανειών* (ΑΚΕ) (hidden surface elimination, HSE) (βλ. Σχήμα 1.4(δ) και Κεφάλαιο 5).

Τα τεμάχια που περνούν επιτυχώς την λειτουργία της ΑΚΕ χρησιμοποιούνται κατόπιν για τον καθορισμό του χρώματος (Κεφάλαιο 11) και της σκίασης των αντίστοιχων εικονοστοιχείων (Σχήμα 1.4(ε,στ)). Για το σκοπό αυτό, ένα μοντέλο φωτισμού προσομοιώνει την αλληλεπίδραση του φωτός με την επιφάνεια, χρησιμοποιώντας το υλικό και τη θέση του κάθε τεμαχίου (Κεφάλαια 12 και 13). Ο χρωματισμός του τεμαχίου και η τελική εμφάνιση της επιφάνειας μπορούν να αλλάξουν τοπικά μεταβάλλοντας ιδιότητες της επιφάνειας με εφαρμογή μίας ή περισσοτέρων *υφών* (Κεφάλαιο 14). Το τελικό χρώμα κάθε τεμαχίου που αντιστοιχεί σε ένα εμφανιζόμενο εικονοστοιχείο, φιλτράρεται, αποκόπτεται και κανονικοποιείται σε μία τιμή που συμμορφώνεται με τις προδιαγραφές εξόδου. Στο τέλος, αποθηκεύεται στην αντίστοιχη θέση του εικονοστοιχείου της σχεδιαζόμενης εικόνας.

Μία αφαιρετική αναπαράσταση των σταδίων της σωλήνωσης γραφικών για άμεση δημιουργία εικόνας φαίνεται στο Σχήμα 1.5. Σημειώνεται ότι άλλοι αλγόριθμοι δη-



Σχήμα 1.5: *Στάδια και ροή δεδομένων στη σωλήνωση τριδιάστατων γραφικών για άμεση δημιουργία εικόνας.*

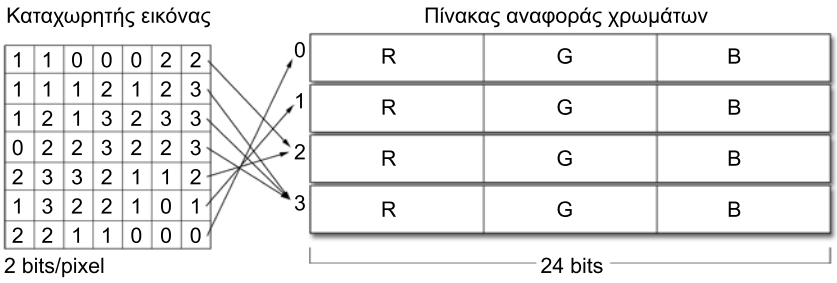
μιουργίας εικόνας δεν ακολουθούν αυτή τη σειρά σταδίων επεξεργασίας. Για παράδειγμα, η παρακολούθηση ακτίνων δεν περιλαμβάνει την άμεση δημιουργία των τεμαχίων, την απομάκρυνση κρυμμένων επιφανειών ή την προβολή.

1.5 Καταχωρητές εικόνας

1.5.1 Αποθήκευση και κωδικοποίηση ψηφιακής εικόνας

Η συνηθισμένη δομή δεδομένων για την αποθήκευση μίας ψηφιακής εικόνας είναι ένας διδιάστατος πίνακας (αποθηκευμένος είτε κατά γραμμές είτε κατά στήλες) στη μνήμη: ο *καταχωρητής εικόνας* (image buffer). Κάθε κελί του καταχωρητή κωδικοποιεί το χρώμα του αντίστοιχου εικονοστοιχείου της εικόνας. Η αναπαράσταση του χρώματος κάθε εικονοστοιχείου (βλ. Κεφάλαιο 11) μπορεί να είναι μονοχρωματική (δηλαδή σε κλίμακα του γκρι), έγχρωμη πολλαπλών καναλιών (π.χ. κόκκινο/πράσινο/μπλε), ή με παλέτα αποχρώσεων. Για μία εικόνα που αποτελείται από $w \times h$ εικονοστοιχεία, το μέγεθος του καταχωρητή εικόνας είναι τουλάχιστον[3] $w \times h \times \text{bpp}/8$ byte, όπου bpp (bits

[3]Σε ορισμένες περιπτώσεις, η διευθυνσιοδότηση μνήμης με ευθυγράμμιση σε «λέξεις» (ομάδες από byte) επιβάλλει περιορισμούς στο πλήθος των byte που διατίθενται ανά εικονοστοιχείο, προκαλώντας κάποιες επιβαρύνσεις. Για παράδειγμα, αν χρησιμοποιούνται 8 bit για κάθε μία από τις αποχρώσεις κόκκινο/πράσινο/μπλε κάθε εικονοστοιχείου, το βάθος χρώματος μπορεί να είναι 32 αντί για 24 (3×8) γιατί σε κάποιες αρχιτεκτονικές υπολογιστών είναι ταχύτερη η πρόσβαση σε διευθύνσεις byte που είναι πολ-



Σχήμα 1.6: *Αναπαράσταση εικόνας με παλέτα αποχρώσεων. Το χρώμα κάθε εικονοστοιχείου είναι αποθηκευμένο ως δείκτης σε πίνακα αναφοράς χρώματος.*

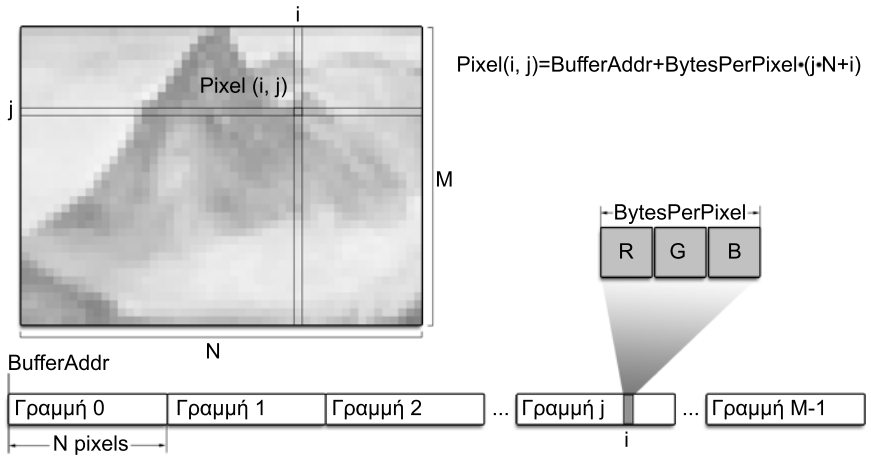
per pixel) είναι το πλήθος των bit που χρησιμοποιούνται για να κωδικοποιηθεί και να αποθηκευτεί το χρώμα κάθε εικονοστοιχείου. Αυτός ο αριθμός (bpp) καλείται συχνά το *βάθος χρώματος* του καταχωρητή εικόνας.

Για μονοχρωματικές εικόνες, συνήθως αποθηκεύονται ένα ή δύο byte για κάθε εικονοστοιχείο, τα οποία αντιστοιχίζουν διακριτοποιημένη την ένταση της απόχρωσης σε θετικές ακέραιες τιμές. Για παράδειγμα, μία εικόνα αποχρώσεων του γκρι με βάθος χρώματος 8 bpp διακριτοποιεί την ένταση σε 256 επίπεδα, με 0 τη χαμηλότερη ένταση και 255 την υψηλότερη.

Σε έγχρωμες εικόνες πολλαπλών καναλιών, χρησιμοποιείται για κάθε μία από τις συνιστώσες (βασικές αποχρώσεις) που απαρτίζουν την πληροφορία του χρώματος μία κωδικοποίηση παρόμοια με αυτή των μονοχρωματικών εικόνων. Συνήθως οι τιμές του χρώματος στους καταχωρητές εικόνας αντιπροσωπεύονται από τρία κανάλια, π.χ. κόκκινο, πράσινο και μπλε. Για έγχρωμες εικόνες, τα συνηθισμένα βάθη χρώματος για ακέραια αναπαράσταση είναι 16, 24, και 32 bpp.

Οι παραπάνω αναπαραστάσεις εικόνας αναφέρονται συχνά ως *πραγματικού χρώματος*, μια ονομασία που αντανακλά το γεγονός ότι για κάθε εικονοστοιχείο αποθηκεύεται η πλήρης πληροφορία της έντασης του χρώματος. Στην αναπαράσταση εικόνας *με παλέτα χρωμάτων* (ή *δεικτοδοτημένη* αναπαράσταση) η τιμή σε κάθε κελί του καταχωρητή εικόνας δεν αναπαριστά άμεσα την ένταση της εικόνας ή των συνιστωσών του χρώματος σε αυτό. Αντί για αυτό, αποθηκεύεται ένας δείκτης προς έναν εξωτερικό *πίνακα αναφοράς χρώματος*, ο οποίος ονομάζεται και *παλέτα*. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα της χρήσης παλέτας είναι ότι τα διατιθέμενα bit ανά εικονοστοιχείο δεν επηρεάζουν την ακρίβεια του χρώματος, παρά μόνο το πλήθος των διαφορετικών χρωμάτων που μπορούν ταυτόχρονα να αποδοθούν σε εικονοστοιχεία. Τα στοιχεία της παλέτας μπορεί να είναι τιμές πραγματικού χρώματος (Σχήμα 1.6). Ένα τυπικό παράδειγμα είναι ο καταχωρητής εικόνας της μορφής αρχείων εικόνας GIF (Graphics Interchange Format), ο οποίος χρησιμοποιεί 8 bpp για την δεικτοδότηση των χρωμάτων και στοιχεία της παλέτας με 24 bit. Μία ακόμη χρήσιμη ιδιότητα της αναπαράστασης με παλέτα είναι ότι τα χρώματα των εικονοστοιχείων μπορούν να τροποποιηθούν

λαπλάσια του 4 από αυτές που είναι πολλαπλάσια του 3.



Σχήμα 1.7: *Συνήθης αναπαράσταση του καταχωρητή εικόνας στη μνήμη.*

γρήγορα για μία εικόνα οποιουδήποτε μεγέθους. Παρόλα αυτά, οι εικόνες πραγματικού χρώματος συνήθως προτιμώνται καθώς μπορούν να κωδικοποιήσουν 2^{bpp} χρώματα ταυτόχρονα (μεγάλοι πίνακες αναφοράς χρώματος δεν είναι πρακτικοί) και είναι γενικά ευκολότερος ο χειρισμός τους.

Ένας καταχωρητής εικόνας καταλαμβάνει ένα συνεχές τμήμα της μνήμης (Σχήμα 1.7). Θεωρώντας μία συνήθη διάταξη κατά γραμμές με επάλληλη καταχώριση των συνιστωσών του χρώματος, ένα εικονοστοιχείο αποτελούμενο από `BytesPerPixel` byte μπορεί να διαβαστεί με τον ακόλουθο απλό κώδικα:

```
unsigned char * GetPixel( int i, int j, int N, int M,
        int BytesPerPixel, unsigned char * BufferAddr )
{
    // Εδώ μπορούν να εισαχθούν έλεγχοι για δείκτες εκτός ορίων.
    return BufferAddr + BytesPerPixel*(j*N+i);
}
```

Ιστορικά, εκτός από το παραπάνω σχήμα, οι συνιστώσες των χρωμάτων αποθηκεύονταν επίσης συνεχόμενα, σε χωριστά «επίπεδα μνήμης».

1.5.2 Ο καταχωρητής πλαισίου

Κατά την παραγωγή μίας συνθετικής εικόνας, τα υπολογιζόμενα χρώματα των εικονοστοιχείων αποθηκεύονται σ' έναν καταχωρητή εικόνας, τον *καταχωρητή πλαισίου* (frame buffer), στην κύρια μνήμη του υλικού γραφικών, ανάλογα με την εφαρμογή και τον αλγόριθμο δημιουργίας της εικόνας. Το όνομα του καταχωρητή πλαισίου αντανακλά το γεγονός ότι αποθηκεύει το τρέχον *πλαίσιο* (καρέ) μίας ακολουθίας κινούμενης συνθετικής εικόνας, σε ευθεία αναλογία με ένα πλαίσιο (καρέ) κινηματογραφικής ταινίας. Στην περίπτωση συστημάτων γραφικών πραγματικού χρόνου, ο καταχωρητής

πλαισίου είναι η περιοχή της μνήμης γραφικών στην οποία συγκεντρώνεται όλη η πληροφορία χρώματος των εικονοστοιχείων από τη διαδικασία σχεδίασης πριν οδηγηθεί στην έξοδο γραφικών, η οποία και χρειάζεται συνεχή ανανέωση[4].

Ο καταχωρητής πλαισίου είναι αναγκαίος καθώς η διαδικασία σχεδίασης εξελίσσεται με βάση τη σειρά παροχής των στοιχειωδών αντικειμένων και όχι με βάση τα εικονοστοιχεία της τελικής εικόνας (όπως, αντίθετα, η παρακολούθηση ακτίνων, βλ. Κεφάλαιο 15). Αυτό σημαίνει πως δεν υπάρχει εγγύηση ότι τα εικονοστοιχεία θα παραχθούν με ορισμένη διάταξη. Η πρόσβαση στον καταχωρητή πλαισίου είναι τυχαία για εγγραφή από τον αλγόριθμο σχεδιάσης και σειριακή για την έξοδο προς τη συσκευή απεικόνισης. Επομένως τα δεδομένα για τα εικονοστοιχεία συγκεντρώνονται στον καταχωρητή πλαισίου, ο οποίος λειτουργεί ως ένα ενδιάμεσο μεταξύ των λειτουργιών της τυχαίας εγγραφής και της σειριακής ανάγνωσης.

Στο υποσύστημα γραφικών, οι καταχωρητές πλαισίου συνήθως ορίζονται σε ζεύγη καθώς στην πράξη χρησιμοποιούνται δύο καταχωρητές πλαισίου[5] με μια τεχνική που θα εξηγηθεί παρακάτω.

1.5.3 Άλλοι καταχωρητές

Θα συναντήσουμε διάφορους άλλους τύπους καταχωρητών, οι οποίοι ορίζονται στη μνήμη του υλικού γραφικών και χρησιμοποιούνται για την αποθήκευση ενδιάμεσων αποτελεσμάτων διαφόρων αλγορίθμων. Συνήθως, όλοι οι καταχωρητές έχουν τις ίδιες διαστάσεις με τον καταχωρητή πλαισίου και υπάρχει μία ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ των κελιών τους και των εικονοστοιχείων του καταχωρητή πλαισίου.

Ο πιο συχνά χρησιμοποιούμενος τύπος καταχωρητή για την παραγωγή 3Δ εικόνας, εκτός από τον καταχωρητή πλαισίου, είναι ο *καταχωρητής βάθους* ή *Z-buffer*. Ο καταχωρητής βάθους αποθηκεύει τιμές αποστάσεων για τον αλγόριθμο ταξινόμησης τεμαχίων κατά το στάδιο της απομάκρυνσης κρυμμένων επιφανειών (βλ. Κεφάλαιο 5). Για την παραγωγή γραφικών σε πραγματικό χρόνο βρίσκεται και αυτός στην μνήμη του υποσυστήματος γραφικών.

Άλλοι εξειδικευμένοι βοηθητικοί καταχωρητές μπορούν να ορισθούν στο υποσύστημα γραφικών, ανάλογα με τις απαιτήσεις του αλγορίθμου δημιουργίας εικόνας και τη διαθεσιμότητα μνήμης σε αυτό. Ο *καταχωρητής μάσκας* (stencil buffer) (ανατρέξτε στο Κεφάλαιο 13 για λεπτομερή περιγραφή) και ο *καταχωρητής συσσώρευσης* (accumulation buffer) είναι δύο παραδείγματα. Συχνά, απαιτείται η αποθήκευση της τιμής διαφάνειας των παραγόμενων τεμαχίων για να υποστηριχθούν λειτουργίες ανάμειξης με τα υπάρχοντα χρώματα στον καταχωρητή πλαισίου. Για το λόγο αυτό στα περισσότερα σύγχρονα υποσυστήματα γραφικών υποστηρίζεται ένα επιπλέον κανάλι για κάθε εικονοστοιχείο, το *κανάλι διαφάνειας* ή *κανάλι άλφα* (alpha channel). Μία τιμή

[4]Στα επόμενα κεφάλαια μπορεί να χρησιμοποιείται ο όρος «καταχωρητής εικόνας» και για τον «καταχωρητή πλαισίου».

[5]Για την εμφάνιση στερεοσκοπικών γραφικών χρησιμοποιούνται *τέσσερις* καταχωρητές πλαισίου καθώς ορίζονται δύο ζεύγη καταχωρητών, που αντιστοιχούν σε ένα πλαίσιο για κάθε μάτι. Οι εικόνες από αυτούς τους καταχωρητές συνήθως εναλλάσσονται σε μία συσκευή εξόδου γραφικών («ενεργή» στερεοσκοπική απεικόνιση).

διαφάνειας αποθηκεύεται μαζί με τις πληροφορίες για το κόκκινο (red – R), το πράσινο (green – G) και το μπλε (blue – B) (βλ. Κεφάλαιο 11), στον καταχωρητή πλαισίου. Για καταχωρητές πλαισίου των 32 bit, αυτό το τέταρτο κανάλι (alpha – A) καταλαμβάνει τα υπόλοιπα 8 bit της «λέξης» που αντιστοιχεί στο εικονοστοιχείο (τα άλλα 24 bit χρησιμοποιούνται για τα τρία κανάλια του χρώματος).

1.6 Υλικό γραφικών

Για να εμφανιστούν εικόνες σε μία πλεγματική οθόνη, όπως μία οθόνη καθοδικού σωλήνα ή μία ψηφιακή επίπεδη οθόνη, οι τιμές χρώματος που αντιστοιχούν στα ορατά σημεία στην επιφάνεια απεικόνισης διαβάζονται σειριακά. Το σήμα εισόδου (απόχρωση των εικονοστοιχείων) διαβάζεται κατά *γραμμές σάρωσης* και η εικόνα που προκύπτει παράγεται κατά γραμμές, από πάνω προς τα κάτω. Η πηγή της εικόνας εξόδου είναι ο καταχωρητής πλαισίου, ο οποίος διαβάζεται σειριακά από ένα κύκλωμα εξόδου εικόνας σε συγχρονισμό με την ανανέωση της συσκευής απεικόνισης. Αυτή είναι η ελάχιστη λειτουργικότητα που παρέχεται από το υποσύστημα γραφικών του υπολογιστή, το οποίο είναι μία ξεχωριστή κάρτα ή ένα κύκλωμα ενσωματωμένο στη μητρική πλακέτα. Σε κάποιες περιπτώσεις, πολλαπλά υποσυστήματα γραφικών μπορεί να είναι εγκατεστημένα στο ίδιο υπολογιστικό σύστημα, για να οδηγούν πολλαπλές συσκευές απεικόνισης ή για να μοιράζονται τον φόρτο επεξεργασίας των γραφικών για την παραγωγή μίας μοναδικής εικόνας. Το πλήθος των γραμμών και το πλήθος των εικονοστοιχείων ανά γραμμή της συσκευής απεικόνισης καθορίζει την ανάλυση, με την οποία συνήθως αρχικοποιείται ο καταχωρητής εικόνας.

1.6.1 Υλικό παραγωγής εικόνας

Προσαρμογείς οθόνης

Τα πρώτα (πλεγματικά) υποσυστήματα γραφικών αποτελούνταν από δύο κύρια τμήματα: τη μνήμη και τα σχετικά κυκλώματα διευθυνσιοδότησης του καταχωρητή εικόνας, και τα κυκλώματα εξόδου. Όχι άδικα, καλούνταν *προσαρμογείς οθόνης*· ο μόνος σκοπός τους ήταν να συγκεντρώνουν τα τυχαία και ασύγχρονα εγγραφόμενα εικονοστοιχεία στον καταχωρητή πλαισίου και να προσαρμόζουν το προκύπτον ψηφιακό σήμα της εικόνας σε ένα συγχρονισμένο σειριακό αναλογικό σήμα που οδηγούσε τις συσκευές απεικόνισης. Οι πρώτοι καταχωρητές εικόνας χρησιμοποιούσαν παλέτες χρωμάτων (βλ. Ενότητα 1.5.1). Ο κεντρικός επεξεργαστής πραγματοποιούσε τη σχεδίαση και προσπέλαζε με τυχαίο τρόπο τον καταχωρητή εικόνας για να γράψει τις υπολογιζόμενες τιμές των εικονοστοιχείων. Από την άλλη μεριά του καταχωρητή εικόνας, ένα ειδικό κύκλωμα, το RAMDAC (random access memory digital-to-analog converter), ήταν υπεύθυνο για την ανάγνωση του καταχωρητή εικόνας γραμμή προς γραμμή και για την ανάκληση των χρωμάτων από την παλέτα (τα οποία αποτελούσαν το τμήμα RAM του κυκλώματος). Επίσης, ήταν υπεύθυνο για τη μετατροπή των τιμών των χρωμάτων σε κατάλληλη τάση στη διασύνδεση εξόδου. Ο πίνακας αναφοράς

χρώματος σταδιακά σταμάτησε να χρησιμοποιείται με την έλευση του πραγματικού χρώματος· όμως είναι ακόμη ενσωματωμένος ή εξομοιώνεται για λόγους συμβατότητας. Για ψηφιακές οθόνες, όπως αυτές που υποστηρίζουν τις εισόδους DVI ή HDMI, το στάδιο μετατροπής του σήματος από ψηφιακό σε αναλογικό δεν χρειάζεται και επομένως παρακάμπτεται. Το κύκλωμα εξόδου παράγει συγχρονισμένο σήμα για τη συνεχή ανανέωση των συσκευών εξόδου. Ένα εσωτερικό ρολόι καθορίζει την ταχύτητα μετατροπής και επομένως και τον μέγιστο *ρυθμό ανανέωσης*. Ο ρυθμός ανανέωσης είναι η συχνότητα με την οποία η συσκευή απεικόνισης πραγματοποιεί μία πλήρη επανασχεδίαση όλης της εικόνας. Οι συσκευές απεικόνισης μπορούν να ανανεώνουν την εικόνα τους με διάφορες συχνότητες, π.χ. 60, 72, 80, 100, ή 120 Hz. Για να μπορεί ο προσαρμογέας οθόνης να τροφοδοτεί την οθόνη με το σήμα εξόδου του, το εσωτερικό του ρολόι πρέπει να ρυθμίζεται ώστε να επιτυγχάνεται ο επιθυμητός ρυθμός ανανέωσης. Προφανώς, καθώς το κύκλωμα εξόδου επενεργεί στα εικονοστοιχεία, η ταχύτητα του ρολογιού εξαρτάται από την ανάλυση της απεικονιζόμενης εικόνας. Η μέγιστη ταχύτητα ρολογιού καθορίζει τον μέγιστο ρυθμό ανανέωσης στην επιθυμητή ανάλυση.

Για οθόνες καθοδικού σωλήνα, η συχνότητα ρολογιού του κυκλώματος εξόδου (ρολόι του RAMDAC) είναι περίπου $f_{\text{RAMDAC}} = 1{,}32 \cdot w \cdot h \cdot f_{\text{refresh}}$, όπου w και h είναι αντίστοιχα το πλάτος και το ύψος της εικόνας (σε αριθμό εικονοστοιχείων) και f_{refresh} είναι ο επιθυμητός ρυθμός ανανέωσης. Ο παράγοντας 1,32 αντανακλά μία τυπική επιβάρυνση που εμφανίζεται λόγω της προώθησης της ακτίνας στην επόμενη γραμμή σάρωσης και στο επόμενο πλαίσιο (βλ. την Ενότητα 1.6.2 παρακάτω).

Χρήση διπλού καταχωρητή

Λόγω της ασυμβατότητας μεταξύ της ανάγνωσης και της εγγραφής της μνήμης του καταχωρητή εικόνας (σειριακή/τυχαία), είναι πολύ πιθανό να αρχίσει η ανάγνωση μίας γραμμής σάρωσης προς εμφάνιση, ενώ η παραγωγή της δεν έχει ακόμη ολοκληρωθεί, έχοντας έτσι ως αποτέλεσμα την εμφάνιση μίας μη ολοκληρωμένης εικόνας (αυτό ονομάζεται *σπάσιμο* της εικόνας). Το ιδεώδες θα ήταν να περιμένει το κύκλωμα εξόδου να τελειώσει η σχεδίαση ενός πλαισίου πριν αρχίσει να διαβάζει τον καταχωρητή εικόνας. Αυτό όμως δεν μπορεί να γίνει, καθώς η εικόνα στην οθόνη πρέπει να ανανεώνεται συνεχώς με πολύ συγκεκριμένο ρυθμό, ο οποίος είναι ανεξάρτητος του χρόνου σχεδίασης. Η λύση σε αυτό το πρόβλημα είναι η χρήση *διπλού καταχωρητή*. Ένας δεύτερος καταχωρητής πλαισίου δεσμεύεται στη μνήμη και οι λειτουργίες της εγγραφής και της ανάγνωσης πραγματοποιούνται πάντα σε διαφορετικούς καταχωρητές και αποσυνδέονται έτσι πλήρως. Όταν ο πρώτος καταχωρητής είναι ενεργός για εγγραφή (αυτός ο καταχωρητής εικόνας καλείται *πίσω* καταχωρητής, καθώς είναι «κρυμμένος», το περιεχόμενό του δεν εμφανίζεται), η έξοδος διαβάζεται σειριακά από τον δεύτερο καταχωρητή (τον *εμπρός* καταχωρητή). Όταν η διαδικασία εγγραφής ολοκληρώσει το τρέχον πλαίσιο εικόνας, οι ρόλοι των δύο καταχωρητών εναλλάσσονται, δηλαδή τα δεδομένα της σχεδίασης καταχωρούνται στον δεύτερο καταχωρητή ενώ τα εικονοστοιχεία του πρώτου καταχωρητή διαβάζονται σειριακά για το σχηματισμό της εικόνας στη συσκευή εξόδου. Αυτή η ανταλλαγή των ρόλων καλείται *εναλλαγή καταχωρητών*

(buffer swapping).

Η εναλλαγή των καταχωρητών γίνεται αμέσως μόλις είναι έτοιμα τα δεδομένα στον πίσω καταχωρητή. Η εμφάνιση σπασίματος στην εικόνα είναι δυνατή ακόμα και με αυτό τον μηχανισμό, αν η σειριακή ανάγνωση του εμπρός καταχωρητή δεν έχει ολοκληρώσει ένα πλήρες πλαίσιο εικόνας και τα περιεχόμενα των δύο καταχωρητών παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές. Για να αποφευχθεί αυτό, η εναλλαγή των καταχωρητών μπορεί να πραγματοποιείται συγχρονισμένα, στο διάστημα της ανανέωσης μεταξύ του προηγούμενου και του επόμενου πλαισίου (αυτό το διάστημα είναι γνωστό ως διάστημα κατακόρυφου κενού (VBLANK – vertical blank interval) του κυκλώματος εξόδου). Σε αυτό το μικρό διάστημα, τα σήματα που μεταδίδονται στη συσκευή εμφάνισης δεν απεικονίζονται. Περιορίζοντας τις εναλλαγές στο διάστημα κατακόρυφου κενού εξαλείφεται αυτή η πηγή σπασίματος της εικόνας· ωστόσο εισάγεται μία καθυστέρηση πριν ο πίσω καταχωρητής γίνει έτοιμος για εγγραφή[6].

Επιταχυντές διδιάστατων γραφικών

Οι πρώτοι προσαρμογείς οθόνης ανέθεταν στον κεντρικό επεξεργαστή να πραγματοποιήσει όλη τη σχεδίαση και το χειρισμό των καταχωρητών· για το λόγο αυτό δεν διέθεταν εξειδικευμένους επεξεργαστές γραφικών. Οι πρόοδοι στην κατασκευή κυκλωμάτων πολύ υψηλής ολοκλήρωσης (VLSI) και η τυποποίηση των αλγορίθμων απεικόνισης οδήγησαν στην προοδευτική μετακίνηση των αλγορίθμων απεικόνισης από τον κεντρικό επεξεργαστή σε εξειδικευμένο υλικό. Καθώς οι γραφικές διεπαφές χρήστη έγιναν κοινός τόπος στους προσωπικούς υπολογιστές, οι εντολές σχεδίασης παραθύρων και στοιχειωδών σχημάτων και οι αντίστοιχες βιβλιοθήκες συνέκλιναν σε τυποποιημένα σύνολα λειτουργιών. Τα προγράμματα οδήγησης των προσαρμογέων οθόνης και τα λειτουργικά συστήματα διαμόρφωσαν ένα *στρώμα αφαίρεσης υλικού* (hardware abstraction layer – HAL) μεταξύ λειτουργιών που υποστήριζαν οι βιβλιοθήκες και αυτών που υλοποιούσε στην πραγματικότητα το υλικό. Σταδιακά, ολοένα και περισσότερες από τις λειτουργίες που υποστήριζαν οι τυποποιημένες βιβλιοθήκες υλοποιούνταν στο υλικό. Μία από τις πρώτες λειτουργίες που περιλήφθηκε σε εξειδικευμένο υλικό γραφικών ήταν το «blitting», δηλαδή η μεταφορά και ο συνδυασμός «sprites» (ορθογώνιων τμημάτων εικόνας)[7]. Ακολούθησαν οι στοιχειώδεις διδιάστατοι αλγόριθμοι σχεδίασης γραμμών, ορθογωνίων, κύκλων και άλλων σχημάτων. Οι πρώτες γραφικές εφαρμογές που αξιοποίησαν τους 2Δ επιταχυντές γραφικών ήταν τα παιχνίδια καθώς και τα ίδια τα παραθυρικά περιβάλλοντα, τα οποία ήταν ευνόητο ότι θα αξιοποιούσαν τέτοιες τεχνικές επιτάχυνσης λόγω των τυποποιημένων και υψηλών απαιτήσεών τους.

Επιταχυντές τριδιάστατων γραφικών

Ένα επιπλέον βήμα επιτάχυνσης επιτεύχθηκε με την τυποποίηση της σωλήνωσης των 3Δ γραφικών και την ευρεία υιοθέτηση του αλγορίθμου Z-buffer για την απομά-

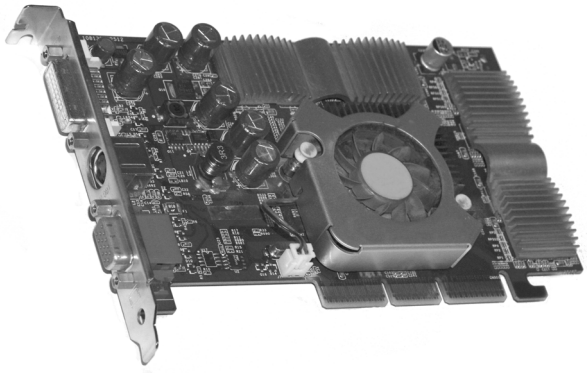
[6] Αυτό είναι ένα κατ' επιλογήν χαρακτηριστικό πολλών υποσυστημάτων γραφικών.
[7] blit = block image transfer

κρυνση κρυμμένων επιφανειών (βλ. Κεφάλαιο 5). Οι επιταχυντές 3Δ γραφικών έγιναν πραγματικότητα με την εισαγωγή ειδικών επεξεργαστών και μονάδων σχεδίασης που μπορούσαν να χειρισθούν ροές τριδιάστατων στοιχειωδών αντικειμένων και αντίστοιχων εντολών που όριζαν τις ιδιότητές τους, τον φωτισμό, και γενικούς χειρισμούς της σκηνής. Η διαθέσιμη μνήμη στους επιταχυντές γραφικών αυξήθηκε ώστε να υποστηρίξει τον καταχωρητή βάθους (Z-buffer) και άλλους βοηθητικούς καταχωρητές. Οι τυποποιημένες βιβλιοθήκες 3Δ γραφικών όπως η OpenGL [Open07b] και το Direct3D εστιάστηκαν στην απεικόνιση επιφανειών ως πολύγωνα και η σωλήνωση γραφικών στο υλικό βελτιστοποιήθηκε για αυτό το σκοπό. Τα βασικά στοιχεία ενός επιταχυντή 3Δ γραφικών επεκτάθηκαν ώστε να περιλαμβάνουν πιο πολύπλοκες μαθηματικές πράξεις μεταξύ πινάκων και διανυσμάτων πραγματικών αριθμών, καθώς και λειτουργίες διευθυνσιοδότησης, διαχείρισης και μεταφοράς από και προς τη μνήμη εικόνων. Έτσι, εξειδικευμένοι επεξεργαστές γεωμετρίας μπορούσαν να πραγματοποιούν αρχικοποίηση των πολυγώνων, γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, προβολές, παρεμβολή, και φωτισμό, απελευθερώνοντας πλήρως τον κεντρικό επεξεργαστή από τους υπολογισμούς που σχετίζονταν με την απεικόνιση 3Δ σχημάτων. Όταν μία εφαρμογή απαιτήσει μία λειτουργία σχεδίασης ή επεξεργασίας 3Δ σκηνής με κάποιο σύνολο δεδομένων, τα πάντα μεταφέρονται μέσω του προγράμματος οδήγησης στον επιταχυντή γραφικών. Ένα κύριο στοιχείο για την επιτυχία της επιτάχυνσης μέσω υλικού είναι το γεγονός ότι οι λειτουργίες σε στοιχειώδη σχήματα ή τμήματα αντικειμένων μπορούν να εκτελεστούν σε πολύ μεγάλο βαθμό παράλληλα. Οι σύγχρονες μονάδες επεξεργασίας γεωμετρίας, σχεδίασης, και απόδοσης υφής έχουν πολλαπλά παράλληλα στάδια. Ιδέες που είχαν παρουσιαστεί τη δεκαετία του 1980 για την εισαγωγή παραλληλίας σε αλγορίθμους γραφικών, βρήκαν εφαρμογή στους 3Δ επιταχυντές γραφικών.

Προγραμματιζόμενο υλικό γραφικών

Η επιτάχυνση των 3Δ γραφικών μετέφερε την σωλήνωση γραφικών στο υλικό του υπολογιστή. Για το σκοπό αυτό, τα επιμέρους στάδια και οι αλγόριθμοι των διαφόρων λειτουργιών επεξεργασίας στοιχειωδών αντικειμένων ήταν προκαθορισμένα τόσο ως προς τη σειρά εκτέλεσης, όσο και ως προς την υλοποίησή τους. Καθώς οι απαιτήσεις για μεγαλύτερο ρεαλισμό στα γραφικά πραγματικού χρόνου υπερέβαιναν τις δυνατότητες των τυπικών υλοποιήσεων σε υλικό, αναζητήθηκε περισσότερη ευελιξία ώστε να μπορούν να εκτελούνται ειδικές λειτουργίες επεξεργασίας των στοιχειωδών αντικειμένων αλλά και να γίνεται αξιοποίηση της ταχύτατης παράλληλης επεξεργασίας των επιταχυντών γραφικών. Στις σύγχρονες *μονάδες επεξεργασίας γραφικών* (graphics processing units – GPUs), βλ. Σχήμα 1.8, τόσο οι προκαθορισμένες λειτουργίες επεξεργασίας γεωμετρίας όσο και τα στάδια σχεδίασης των προκατόχων τους αντικαταστάθηκαν από μικρά, εξειδικευμένα προγράμματα που εκτελούνται στους επεξεργαστές γραφικών και καλούνται *προγράμματα φωτοσκίασης* ή απλά *φωτοσκιαστές* (shaders).

Συνήθως ορίζονται δύο τύποι φωτοσκιαστών. Οι *φωτοσκιαστές κορυφών* (vertex shaders) και γεωμετρίας (geometry shaders) αντικαθιστούν την προκαθορισμένη λειτουργικότητα του σταδίου μετασχηματισμών και επεξεργασίας της γεωμετρίας, ενώ



Σχήμα 1.8: *Τυπικός επιταχυντής 3Δ γραφικών. Η πλακέτα παρέχει πολλαπλές συνδέσεις εξόδου της εικόνας (αναλογικές και ψηφιακές). Ψύκτρες και ένας ανεμιστήρας καλύπτουν τη μνήμη και τον επεξεργαστή γραφικών, που λειτουργούν σε υψηλές ταχύτητες.*

ο *φωτοσκιαστής τεμαχίων* (fragment shader) επεξεργάζεται τα παραγόμενα τμήματα αντικειμένων και συνήθως πραγματοποιεί τη φωτοσκίαση και την απόδοση υφής (βλ. Κεφάλαιο 12, για υλοποιήσεις κάποιων πολύπλοκων μοντέλων φωτισμού με τη βοήθεια φωτοσκιαστών). Ο κάθε κατασκευαστής επιταχυντών μπορεί να παρέχει τη δική του εσωτερική υλοποίηση του επεξεργαστή γραφικών, με την προϋπόθεση να υποστηρίζει (τουλάχιστον) ένα συγκεκριμένο σύνολο εντολών για τους φωτοσκιαστές. Τα προγράμματα φωτοσκίασης γράφονται σε διάφορες γλώσσες φωτοσκίασης, μεταγλωττίζονται και κατόπιν φορτώνονται στον επεξεργαστή γραφικών για εκτέλεση. Οι φωτοσκιαστές κορυφών εκτελούνται μία φορά για κάθε κορυφή των αντικειμένων, οι φωτοσκιαστές γεωμετρίας εκτελούνται για κάθε παραγόμενο τμήμα αντικειμένου (π.χ. τρίγωνο) και οι φωτοσκιαστές τεμαχίων εκτελούνται για κάθε δείγμα τεμαχίου. Η συνήθης σωλήνωση των μη προγραμματιζόμενων επιταχυντών 3Δ γραφικών εξομοιώνεται μέσω προγραμμάτων φωτοσκίασης ως η προκαθορισμένη λειτουργικότητα του επεξεργαστή γραφικών.

1.6.2 Υλικό εμφάνισης εικόνας

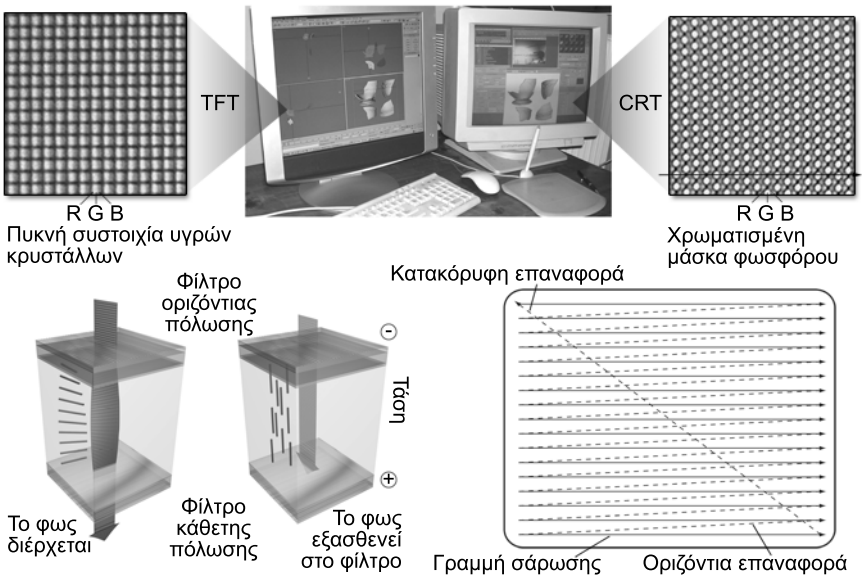
Οι οθόνες αποτελούν τον πιο κοινό τύπο συσκευής εμφάνισης εικόνας. Όμως μία μεγάλη ποικιλία συσκευών εμφάνισης εικόνας, σε πραγματικό ή μη χρόνο, καθώς και συσκευές εκτύπωσης, λειτουργούν με παρόμοιες αρχές για την παραγωγή οπτικής εξόδου. Πιο συγκεκριμένα, όλες χρησιμοποιούν μία πλεγματική εικόνα. Οι οθόνες — ανεξάρτητα από την τεχνολογία τους — διαβάζουν τα περιεχόμενα του καταχωρητή εικόνας (μία πλεγματική εικόνα). Οι συνηθισμένοι εκτυπωτές, όπως οι εκτυπωτές laser και inkjet, μπορούν να προετοιμάσουν μία πλεγματική εικόνα η οποία κατόπιν μετατρέπεται απευθείας σε σημεία πάνω στην επιφάνεια εκτύπωσης. Η σχεδίαση στοιχειωδών αντικειμένων όπως σχήματα γραμμάτων, διανύσματα, και εικόνες, βασίζεται στα ίδια βήματα και αλγορίθμους με τα 2Δ γραφικά πραγματικού χρόνου (βλ. Ενότητα 1.4).

Οθόνες

Στις αρχές της δεκαετίας του 2000, η αγορά των συνήθων πλεγματικών οθονών πραγματοποίησε μία μετάβαση από την τεχνολογία καθοδικού σωλήνα στις επίπεδες οθόνες υγρών κρυστάλλων. Υπάρχουν και άλλοι τύποι οθονών, κατάλληλες για πιο εξειδικευμένους τύπους δεδομένων και εφαρμογών, όπως οι διανυσματικές και οι στερεοσκοπικές οθόνες, όμως εστιάζουμε στους πιο ευρέως διαδεδομένους τύπους.

Οι οθόνες *καθοδικού σωλήνα* (Cathode Ray Tube – CRT) (Σχήμα 1.9, πάνω δεξιά) λειτουργούν με τον ακόλουθο τρόπο: Μία δέσμη ηλεκτρονίων δημιουργείται με τη θέρμανση της καθόδου ενός ειδικού σωλήνα που ονομάζεται πυροβόλο ηλεκτρονίων και βρίσκεται στο πίσω μέρος της οθόνης. Τα ηλεκτρόνια επιταχύνονται λόγω διαφοράς τάσης προς την ανοδιωμένη γυάλινη επιφάνεια του σωλήνα. Ένα σύνολο πηνίων εστιάζει τη δέσμη και την εκτρέπει ώστε περιοδικά να διατρέχει την μπροστινή επιφάνεια της οθόνης από αριστερά προς τα δεξιά και από πάνω προς τα κάτω πολλές φορές το δευτερόλεπτο (παρατηρείστε την τροχιά στο Σχήμα 1.9 (κάτω δεξιά)). Όταν τα ηλεκτρόνια της δέσμης συγκρούονται με την μπροστινή επιφάνεια της οθόνης, η οποία είναι επικαλυμμένη με φώσφορο, αυτός διεγείρεται και εκπέμπει ορατό φως. Το πυροβόλο ηλεκτρονίων εκπέμπει ηλεκτρόνια μόνο όταν διατρέχει τις γραμμές σάρωσης και παραμένει ανενεργό καθώς τα πηνία κινούν τη δέσμη στην επόμενη γραμμή σάρωσης ή πίσω στην κορυφή της οθόνης (κατακόρυφο κενό διάστημα). Η απόχρωση της εμφανιζόμενης εικόνας εξαρτάται από το ρυθμό που τα ηλεκτρόνια προσπίπτουν σε ένα συγκεκριμένο σημείο με φώσφορο· ο ρυθμός αυτός ελέγχεται από την τάση που εφαρμόζεται στο πυροβόλο ηλεκτρονίων και η οποία διαμορφώνεται με βάση το σήμα εισόδου. Μία έγχρωμη οθόνη συνδυάζει τρία, πολύ κοντά το ένα στο άλλο, πυροβόλα ηλεκτρονίων, ένα για κάθε μία από τις συνιστώσες (κόκκινη, πράσινη, μπλε) του χρώματος. Οι τρεις δέσμες, προερχόμενες από διαφορετικά σημεία στο πίσω μέρος του σωλήνα, προσπίπτουν στην επικάλυψη φωσφόρου σε ελαφρώς διαφορετικές θέσεις αν εστιαστούν σωστά. Αυτά τα διαφορετικά σημεία επικαλύπτονται με κόκκινο, πράσινο, και μπλε φωσφόρο, και καθώς βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους δίνουν την εντύπωση μίας συνδυασμένης προσθετικής απόχρωσης (βλ. Κεφάλαιο 11). Εξαιτίας της εκτροπής της δέσμης ηλεκτρονίων, οι οθόνες καθοδικού σωλήνα υποφέρουν από παραμορφώσεις και προβλήματα εστίασης, παρέχουν όμως υψηλή φωτεινότητα και αντίθεση καθώς και ενιαία ένταση των χρωμάτων, ανεξάρτητα από τη γωνία θέασης.

Οι πρώτες *οθόνες υγρών κρυστάλλων* (Liquid Crystal Display – LCD) υπέφεραν από αργούς χρόνους απόκρισης κατά την μεταβολή απόχρωσης των εικονοστοιχείων, χαμηλή χρωματική πιστότητα και χαμηλή αντίθεση. Η εφεύρεση και η μαζική παραγωγή έγχρωμων οθονών υγρών κρυστάλλων που ξεπέρασαν τα παραπάνω προβλήματα, κατέστησαν τις επίπεδες οθόνες LCD πιο ελκυστικές σε σχέση με τις ογκώδεις οθόνες CRT. Σήμερα, τα εξαιρετικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά τους (μηδενική παραμόρφωση), η ελαφριά σχεδίασή τους, και οι βελτιωμένες επιδόσεις τους ως προς το χρώμα και τη φωτεινότητα, έχουν καταστήσει τις οθόνες υγρών κρυστάλλων τον κυρίαρχο τύπο οθόνης υπολογιστή.



Σχήμα 1.9: *Έγχρωμες οθόνες. (Πάνω αριστερά: διάταξη υγρών κρυστάλλων TFT. Κάτω αριστερά: συνήθης λειτουργία υγρού κρυστάλλου συνεστραμμένου νήματος. Πάνω δεξιά: διάταξη σημείων σε οθόνη καθοδικού σωλήνα. (Κάτω δεξιά) Τροχιά ακτίνας σε οθόνη καθοδικού σωλήνα.*

Η βασική συσκευή υγρών κρυστάλλων συνεστραμμένου νήματος (twisted nematic (TN) LCD) αποτελείται από δύο παράλληλα διαφανή ηλεκτρόδια που έχουν υποστεί επεξεργασία ώστε να σχηματιστούν στην επιφάνειά τους μικροσκοπικές εγκοπές, σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις. Οι επιφάνειες των δύο ηλεκτροδίων είναι επίσης επιστρωμένες με φίλτρα γραμμικής πόλωσης του φωτός, τα οποία είναι ευθυγραμμισμένα με τις αντίστοιχες εγκοπές. Ο χώρος μεταξύ των δύο διαφανών επιφανειών καταλαμβάνεται από υγρό κρύσταλλο, του οποίου τα μόρια ευθυγραμμίζονται με φυσικό τρόπο με τις εγκοπές των ηλεκτροδίων. Καθώς οι εγκοπές στα δύο ηλεκτρόδια είναι κάθετες μεταξύ τους, τα μόρια υγρού κρυστάλλου σχηματίζουν μία έλικα μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων. Αν δεν υπάρχει κάποιος εξωτερικός παράγοντας, όπως ηλεκτρική τάση, το φως που εισέρχεται από το ένα διαφανές ηλεκτρόδιο πολώνεται, και η πόλωσή του μεταβάλλεται βαθμιαία καθώς ακολουθεί τη σπειροειδή πορεία του υγρού κρυστάλλου (Σχήμα 1.9, κάτω αριστερά). Καθώς οι εγκοπές στο δεύτερο ηλεκτρόδιο είναι ευθυγραμμισμένες με την διεύθυνση πόλωσης σε αυτό, το φως διαπερνά το ηλεκτρόδιο και εξέρχεται από τον υγρό κρύσταλλο. Όταν εφαρμόζεται τάση στα ηλεκτρόδια, τα μόρια του υγρού κρυστάλλου ευθυγραμμίζονται με το ηλεκτρικό πεδίο και έτσι χάνεται η σπειροειδής διάταξή τους. Το πολωμένο φως που εισέρχεται από το πρώτο ηλεκτρόδιο προσκρούει στο δεύτερο ηλεκτρόδιο με κάθετη — σχεδόν — πόλωση και επομένως παρεμποδίζεται, παράγοντας έτσι μαύρο χρώμα. Όσο υψηλότερη είναι η τάση που εφαρμόζεται, τόσο πιο έντονο το μαύρισμα του στοιχείου. Οι οθόνες αποτελούνται από συστοιχίες πυκνά τοποθετημένων στοιχείων υγρών κρυστάλλων, τα οποία αποτελούν τα «εικονοστοιχεία» της οθόνης (Σχήμα 1.9, πάνω αριστερά). Το

χρώμα επιτυγχάνεται τοποθετώντας κοντά μεταξύ τους, στοιχεία επικαλυμμένα με τα τρία βασικά χρώματα. Η διάταξη φωτίζεται από πίσω και εμφανίζει τη μέγιστη φωτεινότητα όταν δεν εφαρμόζεται τάση στα στοιχεία (είναι επίσης δυνατόν να επιτευχθεί η αντίστροφη συσχέτιση μεταξύ τάσης και διαφάνειας, περιστρέφοντας το δεύτερο φίλτρο πόλωσης). Οι υγροί κρύσταλλοι τύπου TFT (thin-film transistor) αποτελούν μία βελτίωση των στοιχείων TN, προσφέροντας υψηλότερη αντίθεση και σημαντικά μικρότερους χρόνους απόκρισης, και χρησιμοποιούνται σήμερα στην πλειονότητα των επίπεδων οθονών υγρών κρυστάλλων.

Σε διάφορα πεδία εφαρμογών στα οποία η υψηλή φωτεινότητα δεν είναι σημαντικός παράγοντας, όπως σε λύσεις ηλεκτρονικού μελανιού (e-ink) και σε φορητές συσκευές άλλες τεχνολογίες έχουν βρει έδαφος να ανθίσουν. Για παράδειγμα, η τεχνολογία των οργανικών φωτοδιόδων (organic light-emitting diode – OLED) προσφέρει μία ελκυστική εναλλακτική λύση στις οθόνες TFT για κάποιες συγκεκριμένες αγορές, κυρίως χάρη στο γεγονός ότι δεν χρειάζεται οπίσθιο φωτισμό, έχει πολύ χαμηλότερη κατανάλωση ενέργειας και μπορεί κυριολεκτικά να «εκτυπωθεί» σε λεπτές και εύκαμπτες επιφάνειες.

Συστήματα προβολής

Οι ψηφιακοί προβολείς είναι συσκευές οπτικής εξόδου ικανές να εμφανίζουν περιεχόμενο πραγματικού χρόνου σε μεγάλες επιφάνειες. Υπάρχουν δύο εναλλακτικές μέθοδοι για την προβολή μίας εικόνας, η *οπίσθια προβολή* και η *εμπρόσθια προβολή*. Στα συστήματα οπίσθιας προβολής, ο προβολέας είναι τοποθετημένος στο πίσω μέρος της επιφάνειας προβολής ως προς τον θεατή και εκπέμπει φως, το οποίο διαπερνά το ημιδιαφανές υλικό του μέσου προβολής και φωτίζει την επιφάνειά του. Στα συστήματα εμπρόσθιας προβολής, ο προβολέας βρίσκεται στην ίδια πλευρά με τον θεατή και φωτίζει μία επιφάνεια, η οποία αντανακλά φως προς τον θεατή.

Υπάρχουν τρεις κύριες τεχνολογίες προβολέων: CRT, LCD, και DLP (digital light processing). Οι δύο πρώτες λειτουργούν με τις ίδιες αρχές που λειτουργούν οι αντίστοιχες οθόνες. Οι προβολείς DLP, οι οποίοι χαρακτηρίζονται από υψηλή αντίθεση και φωτεινότητα, βασίζονται σε μία συστοιχία μικρο-καθρεπτών ενσωματωμένων σε ένα υπόστρωμα πυριτίου (digital micromirror devices – DMD). Οι καθρέπτες στρέφονται ηλεκτροστατικά και λειτουργούν ως κλείστρα, τα οποία είτε επιτρέπουν στο φως να διαπεράσει το αντίστοιχο εικονοστοιχείο, είτε όχι. Χάρη στην υψηλή ταχύτητα αυτών των συσκευών, διαφορετικές αποχρώσεις επιτυγχάνονται στρέφοντας γρήγορα τους καθρέπτες και διαμορφώνοντας το χρονικό διάστημα που παραμένουν κλειστοί. Τα συστήματα DLP υψηλής ποιότητας χρησιμοποιούν τρεις διαφορετικές συστοιχίες για το σχηματισμό των χρωμάτων, ενώ τα συστήματα μίας συστοιχίας χρησιμοποιούν ένα διαφανή χρωματικό δίσκο με τη βοήθεια του οποίου εναλλάσσονται τα τρία χρωματικά κανάλια. Στην τελευταία περίπτωση, ο χρόνος που είναι διαθέσιμος ώστε κάθε καθρέπτης να πραγματοποιήσει τη σειρά περιστροφών που απαιτούνται για την παραγωγή μίας απόχρωσης διαιρείται δια τρία, οδηγώντας σε χαμηλότερες χρωματικές αναλύσεις.

Γραφικά εκτυπωτών

Η τεχνολογία της ηλεκτρονικής εκτύπωσης έχει υποστεί μία σειρά από σημαντικές αλλαγές και πολλοί τύποι εκτυπωτών — όπως οι εκτυπωτές ακίδας και μαργαρίτας και οι σχεδιογράφοι — έχουν σχεδόν πάψει να χρησιμοποιούνται. Ο κυριότερος τρόπος λειτουργίας των εκτυπωτών είναι γραφικός, αν και όλοι οι εκτυπωτές μπορούν να δουλέψουν και ως «εκτυπωτές γραμμής», δεχόμενοι μία ακολουθία χαρακτήρων και τυπώνοντας απλό κείμενο σε γραμμές. Στο γραφικό τρόπο λειτουργίας, προετοιμάζεται μία πλεγματική εικόνα η οποία αντιπροσωπεύει μία τυπωμένη σελίδα ή ένα μικρότερο μέρος αυτής, η οποία αποθηκεύεται στην προσωρινή μνήμη του εκτυπωτή και τελικά μετατρέπεται σε σημεία στο μέσο εκτύπωσης.

Η παραγωγή της πλεγματικής εικόνας μπορεί να γίνει είτε στο υπολογιστικό σύστημα είτε στον ίδιο τον εκτυπωτή, ανάλογα με τις δυνατότητές του. Η πλεγματική εικόνα αντιστοιχεί ακριβώς στη διάταξη των σημείων που θα εκτυπωθούν. Οι φθηνότεροι εκτυπωτές έχουν πολύ περιορισμένες δυνατότητες επεξεργασίας και επομένως η ψηφιοποίηση γίνεται από τον κεντρικό επεξεργαστή μέσω του οδηγού του εκτυπωτή. Οι εκτυπωτές υψηλών δυνατοτήτων (συνήθως εκτυπωτές laser) είναι εξοπλισμένοι με μονάδες επεξεργασίας πλεγματικών εικόνων (συχνά για την εργασία αυτή χρησιμοποιούνται κοινοί μικροεπεξεργαστές) και μνήμη αρκετή για την επιτόπου προετοιμασία της πλεγματικής εικόνας μίας ολόκληρης σελίδας. Τα διανυσματικά γραφικά και οι ψηφιογραφικές εικόνες στέλνονται απευθείας στον εκτυπωτή, αφού μετατραπούν σε μία κατάλληλη *γλώσσα περιγραφής σελίδας* την οποία κατανοεί ο επεξεργαστής πλεγματικής εικόνας, όπως η *Postscript* [Adob07] της Adobe. Η PostScript περιγράφει διδιάστατα γραφικά και κείμενο χρησιμοποιώντας *καμπύλες Bézier* (βλ. Κεφάλαιο 7), διανύσματα, μοτίβα γεμίσματος, και μετασχηματισμούς. Ένα έγγραφο μπορεί να περιγραφεί πλήρως από αυτή τη γλώσσα εκτύπωσης· για το λόγο αυτό η PostScript υιοθετήθηκε από νωρίς και ως μία μεταφέρσιμη προδιαγραφή εγγράφων μεταξύ διαφορετικών συστημάτων. Μετά τη δημιουργία του, ένα έγγραφο PostScript μπορεί να σταλεί απευθείας για εκτύπωση σε έναν εκτυπωτή PostScript ή να μετατραπεί σε άλλη διανυσματική γλώσσα που τυχόν υποστηρίζει ο εκτυπωτής (π.χ. την PCL της Hewlett-Packard). Αυτή η διαδικασία γίνεται από τον οδηγό του εκτυπωτή. Το έγγραφο PostScript μπορεί επίσης να ψηφιοποιηθεί από τον υπολογιστή στη μνήμη του για να προβληθεί στην οθόνη ή για να εκτυπωθεί, με χρήση μίας εφαρμογής διερμηνείας PostScript.

Εκτός από τη δυναμική ανανέωση του περιεχομένου, μία σημαντική διαφορά μεταξύ της εικόνας που παράγεται από μία οθόνη και αυτής που εκτυπώνεται είναι ότι η ένταση του χρώματος στις οθόνες διαμορφώνεται αναλογικά αλλάζοντας ένα ηλεκτρικό σήμα. Ένα εμφανιζόμενο εικονοστοιχείο μπορεί να «φωτιστεί» σε ένα μεγάλο εύρος εντάσεων. Από την άλλη μεριά, το μελάνι είτε αποτίθεται στο χαρτί ή σε άλλο μέσο είτε όχι (αν και κάποιες τεχνολογίες προσφέρουν περιορισμένο έλεγχο της ποσότητας μελανιού που αντιπροσωπεύει ένα σημείο). Στο Κεφάλαιο 11, θα δούμε πώς μπορεί να επιτευχθεί η εντύπωση διαφορετικών εντάσεων ενός χρώματος χρησιμοποιώντας την *αυτοτυπία* (*halftoning*), μία σημαντική τεχνική εκτύπωσης με την οποία

εικονοστοιχεία διαφορετικών αποχρώσεων μπορούν να εκτυπωθούν ως μοτίβα χρωματισμένων σημείων περιορισμένου πλήθους έγχρωμων μελανιών.

Τεχνολογία εκτυπωτών

Οι δύο κυρίαρχες τεχνολογίες εκτύπωσης σήμερα είναι η inkjet και η laser. Οι *εκτυπωτές inkjet* (ψεκασμού) σχηματίζουν μικρά σταγονίδια μελάνης πάνω στο μέσο εκτύπωσης απελευθερώνοντας μελάνι από ακροφύσια που διαθέτουν. Η ροή των σταγονιδίων ελέγχεται είτε μέσω θέρμανσης είτε μέσω του πιεζοηλεκτρικού φαινομένου. Το χαμηλό κόστος των εκτυπωτών inkjet, η δυνατότητά τους να χρησιμοποιούν πολλαπλά έγχρωμα μελάνια (τέσσερα ως έξι) για να σχηματίσουν τις χρωματικές διαβαθμίσεις των εικονοστοιχείων που εκτυπώνουν (προσφέροντας έτσι υψηλής ποιότητας φωτογραφική εκτύπωση) και η αποδεκτή ποιότητα σε γραμμικά σχέδια και κείμενο, τους έχουν καταστήσει ιδανικούς για χρήση στο σπίτι και σε μικρά γραφεία. Από την άλλη μεριά, το υψηλό κόστος ανά σελίδα (που οφείλεται στη μικρή διάρκεια ζωής των δοχείων μελανιών), η χαμηλή ταχύτητα εκτύπωσης, και η χαμηλή ακρίβεια, τους καθιστούν ακατάλληλους για απαιτητικές εργασίες εκτύπωσης, όπου οι εκτυπωτές laser είναι προτιμότεροι.

Οι *εκτυπωτές laser* λειτουργούν με βάση την ακόλουθη αρχή: ένα φωτοευαίσθητο τύμπανο αρχικά φορτίζεται ηλεκτροστατικά. Κατόπιν, με τη βοήθεια ενός μηχανισμού κινούμενων καθρεπτών και φακών, μία ακτίνα laser χαμηλής ισχύος αντιστρέφει το φορτίο στα σημεία κάθε γραμμής που αντιστοιχούν στα σημεία που πρόκειται να τυπωθούν. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται καθώς το τύμπανο περιστρέφεται. Η «χαραγμένη» επιφάνεια του τυμπάνου κατόπιν εκτίθεται στο toner, το οποίο είναι μία πολύ λεπτή πούδρα από έγχρωμα ή μαύρα σωματίδια. Το toner είναι φορτισμένο με την ίδια ηλεκτρική πολικότητα όπως και το τύμπανο· με αυτό τον τρόπο, η φορτισμένη σκόνη έλκεται και αποτίθεται μόνο στις περιοχές του τυμπάνου με αντίθετο φορτίο ενώ απωθείται από τις υπόλοιπες. Το χαρτί ή άλλο μέσο φορτίζεται αντίθετα προς το toner και τυλίγεται γύρω από το τύμπανο, οδηγώντας έτσι τα σωματίδια να μεταφερθούν στην επιφάνειά του. Για να παραμείνουν τα λεπτά σωματίδια του toner πάνω στο μέσο εκτύπωσης, η περιοχή εκτύπωσης υφίσταται έντονη θέρμανση, μέσω της οποίας τα σωματίδια λιώνουν και συγκολλούνται πάνω στο μέσο εκτύπωσης. Έγχρωμη εκτύπωση επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας τρία (έγχρωμα) toner και επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία τρεις φορές. Η υψηλή ακρίβεια της δέσμης laser εξασφαλίζει υψηλή ακρίβεια σχεδίασης καθώς και απεικονίσεων αυτοτυπίας. Επίσης η ταχύτητα εκτύπωσης είναι ανώτερη αυτής των εκτυπωτών inkjet και τα toner διαρκούν πολύ περισσότερο από τα δοχεία μελανιών των εκτυπωτών inkjet. Μία παραλλαγή του εκτυπωτή laser είναι ο εκτυπωτής LED: μία πυκνή σειρά σταθερών LED φωτίζει προς το τύμπανο αντί για μία κινούμενη κεφαλή με laser, ενώ ο υπόλοιπος μηχανισμός είναι ίδιος. Τα λιγότερα κινούμενα μέρη καθιστούν αυτούς τους εκτυπωτές φθηνότερους· ωστόσο, δε μπορούν να επιτύχουν την υψηλή ανάλυση των εκτυπωτών laser.

1.7 Συμβάσεις

Στο βιβλίο αυτό χρησιμοποιείται γενικά ο ακόλουθος μαθηματικός συμβολισμός.

- Τα *βαθμωτά μεγέθη* συμβολίζονται με πλάγια γράμματα.
- Οι *διανυσματικές ποσότητες* συμβολίζονται με έντονα γράμματα. Διαφοροποιούμε τα σημεία του $\mathbb{E}^k$, τα οποία αντιπροσωπεύουν θέσεις, από τα διανύσματα του $\mathbb{R}^k$, τα οποία αντιπροσωπεύουν κατευθύνσεις· δείτε επίσης το Παράρτημα Α. Ειδικότερα:
  - τα *σημεία* του $\mathbb{E}^k$ συμβολίζονται με όρθια έντονα γράμματα, συνήθως πεζά, π.χ. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$
  - τα *διανύσματα* του $\mathbb{R}^k$ συμβολίζονται με όρθια έντονα γράμματα, συνήθως πεζά, με ένα βέλος από πάνω, π.χ. $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{Oa}}$
  - τα *μοναδιαία διανύσματα* συμβολίζονται με όρθια έντονα γράμματα, συνήθως πεζά, με ένα «καπέλο» από πάνω, π.χ. $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{n}}$.
- Οι *πίνακες* συμβολίζονται με κεφαλαία όρθια έντονα γράμματα, π.χ. $\mathbf{M}$, $\mathbf{R}_x$.

  Συνήθως χρησιμοποιούνται διανύσματα-στήλες· τα διανύσματα-γραμμές συμβολίζονται με το σύμβολο του ανάστροφου, π.χ. $\vec{\mathbf{v}}^{\mathrm{T}} = [0, 1, 2]$. Για ευκολία της παρουσίασης, για τα σημεία χρησιμοποιείται επίσης ο εναλλακτικός συμβολισμός (x, y, z).
- Οι *συναρτήσεις* συμβολίζονται ως εξής:
  - Οι συνήθεις μαθηματικές συναρτήσεις καθώς και αυτές που ορίζονται από τους συγγραφείς συμβολίζονται με όρθια γράμματα, π.χ. $\sin(\theta)$.
  - Οι συναρτήσεις ακολουθούν τις παραπάνω συμβάσεις για τις βαθμωτές και διανυσματικές ποσότητες, π.χ. $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{x}})$ είναι μία διανυσματική συνάρτηση διανυσματικής μεταβλητής, $\vec{\mathbf{g}}(x)$ είναι μία διανυσματική συνάρτηση βαθμωτής μεταβλητής, κ.ο.κ.
- Το *μέτρο* διανύσματος συμβολίζεται με μονές κάθετες γραμμές, π.χ. $|\vec{\mathbf{v}}|$.
- Τα *συνήθη σύνολα* συμβολίζονται με τα γνωστά μαθηματικά τους γράμματα, π.χ. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Οι *περιγραφές αλγορίθμων* δίνονται σε ψευδοκώδικα που βασίζεται στις γλώσσες C και C++. Το επίπεδο της παρουσίασης διαφέρει ανάλογα με τις ιδιαίτερες απαιτήσεις λεπτομέρειας του κάθε αλγορίθμου.

Οι *προχωρημένες ενότητες* σημειώνονται με αστερίσκο $^{\circledast}$ και απευθύνονται σε πιο προχωρημένα μαθήματα, όπως περιγράφεται και στον Πρόλογο.

2

Αλγόριθμοι σχεδίασης

Μια γραμμή είναι μια τελεία που πήγε περίπατο.
—Paul Klee

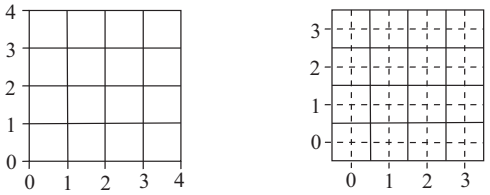
2.1 Εισαγωγή

Οι διδιάστατες συσκευές απεικόνισης (π.χ. οθόνες) αποτελούνται από ένα διακριτό πλέγμα εικονοστοιχείων, καθένα από τα οποία μπορεί ανεξάρτητα να λάβει μια χρωματική τιμή. Η *σχεδίαση* (*rasterization*) είναι η διαδικασία της μετατροπής διδιάστατων στοιχειωδών σχημάτων[1] σε μια διακριτή παράσταση. Με άλλα λόγια, πρέπει να βρεθούν τα εικονοστοιχεία που απαρτίζουν ένα στοιχειώδες σχήμα.

Δεδομένου ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε P στοιχειώδη σχήματα για ένα συγκεκριμένο καρέ, και υποθέτοντας ότι κάθε στοιχειώδες σχήμα αποτελείται από p εικονοστοιχεία, η πολυπλοκότητα της σχεδίασης είναι γενικά $O(Pp)$. Προηγούμενα στάδια στην σωλήνωση γραφικών (π.χ. μετασχηματισμοί και περικοπή) χρησιμοποιούν μόνο τις κορυφές των στοιχειωδών σχημάτων. Γενικά, η πολυπλοκότητα αυτών των προηγούμενων σταδίων είναι $O(Pv)$, όπου v είναι το μέσο πλήθος κορυφών ανά στοιχειώδες σχήμα. Συνήθως $p \gg v$, οπότε πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι οι αλγόριθμοι σχεδίασης είναι ιδιαίτερα αποδοτικοί αν θέλουμε το στάδιο της σχεδίασης να μην είναι το πιο αργό στη σωλήνωση γραφικών.

Τα *εικονοστοιχεία* (*pixels*) μιας πλεγματικής συσκευής (π.χ. οθόνης) αποτελούν ένα διδιάστατο κανονικό πλέγμα. Υπάρχουν δύο τρόποι θεώρησης του πλέγματος αυτού (Σχήμα 2.1).

[1] Π.χ. ευθείες και πολύγωνα.



Σχήμα 2.1: *Δύο τρόποι θεώρησης ενός εικονοστοιχείου.*

- *Κέντρα σε ημίσειες συντεταγμένες:* Τα εικονοστοιχεία διαχωρίζονται από φανταστικές κάθετες και οριζόντιες γραμμές που περνούν από ακέραιες συντεταγμένες. Τα κέντρα των εικονοστοιχείων είναι λοιπόν σε ημίσειες συντεταγμένες (π.χ. 2.5, 1.5).
- *Κέντρα σε ακέραιες συντεταγμένες:* Όταν το πλέγμα των εικονοστοιχείων θεωρείται ως ένα σύνολο σημείων δειγματοληψίας, είναι φυσικό να τοποθετούνται τα σημεία δειγματοληψίας (κέντρα εικονοστοιχείων) σε ακέραιες συντεταγμένες.

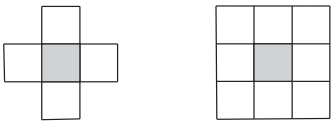
Εδώ θα θεωρήσουμε τα κέντρα σε ακέραιες συντεταγμένες. Όταν αναφερόμαστε σ' ένα εικονοστοιχείο σαν σημείο θα εννοούμε το κέντρο του εικονοστοιχείου.

Μια σημαντική έννοια στη σχεδίαση είναι αυτή της *σύνδεσης* (*connectedness*). Πότε είναι συνδεδεμένο ένα σχήμα που αποτελείται από εικονοστοιχεία; Για παράδειγμα, αν ένας αλγόριθμος σχεδίασης καμπύλης μεταβεί από ένα εικονοστοιχείο στον διαγώνιο γείτονά του, η καμπύλη είναι συνδεδεμένη ή υπάρχει κενό; Το βασικό ερώτημα είναι: ποιοι είναι οι γείτονες ενός εικονοστοιχείου; Υπάρχουν δύο συνήθεις απαντήσεις: *τετραπλή σύνδεση* και *οκταπλή σύνδεση* (Σχήμα 2.2). Στην τετραπλή σύνδεση οι γείτονες είναι τα 4 πλησιέστερα εικονοστοιχεία (πάνω, κάτω, δεξιά, αριστερά) ενώ στην οκταπλή σύνδεση οι γείτονες είναι τα 8 πλησιέστερα εικονοστοιχεία (περιλαμβάνουν και τα διαγώνια). Όποιο είδος σύνδεσης και αν επιλέξουμε, πρέπει να σιγουρευτούμε ότι οι αλγόριθμοι σχεδίασής μας το εφαρμόζουν. Εδώ χρησιμοποιούμε οκταπλή σύνδεση.

Η δημιουργία αλγορίθμων σχεδίασης για μια κλάση στοιχειωδών σχημάτων έχει δύο βασικούς στόχους:

1. επιλογή των εικονοστοιχείων που παριστάνουν ένα σχήμα με *ακρίβεια*,
2. *αποδοτικότητα*.

Ο πρώτος στόχος είναι απαραίτητος για τη σωστή σύνδεση και συνεπάγεται ότι ένας αλγόριθμος σχεδίασης επιλέγει τα εικονοστοιχεία που παριστάνουν καλύτερα ένα



Σχήμα 2.2: *Τετραπλή και οκταπλή σύνδεση.*

σχήμα, ότι μεταβάλλει μόνο αυτά τα εικονοστοιχεία και ότι μεταβάλλει τις χρωματικές τιμές αυτών των εικονοστοιχείων σωστά. Ο δεύτερος στόχος είναι επίσης πολύ σημαντικός, καθώς μια συνθετική σκηνή μπορεί να περιλαμβάνει πολύ μεγάλο αριθμό στοιχειωδών σχημάτων και συχνά υπάρχει απαίτηση λειτουργίας σε πραγματικό χρόνο.

Το κεφάλαιο αυτό ασχολείται με τις μαθηματικές αρχές και τους αλγορίθμους για τη σχεδίαση κοινών *στοιχειωδών σχημάτων*: ευθύγραμμα τμήματα, κύκλοι, γενικά πολύγωνα, τρίγωνα και κλειστές περιοχές. Επίσης εξηγεί τις τεχνικές της προοπτικής διόρθωσης και της αντιταύτισης που βελτιώνουν το αποτέλεσμα της σχεδίασης. Τέλος μελετά αλγορίθμους αποκοπής που προσδιορίζουν την τομή ενός στοιχειώδους σχήματος και ενός αντικειμένου αποκοπής οι οποίοι είναι χρήσιμοι, μεταξύ άλλων, στην περικοπή αντικειμένων που βρίσκονται εκτός του οπτικού πεδίου.

2.2 Μαθηματικές καμπύλες και πεπερασμένες διαφορές

Μεταξύ των μαθηματικών ορισμών διδιάστατων στοιχειωδών καμπυλών, ο *πεπλεγμένος* και ο *παραμετρικός* ορισμός είναι οι πιο χρήσιμοι στη σχεδίαση. Μια πεπλεγμένη καμπύλη ορίζεται σαν μια συνάρτηση $f(x, y)$ που παράγει τρία πιθανά αποτελέσματα:

$$f(x,y)\begin{cases} < 0, & \text{συνεπάγεται οτι το σημείο } (x,y) \text{ είναι εντός της καμπύλης,} \\ = 0, & \text{συνεπάγεται οτι το σημείο } (x,y) \text{ είναι πάνω στην καμπύλη,} \\ > 0, & \text{συνεπάγεται οτι το σημείο } (x,y) \text{ είναι εκτός της καμπύλης.} \end{cases}$$

Οι όροι εντός και εκτός δεν έχουν ειδική σημασία, και σε μερικές περιπτώσεις (π.χ. ευθεία) είναι εντελώς συμμετρικοί. Έτσι μια καμπύλη διαιρεί το επίπεδο σε δύο μη επικαλυπτόμενες περιοχές: την εσωτερική και την εξωτερική.

Για παράδειγμα, η πεπλεγμένη μορφή μιας ευθείας είναι:

$$l(x, y) \equiv ax + by + c = 0, \tag{2.1}$$

όπου a, b, και c οι συντελεστές της ευθείας. Τα σημεία (x, y) πάνω στην ευθεία έχουν $l(x, y) = 0$. Για μια ευθεία από το $\mathbf{p_1} = (x_1, y_1)$ στο $\mathbf{p_2} = (x_2, y_2)$, έχουμε $a = y_2 - y_1$, $b = x_1 - x_2$ και $c = x_2 y_1 - x_1 y_2$. Η ευθεία διαιρεί το επίπεδο σε δύο ημι-επίπεδα. Σημεία με $l(x, y) < 0$ είναι στο ένα ημι-επίπεδο, ενώ σημεία με $l(x, y) > 0$ είναι στο άλλο.

Η πεπλεγμένη μορφή κύκλου με κέντρο $\mathbf{c} = (x_c, y_c)$ και ακτίνα r είναι:

$$c(x, y) \equiv (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 - r^2 = 0. \tag{2.2}$$

Ένα σημείο (x, y) για το οποίο $c(x, y) = 0$ είναι πάνω στον κύκλο. Αν $c(x, y) < 0$ το σημείο είναι εντός του κύκλου, ενώ αν $c(x, y) > 0$ το σημείο είναι εκτός του κύκλου.

Η παραμετρική μορφή ορίζει την καμπύλη σαν συνάρτηση μιας παραμέτρου t, η οποία προσεγγίζει το διανυθέν μήκος τόξου επί της καμπύλης. Για παράδειγμα, ο παραμετρικός ορισμός μιας ευθείας που ορίζεται από τα σημεία $\mathbf{p_1} = (x_1, y_1)$ και $\mathbf{p_2} =$

(x_2, y_2) είναι:

$$\mathbf{l}(t) = (x(t), y(t)), \tag{2.3}$$

όπου

$$x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1), \qquad y(t) = y_1 + t(y_2 - y_1).$$

Καθώς το t παίρνει τιμές από το 0 πρός το 1, σχηματίζεται το ευθύγραμμο τμήμα από το $\mathbf{p_1}$ στο $\mathbf{p_2}$. Προεκτείνοντας τις τιμές του t εκτός του διαστήματος αυτού σχηματίζεται η ευθεία που ορίζεται από τα $\mathbf{p_1}$ και $\mathbf{p_2}$.

Παρομοίως, ο παραμετρικός ορισμός κύκλου με κέντρο (x_c, y_c) και ακτίνα r είναι:

$$\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t)),$$

όπου

$$x(t) = x_c + r\cos(2\pi t), \qquad y(t) = y_c + r\sin(2\pi t).$$

Καθώς το t παίρνει τιμές από το 0 στο 1 διαγράφεται ο κύκλος. Αν προεκταθούν οι τιμές του t πέραν των ορίων αυτών, ο κύκλος επαναδιαγράφεται.

Οι συναρτήσεις που ορίζουν στοιχειώδη σχήματα, συχνά χρειάζεται να πάρουν τιμές πάνω στο πλέγμα των εικονοστοιχείων, π.χ. κατά τη διάρκεια της σχεδίασης για την απομάκρυνση κρυμμένων επιφανειών. Ο υπολογισμός της τιμής τους για κάθε εικονοστοιχείο ανεξάρτητα δεν είναι αποδοτικός. Για παράδειγμα ο υπολογισμός τιμής της πεπλεγμένης συνάρτησης ευθείας κοστίζει 2 πολλαπλασιασμούς και 2 προσθέσεις, ενώ της συνάρτησης κύκλου κοστίζει 3 πολλαπλασιασμούς και 4 προσθέσεις ανά εικονοστοιχείο. Ευτυχώς η κανονικότητα του πλέγματος των εικονοστοιχείων μας δίνει τη δυνατότητα να μειώσουμε αυτό το κόστος εκμεταλλευόμενοι τις *πεπερασμένες διαφορές* (*finite differences*) των συναρτήσεων [Krey06]. Η πρώτη *έμπροσθεν διαφορά* (*forward difference*) μιας συνάρτησης f στο x_i ορίζεται ως:

$$\delta f_i = f_{i+1} - f_i,$$

όπου $f_i = f(x_i)$. Παρομοίως η δεύτερη έμπροσθεν διαφορά στο x_i είναι

$$\delta^2 f_i = \delta f_{i+1} - \delta f_i,$$

και, γενικεύοντας, η k-οστή έμπροσθεν διαφορά της ορίζεται αναδρομικά

$$\delta^k f_i = \delta^{k-1} f_{i+1} - \delta^{k-1} f_i.$$

Για μια πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n, όλες οι διαφορές από την n-οστή και πάνω είναι σταθερές (και από την $(n+1)$-οστή και πάνω είναι 0). Θεωρώντας την πεπλεγμένη εξίσωση ευθείας (2.1), ας υπολογίσουμε τις έμπροσθεν διαφορές της για ένα μοναδιαίο βήμα στο x, δηλαδή από το εικονοστοιχείο x στο εικονοστοιχείο $x+1$. Αφού η εξίσωση είναι πρώτου βαθμού στο x, χρειάζεται να υπολογίσουμε μόνο την πρώτη (σταθερή) έμπροσθεν διαφορά της κατά x:

$$\delta_x l(x,y) = l(x+1,y) - l(x,y) = a, \tag{2.4}$$

όπου δ_x είναι η έμπροσθεν διαφορά κατά την παράμετρο x. Παρομοίως $\delta_y l(x,y) = b$. Έτσι οι τιμές της συνάρτησης της ευθείας μπορούν να υπολογισθούν αυξητικά, από εικονοστοιχείο σε εικονοστοιχείο. Για να βρούμε την τιμή της στο εικονοστοιχείο $(x+1,y)$ από την τιμή της $l(x,y)$ στο εικονοστοιχείο (x,y), απλά υπολογίζουμε την $l(x,y)+\delta_x l(x,y) = l(x,y)+a$. Για να πάμε από το εικονοστοιχείο (x,y) στο $(x,y+1)$, υπολογίζουμε την $l(x,y)+\delta_y l(x,y) = l(x,y)+b$. Κάθε αυξητικός υπολογισμός τιμής της συνάρτησης ευθείας κοστίζει μόνο μία πρόσθεση.

Ας υπολογίσουμε τις έμπροσθεν διαφορές κατά x της εξίσωσης του κύκλου (2.2). Αφού αυτή είναι δευτέρου βαθμού θα υπάρχουν δύο έμπροσθεν διαφορές. Για το σημείο (x,y) αυτές είναι:

$$\begin{aligned} \delta_x c(x,y) &= c(x+1,y) - c(x,y) = 2(x - x_c) + 1, \\ \delta_x^2 c(x,y) &= \delta_x c(x+1,y) - \delta_x c(x,y) = 2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Για να υπολογίσουμε αυξητικά την τιμή της εξίσωσης του κύκλου από το $c(x,y)$ στο $c(x+1,y)$ απαιτούνται 2 προσθέσεις:

$$\begin{aligned} \delta_x c(x,y) &= \delta_x c(x-1,y) + \delta_x^2 c(x,y), \\ c(x+1,y) &= c(x,y) + \delta_x c(x,y). \end{aligned}$$

Παρομοίως, μπορούμε να υπολογίσουμε αυξητικά τις τιμές της από το $c(x,y)$ στο $c(x,y+1)$ προσθέτοντας το $\delta_y c(x,y)$ και το $\delta_y^2 c(x,y)$.

Για να σχεδιάσουμε ένα στοιχειώδες σχήμα πρέπει να βρούμε τα εικονοστοιχεία που το απαρτίζουν. Ένας τρόπος να το επιτύχουμε αυτό είναι να ορίσουμε μια λογική συνάρτηση, η οποία αποφαίνεται αν ένα εικονοστοιχείο (x,y) ανήκει στο στοιχειώδες σχήμα ή όχι. Για το σκοπό αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια πεπλεγμένη συνάρτηση. Για παράδειγμα, η απόσταση ενός εικονοστοιχείου (x,y) από την ευθεία που περιγράφεται από την πεπλεγμένη συνάρτηση (2.1) είναι

$$\frac{|l(x,y)|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Ένας έλεγχος για την υπαγωγή του εικονοστοιχείου (x,y) στη σχεδίαση της ευθείας θα μπορούσε συνεπώς να είναι

$$|l(x,y)| < e,$$

όπου το e σχετίζεται με το απαιτούμενο πάχος της ευθείας. Δυστυχώς ο τυφλός υπολογισμός τέτοιων συναρτήσεων πάνω στο πλέγμα των εικονοστοιχείων είναι χρονοβόρος, ακόμα και αν γίνει αυξητικά χρησιμοποιώντας τις πεπερασμένες διαφορές των συναρτήσεων. Αντίθετα υπάρχουν μέθοδοι που «παρακολουθούν» ένα στοιχειώδες σχήμα και είναι γενικά πιο αποδοτικές.

2.3 Σχεδίαση ευθείας

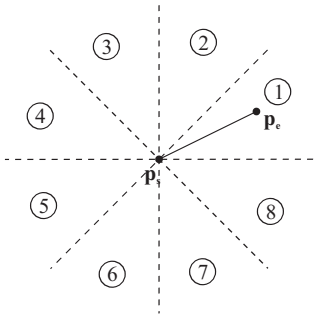
Για να δημιουργήσουμε έναν καλό αλγόριθμο σχεδίασης ευθείας[2] πρέπει πρώτα να αποφασίσουμε ποιο είναι το κριτήριο ορθότητάς του. Γενικά, δεν είναι δυνατόν να επιλέγουμε εικονοστοιχεία που βρίσκονται ακριβώς πάνω στη μαθηματική ευθεία καθώς το πλέγμα των εικονοστοιχείων έχει πεπερασμένη ανάλυση, οπότε πρέπει να κάνουμε μια προσέγγιση. Οι επιθυμητές ιδιότητες ενός αλγορίθμου σχεδίασης ευθείας είναι:

1. επιλογή των πλησιέστερων εικονοστοιχείων στη μαθηματική ευθεία,
2. σταθερό πάχος, ανεξάρτητο από την κλίση της ευθείας,
3. μη ύπαρξη κενών,
4. αποδοτικότητα.

Η παρακάτω ανάπτυξη αλγορίθμων σχεδίασης ευθείας ακολουθεί τη μεθοδολογία των Sproull [Spro82], Harris [Harr04], και Rauber [Raub93].

Έστω ότι επιθυμούμε να σχεδιάσουμε ευθεία από το εικονοστοιχείο $\mathbf{p_s} = (x_s, y_s)$ στο εικονοστοιχείο $\mathbf{p_e} = (x_e, y_e)$ του πρώτου οκταμορίου[3] (Σχήμα 2.3). Αν $s = (y_e - y_s)/(x_e - x_s)$ είναι η κλίση της ευθείας, τότε η ακολουθία των εικονοστοιχείων που θα επιλεγούν μπορεί να εξαχθεί από την άμεση εξίσωση της ευθείας:

$$y = y_s + round(s \cdot (x - x_s)),$$
$$x = x_s, \ldots, x_e.$$



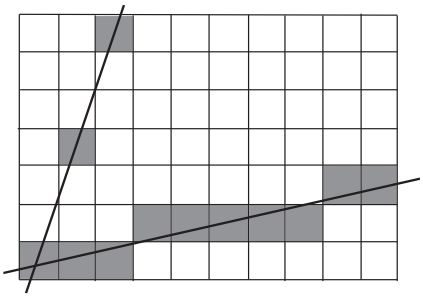
Σχήμα 2.3: *Τα οκτώ οκταμόρια και μια ευθεία στο πρώτο οκταμόριο.*

Ο αλγόριθμος `line1` επιλέγει την παραπάνω ακολουθία εικονοστοιχείων:

```
line1 ( int xs, int ys, int xe, int ye, color c )  {
    float s; int x,y;
```

[2]Στην ενότητα αυτή, χάρη συντομίας, θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα τον όρο «ευθεία» αναφερόμενοι στο «ευθύγραμμο τμήμα».

[3]Τα άλλα οκταμόρια αντιμετωπίζονται ανάλογα.



Σχήμα 2.4: *Χρήση του αλγορίθμου* `line1` *στο πρώτο και δεύτερο οκταμόριο.*

```
    s=(ye-ys) / (xe-xs);
    (x,y)=(xs,ys);
    while (x <= xe) {
        setpixel(x,y,c);
        x=x+1;
        y=ys + round(s * (x-xs));
    }
}
```

Ο βρόχος `while` βασίζεται στη μεταβλητή του *κύριου άξονα* της ευθείας (x). Ο κύριος άξονας είναι ο x αν $|x_e - x_s| > |y_e - y_s|$· διαφορετικά είναι ο y. Ο μη κύριος άξονας ονομάζεται *δευτερεύον άξονας*. Αν ο αλγόριθμος `line1` χρησιμοποιηθεί για τον σχεδιασμό ευθείας με κύριο άξονα τον y, θα δημιουργήσει κενά (Σχήμα 2.4). Πρέπει να χρησιμοποιηθεί τότε εναλλακτικός κώδικας που να βασίζει τον βρόχο στη μεταβλητή y. Πρέπει τέλος να ελέγξουμε τη συνθήκη $x_e - x_s = 0$, ώστε να αποφύγουμε διαίρεση με το 0· Στην περίπτωση αυτή ο σχεδιασμός ευθείας είναι τετριμμένος.

Η τιμή που στρογγυλοποιείται (στην εντολή `round`) αυξάνεται κατά s σε κάθε εκτέλεση του βρόχου. Η υπολογιστικά ακριβή αυτή λειτουργία μπορεί να αποφευχθεί, αν διασπαστεί η τιμή y σε ακέραιο μέρος και σε δεκαδικό μέρος e και ο υπολογισμός της γίνεται αυξητικά. Έτσι λαμβάνουμε τον αλγόριθμο `line2`:

```
line2 ( int xs, int ys, int xe, int ye, color c ) {
    float s,e; int x,y;

    e=0;
    s=(ye-ys) / (xe-xs);
    (x,y)=(xs,ys);
    while (x <= xe) {
        /* -1/2 <= e < 1/2 */
        setpixel(x,y,c);
        x=x+1;
        e=e+s;
```

```
            if (e >= 1/2) {
                y=y+1;
                e=e-1;
            }
        }
    }
```

Σημειωτέον ότι ο αλγόριθμος `line2` μοιάζει με τον υπολογισμό δίσεκτων ετών. Σε κάθε επανάληψη η τιμή της κλίσης προστίθεται στη μεταβλητή e ώσπου αυτή να γίνει πάνω από μισή μονάδα, οπότε η ευθεία «ανεβαίνει» κατά 1: η ακέραια μεταβλητή y αυξάνεται κατά 1 ενώ η e μειώνεται αντίστοιχα κατά 1, ώστε το άθροισμά τους να παραμένει σταθερό. Παρομοίως, ένα έτος έχει περίπου 365,25 ημέρες, αλλά τα ημερολόγια πρέπει να έχουν ακέραιο αριθμό ημερών. Έτσι προσθέτουμε μια μέρα σε κάθε τέταρτο έτος, ώστε να διορθώνεται το λάθος που συσσωρεύεται [Harr04].

Με την κατάλληλη κλιμάκωση οι πραγματικές μεταβλητές του αλγορίθμου `line2` μπορούν να αντικατασταθούν από ακέραιες μεταβλητές. Πολλαπλασιάζοντας τις μεταβλητές απόφασης με $dx = x_e - x_s$ οι s και e μετατρέπονται σε ακέραιες μεταβλητές. Η έκφραση απόφασης γίνεται $e \geq dx/2$, αλλά καθώς η e είναι τώρα ακέραια, το $dx/2$ μπορεί να αντικατασταθεί από την ακέραια τιμή $\lfloor dx/2 \rfloor$ η οποία μπορεί να υπολογισθεί με μια ολίσθηση. Επίσης μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον έλεγχο $e \geq \lfloor dx/2 \rfloor$ από τον πιο αποτελεσματικό $e \geq 0$ με μια αρχική αφαίρεση $\lfloor dx/2 \rfloor$ από τη μεταβλητή e. Έτσι καταλήγουμε στον αλγόριθμο του Bresenham [Bres65]:

```
line3 ( int xs, int ys, int xe, int ye, color c )  {
    int x,y,e,dx,dy;

    dx=(xe-xs);
    dy=(ye-ys);
    e=-(dx >> 1);
    (x,y)=(xs,ys);
    while (x <= xe) {
        /* assert -dx <= e < 0 */
        setpixel(x,y,c);
        x=x+1;
        e=e+dy;
        if (e >= 0) {
            y=y+1;
            e=e-dx;
        }
    }
}
```

όπου » είναι ο τελεστής δεξιάς ολίσθησης (δεξιά ολίσθηση κατά 1 ψηφίο είναι ισοδύναμη με το ακέραιο μέρος της διαίρεσης με το 2). Ο αλγόριθμος `line3` είναι κατάλληλος για ευθείες στο πρώτο οκταμόριο. Ο κύριος άξονας για κάθε ένα από τα οκτώ οκταμόρια και η ενέργεια στη μεταβλητή του δευτερεύοντα άξονα δίνονται στον Πίνακα 2.1.

Οκταμόριο	Κύριος άξονας	Μεταβλητή δευτερεύοντα άξονα
1	x	αυξάνεται
2	y	αυξάνεται
3	y	μειώνεται
4	x	αυξάνεται
5	x	μειώνεται
6	y	μειώνεται
7	y	αυξάνεται
8	x	μειώνεται

Πίνακας 2.1: *Χαρακτηριστικά σχεδίασης ευθείας ανά οκταμόριο.*

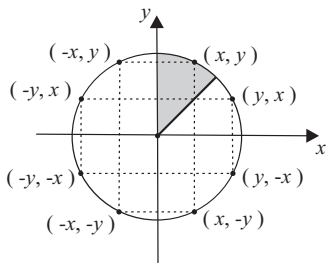
Κατά τη σχεδίαση ευθειών στο όγδοο οκταμόριο η τιμή του y στο βρόχο μειώνεται και το dy υπολογίζεται αντίθετα ώστε να είναι θετικό. Στο τέταρτο και στο πέμπτο οκταμόριο γίνεται αντιμετάθεση των άκρων των ευθειών, οπότε μετατρέπονται σε ευθείες του όγδοου και του πρώτου οκταμορίου αντίστοιχα. Ευθείες του δεύτερου, τρίτου, έκτου και έβδομου οκταμορίου έχουν σαν κύριο άξονα τον y και χρησιμοποιούν μια συμμετρική εκδοχή του αλγορίθμου που εκτελεί τον βρόχο `while` στη μεταβλητή y. Ένας βελτιστοποιημένος αλγόριθμος σχεδίασης ευθείας Bresenham συνήθως περιλαμβάνει δύο εκδοχές, μία για την περίπτωση που κύριος άξονας είναι ο x και μία για την περίπτωση που κύριος άξονας είναι ο y.

Σημειώνουμε εδώ πως ο αλγόριθμος Bresenham ανταποκρίνεται στις αρχικές απαιτήσεις ενός καλού αλγορίθμου σχεδίασης ευθείας. Πρώτον, επιλέγει τα πλησιέστερα εικονοστοιχεία στην μαθηματική πορεία της ευθείας αφού είναι ισοδύναμος με τον `line1` που στρογγυλοποιούσε σημεία της μαθηματικής ευθείας στο πλησιέστερο εικονοστοιχείο. Δεύτερον, η έννοια του κύριου άξονα εξασφαλίζει περίπου σταθερό πάχος και μη ύπαρξη κενών (με την έννοια της οκταπλής σύνδεσης). Τρίτον, είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικός καθώς χρησιμοποιεί μόνον ακέραιες μεταβλητές και απλές πράξεις πάνω σ¨ αυτές (πρόσθεση, αφαίρεση και ολίσθηση).

2.4 Σχεδίαση κύκλου

Ο κύκλος χρησιμοποιείται ως στοιχειώδες σχήμα σε σχεδιαστικές και άλλες εφαρμογές. Ας δούμε πως μπορεί να σχεδιασθεί η περίμετρος ενός κύκλου. Ένας κύκλος έχει οκταπλή συμμετρία (Σχήμα 2.5), πράγμα που μπορούμε να εκμεταλλευτούμε κατά την σχεδίασή του. Αρκεί να υπολογίσουμε τα εικονοστοιχεία που αποτελούν ένα από τα οκταμόριά του και τα υπόλοιπα εξάγονται από αυτά με χρήση της οκταπλής συμμετρίας (παίρνοντας όλους τους συνδυασμούς ανταλλαγής και άρνησης των x και y τιμών).

Περιγράφουμε μια παραλλαγή του αλγορίθμου σχεδίασης κύκλου του Bresenham [Bres77] που οφείλεται στον Hanrahan [Hanr98]. Έστω ότι σχεδιάζουμε τόξο κύκλου στο δεύτερο οκταμόριο (με σκούρο φόντο στο Σχήμα 2.5) που ανήκει σε κύκλο ακτίνας r με κέντρο στο κέντρο συντεταγμένων, ξεκινώντας τη σχεδίαση από το εικονοστοιχείο $(0, r)$. Στο δεύτερο οκταμόριο ο κύριος άξονας είναι ο x και ο δευτερεύοντας



Σχήμα 2.5: *Οκταπλή συμμετρία του κύκλου.*

άξονας είναι ο $-y$. Έτσι σε κάθε βήμα το x αυξάνεται κατά 1 και κάποιες φορές το y μειώνεται κατά 1. Ο αλγόριθμος επιλέγει εικονοστοιχεία που συνορεύουν *από κάτω* με τον μαθηματικό κύκλο, αυξάνοντας το x σε κάθε βήμα. Αν η τιμή της συνάρτησης του κύκλου γίνει μη-αρνητική (εικονοστοιχείο εκτός κύκλου)[4] τότε το y μειώνεται κατά 1 (Σχήμα 2.6). Η τιμή της συνάρτησης του κύκλου για το τρέχον εικονοστοιχείο φυλάσσεται στην μεταβλητή e.

Όπως αναφέρθηκε, ο αλγόριθμος αυτός δεν χειρίζεται τα εσωτερικά και τα εξωτερικά εικονοστοιχεία συμμετρικά. Για να τεθούν τα επιλεγόμενα εικονοστοιχεία πάνω στον κύκλο, χρησιμοποιούμε μια συνάρτηση κύκλου μετατοπισμένη κατά μισό εικονοστοιχείο προς τα πάνω $(+y)$. Το κέντρο του κύκλου γίνεται $(0, \frac{1}{2})$:

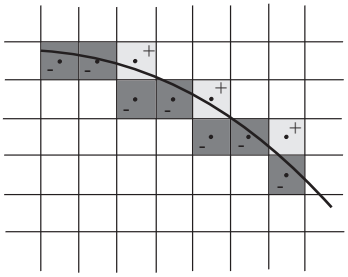
$$c(x, y) = x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 - r^2 = 0.$$

Έτσι καταλήγουμε στον ακόλουθο αλγόριθμο:

```
circle ( int r, color c )  {
    int x,y,e;

    x=0
    y=r
    e=-r
    while (x <= y) {
        /* e == x^2 + (y - 1/2)^2 - r^2 */
        set8pixels(x,y,c);
        e=e+2*x+1;
        x=x+1;
        if (e >= 0) {
            e=e-2*y+2;
            y=y-1;
        }
    }
}
```

[4] Η πεπλεγμένη συνάρτηση κύκλου $c(x, y)$ (Εξίσωση (2.2)) δίνει τιμή 0 για σημεία πάνω στην περίμετρο του κύκλου, θετικές τιμές για σημεία εκτός του κύκλου και αρνητικές τιμές για σημεία εντός του κύκλου.



Σχήμα 2.6: *Σχεδίαση κύκλου στο δεύτερο οκταμόριο.*

Η μεταβλητή σφάλματος e πρέπει να αρχικοποιηθεί σε:

$$c(0,r) = (r - \frac{1}{2})^2 - r^2 = \frac{1}{4} - r,$$

αλλά καθώς αυτή είναι ακέραια μεταβλητή, το $\frac{1}{4}$ μπορεί να καταργηθεί χωρίς να αλλάξει η σημασιολογία του αλγορίθμου. Για τον αυξητικό υπολογισμό του e (που φυλάσσει την τιμή της πεπλεγμένης συνάρτησης του κύκλου), χρησιμοποιούμε τις πεπερασμένες διαφορές της συνάρτησης αυτής για τα δύο πιθανά βήματα που εκτελεί ο αλγόριθμος:

$$c(x+1,y) - c(x,y) = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1;$$
$$c(x,y-1) - c(x,y) = (y - \frac{3}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2 = -2y + 2.$$

Ο παραπάνω αλγόριθμος είναι πολύ αποτελεσματικός καθώς χρησιμοποιεί μόνον ακέραιες μεταβλητές και απλές πράξεις (προσθαφαιρέσεις και πολλαπλασιασμούς με δυνάμεις του 2) και υπολογίζει μόνο το $\frac{1}{8}$ της περιφέρειας του κύκλου. Τα υπόλοιπα $\frac{7}{8}$ υπολογίζονται με χρήση της συμμετρίας του κύκλου :

```
set8pixels ( int x,y, color c )  {

    setpixel(x,y,c);
    setpixel(y,x,c);
    setpixel(y,-x,c);
    setpixel(x,-y,c);
    setpixel(-x,-y,c);
    setpixel(-y,-x,c);
    setpixel(-y,x,c);
    setpixel(-x,y,c);
}
```

2.5 Έλεγχοι εσωτερικού σημείου

Το πιο διαδεδομένο στοιχείο για την κατασκευή μοντέλων επιφανείας είναι το πολύγωνο και ειδικότερα το τρίγωνο. Οι αλγόριθμοι σχεδίασης τόσο της περιμέτρου όσο και του εσωτερικού ενός πολυγώνου βασίζονται στον έλεγχο για το αν ένα σημείο (εικονοστοιχείο) βρίσκεται εντός ενός πολυγώνου. Θα ορίσουμε ένα *πολύγωνο* ως κλειστή τεθλασμένη γραμμή στο $\mathbb{R}^2$. Πιο συγκεκριμένα, ένα πολύγωνο αποτελείται από μια ακολουθία n κορυφών $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_{n-1}}$ που ορίζουν τις n ακμές που αποτελούν μια κλειστή καμπύλη $\mathbf{v_0v_1}, \mathbf{v_1v_2}, ..., \mathbf{v_{n-2}v_{n-1}}, \mathbf{v_{n-1}v_0}$. Με βάση το θεώρημα καμπύλης του Jordan [Jord87], μια συνεχής απλή επίπεδη καμπύλη χωρίζει το επίπεδο σε δύο περιοχές: την εσωτερική και την εξωτερική. (Αν η καμπύλη δεν είναι απλή, δηλαδή τέμνει τον εαυτό της, τότε τόσο η εσωτερική όσο και η εξωτερική περιοχή δεν είναι απαραίτητα συνδεδεμένες). Για τον αποτελεσματικό σχεδιασμό πολυγώνων χρειαζόμαστε έναν έλεγχο ο οποίος για ένα σημείο (εικονοστοιχείο) $\mathbf{p}(x, y)$ και ένα πολύγωνο P, να αποφασίζει αν το $\mathbf{p}$ είναι εντός του P (αναλύεται εδώ). Χρειαζόμαστε επίσης αποτελεσματικούς αλγορίθμους για τον υπολογισμό των εσωτερικών εικονοστοιχείων (Ενότητα 2.6).

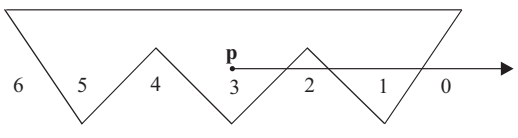
Θα περιγράψουμε δύο ελέγχους εσωτερικού σημείου πολυγώνου. Ο πρώτος είναι ο έλεγχος *ισοτιμίας*. Μετράμε το πλήθος των τομών μιας ημιευθείας από το $\mathbf{p}$ προς το άπειρο σε οποιαδήποτε κατεύθυνση, τέτοια, ώστε το πλήθος να είναι πεπερασμένος αριθμός. Αν το αποτέλεσμα είναι περιττός αριθμός τότε το $\mathbf{p}$ είναι εντός του P, ενώ αν είναι άρτιος είναι εκτός. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 2.7 για μια οριζόντια ημιευθεία.

Ο δεύτερος έλεγχος βασίζεται στον *αριθμό περιελίξεων*. Για μια κλειστή καμπύλη P και ένα σημείο $\mathbf{p}$, ο αριθμός περιελίξεων $\omega(P, \mathbf{p})$ μετρά πόσες περιστροφές ολοκληρώνει μια ακτίνα από το $\mathbf{p}$ που ακολουθεί την περίμετρο του P μια φορά (Σχήμα 2.8). Για κάθε περιστροφή σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού το $\omega(P, \mathbf{p})$ μειώνεται κατά ένα, ενώ για κάθε αντίστροφη περιστροφή το $\omega(P, \mathbf{p})$ αυξάνεται κατά ένα:

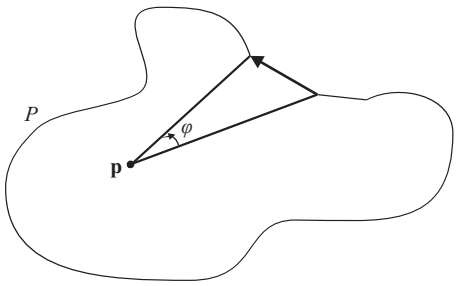
$$\omega(P, \mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi} \int d\varphi.$$

Αν το $\omega(P, \mathbf{p})$ είναι περιττός αριθμός τότε το $\mathbf{p}$ είναι εντός του P, διαφορετικά είναι εκτός (Σχήμα 2.9). Ένας απλός τρόπος υπολογισμού του αριθμού περιελίξεων μετρά το πλήθος των δεξιόστροφων, μείον το πλήθος των αριστερόστροφων τομών μιας ημιευθείας από το $\mathbf{p}$ με την περίμετρο του P (Σχήμα 2.10).

Στην ειδική περίπτωση κυρτού πολυγώνου του οποίου οι n ακμές ορίζουν ευθείες $l_0 ... l_{n-1}$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας απλούστερος έλεγχος. Αν όλες οι ακμές έχουν



Σχήμα 2.7: *Ο έλεγχος ισοτιμίας για εσωτερικό σημείο πολυγώνου.*



Σχήμα 2.8: *Ο αριθμός περιελίξεων.*

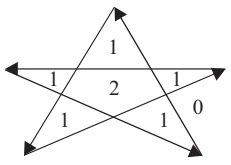
δοθεί με συνεπή φορά ως προς το πολύγωνο —δηλαδή είτε σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού είτε αντίστροφα— τότε οι συναρτήσεις των σχετικών ευθειών μπορούν να ορισθούν κατά τέτοιον τρόπο ώστε σημεία στο εσωτερικό ημιεπίπεδο μιας ακμής να δίνουν τιμές με το ίδιο πρόσημο. Αν οι τιμές των συναρτήσεων όλων των ακμών έχουν το ίδιο πρόσημο για ένα εικονοστοιχείο **p**, τότε το **p** βρίσκεται εντός του κυρτού πολυγώνου:

$$\text{sign}(l_0(\mathbf{p})) = \text{sign}(l_1(\mathbf{p})) = \ldots = \text{sign}(l_{n-1}(\mathbf{p})). \tag{2.6}$$

Για παράδειγμα, αν οι συντελεστές μιας ευθείας a, b και c έχουν υπολογισθεί σύμφωνα με την Εξίσωση (2.1), τότε εσωτερικά σημεία θα δίνουν αρνητικές τιμές στις συναρτήσεις των ευθειών (Σχήμα 2.11). Αν οι συναρτήσεις όλων των ακμών είναι αρνητικές για ένα σημείο **p**, τότε το **p** βρίσκεται εντός του κυρτού πολυγώνου.

2.6 Σχεδίαση πολυγώνου

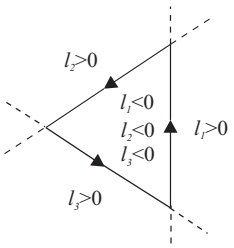
Αρχικά θα περιγράψουμε αλγόριθμους που είναι κατάλληλοι για τη σχεδίαση γενικών πολυγώνων και στη συνέχεια εξειδικευμένους αλγόριθμους για τρίγωνα. Πρακτικά, το τρίγωνο είναι το πιο διαδεδομένο στοιχείο κατασκευής επιφανειών. Οι αλγόριθμοι σχεδίασης τριγώνων είναι πιο απλοί και υλοποιούνται σε επεξεργαστές γραφικών. Για γενικά πολύγωνα μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι αλγόριθμοι των Ενοτήτων



Σχήμα 2.9: *Έλεγχος εσωτερικού σημείου πολυγώνου με βάση τον αριθμό περιελίξεων.*



Σχήμα 2.10: *Απλός υπολογισμός του αριθμού περιελίξεων.*



Σχήμα 2.11: *Ο έλεγχος προσήμου για εσωτερικό σημείο κυρτού πολυγώνου.*

2.6.1, 2.6.3, και 2.6.4 ή, εναλλακτικά, τα γενικά πολύγωνα μπορούν να διασπασθούν σε τρίγωνα με αλγόριθμους τριγωνοποίησης. Οι αλγόριθμοι γεμίσματος λειτουργούν με βάση τα περιεχόμενα του καταχωρητή εικόνας (frame buffer) και είναι χρήσιμοι σε κάποιες εφαρμογές 2Δ σχεδίασης.

2.6.1 Βασικός αλγόριθμος σχεδίασης πολυγώνου

Αυτός ο απλός αλγόριθμος βασίζεται στον έλεγχο ισοτιμίας. Τα βήματά του είναι:

1. Υπολογισμός των τομών $\mathbf{I}(x, y)$ κάθε ακμής του πολυγώνου με όλες τις γραμμές σάρωσης που αυτή τέμνει και φύλαξή τους σε μια λίστα.

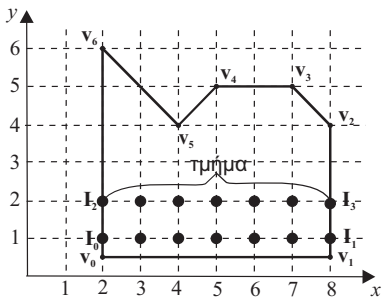
2. Ταξινόμηση της λίστας τομών κατά (y, x).

3. Εξαγωγή τμημάτων (ζευγών διαδοχικών τομών) από τη λίστα και επιλογή (άναμμα) των εικονοστοιχείων που ορίζουν μεταξύ τους.

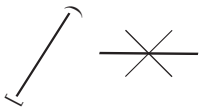
Ο βασικός αλγόριθμος υπολογίζει τις τομές των ακμών του πολυγώνου με τις γραμμές σάρωσης, τις ταξινομεί με πρώτο κλειδί το y (γραμμή σάρωσης) και δευτερεύον κλειδί το x και μετά τις εξάγει κατά ζεύγη από την ταξινομημένη λίστα επιλέγοντας τα εικονοστοιχεία μεταξύ κάθε τέτοιου ζεύγους. Ένα τέτοιο ζεύγος διαδοχικών τομών ονομάζεται *τμήμα* και αντιπροσωπεύει μια σειρά εικονοστοιχείων που είναι εσωτερικά του πολυγώνου, σύμφωνα με τον έλεγχο ισοτιμίας (Σχήμα 2.12). Η απλή επιλογή των εικονοστοιχείων ενός τμήματος μπορεί να αντικατασταθεί από την παρεμβολή κάποιου χαρακτηριστικού, όπως το χρώμα.

2.6.2 Ιδιάζοντα σημεία

Το Σχήμα 2.12 δείχνει κάποιες προβληματικές περιπτώσεις στη σχεδίαση πολυγώνου. Αν μια κορυφή πολυγώνου βρίσκεται πάνω σε μια γραμμή σάρωσης πρέπει να την μετρήσουμε σαν 2, 1, ή 0 τομές; Δυστυχώς καμιά από αυτές τις επιλογές δεν είναι κατάλληλη για όλες τις περιπτώσεις. Π.χ. οι κορυφές $\mathbf{v_2} - \mathbf{v_6}$ πρέπει ν¨ αντιμετωπισθούν διαφορετικά. Για να έχουμε σωστή σχεδίαση, η $\mathbf{v_2}$ πρέπει να μετρήσει σαν 1 τομή, οι $\mathbf{v_5}$ και $\mathbf{v_6}$ σαν 0 ή 2 τομές, ενώ οι $\mathbf{v_3}$ και $\mathbf{v_4}$ σαν 1 ή 0 τομές. Ποιός είναι λοιπόν ο γενικός κανόνας;

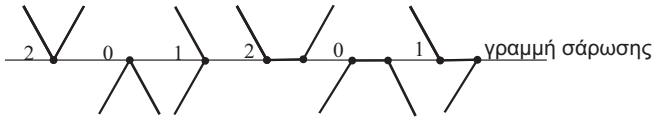


Σχήμα 2.12: *Τμήματα πολυγώνου και ιδιάζοντα σημεία.*



Σχήμα 2.13: *Κανόνας για την αντιμετώπιση ιδιαζόντων σημείων.*

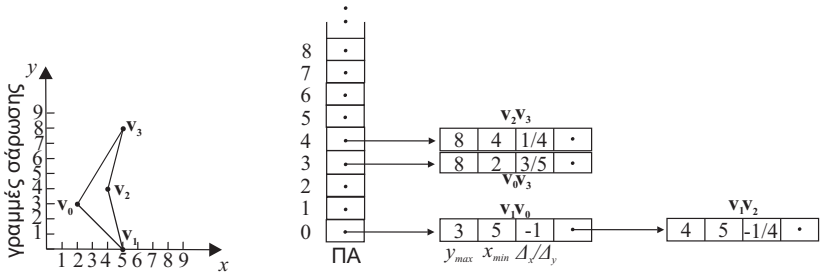
Μια απλή λύση είναι να θεωρήσουμε μια ακμή πολυγώνου κλειστή στην κορυφή με τη μικρότερη y συντεταγμένη, ανοιχτή στην κορυφή με τη μεγαλύτερη y συντεταγμένη και παράλληλα να αγνοήσουμε τις οριζόντιες ακμές (Σχήμα 2.13). Έτσι, για το παράδειγμα του Σχήματος 2.12, η $\mathbf{v_2}$ θα μετρήσει σαν 1 τομή (με την ακμή $\mathbf{v_2v_3}$), η $\mathbf{v_5}$ σαν 2, η $\mathbf{v_6}$ σαν 0, και οι $\mathbf{v_3}$ και $\mathbf{v_4}$ επίσης σαν 0 τομές, αφού η ακμή $\mathbf{v_3v_4}$ είναι οριζόντια. Το αποτέλεσμα του κανόνα αυτού στα ιδιάζοντα σημεία φαίνεται στο Σχήμα 2.14. Έτσι λύνεται το πρόβλημα των ιδιαζόντων σημείων αλλά το πολύγωνο σχεδιάζεται ασύμμετρα στην κατεύθυνση y: οριζόντιες ακμές στο πάνω μέρος του πολυγώνου και κορυφές που είναι τοπικά μέγιστα δεν σχεδιάζονται, ενώ οριζόντιες ακμές στο κάτω μέρος του πολυγώνου και κορυφές που είναι τοπικά ελάχιστα σχεδιάζονται. Παρά την ασυμμετρία αυτή το αποτέλεσμα είναι ικανοποιητικό.



Σχήμα 2.14: *Αποτέλεσμα χρήσης κανόνα ιδιαζόντων σημείων.*

2.6.3 Αλγόριθμος σχεδίασης πολυγώνου κατά γραμμές σάρωσης

Ο βασικός αλγόριθμος σχεδίασης πολυγώνου δεν είναι αποτελεσματικός. Οι εύρεση σημείου τομής είναι υπολογιστικά ακριβή πράξη. Ευτυχώς μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την *συνάφεια γραμμών σάρωσης* και την *συνάφεια ακμών* για να τον κάνουμε πιο αποτελεσματικό. Η συνάφεια γραμμών σάρωσης αναφέρεται στο γεγονός ότι συνήθως υπάρχει μικρή αλλαγή μεταξύ των ακμών του πολυγώνου που τέμνουν διαδοχικές γραμμές σάρωσης. Συνεπώς μπορούμε να φυλάμε σε μια δομή τις τομές



Σχήμα 2.15: *Ένα πολύγωνο και ο πίνακας ακμών του.*

της εκάστοτε γραμμής σάρωσης με τις ακμές του πολυγώνου. Αυτή η δομή πρέπει να ενημερώνεται αυξητικά κατά τη μετάβαση από μια γραμμή σάρωσης στην επόμενη και ονομάζεται *λίστα ενεργών ακμών* (ΛΕΑ) .

Η συνάφεια ακμών αναφέρεται στο γεγονός ότι μια ακμή αλλάζει με προβλέψιμο τρόπο. Πιο συγκεκριμένα, το σημείο τομής ακμής / γραμμής σάρωσης μπορεί να υπολογισθεί αυξητικά από μια γραμμή σάρωσης στην επόμενη προσθέτοντας το αντίστροφο της κλίσης της ευθείας που ορίζει η ακμή ($\frac{1}{s} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$).

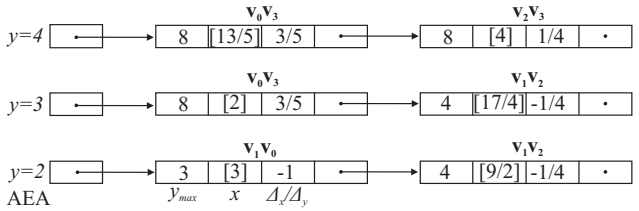
Χρησιμοποιείται ένας *πίνακας ακμών* (ΠΑ) για την ταξινόμηση με δοχεία (bucket sort) των ακμών του πολυγώνου, ώστε να βοηθηθεί η αυξητική ενημέρωση της ΛΕΑ. Κάθε δοχείο στον ΠΑ αντιστοιχεί σε μια γραμμή σάρωσης (Σχήμα 2.15). Μια εγγραφή με τα απαραίτητα δεδομένα μιας ακμής εισάγεται στο δοχείο που αντιστοιχεί στην ελάχιστη y συντεταγμένη της.

Τα βήματα του αλγορίθμου είναι:

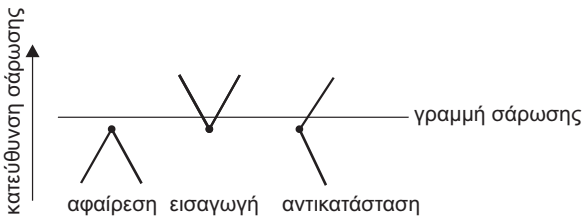
1. Δημιουργία ΠΑ για το πολύγωνο που περιέχει εγγραφές με το μέγιστο y, το ελάχιστο x και το αντίστροφο της κλίσης κάθε ακμής $(y_{\max}, x_{\min}, \frac{1}{s})$. Η εγγραφή μιας ακμής εισάγεται στο δοχείο που αντιστοιχεί στην ελάχιστη y συντεταγμένη της.

2. Για κάθε γραμμή σάρωσης y που τέμνει το πολύγωνο (από το ελάχιστο προς το μέγιστο y):

   (α) Ενημέρωση των τομών της ΛΕΑ για την τρέχουσα γραμμή σάρωσης: $x = x + \frac{1}{s}$.



Σχήμα 2.16: *Παραδείγματα καταστάσεων της ΛΕΑ.*



Σχήμα 2.17: *Ενημέρωση της ΛΕΑ.*

(β) Εισαγωγή ακμών από το δοχείο y του ΠΑ στην ΛΕΑ.

(γ) Αφαίρεση ακμών από τη ΛΕΑ για τις οποίες ισχύει $y_{\max} \leq y$.

(δ) Επαναταξινόμηση της ΛΕΑ κατά x.

(ε) Εξαγωγή τμημάτων (ζευγών εγγραφών) από τη ΛΕΑ και επιλογή των εικονοστοιχείων που αυτά ορίζουν.

Τρία παραδείγματα καταστάσεων της ΛΕΑ για τις γραμμές σάρωσης 2, 3 και 4 δίνονται στο Σχήμα 2.16.

Οι ακμές που βρίσκονται στη ΛΕΑ αλλάζουν στις κορυφές του πολυγώνου όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.17. Ένα τοπικό μέγιστο εξάγει δύο ακμές, ένα τοπικό ελάχιστο εισάγει δύο ακμές, ενώ οι άλλες κορυφές αντικαθιστούν μια ακμή με μια άλλη.

2.6.4 Αλγόριθμος σχεδίασης πολυγώνου με βάση τα κρίσιμα σημεία

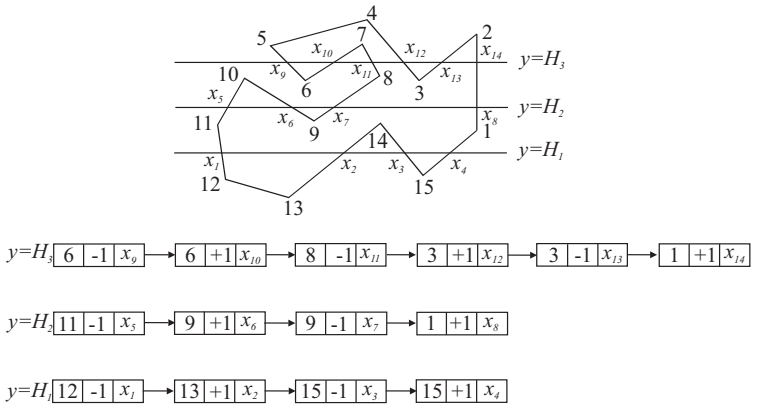
Στον προηγούμενο αλγόριθμο παρατηρήσαμε πως νέες ακμές εισάγονται στη ΛΕΑ μόνο σε κορυφές που είναι τοπικά ελάχιστα. Ο μοναδικός σκοπός του ΠΑ είναι η φύλαξη δεδομένων ακμών πρός εισαγωγή στη ΛΕΑ στην κατάλληλη γραμμή σάρωσης. Ο αλγόριθμος κρίσιμων σημείων [Gord94] αποφεύγει τη χρήση του ΠΑ και της υπολογιστικά ακριβής δημιουργίας του, κάνοντας απευθείας χρήση των τοπικών ελάχιστων. Τα τοπικά ελάχιστα (κορυφές πολυγώνου που είναι τοπικά ελάχιστα ως προς την y συντεταγμένη τους) ονομάζονται *κρίσιμα σημεία*.

Τα κύρια βήματα του αλγορίθμου κρίσιμων σημείων είναι:

1. Εύρεση και φύλαξη των κρίσιμων σημείων του πολυγώνου.

2. Για κάθε γραμμή σάρωσης y που τέμνει το πολύγωνο (με κατεύθυνση από το ελάχιστο προς το μέγιστο y):

   (α) Για κάθε κρίσιμο σημείο $\mathbf{c}(c_x, c_y) \mid (y - 1 < c_y \leq y)$ παρακολουθείται η περίμετρος του πολυγώνου και προς τις δύο κατευθύνσεις ξεκινώντας από το $\mathbf{c}$. Η παρακολούθηση σταματά αν τμηθεί η γραμμή σάρωσης y ή βρεθεί ένα τοπικό μέγιστο. Για κάθε τομή με τη γραμμή σάρωσης y, δημιουργείται μια εγγραφή στη ΛΕΑ $(v, \pm 1, x)$ που περιέχει τον αριθμό v της κορυφής έναρξης της τέμνουσας ακμής, την κατεύθυνση παρακολούθησης (-1 ή $+1$ ανάλογα αν είναι σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού ή όχι), και την x συντεταγμένη του σημείου τομής.



Σχήμα 2.18: *Αλγόριθμος σχεδίασης πολυγώνου με βάση τα κρίσιμα σημεία. Πολύγωνο παράδειγμα (πάνω) και τα περιεχόμενα της ΛΕΑ για τρεις διαδοχικές γραμμές σάρωσης (κάτω).*

(β) Για κάθε εγγραφή της ΛΕΑ που προϋπήρχε του βήματος (α), παρακολουθείται η περίμετρος του πολυγώνου στην κατεύθυνση που έχει φυλαχθεί στην εγγραφή. Αν βρεθεί τομή με την γραμμή σάρωσης y, η εναρκτήρια κορυφή της τέμνουσας ακμής και η x συντεταγμένη της τομής ενημερώνουν την εγγραφή. Αν βρεθεί τοπικό μέγιστο, η εγγραφή διαγράφεται από τη ΛΕΑ.

(γ) Η ΛΕΑ επαναταξινομείται κατά x.

(δ) Εξαγωγή τμημάτων (ζευγών εγγραφών) από τη ΛΕΑ και επιλογή των εικονοστοιχείων που αυτά ορίζουν.

(Το Σχήμα 2.18 δείχνει την σχεδίαση ενός πολυγώνου και τα περιεχόμενα της ΛΕΑ για τρεις διαδοχικές γραμμές σάρωσης).

2.6.5 Αλγόριθμοι σχεδίασης τριγώνων

Το τρίγωνο είναι το απλούστερο πολύγωνο και, εξ ορισμού, είναι επίπεδο και κυρτό. Είναι το πιο συνηθισμένο συστατικό στοιχείο των μοντέλων και υπάρχουν αλγόριθμοι για τη μετατροπή των περισσότερων τύπων επιφανειών (π.χ. δικυβικές επιφάνειες, ογκομετρικές ισοεπιφάνειες) σε τριγωνικά πλέγματα. Συνεπώς τα τρίγωνα χρήζουν ειδικής μεταχείρισης.

Ένας τρόπος εύρεσης των εικονοστοιχείων που αποτελούν την επιφάνεια ενός τριγώνου είναι η εκτέλεση *ελέγχου εσωτερικού σημείου* για κάθε εικονοστοιχείο εντός του περιβάλλοντος κιβωτίου του τριγώνου. Αφού το τρίγωνο είναι ένα κυρτό πολύγωνο, ο έλεγχος εσωτερικού σημείου μπορεί να γίνει υπολογίζοντας τις τιμές των τριών γραμμικών συναρτήσεων που ορίζονται από τις ακμές του (βλ. Ενότητα 2.5). Για κάθε εικονοστοιχείο $\mathbf{p}$ του περιβάλλοντος κιβωτίου, αν οι τρείς συναρτήσεις δίνουν αποτελέσματα με το ίδιο πρόσημο, τότε το $\mathbf{p}$ είναι εντός του τριγώνου. Αυτός ο έλεγχος μπορεί να εξειδικευθεί σε θετικό ή αρνητικό πρόσημο αν είναι γνωστή η φορά ορισμού

του κορυφών (σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού ή αντίστροφα). Για μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα, οι γραμμικές συναρτήσεις υπολογίζονται αυξητικά με χρήση των έμπροσθεν διαφορών τους.

```
triangle1 ( vertex v0, v1, v2, color c );  {
    line l0, l1, l2;
    float e0, e1, e2,   e0t, e1t, e2t;

    // Υπολογισμός των γραμ. συντελεστών (a,b,c) από τις κορυφές
    mkline(v0, v1, &l0);
    mkline(v1, v2, &l1);
    mkline(v2, v0, &l2);

    // Εύρεση του περιβάλλοντος κιβωτίου του τριγώνου
    bb_xmin = min(v0.x, v1.x, v2.x);
    bb_xmax = max(v0.x, v1.x, v2.x);
    bb_ymin = min(v0.y, v1.y, v2.y);
    bb_ymax = max(v0.y, v1.y, v2.y);

    // Υπολογισμός των γραμμικών συναρτήσεων στο (bb_xmin, bb_ymin)
    e0 = l0.a * bb_xmin + l0.b * bb_ymin + l0.c;
    e1 = l1.a * bb_xmin + l1.b * bb_ymin + l1.c;
    e2 = l2.a * bb_xmin + l2.b * bb_ymin + l2.c;

    for (y=bb_ymin; y<=bb_ymax; y++)  {
        e0t = e0; e1t = e1; e2t = e2;
        for (x=bb_xmin; x<=bb_xmax; x++)  {
            if (sign(e0)==sign(e1)==sign(e2))  setpixel(x,y,c);

            e0 = e0 + l0.a;
            e1 = e1 + l1.a;
            e2 = e2 + l2.a;
        }
        e0 = e0t + l0.b;
        e1 = e1t + l1.b;
        e2 = e2t + l2.b;
    }
}
```

Αν το περιβάλλον κιβώτιο είναι μεγάλο σε σχέση με την επιφάνεια του τριγώνου (όπως π.χ. για ένα διαγώνιο λεπτό τρίγωνο), τότε ο αλγόριθμος `triangle1` δεν θα είναι αποδοτικός καθώς θα υπολογίζει τις γραμμικές συναρτήσεις για ένα μεγάλο πλήθος εξωτερικών εικονοστοιχείων. Ένας άλλος τρόπος σχεδίασης τριγώνου είναι ο *περίπατος ακμών*. Τρείς αλγόριθμοι σχεδίασης ευθείας τύπου Bresenham χρησιμοποιούνται για τον περίπατο των ακμών του τριγώνου. Ο περίπατος γίνεται κατά γραμμή σάρωσης με συγχρονισμό των αλγορίθμων σχεδίασης ευθείας. Έτσι, τα άκρα ενός τμήματος εσωτερικών εικονοστοιχείων υπολογίζονται για κάθε γραμμή σάρωσης που τέμνει το

τρίγωνο, και τα εικονοστοιχεία του τμήματος ενεργοποιούνται. Υπάρχουν ειδικές περιπτώσεις που χρήζουν ιδιαίτερης μέριμνας, όπως π.χ. αν το τρίγωνο έχει μια οριζόντια ακμή, οπότε πρέπει να σχεδιασθούν (περπατηθούν) μόνο οι δύο μη οριζόντιες ακμές του.

Η απλότητα των παραπάνω αλγορίθμων τους κάνει ιδανικούς για υλοποίηση σε υλικό και εκδοχές τους απαντώνται σε κάρτες γραφικών.

2.6.6 Αλγόριθμος γεμίσματος

Ένας απλός τρόπος ενεργοποίησης των εικονοστοιχείων που καλύπτει ένα κλειστό πολύγωνο (ή μια οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη) είναι να σχεδιαστεί πρώτα η περίμετρός του και μετά να *γεμισθεί* ξεκινώντας από ένα αρχικό εσωτερικό σημείο. Οι αλγόριθμοι γεμίσματος χρησιμοποιούν τα περιεχόμενα του καταχωρητή εικόνας και είναι κατάλληλοι για ορισμένες 2Δ σχεδιαστικές εφαρμογές:

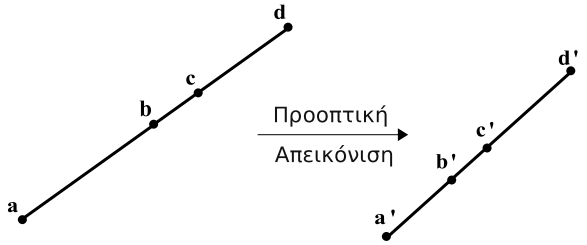
1. Σχεδίαση της περιμέτρου του πολυγώνου/καμπύλης.
2. Εύρεση ενός αρχικού εσωτερικού εικονοστοιχείου.
3. Αναδρομική ενεργοποίηση των εσωτερικών εικονοστοιχείων ξεκινώντας από το αρχικό πρός όλες τις κατευθύνσεις ώσπου να συναντηθεί η περίμετρος.

Ο ψευδοκώδικας του αλγορίθμου ακολουθεί:

```
flood_fill ( polygon P, color c );  {
    point s;
    draw_perimeter ( P, c );
    s = get_seed_point ( P );
    flood_fill_recur ( s, c );
}

flood_fill_recur ( point (x,y), color fill_color );  {
    color c;
    c = getpixel(x,y);   // διάβασε το χρώμα του τρέχοντος
                         // εικονοστοιχείου
    if (c != fill_color)   {
        setpixel(x,y,fill_color);
        flood_fill_recur ( (x+1,y), fill_color );
        flood_fill_recur ( (x-1,y), fill_color );
        flood_fill_recur ( (x,y+1), fill_color );
        flood_fill_recur ( (x,y-1), fill_color );
    }
}
```

Απλές παραλλαγές του αλγορίθμου γεμίσματος χρησιμοποιούν διαφορετικό χρώμα για την περίμετρο από το εσωτερικό, ή γεμίζουν όσο συναντούν ένα συγκεκριμένο χρώμα. Η υποτιθέμενη σύνδεση των εικονοστοιχείων είναι κρίσιμη για τον αλγόριθμο αυτό. Για τετραπλή σύνδεση οι παραπάνω τέσσερεις αναδρομικές κλήσεις εί-



Σχήμα 2.19: *Λόγοι αποστάσεων και προβολή.*

ναι αρκετές. Για οκταπλή σύνδεση, πρέπει να προστεθούν άλλες τέσσερεις αναδρομικές κλήσεις για τις διαγώνιες κατευθύνσεις: `(x+1,y+1)`, `(x+1,y-1)`, `(x-1,y+1)`, `(x-1,y-1)`. Η περίμετρος πρέπει επίσης να σχεδιασθεί προσεκτικά έτσι ώστε να μην υπάρχουν τρύπες τετραπλής ή οκταπλής σύνδεσης· διαφορετικά ο αλγόριθμος γεμίσματος θα εξέλθει από το εσωτερικό του πολυγώνου.

Βασικό πρόβλημα του αλγορίθμου γεμίσματος είναι η χαμηλή του αποτελεσματικότητα. Ένα εικονοστοιχείο μπορεί να δεχθεί ως και 4 επισκέψεις (για τετραπλή σύνδεση) ή 8 επισκέψεις (για οκταπλή σύνδεση) από τον αλγόριθμο. Το μεγάλο πλήθος αναδρομικών κλήσεων προκαλεί καθυστέρηση και μπορεί να υπερχειλήσει τη στοίβα. Υπάρχει μη αναδρομική εκδοχή που σημειώνει τα επισκεφθέντα εικονοστοιχεία και είναι πιο αποτελεσματική.

2.7 Προοπτική διόρθωση

Η σχεδίαση γραμμών, πολυγώνων και άλλων αντικειμένων γίνεται στο 2Δ χώρο οθόνης, ενώ τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων σχετίζονται με τις 3Δ κορυφές τους. Τέτοια χαρακτηριστικά περιλαμβάνουν τιμές υφής (u, v), χρωματικές τιμές (r, g, b), κανονικά διανύσματα και τιμές βάθους. Δυστυχώς ο μετασχηματισμός προβολής — γενικά— δεν διατηρεί λόγους αποστάσεων (βλ. το Σχήμα 2.19). Συνεπώς η γραμμική παρεμβολή τιμών χαρακτηριστικών στο 2Δ χώρο εικόνας δεν είναι σωστή. Π.χ., στο ίδιο Σχήμα, το **b** είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος **ad** στο 3Δ χώρο, αλλά το $\mathbf{b}'$ δεν είναι απαραίτητα το μέσον του $\mathbf{a}'\mathbf{d}'$ στο 2Δ χώρο οθόνης. Συνεπώς, η τιμή ενός χαρακτηριστικού στο $\mathbf{b}'$ δεν θα πρέπει να είναι η ο μέσος όρος των τιμών του στα $\mathbf{a}'$ και $\mathbf{d}'$.

Η *προοπτική διόρθωση* χρησιμοποιείται για να βρούμε τη σωστή τιμή χαρακτηριστικού σ' ένα σημείο αντικειμένου στο 2Δ χώρο οθόνης (μετά από προβολή) [Heck91]. Βασίζεται στο ότι οι προβολικοί μετασχηματισμοί διατηρούν τους χιαστούς λόγους (cross-ratios, βλ. κεφάλαιο 4). Για το ίδιο ευθύγραμμο τμήμα:

$$\frac{\frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{cd}}}{\frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{bd}}} = \frac{\frac{\mathbf{a}'\mathbf{c}'}{\mathbf{c}'\mathbf{d}'}}{\frac{\mathbf{a}'\mathbf{b}'}{\mathbf{b}'\mathbf{d}'}}, \tag{2.7}$$

πράγμα που σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε πλήρως την προβολή ενός ευθύγραμμου

τμήματος προβάλλοντας 3 σημεία του. Έστω ότι εκτός από τα άκρα, προβάλλουμε και το μεσαίο σημείο του **b** στο **b′**. Τότε για ένα σημείο **c′** της προβολής, θέλουμε να βρούμε το αντίστοιχο σημείο **c** στο 3Δ ευθύγραμμο τμήμα, ή ισοδύναμα τον λόγο $\frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{cd}}$, για την παρεμβολή. Αφού το **b** είναι το μέσον του **ad** και το **b′** είναι η γνωστή προβολή του, θα έχουμε $\frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{bd}} = 1$. Ας θέσουμε $\frac{\mathbf{a'b'}}{\mathbf{b'd'}} = q$. Μπορούμε να υπολογίσουμε το $\frac{\mathbf{a'c'}}{\mathbf{c'd'}}$ από τις συντεταγμένες χώρου οθόνης του **c′**. Έτσι μπορούμε να λύσουμε την (2.7) για $\frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{cd}}$ παίρνοντας την έκφραση της προοπτικής διόρθωσης:

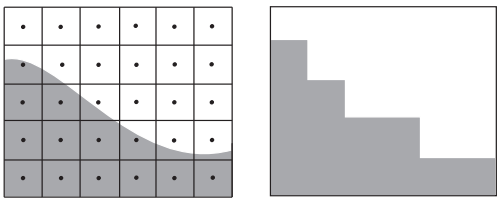
$$\frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{cd}} = \frac{\mathbf{a'c'}}{q\ \mathbf{c'd'}}. \tag{2.8}$$

Ο Heckbert [Heck91] δίνει έναν αποτελεσματικό τρόπο υπολογισμού της προοπτικής διόρθωσης δείχνοντας ότι ένα χαρακτηριστικό πρέπει να υποστεί προοπτική διαίρεση (βλ. Κεφάλαιο 4), όπως ακριβώς και οι συντεταγμένες θέσης. Έστω $[x, y, z, c, w]^{\mathrm{T}}$ οι συντεταγμένες μιας κορυφής πριν την προοπτική διαίρεση, όπου c η τιμή κάποιου χαρακτηριστικού. Μετά την προοπτική διαίρεση με το w, φυλάμε $\left[\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}, \frac{c}{w}, \frac{1}{w}\right]^{\mathrm{T}}$ για την προβεβλημένη κορυφή. Στη συνέχεια γίνεται παρεμβολή στις συντεταγμένες χώρου οθόνης, τόσο του χαρακτηριστικού $\frac{c}{w}$, όσο και της τιμής $\frac{1}{w}$ κάθε κορυφής. Μετά την παρεμβολή οι τιμές του χαρακτηριστικού διορθώνονται για κάθε εικονοστοιχείο διαιρούμενες με την τιμή παρεμβολής του $\frac{1}{w}$.

2.8 Αντιταύτιση στο χώρο

Οι αλγόριθμοι σχεδίασης που παρουσιάσθηκαν στις προηγούμενες ενότητες παίρνουν μια δυαδική απόφαση για το αν ένα εικονοστοιχείο ανήκει σ' ένα στοιχειώδες σχήμα ή όχι. Η δυαδική αυτή απόφαση βασίζεται στη σχέση του κέντρου του εικονοστοιχείου με το σχεδιαζόμενο σχήμα (εντός/εκτός)· δηλαδή το εικονοστοιχείο θεωρείται σημείο. Όμως τα εικονοστοιχεία δεν είναι μαθηματικά σημεία αφού καταλαμβάνουν μια μικρή επιφάνεια. Η παραπάνω απλούστευση οδηγεί σε μια σειρά από οπτικά προβλήματα *ταύτισης* [SIGG01]:

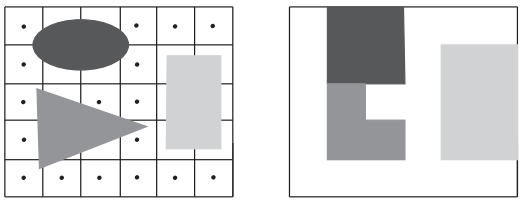
1. Ευθείες και ακμές πολυγώνων (και γενικά τα περιγράμματα αντικειμένων) μπορεί να έχουν *οδοντωτή* εμφάνιση (Σχήμα 2.20).



Σχήμα 2.20: *Οδοντωτά περιγράμματα.*

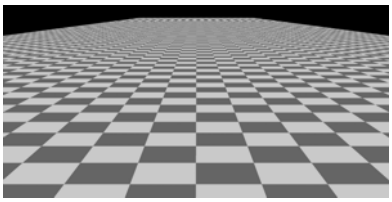
2. *Μικρά αντικείμενα* μπορεί να σχεδιαστούν σε λάθος μέγεθος ή λάθος σχήμα (Σχήμα 2.21). Ακόμα χειρότερα, κινούμενα μικρά αντικείμενα μπορεί να εμφανί-

ζονται και να εξαφανίζονται από καρέ σε καρέ, ανάλογα με το αν πέφτουν πάνω σε κέντρα εικονοστοιχείων ή όχι.



Σχήμα 2.21: *Λανθασμένη εμφάνιση μικρών αντικειμένων.*

3. *Λεπτομέρειες*, όπως η υφή, μπορεί να σχεδιασθούν λανθασμένα (Σχήμα 2.22).



Σχήμα 2.22: *Λανθασμένη σχεδίαση λεπτομερειών.*

Στη θεωρία δειγματοληψίας το πρόβλημα της ταύτισης είναι εκτενώς μελετημένο και εμφανίζεται όταν το δειγματοληπτούμενο σήμα περιέχει συχνότητες μεγαλύτερες του μισού της συχνότητας δειγματοληψίας (θεώρημα Nyquist), βλ. Παράρτημα Ε. Στα γραφικά το δειγματοληπτούμενο σήμα είναι το μαθηματικό μοντέλο της εικόνας[5] (που αποτελείται π.χ. από ευθείες και πολύγωνα) και η συχνότητα δειγματοληψίας είναι η ανάλυση των πλέγματος των εικονοστοιχείων. Τα κέντρα των εικονοστοιχείων είναι τα σημεία δειγματοληψίας. Αν και δεν είναι απλό να μετρηθεί με ακρίβεια η μέγιστη συχνότητα του μαθηματικού μοντέλου μιας εικόνας, μπορούν να χρησιμοποιηθούν μέθοδοι *αντιταύτισης* βασιζόμενες στη θεωρία δειγματοληψίας.

Ουσιαστικά η αντιταύτιση ανταλλάσει χρωματική ανάλυση για χωρική ανάλυση και συνεπώς είναι το αντίθετο της αυτοτυπίας (halftoning) που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 11.

Ανάλογα με τον τρόπο που αντιμετωπίζονται οι υψηλές συχνότητες, οι μέθοδοι αντιταύτισης μπορούν να διακριθούν σε δύο κατηγορίες:

- *Προ-φιλτράρισμα* που εξάγει τις υψηλές συχνότητες πριν την δειγματοληψία. Ουσιαστικά, το εικονοστοιχείο θεωρείται μια πεπερασμένη επιφάνεια και υπολογίζεται η ποσοστιαία συμμετοχή κάθε στοιχειώδους σχήματος που έχει επικάλυψη μ' αυτή την επιφάνεια.

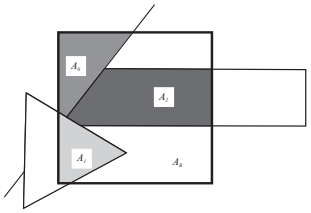
[5]Εδώ θεωρούμε μια στατική εικόνα με χωρικές διαστάσεις x και y, συνεπώς και το όνομα *αντιταύτιση στο χώρο*. Ταύτιση μπορεί να υπάρχει και μεταξύ των καρέ στη συνθετική κίνηση (δηλ. στο χρόνο) όπου χρησιμοποιούνται χρονικές μέθοδοι αντιταύτισης (βλ. Κεφάλαιο 17).

- *Μετα-φιλτράρισμα* που εξάγει τις υψηλές συχνότητες μετά την δειγματοληψία. Ουσιαστικά, αυξάνεται η συχνότητα δειγματοληψίας και στη συνέχεια υποβιβάζεται η ανάλυση του αποτελέσματος με συνέλιξη.

2.8.1 Αντιταύτιση με προ-φιλτράρισμα

Αλγόριθμος Catmull για σχεδίαση πολυγώνου με αντιταύτιση.

Ο Catmull [Catm78] πρότεινε τη θεώρηση του εικονοστοιχείου ως ένα τετράγωνο παράθυρο στα όρια του οποίου αποκόπτονται τα πολύγωνα που έχουν επικάλυψη μ' αυτό (βλ. Ενότητα 2.9.3). Μετά την απομάκρυνση των κρυμμένων (μη ορατών) τμημάτων, υπολογίζεται η ορατή επιφάνεια κάθε πολυγώνου σαν ποσοστό της συνολικής επιφάνειας του εικονοστοιχείου, και αυτή είναι η συνεισφορά του χρώματος του πολυγώνου στο χρώμα του εικονοστοιχείου (Σχήμα 2.23). Συγκεκριμένα ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα:

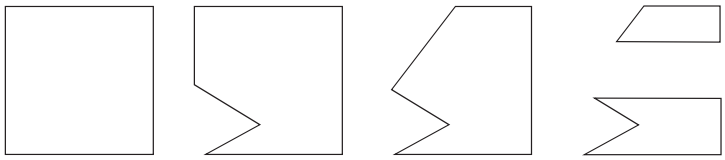


Σχήμα 2.23: *Παράδειγμα κάλυψης εικονοστοιχείου από πολύγωνα.*

1. Αποκοπή όλων των πολυγώνων στα όρια του εικονοστοιχείου. Έστω τα εναπομένοντα τμήματα πολυγώνων $P_0 ... P_{n-1}$.
2. Απομάκρυνση κρυμμένων τμημάτων. Αυτό επιτυγχάνεται με την ταξινόμηση των πολυγώνων $P_0 ... P_{n-1}$ κατά βάθος και την αποκοπή τους στην περιοχή που σχηματίζεται, αφαιρώντας τα πολύγωνα από την εκάστοτε εναπομένουσα επιφάνεια του εικονοστοιχείου κατά σειρά βάθους. Έστω τελικά τα ορατά τμήματα πολυγώνων $P_0 ... P_{m-1}$, με αντίστοιχες επιφάνειες $A_0 ... A_{m-1}$.
3. Υπολογισμός του τελικού χρώματος του εικονοστοιχείου ως $A_0 C_0 + A_1 C_1 + ... + A_{m-1} C_{m-1} + A_B C_B$ όπου C_i το χρώμα του πολυγώνου i. Τα A_B και C_B αντιπροσωπεύουν την επιφάνεια του φόντου (που δεν καλύπτεται από κανένα πολύγωνο) και το χρώμα του αντίστοιχα.

Το δεύτερο βήμα απαιτεί ένα γενικό αλγόριθμο αποκοπής πολυγώνων, όπως ο Greiner-Hormann (βλ. Ενότητα 2.9.3). Τα διαδοχικά παράθυρα αποκοπής του δεύτερου βήματος για το παραπάνω παράδειγμα παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.24.

Ο αλγόριθμος του Catmull μπορεί να θεωρηθεί το ιδανικό με το οποίο συγκρίνονται οι αλγόριθμοι αντιταύτισης, αλλά γενικά δεν είναι πρακτικός λόγω του μεγάλου



Σχήμα 2.24: *Διαδοχικά παράθυρα αποκοπής.*

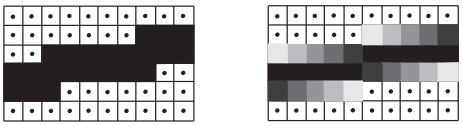
υπολογιστικού του κόστους. Επίσης υποθέτει ότι κάθε πολύγωνο έχει ένα ενιαίο χρώμα εντός του εικονοστοιχείου, πράγμα που δεν είναι απαραίτητα αληθές, λόγω της χρήσης τεχνικών απεικόνισης υφής.

Μια διακριτή μορφή του αλγορίθμου του Catmull είναι ο A-buffer [Carp84]. Χρησιμοποιεί μάσκες και λογικούς τελεστές για να προσεγγίσει διακριτά τους υπολογισμούς κάλυψης του εικονοστοιχείου, αποφεύγοντας τη χρήση ακριβού γενικού αλγορίθμου αποκοπής.

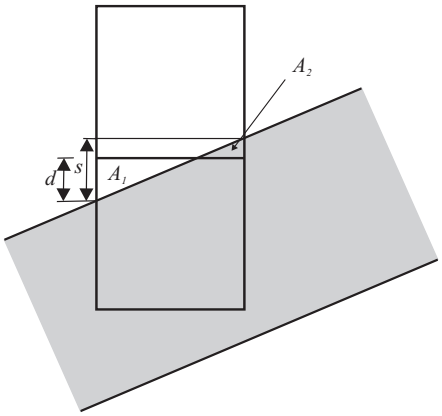
Σχεδίαση ευθείας με αντιταύτιση.

Οι ευθείες που παράγονται από τον αλγόριθμο του Bresenham έχουν οδοντωτή εμφάνιση (Σχήμα 2.25 (αριστερά)). Το ίδιο συμβαίνει και με τις ακμές πολυγώνων. Αυτή η οδοντωτή εμφάνιση είναι αποτέλεσμα της δυαδικής απόφασης που παίρνεται κατά την επιλογή του πλησιέστερου εικονοστοιχείου στη μαθηματική πορεία της ευθείας. Όμως οι σχεδιαζόμενες ευθείες έχουν κάποιο πάχος και θα μπορούσαν να προσομοιωθούν από μακρά και λεπτά παραλληλόγραμμα. Στην περίπτωση αυτή η δυαδική επιλογή εικονοστοιχείων δεν είναι σωστή, γιατί θα έπρεπε να παίρνουν χρώμα αντίστοιχο του ποσοστού τους που καλύπτεται από την ευθεία (παραλληλόγραμμο) (Σχήμα 2.25 (δεξιά)).

Ας θεωρήσουμε πάλι μια ευθεία στο πρώτο οκταμόριο και δύο εικονοστοιχεία που καλύπτει μερικώς σ' ένα βήμα της πορείας της. Το Σχήμα 2.26 δείχνει τη σχέση μεταξύ του άνω ορίου του παραλληλογράμμου, που παριστάνει την ευθεία, και των δύο εικονοστοιχείων. Έστω, ότι το πάχος του παραλληλογράμμου είναι αρκετό ώστε να καλύπτει πλήρως το τμήμα του κάτω εικονοστοιχείου που βρίσκεται κάτω από το πάνω όριο του παραλληλογράμμου. Θεωρώντας τα εικονοστοιχεία ως μοναδιαία τετράγωνα, πρέπει να υπολογίσουμε τα ποσοστά τους A_1 και A_2 που καλύπτονται από τα τρίγωνα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.26. Το πάνω εικονοστοιχείο θα πάρει τότε το χρώμα της ευθείας σε ποσοστό A_2 ενώ το κάτω σε ποσοστό $1 - A_1$. Έστω ότι η κλίση της ευθείας είναι $s = -\frac{a}{b}$ (βλ. Εξίσωση (2.1)). Οι επιφάνειες των δύο τριγώνων τότε



Σχήμα 2.25: *Ευθεία με αντιταύτιση (δεξιά) και χωρίς αντιταύτιση (αριστερά).*



Σχήμα 2.26: *Σχέση μεταξύ ευθείας του πρώτου οκταμόριου και δύο εικονοστοιχείων στην πορεία της.*

είναι:

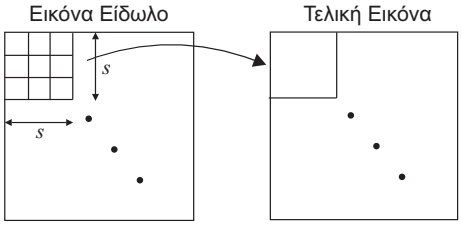
$$A_1 = \frac{d^2}{2s},$$
$$A_2 = \frac{(s-d)^2}{2s}.$$

Αυξητικοί υπολογισμοί έχουν προταθεί για τις παραπάνω εκφράσεις καθώς ο υπολογισμός τους είναι ακριβός. Οι Pitteway και Watkinson [Pitt80] έδωσαν μια τέτοια προσέγγιση για ακμές πολυγώνου. Δυστυχώς αυτός ο αυξητικός αλγόριθμος προσδιορίζει την τιμή μόνο ενός εικονοστοιχείου (και όχι δύο όπως φαίνεται παραπάνω). Χρησιμοποιεί τη μεταβλητή σφάλματος (e) του Bresenham για να προσαρμόσει το χρώμα του εικονοστοιχείου που θα επέλεγε ο αλγόριθμος ευθείας Bresenham σε κάθε βήμα του.

2.8.2 Αντιταύτιση με μετα-φιλτράρισμα

Στο μετα-φιλτράρισμα[6] λαμβάνουμε πάνω από ένα δείγμα ανά εικονοστοιχείο. Αυτό ισοδυναμεί με την κατασκευή της εικόνας σε μεγαλύτερη ανάλυση. Τα επιπλέον δείγματα λαμβάνονται σε ισαπέχοντα διαστήματα που συνιστούν ένα πλέγμα πυκνότερο από αυτό των εικονοστοιχείων. Στη συνέχεια το αποτέλεσμα μετατρέπεται στην ανάλυση των εικονοστοιχείων μ' ένα φίλτρο συνέλιξης (π.χ. με μέσους όρους). Για παράδειγμα, για να δημιουργήσουμε εικόνα ανάλυσης 1024×1024 μπορεί να πάρουμε 3072×3072 δείγματα, τα οποία αντιστοιχούν σε εννέα δείγματα ανά εικονοστοιχείο (τρία οριζόντια επί τρία κάθετα). Στη συνέχεια λαμβάνεται ο μέσος όρος των εννέα δειγμάτων για τον υπολογισμό του τελικού χρώματος του εικονοστοιχείου (Σχήμα 2.27). Λόγω της απλότητάς του, το μετα-φιλτράρισμα είναι η πιο διαδεδομένη τε-

[6]Συνώνυμο: *Υπερ-δειγματοληψία*.



Σχήμα 2.27: *Παράδειγμα μετα-φιλτραρίσματος.*

χνική αντιταύτισης.

Πιο τυπικά, το μετα-φιλτράρισμα μπορεί να θεωρηθεί ως αλγόριθμος με τρία βήματα:

1. Η συνεχής εικόνα δειγματοληπτείται με s φορές μεγαλύτερη ανάλυση από την τελική (s οριζόντια × s κάθετα) δημιουργώντας την εικόνα είδωλο I_v.
2. Η εικόνα είδωλο I_v περνά από χαμηλοπερατό φίλτρο για την εξαγωγή των υψηλών συχνοτήτων που προκαλούν την ταύτιση.
3. Η φιλτραρισμένη εικόνα είδωλο δειγματοληπτείται στην ανάλυση των εικονοστοιχείων για την παραγωγή της τελικής εικόνας I_f.

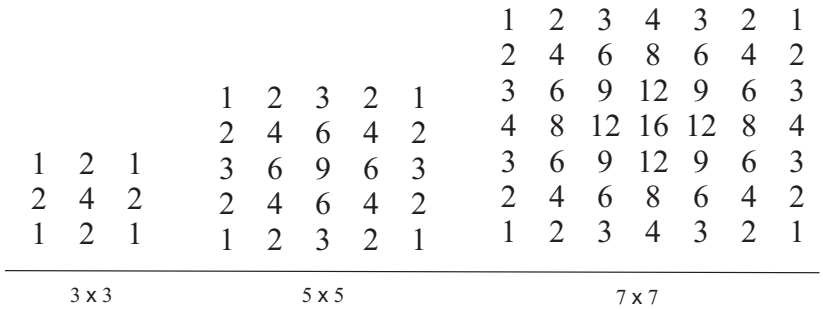
Συνήθως αντί για τον μέσο όρο των $s \times s$ δειγμάτων που αντιστοιχούν σ' ένα εικονοστοιχείο, χρησιμοποιείται ένα $s \times s$ φίλτρο συνέλιξης h (βλ. Παράρτημα Ε). Εκτελείται μια κλασική πράξη συνέλιξης: το φίλτρο τοποθετείται πάνω από τα δείγματα που αντιστοιχούν στο τελικό εικονοστοιχείο, τα βάρη του πολλαπλασιάζονται με τις χρωματικές τιμές των δειγμάτων και μετά προστίθενται για την παραγωγή της τελικής χρωματικής τιμής του εικονοστοιχείου. Στη συνέχεια το φίλτρο μετατοπίζεται κατά s δείγματα, σύμφωνα με την φορά σάρωσης της εικόνας. Έτσι:

$$I_f(i,j) = \sum_{p=0}^{s-1} \sum_{q=0}^{s-1} I_v(i * s + p, j * s + q) \cdot h(p,q).$$

Παραδείγματα πρακτικών φίλτρων συνέλιξης για μετα-φιλτράρισμα φαίνονται στο Σχήμα 2.28 [Crow81]. Αυτά δίνουν μεγαλύτερο βάρος στο κεντρικό δείγμα και τα βάρη μειώνονται, καθώς η απόσταση από το κέντρο αυξάνεται. Χρησιμοποιούνται μονές διαστάσεις ($s = 2k + 1$), ώστε να υπάρχει δείγμα στο κέντρο. Για την αποφυγή χρωματικής μετατόπισης τα βάρη του φίλτρου συνέλιξης πρέπει να είναι κανονικοποιημένα:[7]

$$\sum_{p=0}^{s-1} \sum_{q=0}^{s-1} h(p,q) = 1.$$

[7] Αυτό μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί θεωρώντας μια περιοχή με σταθερό χρώμα στην εικόνα είδωλο. Μόνο ένα φίλτρο με κανονικοποιημένα βάρη μπορεί να διατηρήσει αυτό το χρώμα στην τελική εικόνα.



Σχήμα 2.28: *Παραδείγματα φίλτρων συνέλιξης χρήσιμων στην αντιταύτιση.*



Σχήμα 2.29: *Κανονική και στοχαστική δειγματοληψία.*

Έτσι υπάρχουν δύο παράμετροι που οδηγούν τον βασικό αλγόριθμο μετα-φιλτραρίσματος: το μέγεθος s του φίλτρου συνέλιξης και η επιλογή των βαρών. Όσο μεγαλύτερο το s (δηλαδή η αύξηση της ανάλυσης) τόσο καλύτερα τα αποτελέσματα.

Τα βασικά προβλήματα του μετα-φιλτραρίσματος είναι:

1. Η αύξηση του s αυξάνει ανάλογα και τον χρόνο δημιουργίας της εικόνας, καθώς και τον απαιτούμενο χώρο για την αποθήκευση της εικόνας-είδωλο. Έτσι στην πράξη το s είναι ένας μικρός αριθμός.

2. Θεωρητικά, αφού οι συχνότητες μιας εικόνας δεν είναι φραγμένες, το πρόβλημα της ταύτισης θα παραμένει όσο και αν αυξήσουμε το s (το όριο του Nyquist απλά μετατίθεται σε ψηλότερες συχνότητες). Πρακτικά, στα γραφικά, αν το ανθρώπινο μάτι ικανοποιείται η μέθοδος είναι επιτυχής.

3. Το μετα-φιλτράρισμα δεν είναι ευαίσθητο στην τοπική πολυπλοκότητα της εικόνας. Η ανάλυση αυξάνεται κατά s χωρίς να λαμβάνεται υπόψη αν αυτό χρειάζεται. Έτσι μπορεί να γίνουν πολλοί άχρηστοι υπολογισμοί.

Το *προσαρμοστικό* μετα-φιλτράρισμα αυξάνει τη συχνότητα δειγματοληψίας μόνο στα τμήματα της εικόνας που υπάρχουν υψηλές συχνότητες. Όμως ο αλγόριθμος αυτός είναι πιο πολύπλοκος.

Το *στοχαστικό* μετα-φιλτράρισμα [Cook89] δειγματοληπτεί τη συνεχή εικόνα σε μη ισαπέχοντα σημεία (Σχήμα 2.29). Τα φαινόμενα της ταύτισης (χαμηλές συχνότητες που υπεισέρχονται από την δειγματοληψία υψηλών συχνοτήτων άνω του ορίου Nyquist) μετατρέπονται τότε σε θόρυβο που αγνοείται από το ανθρώπινο μάτι.

2.9 Αλγόριθμοι αποκοπής στις 2Δ

Οι αλγόριθμοι αποκοπής αναπτύχθηκαν από την ανάγκη να μην επιχειρείται η σχεδίαση αντικειμένων εκτός των ορίων σχεδίασης της οθόνης ή άλλης συσκευής απεικόνισης. Για παράδειγμα, αν προσπαθήσουμε να σχεδιάσουμε την ευθεία από το $(-10, 3)$ στο $(8, 4)$ σε οθόνη της οποίας τα εικονοστοιχεία ξεκινούν από το 0 μπορεί να δημιουργηθεί πρόβλημα. Η συσκευή απεικόνισης συνήθως παριστάνεται σαν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που ορίζει τις εντός ορίων τιμές και ονομάζεται *αντικείμενο αποκοπής*.[8] Το *αποκοπτόμενο* σχήμα μπορεί να είναι ευθεία, πολύγωνο ή άλλο στοιχειώδες σχήμα.

Μια σημαντική εφαρμογή των αλγορίθμων αποκοπής είναι το στάδιο περικοπής στο οπτικό πεδίο της σωλήνωσης γραφικών. Εκεί χρησιμοποιούνται 3Δ αλγόριθμοι αποκοπής καθώς η αποκοπή μετά την προβολή είναι θεωρητικά λανθασμένη (βλ. Ενότητα 4.6).

Θα ξεκινήσουμε παρουσιάζοντας 2Δ αλγορίθμους αποκοπής, που είναι ευκολότερο να περιγραφούν από τους 3Δ, αλλά έχουν και εφαρμογές στα 2Δ γραφικά. Η γενίκευσή τους στις 3Δ είναι σχετικά απλή.

Ενα στοιχειώδες σχήμα προς σχεδίαση μπορεί να έχει τρείς πιθανές σχέσεις με το αντικείμενο αποκοπής:

1. Να βρίσκεται *ολόκληρο εντός* του αντικειμένου αποκοπής. Στην περίπτωση αυτή σχεδιάζεται κανονικά.
2. Να βρίσκεται *ολόκληρο εκτός* του αντικειμένου αποκοπής. Στην περίπτωση αυτή δεν σχεδιάζεται.
3. Να *τέμνει* το αντικείμενο αποκοπής. Η τομή των δύο πρέπει να βρεθεί και να σχεδιασθεί.

Οι αλγόριθμοι αποκοπής ασχολούνται κυρίως με την τρίτη περίπτωση. Έτσι μπορούν να θεωρηθούν ως γεωμετρικοί αλγόριθμοι τομής και θεωρητικά δεν έχει σημασία ποιο είναι το αντικείμενο αποκοπής και ποιο το αποκοπτόμενο, αφού η πράξη της τομής είναι αντιμεταθετική. Πρακτικά όμως τίθενται περιορισμοί και στα δύο αντικείμενα για λόγους αποτελεσματικότητας (π.χ. το αντικείμενο αποκοπής πρέπει να είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και το αποκοπτόμενο πολύγωνο πρέπει να είναι κυρτό). Οι αλγόριθμοι αποκοπής εξειδικεύονται σ' ένα είδος αποκοπτόμενου σχήματος· εδώ θα εξετάσουμε αλγορίθμους για σημεία, ευθείες και πολύγωνα.

2.9.1 Αποκοπή σημείου

Η αποκοπή σημείου είναι πολύ απλή. Πρέπει να ελέγξουμε αν το αποκοπτόμενο σημείο $\mathbf{p}(x, y)$ είναι εντός του αντικειμένου αποκοπής. Αν το αντικείμενο αποκοπής είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ορισμένο από δύο αντίθετες κορυφές του

[8] Στις 2Δ αν το αντικείμενο αποκοπής είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με ακμές παράλληλες προς τους άξονες συντεταγμένων, τότε συχνά αποκαλείται *παράθυρο αποκοπής*.

$(x_{\min}, y_{\min})$, $(x_{\max}, y_{\max})$, τότε ο απαιτούμενος έλεγχος είναι απλά ο

$$x_{\min} \le x \le x_{\max} \quad \text{και} \quad y_{\min} \le y \le y_{\max}.$$

2.9.2 Αποκοπή ευθείας

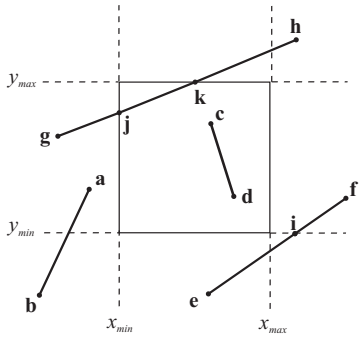
Οι αλγόριθμοι αποκοπής ευθείας που ακολουθούν είναι κατάλληλοι για την αποκοπή ενός ευθύγραμμου τμήματος μ' ένα παράθυρο αποκοπής. Κάποιοι από αυτούς γενικεύονται για οποιοδήποτε κυρτό αντικείμενο αποκοπής.

Αλγόριθμος Cohen-Sutherland.

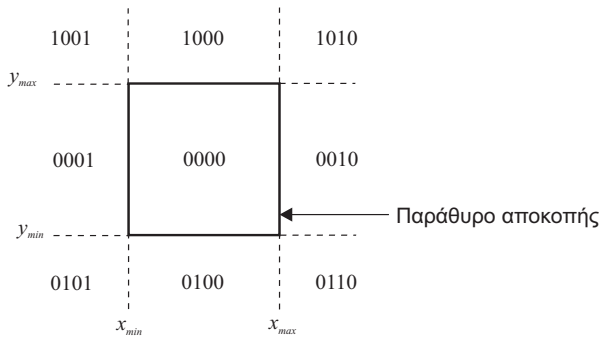
Η φιλοσοφία του αλγορίθμου αποκοπής ευθειών Cohen-Sutherland (CS) είναι η εκτέλεση ενός φθηνού ελέγχου για ευθύγραμμα τμήματα τα οποία βρίσκονται ολόκληρα εντός ή ολόκληρα εκτός του παραθύρου αποκοπής. Ο έλεγχος αυτός χρησιμοποιεί την επικάλυψη του ευθυγράμμου τμήματος και του παραθύρου αποκοπής στον x και στον y άξονα. Για παράδειγμα στο Σχήμα 2.30, το ευθύγραμμο τμήμα **ab** εύκολα χαρακτηρίζεται ως ολόκληρο εκτός, το **cd** ως ολόκληρο εντός, ενώ η απόφαση για τα **ef** και **gh** δεν είναι τόσο απλή.

Αν ο παραπάνω έλεγχος δεν καταλήξει, υπολογίζεται η τομή του ευθύγραμμου τμήματος με μια από τις ευθείες που ορίζουν οι ακμές του παραθύρου αποκοπής. Έτσι το ευθύγραμμο τμήμα διασπάται και ο αλγόριθμος CS εφαρμόζεται στα δύο νέα τμήματα. Για παράδειγμα το **ef** του Σχήματος 2.30 μπορεί να διασπασθεί από την ευθεία $y = y_{\min}$ στα τμήματα **ei** και **if**.

Για να καταστεί ο παραπάνω έλεγχος αποδοτικός, το επίπεδο του παραθύρου αποκοπής χωρίζεται σε εννέα περιοχές και κάθε μια από αυτές αντιστοιχείται σ' ένα τετραψήφιο δυαδικό κωδικό, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.31. Ο κωδικός μιας περιοχής εξαρτάται από τη σχέση της με το παράθυρο αποκοπής. Καθεμιά από τις 4 ευθείες που ορίζουν το παράθυρο αποκοπής χωρίζει το επίπεδο σε 2 ημιεπίπεδα: το εσωτερικό, που περιλαμβάνει το παράθυρο αποκοπής, και το εξωτερικό. Οι ακόλουθοι κανόνες καθορίζουν τις τιμές των τεσσάρων ψηφίων:



Σχήμα 2.30: *Παραδείγματα ευθυγράμμων τμημάτων προς αποκοπή.*



Σχήμα 2.31: *Κωδικοί περιοχών στον αλγόριθμο CS.*

- *Πρώτο ψηφίο.* Παίρνει τιμή 1 αν $y > y_{\max}$, διαφορετικά παίρνει τιμή 0·
- *Δεύτερο ψηφίο.* Παίρνει τιμή 1 αν $y < y_{\min}$, διαφορετικά παίρνει τιμή 0·
- *Τρίτο ψηφίο.* Παίρνει τιμή 1 αν $x > x_{\max}$, διαφορετικά παίρνει τιμή 0·
- *Τέταρτο ψηφίο.* Παίρνει τιμή 1 αν $x < x_{\min}$, διαφορετικά παίρνει τιμή 0.

Κάθε άκρο (x, y) του αποκοπτόμενου ευθύγραμμου τμήματος παίρνει ένα τετραψήφιο κωδικό σύμφωνα με τους παραπάνω κανόνες. Τα 4 ψηφία αντιστοιχούν στα πρόσημα των εκφράσεων $(y_{\max} - y)$, $(y - y_{\min})$, $(x_{\max} - x)$, και $(x - x_{\min})$. Έστω $c1$ και $c2$ οι τετραψήφιοι κωδικοί των άκρων ενός ευθύγραμμου τμήματος. Ο έλεγχος τότε είναι:

- Αν $c1 \vee c2 = 0000$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα είναι ολόκληρο εντός.
- Αν $c1 \wedge c2 \neq 0000$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα είναι ολόκληρο εκτός.

Αν ο έλεγχος αυτός δεν καταλήξει, υπολογίζεται το σημείο τομής του ευθύγραμμου τμήματος με μια από τις ευθείες που ορίζονται από τις ακμές του παραθύρου αποκοπής. Επιλέγουμε μια ακμή που να αντιστοιχεί σε ψηφίο με διαφορετικές τιμές στους κωδικούς $c1$ και $c2$. Μετά γίνεται αναδρομική κλήση του αλγορίθμου με το εσωτερικό τμήμα του ευθύγραμμου τμήματος μόνον (δηλ. αυτό που είχε στο ψηφίο τιμή 0). Για παράδειγμα, οι τετραψήφιοι κωδικοί που αντιστοιχούν στο Σχήμα 2.30 είναι:

Άκρο	Κωδικός	Άκρο	Κωδικός
a	0001	**e**	0100
b	0101	**f**	0010
c	0000	**g**	0001
d	0000	**h**	1010

Το **ab** είναι ολόκληρο εκτός, αφού $0001 \wedge 0101 \neq 0000$. Το **cd** είναι ολόκληρο εντός αφού $0000 \vee 0000 = 0000$. Για τα **ef** και **gh** ο απλός έλεγχος δεν καταλήγει, οπότε πρέπει να υπολογισθούν σημεία τομής. Τέμνουμε το **ef** με την ευθεία $y = y_{\min}$ αφού το δεύτερο ψηφίο του κωδικού έχει διαφορετική τιμή στα άκρα **e** και **f**. Μετά εκτελείται

αναδρομική κλήση με το **if** καθώς το δεύτερο ψηφίο του κωδικού του άκρου **f** έχει τιμή 0 (εντός). Παρομοίως, για το **gh** υπολογίζουμε ένα από τα σημεία τομής (έστω **k**) και εκτελούμε αναδρομική κλήση με το **gk** που στη συνέχεια βρίσκει το σημείο τομής **j** και εκτελεί αναδρομική κλήση με το **jk**, για το οποίο ο απλός έλεγχος καταλήγει στην απόφαση εντός. Ακολουθεί ψευδοκώδικας του αλγορίθμου CS:

```
CS_Clip ( vertex p1, p2, float xmin, xmax, ymin, ymax );  {
    int c1, c2;
    vertex i;
    edge e;

    c1=mkcode (p1);
    c2=mkcode (p2);
    if ((c1 | c2) == 0)         /* Το p1p2 είναι εντός */
    else if ((c1 & c2) != 0)    /* Το p1p2 είναι εκτός */
    else  {
        e= /* ακμή παραθύρου με (c1 bit != c2 bit) */
        i = intersect_lines (e, (p1,p2));
        if outside (e, p1)  CS_Clip(i, p2, xmin, xmax, ymin, ymax);
        else                CS_Clip(p1, i, xmin, xmax, ymin, ymax);
    }
}
```

Χρησιμοποιούνται δύο βοηθητικά υποπρογράμματα: `intersect_lines` και `outside`. Το `intersect_lines` υπολογίζει την τομή του ευθυγράμμου τμήματος από το **p1** στο **p2** με την ευθεία του παραθύρου αποκοπής `e`. Η τομή ευθείας-ευθείας στο επίπεδο αναλύεται στο Παράρτημα Γ. Το `outside` αποφασίζει αν ένα σημείο βρίσκεται στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό ημιεπίπεδο της ευθείας `e` και, αν η ευθεία είναι παράλληλη με άξονα συντεταγμένων, αυτό απαιτεί απλά μια σύγκριση.

Ο αλγόριθμος CS είναι αποτελεσματικός όταν η απόφαση για τα περισσότερα ευθύγραμμα τμήματα μπορεί να ληφθεί από τον αρχικό απλό έλεγχο.

Αλγόριθμος Skala.

Ο Skala [Skal05] έδειξε ότι είναι δυνατόν να βελτιωθεί η αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου CS αν, επιπλέον, οι κορυφές του παραθύρου αποκοπής κατηγοριοποιηθούν ως προς το ευθύγραμμο τμήμα προς αποκοπή. Ένας δυαδικός κωδικός c_i αντιστοιχείται σε κάθε κορυφή $\mathbf{v_i} = (x_i, y_i)$ του παραθύρου αποκοπής σύμφωνα με τον παρακάτω κανόνα:

$$c_i = \begin{cases} 1, & l(x_i, y_i) \geq 0 \cdot \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου $l(x, y)$ η συνάρτηση που ορίζεται από το ευθύγραμμο τμήμα προς αποκοπή, μεταξύ των $\mathbf{p_1}$ και $\mathbf{p_2}$, κατά την Εξίσωση (2.1). Ο κωδικός c_i ουσιαστικά υποδεικνύει σε ποια πλευρά του ευθύγραμμου τμήματος βρίσκεται η κορυφή $\mathbf{v_i}$. Αν οι κωδικοί υπολογισθούν συστηματικά λαμβάνοντας τις κορυφές με μια συγκεκριμένη φορά γύρω

από το παράθυρο αποκοπής (π.χ. αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού), τότε μια ακμή του παραθύρου αποκοπής τέμνεται από το ευθύγραμμο τμήμα κάθε φορά που αλλάζει ο κωδικός των κορυφών (από 0 σε 1 ή από 1 σε 0). Για παράδειγμα αν το διάνυσμα κωδικών για τις κορυφές $(\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$ του παραθύρου αποκοπής είναι $(0, 0, 1, 0)$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα τέμνει τις ακμές $\mathbf{v_1v_2}$ και $\mathbf{v_2v_3}$ του παραθύρου αποκοπής[9]. Ένας προ-υπολογισμένος πίνακας δίνει άμεσα από το διάνυσμα κωδικών (c_0, c_1, c_2, c_3) τις ακμές του παραθύρου αποκοπής που τέμνονται από το ευθύγραμμο τμήμα, και αυτό αντικαθιστά την αναδρομική περίπτωση του αλγορίθμου CS. Στην περίπτωση του Σχήματος 2.30, ο αλγόριθμος Skala μπορεί να αποφασίσει άμεσα την τύχη των ευθυγράμμων τμημάτων **ef** και **gh**.

Αλγόριθμος Liang-Barsky.

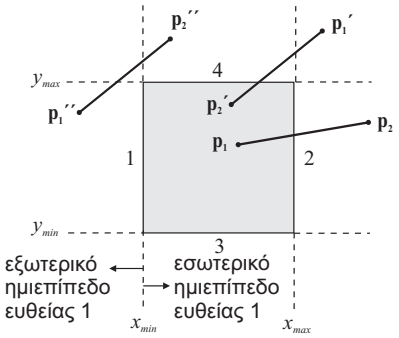
Ο αλγόριθμος Liang-Barsky (LB) [Lian84] επιλύει το πρόβλημα της αποκοπής ευθειών με άμεσο τρόπο, αποφεύγοντας τις πιθανές αναδρομικές κλήσεις του αλγορίθμου CS. Πειράματα έχουν δείξει αύξηση της απόδοσης κατά περίπου 30% σε σχέση με τον CS. Η βασική έκδοση του LB είναι κατάλληλη για την αποκοπή ευθύγραμμων τμημάτων με παράθυρο αποκοπής (ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με ακμές παράλληλες με τους άξονες συντεταγμένων), αλλά γενικεύεται για οποιοδήποτε κυρτό 2Δ ή 3Δ αντικείμενο αποκοπής.

Ο αλγόριθμος LB χρησιμοποιεί την παραμετρική εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος προς αποκοπή από το $\mathbf{p_1}(x_1, y_1)$ στο $\mathbf{p_2}(x_2, y_2)$ [βλέπε Εξίσωση (2.3)]. Τιμές του $t \in [0, 1]$ δίνουν το ευθύγραμμο τμήμα από το $\mathbf{p_1}$ στο $\mathbf{p_2}$. Για $t \in [-\infty, +\infty]$ δίνεται ολόκληρη η ευθεία που ορίζεται από τα $\mathbf{p_1}$ και $\mathbf{p_2}$. Ας θεωρήσουμε μια προέκταση του παραθύρου αποκοπής που αποτελείται από τις *ευθείες* που ορίζονται από τις ακμές του (Σχήμα 2.32). Το κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα από το $\mathbf{p_1}$ στο $\mathbf{p_2}$ είναι *εισερχόμενο* ή *εξερχόμενο* σε σχέση με μια ευθεία του επεκταμένου παραθύρου αποκοπής, ανάλογα αν η κατεύθυνσή του είναι από το εξωτερικό προς το εσωτερικό ημι-επίπεδό της ή αντίστροφα. Σε περίπτωση παραλληλίας, η αποκοπή είναι τετριμμένη. Για παράδειγμα στο Σχήμα 2.32, τα ευθύγραμμα τμήματα $\mathbf{p_1p_2}$ και $\mathbf{p_1''p_2''}$ είναι εισερχόμενα σε σχέση με την ευθεία 1 ενώ το ευθύγραμμο τμήμα $\mathbf{p_1'p_2'}$ είναι εξερχόμενο.

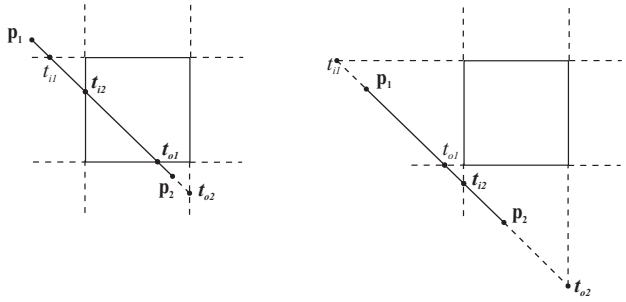
Μια σημαντική παρατήρηση που οδηγεί στον αλγόριθμο LB είναι η εξής: για να είναι ένα σημείο ευθύγραμμου τμήματος $\mathbf{p_1p_2}$ εντός του παραθύρου αποκοπής, πρέπει να βρίσκεται στο εσωτερικό ημι-επίπεδο κάθε ευθείας του παραθύρου. Αναλογιζόμενοι ότι ταξιδεύουμε πάνω στην αντίστοιχη ευθεία από το $\mathbf{p_1}$ πρός το $\mathbf{p_2}$, δεν πρέπει να «εξέλθουμε» σε σχέση με κάποια ευθεία του παραθύρου πριν «εισέλθουμε» σε σχέση με κάποια άλλη. Για παράδειγμα η ακολουθία τομών [είσοδος, είσοδος, έξοδος, έξοδος] υποδεικνύει τομή με το παράθυρο αποκοπής (Σχήμα 2.33 (αριστερά)) ενώ η ακολουθία [είσοδος, έξοδος, είσοδος, έξοδος] δεν υποδεικνύει [Σχήμα 2.33 (δεξιά)].

Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα τέμνει το παράθυρο αποκοπής, θα εισέλθει σ' αυτό στην τομή του με μια ευθεία του παραθύρου ως προς την οποία είναι εισερχόμενο και θα ε-

[9] Στην πραγματικότητα αυτές οι τομές ανήκουν στην ευθεία που ορίζεται από το ευθύγραμμο τμήμα προς αποκοπή: το ίδιο το ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να μην εκτείνεται ως τις τομές αυτές, πράγμα που χρήζει ειδικής μεταχείρισης.



Σχήμα 2.32: *Προεκταμένο παράθυρο αποκοπής και ευθύγραμμα τμήματα προς αποκοπή.*



Σχήμα 2.33: *Κατάταξη των τομών.*

ξέλθει στην τομή του με μια ευθεία του παραθύρου ως προς την οποία είναι εξερχόμενο. Εξαίρεση αποτελούν άκρα του ευθύγραμμου τμήματος που βρίσκονται εντός του παραθύρου. Ο αλγόριθμος LB υπολογίζει τη μέγιστη παραμετρική τιμή t_{in} των εισερχόμενων τομών και την ελάχιστη παραμετρική τιμή t_{out} των εξερχόμενων τομών. Στη συνέχεια ελέγχει αν αυτές οι παραμετρικές τιμές αντιστοιχούν σε σημεία πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα (δηλαδή είναι μέσα στο διάστημα $[0,1]$) και, αν όχι, αντικαθίστανται από το 0 ή 1 αντίστοιχα. Αν $t_{\text{in}} \leq t_{\text{out}}$, τότε υπάρχει τομή του ευθύγραμμου τμήματος και του παραθύρου αποκοπής (η ακολουθία τομών είναι της μορφής [είσοδος, είσοδος, έξοδος, έξοδος]), διαφορετικά δεν υπάρχει (η ακολουθία τομών είναι της μορφής [είσοδος, έξοδος, είσοδος, έξοδος]). Στα παραδείγματα του Σχήματος 2.33, τα t_{i1} και t_{i2} αντιστοιχούν σε εισερχόμενες τομές ενώ τα t_{o1} και t_{o2} αντιστοιχούν σε εξερχόμενες: $t_{\text{in}} = \max(t_{\text{i1}}, t_{\text{i2}}) = t_{\text{i2}}$ και $t_{\text{out}} = \min(t_{\text{o1}}, t_{\text{o2}}) = t_{\text{o1}}$. Στο αριστερό τμήμα του Σχήματος, $t_{\text{in}} < t_{\text{out}}$, οπότε το ευθύγραμμο τμήμα τέμνει το παράθυρο αποκοπής, ενώ στο δεξιό τμήμα $t_{\text{in}} > t_{\text{out}}$, οπότε δεν υπάρχει τομή.

Η θεωρία του αλγορίθμου LB είναι η ακόλουθη: Έστω $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ για το ευθύγραμμο τμήμα από το $\mathbf{p_1}(x_1, y_1)$ στο $\mathbf{p_2}(x_2, y_2)$. Το τμήμα του ευθύγραμμου τμήματος που βρίσκεται εντός του παραθύρου αποκοπής ικανοποιεί (βλέπε Εξί-

σωση (2.3) και Σχήμα 2.32):

$$x_{\min} \le x_1 + t\Delta x \le x_{\max},$$
$$y_{\min} \le y_1 + t\Delta y \le y_{\max},$$

ή

$$-t\Delta x \le x_1 - x_{\min},$$
$$t\Delta x \le x_{\max} - x_1,$$
$$-t\Delta y \le y_1 - y_{\min},$$
$$t\Delta y \le y_{\max} - y_1.$$

Αυτές οι ανισότητες έχουν την κοινή μορφή:

$$t\,p_i \le q_i, \qquad\qquad i : 1..4,$$

όπου

$$p_1 = -\Delta x, \qquad q_1 = x_1 - x_{\min};$$
$$p_2 = \Delta x, \qquad q_2 = x_{\max} - x_1;$$
$$p_3 = -\Delta y, \qquad q_3 = y_1 - y_{\min};$$
$$p_4 = \Delta y, \qquad q_4 = y_{\max} - y_1.$$

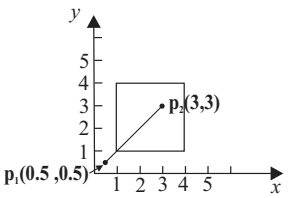
Κάθε ανισότητα αντιστοιχεί στη σχέση μεταξύ του ευθύγραμμου τμήματος και της αντίστοιχης ακμής του παραθύρου αποκοπής, όπου οι ακμές αριθμούνται σύμφωνα με το Σχήμα 2.32. Ακολουθούν ορισμένες χρήσιμες παρατηρήσεις:

- Αν $p_i = 0$, το ευθύγραμμο τμήμα είναι παράλληλο με την ακμή i του παραθύρου και η αποκοπή είναι τετριμμένη.
- Αν $p_i \neq 0$, η παραμετρική τιμή του σημείου τομής του ευθύγραμμου τμήματος με την ευθεία που ορίζει η ακμή i του παραθύρου είναι $\frac{q_i}{p_i}$.
- Αν $p_i < 0$, το (κατευθυνόμενο) ευθύγραμμο τμήμα είναι εισερχόμενο σε σχέση με την ακμή i του παραθύρου αποκοπής.
- Αν $p_i > 0$, το (κατευθυνόμενο) ευθύγραμμο τμήμα είναι εξερχόμενο σε σχέση με την ακμή i του παραθύρου αποκοπής.

Συνεπώς, τα t_{in} και t_{out} μπορούν να υπολογισθούν ως εξής:

$$t_{\text{in}} = \max(\{\frac{q_i}{p_i} \mid p_i < 0, \quad i : 1..4\} \cup \{0\}),$$
$$t_{\text{out}} = \min(\{\frac{q_i}{p_i} \mid p_i > 0, \quad i : 1..4\} \cup \{1\}).$$

Τα σύνολα $\{0\}$ και $\{1\}$ προστίθενται στις παραπάνω εκφράσεις ώστε η αρχική και η τελική παραμετρική τιμή να περιορισθούν στα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος.



Σχήμα 2.34: *Παράδειγμα Liang-Barsky.*

Αν $t_{\text{in}} \leq t_{\text{out}}$, οι παραμετρικές τιμές t_{in} και t_{out} δίνονται στην παραμετρική εξίσωση ευθείας για να υπολογισθούν τα άκρα του αποκομμένου ευθύγραμμου τμήματος, διαφορετικά δεν υπάρχει τομή με το παράθυρο αποκοπής.

Παράδειγμα 2.1 (Liang-Barsky.) Χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο LB για την αποκοπή του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζεται από τα σημεία $\mathbf{p_1}(x_1, y_1) = (0.5, 0.5)$ και $\mathbf{p_2}(x_2, y_2) = (3, 3)$ με το παράθυρο που ορίζεται από τα $x_{\min} = y_{\min} = 1$ και $x_{\max} = y_{\max} = 4$ (βλέπε Σχήμα 2.34).

- Υπολογισμός $\Delta x = 2.5$ και $\Delta y = 2.5$.
- Υπολογισμός των p_i και q_i: $\begin{cases} p_1 = -2.5, & q_1 = -0.5; \\ p_2 = 2.5, & q_2 = 3.5; \\ p_3 = -2.5, & q_3 = -0.5; \\ p_4 = 2.5, & q_4 = 3.5. \end{cases}$
- Υπολογισμός των:

$$t_{\text{in}} = \max\left(\left\{\frac{q_1}{p_1}, \frac{q_3}{p_3}\right\} \cup \{0\}\right) = 0.2,$$

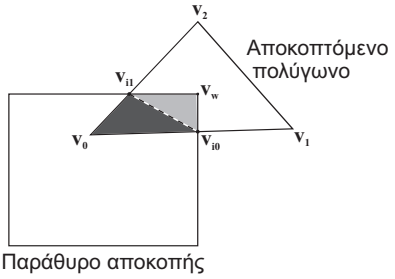
$$t_{\text{out}} = \min\left(\left\{\frac{q_2}{p_2}, \frac{q_4}{p_4}\right\} \cup \{1\}\right) = 1.$$

- Καθώς $t_{\text{in}} < t_{\text{out}}$ υπολογίζουμε τα άκρα $\mathbf{p_1}'(x_1', y_1')$ και $\mathbf{p_2}'(x_2', y_2')$ του αποκομμένου ευθύγραμμου τμήματος με χρήση της παραμετρικής εξίσωσης ευθείας:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + t_{\text{in}}\Delta x &&= 0.5 + 0.2 \cdot 2.5 = 1, \\ y_1' &= y_1 + t_{\text{in}}\Delta y &&= 0.5 + 0.2 \cdot 2.5 = 1, \\ x_2' &= x_1 + t_{\text{out}}\Delta x &&= 0.5 + 1 \cdot 2.5 = 3, \\ y_2' &= y_1 + t_{\text{out}}\Delta y &&= 0.5 + 1 \cdot 2.5 = 3. \end{aligned}$$

2.9.3 Αποκοπή πολυγώνου

Στη 2Δ αποκοπή πολυγώνων, τόσο το αντικείμενο αποκοπής, όσο και το αποκοπτόμενο, είναι πολύγωνα. Το αντικείμενο αποκοπής μερικές φορές περιορίζεται να



Σχήμα 2.35: *Η αποκοπή πολυγώνου δεν μπορεί να επιτευχθεί με αποκοπή ευθυγράμμων τμημάτων.*

είναι κυρτό ή ακόμα και παράθυρο (ορθογώνιο παραλληλόγραμμο). Θα αναφερόμαστε στα δύο αυτά πολύγωνα ως *πολύγωνο αποκοπής* και *αποκοπτόμενο πολύγωνο*.

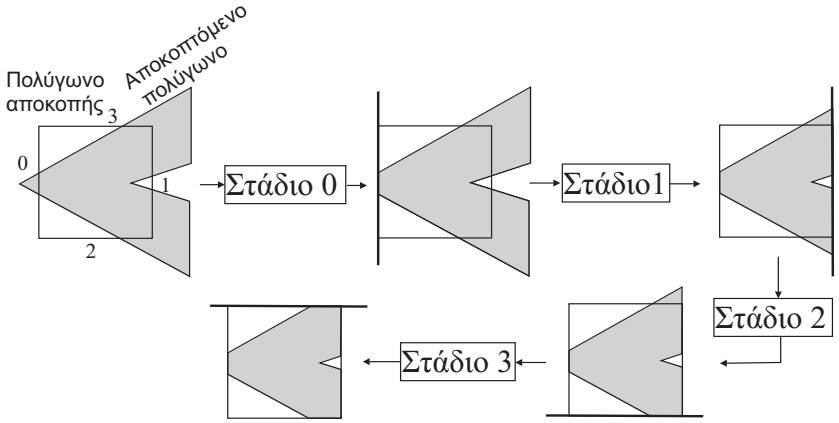
Μια πρώτη ερώτηση που προκύπτει είναι γιατί χρειαζόμαστε ειδικούς αλγορίθμους αποκοπής πολυγώνων; Δεν αρκεί να θεωρήσουμε ένα πολύγωνο ως ένα σύνολο ευθυγράμμων τμημάτων (ακμών) τα οποία να αποκόψουμε με το πολύγωνο αποκοπής; Το παράδειγμα του Σχήματος 2.35 απαντά σ' αυτό. Αν αποκόψουμε απλά ένα πολύγωνο ως σύνολο ευθυγράμμων τμημάτων μπορεί να οδηγηθούμε σε λάθος αποτέλεσμα. Στο παράδειγμα, τα αποτελέσματα της αποκοπής των ακμών του τριγώνου $\mathbf{v_0v_1v_2}$ με το πολύγωνο αποκοπής είναι τα ευθύγραμμα τμήματα $\mathbf{v_0v_{i0}}$ και $\mathbf{v_0v_{i1}}$. Καταρχήν αυτά δεν παριστάνουν ένα κλειστό πολύγωνο. Επιπλέον, υποθέτοντας ότι προσθέτουμε το ευθύγραμμο τμήμα $\mathbf{v_{i0}v_{i1}}$ για να κλείσει το πολύγωνο, τα τμήματα αυτά παριστάνουν λάθος πολύγωνο· το αποτέλεσμα θα έπρεπε να είναι το $\mathbf{v_0v_{i0}v_wv_{i1}}$ και όχι το $\mathbf{v_0v_{i0}v_{i1}}$. Το πρόβλημα με τους αλγορίθμους αποκοπής ευθειών είναι ότι θεωρούν το αποκοπτόμενο πολύγωνο σαν ένα σύνολο ευθυγράμμων τμημάτων. Αντίθετα, αυτό θα έπρεπε να θεωρείται ως η επιφάνεια που καλύπτει· ένας αλγόριθμος αποκοπής πολυγώνων πρέπει να υπολογίζει την *τομή* της επιφάνειας του αποκοπτόμενου πολυγώνου με την επιφάνεια του πολυγώνου αποκοπής.

Συνεπώς απαιτούνται εξειδικευμένοι αλγόριθμοι αποκοπής πολυγώνων και εδώ θα περιγράψουμε δύο τέτοιους αλγορίθμους. Ο αλγόριθμος Sutherland-Hodgman είναι αποτελεσματικός και διαδεδομένος, αλλά περιορίζει το πολύγωνο αποκοπής να είναι κυρτό. Ο αλγόριθμος Greiner-Hormann δεν έχει αυτό τον περιορισμό και είναι κατάλληλος για την αποκοπή γενικών πολυγώνων.

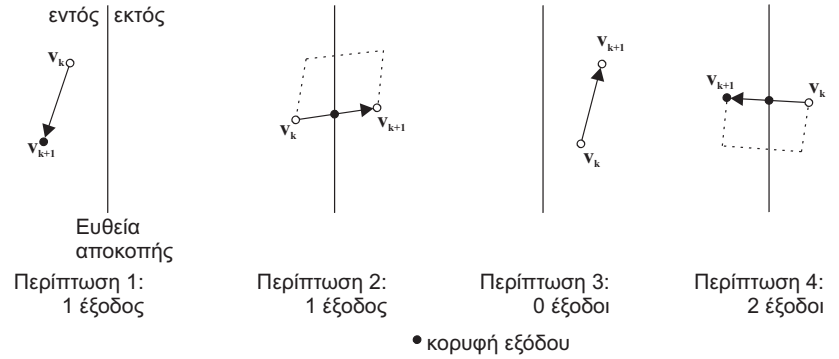
Ένα πολύγωνο δίνεται σαν ακολουθία n κορυφών $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_{n-1}}$ που ορίζουν n ακμές οι οποίες σχηματίζουν μια κλειστή καμπύλη $\mathbf{v_0v_1}, \mathbf{v_1v_2}, ..., \mathbf{v_{n-2}v_{n-1}}, \mathbf{v_{n-1}v_0}$. Οι κορυφές δίνονται με συγκεκριμένη φορά γύρω από την περίμετρο του πολυγώνου και εδώ θα θεωρήσουμε φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού.

Αλγόριθμος Sutherland-Hodgman.

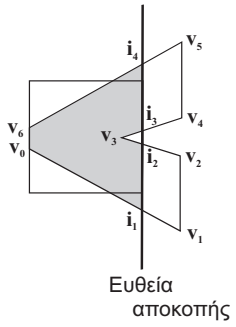
Ο αλγόριθμος Sutherland-Hodgman (SH) [Suth74a] αποκόπτει ένα τυχαίο πολύγωνο μ' ένα κυρτό πολύγωνο αποκοπής. Αποτελείται από m στάδια σε σωλήνωση που



Σχήμα 2.36: *Παράδειγμα Sutherland-Hodgman.*



Σχήμα 2.37: *Οι 4 δυνατές σχέσεις μεταξύ ευθείας αποκοπής και ακμής* $\mathbf{v_k v_{+1}}$ *αποκοπτόμενου πολυγώνου.*



Σχήμα 2.38: *Αναλυτική λειτουργία ενός σταδίου του αλγορίθμου SH.*

$\mathbf{v_k}$	$\mathbf{v_{k+1}}$	Περίπτωση	Έξοδος
$\mathbf{v_0}$	$\mathbf{v_1}$	2	$\mathbf{i_1}$
$\mathbf{v_1}$	$\mathbf{v_2}$	3	-
$\mathbf{v_2}$	$\mathbf{v_3}$	4	$\mathbf{i_2}$,$\mathbf{v_3}$
$\mathbf{v_3}$	$\mathbf{v_4}$	2	$\mathbf{i_3}$
$\mathbf{v_4}$	$\mathbf{v_5}$	3	-
$\mathbf{v_5}$	$\mathbf{v_6}$	4	$\mathbf{i_4}$,$\mathbf{v_6}$
$\mathbf{v_6}$	$\mathbf{v_0}$	1	$\mathbf{v_0}$

Πίνακας 2.2: *Στάδιο 1 του αλγορίθμου για το παράδειγμα του Σχήματος 2.36.*

αντιστοιχούν στις m ακμές του πολυγώνου αποκοπής. Το στάδιο $i \mid i : 0...m-1$ αποκόπτει με βάση την ευθεία που ορίζει η ακμή i του πολυγώνου αποκοπής[10] (ουσιαστικά υπολογίζει την τομή της επιφάνειας του αποκοπτόμενου πολυγώνου με το εσωτερικό ημι-επίπεδο της ευθείας αποκοπής i). Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο το πολύγωνο αποκοπής πρέπει να είναι κυρτό: θεωρείται ως ένωση των m εσωτερικών ημι-επιπέδων που ορίζονται από τις m ακμές του. Η είσοδος στο στάδιο $i \mid i : 1...m-1$ είναι η έξοδος του σταδίου $i-1$. Η είσοδος του σταδίου 0 είναι το αρχικό αποκοπτόμενο πολύγωνο, ενώ η έξοδος του σταδίου $m-1$ είναι το αποκομμένο πολύγωνο. Ένα παράδειγμα δίνεται στο Σχήμα 2.36.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε την λειτουργία ενός σταδίου της σωλήνωσης SH. Κάθε ακμή $\mathbf{v_k v_{k+1}}$ του πολυγώνου εισόδου θεωρείται σε σχέση με την ευθεία αποκοπής του συγκεκριμένου σταδίου. Υπάρχουν 4 περιπτώσεις που οδηγούν σε 4 διαφορετικές προσθήκες στη λίστα κορυφών του πολυγώνου εξόδου του σταδίου. Προστίθενται από 0 ως 4 κορυφές όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.37.

Στον Πίνακα 2.2 σκιαγραφείται το στάδιο 1 του αλγορίθμου SH για το παράδειγμα του Σχήματος 2.36. Η κατάσταση στο στάδιο αυτό φαίνεται με περισσότερη λεπτομέρεια στο Σχήμα 2.38.

Ακολουθεί ψευδοκώδικας του αλγορίθμου SH:

```
polygon SH_Clip ( polygon C, S ); {  /* Το C πρέπει να είναι κυρτό */
    int i,m;
    edge e;
    polygon InPoly, OutPoly;

    m=getedgenumber(C);
    InPoly=S;
    for (i=0; i<m; i++) {
        e = getedge(C,i);
        SH_Clip_Edge(e,InPoly,OutPoly);
        InPoly = OutPoly
    }
    return OutPoly
}
```

[10] Θα αναφερόμαστε στην ευθεία αυτή ως *ευθεία αποκοπής i*.

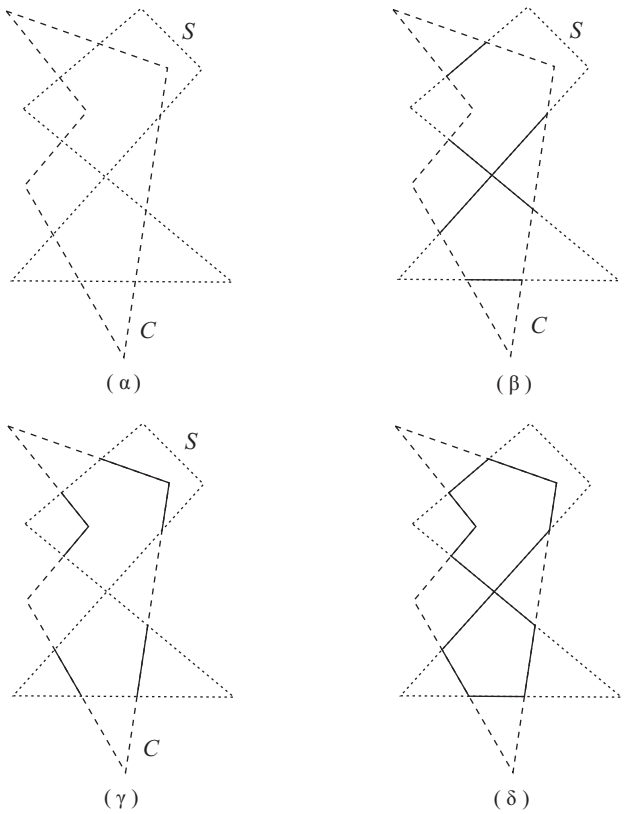
```
SH_Clip_Edge ( edge e, polygon InPoly, OutPoly ); {
    int k,n;
    vertex vk, vkplus1, i;

    n=getedgenumber(InPoly);
    for (k=0; k<n; k++) {
        vk=getvertex(InPoly,k);
        vkplus1=getvertex(InPoly,(k+1) mod n);
        if (inside(e, vk) and inside(e, vkplus1))
            /* Περίπτωση 1 */
            putvertex(OutPoly,vkplus1)
        else if (inside(e, vk) and !inside(e, vkplus1)) {
            /* Περίπτωση 2 */
            i=intersect_lines(e, (vk,vkplus1));
            putvertex(OutPoly,i)
        }
        else if (!inside(e, vk) and !inside(e, vkplus1))
            /* Περίπτωση 3 */
        else {
            /* Περίπτωση 4 */
            i=intersect_lines(e, (vk,vkplus1));
            putvertex(OutPoly,i);
            putvertex(OutPoly,vkplus1)
        }
    }
}
```

Χρησιμοποιούνται δύο βοηθητικές ρουτίνες. Η `intersect_lines` περιγράφηκε στον αλγόριθμο Cohen-Sutherland και το μαθηματικό υπόβαθρο της τομής δύο ευθειών στο επίπεδο δίνεται στο Παράρτημα Γ.

Η `inside` ελέγχει αν ένα σημείο βρίσκεται στο εξωτερικό ημι-επίπεδο της ευθείας αποκοπής e και, αν η e είναι παράλληλη με κάποιον άξονα, ο έλεγχος είναι μια απλή σύγκριση. Στη γενική περίπτωση που η e δεν είναι παράλληλη με κάποιον άξονα, μπορεί να ελεγχθεί το πρόσημο της τιμής της εξίσωσης ευθείας (2.1) για τις συντεταγμένες του σημείου.

Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου SH είναι $O(mn)$ όπου m και n τα πλήθη κορυφών του πολυγώνου αποκοπής και του αποκοπτόμενου πολυγώνου αντίστοιχα. Όμως τα m στάδια μπορούν να υλοποιηθούν με αρχιτεκτονική σωλήνωσης καθώς το πολύγωνο αποκοπής είναι —γενικά— σταθερό. Τέλος, είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικός αλγόριθμος αφού δεν απαιτεί πολύπλοκες δομές ή πράξεις.



Σχήμα 2.39: *Παράδειγμα Greiner-Hormann: (α) τα αρχικά πολύγωνα* S *και* C*, (β) μετά το βήμα 1 του GH, (γ) μετά το βήμα 2 του GH, (δ) το τελικό αποτέλεσμα.*

Αλγόριθμος Greiner-Hormann.

Ο αλγόριθμος Greiner-Hormann (GH) [Grei98] είναι κατάλληλος για γενικά πολύγωνα.[11] Τόσο το πολύγωνο αποκοπής (C) όσο και το αποκοπτόμενο πολύγωνο (S) μπορεί να είναι τυχαία κλειστά πολύγωνα, ακόμη και αυτοτεμνόμενα. Ο αλγόριθμος GH θεωρεί τα πολύγωνα S και C συμμετρικά· δεν έχει σημασία ποιό είναι ποιό καθώς υπολογίζεται η τομή των επιφανειών τους.

Ο GH βασίζεται στον έλεγχο αριθμού περιελίξεων για σημείο εντός πολυγώνου (βλέπε Ενότητα 2.5). Ο αριθμός περιελίξεων $\omega(P, \mathbf{p})$ ενός σημείου $\mathbf{p}$ σε σχέση μ' ένα πολύγωνο P δεν αλλάζει όσο η τοπολογική σχέση των δύο παραμένει σταθερή. Αν το $\mathbf{p}$ διασχίσει την περίμετρο του P, τότε το $\omega(P, \mathbf{p})$ αυξάνεται ή μειώνεται κατά 1. Αν το $\omega(P, \mathbf{p})$ είναι περιττός αριθμός τότε το $\mathbf{p}$ είναι εντός του P, διαφορετικά είναι εκτός. Συνεπώς, κάθε φορά που ένα κινούμενο σημείο διασχίζει την περίμετρο του P, αλλάζει κατάσταση από εσωτερικό του P σε εξωτερικό ή το αντίθετο.

Θεωρήστε τα πολύγωνα S και C του Σχήματος 2.39 (α). Ο αλγόριθμος GH αποτε-

[11] Μια παλιότερη λύση στην αποκοπή γενικών πολυγώνων είχε δοθεί από τον Vatti [Vatt92].

λείται από τρία βήματα:

1. Παρακολούθηση της περιμέτρου του S ξεκινώντας από μια κορυφή του $\mathbf{v_{s0}}$. Μια φανταστική γραφίδα αλλάζει κατάσταση μεταξύ *ενεργής* και *μη ενεργής* κάθε φορά που τέμνει την περίμετρο του C. Η αρχική της κατάσταση είναι *ενεργή* αν το $\mathbf{v_{s0}}$ είναι εντός του C και *μη ενεργή* διαφορετικά. Έτσι υπολογίζεται το τμήμα του S που είναι εντός του C [Σχήμα 2.39 (β)].
2. Είναι αντίστοιχο του βήματος 1 με ανταλλαγή των ρόλων των S και C. Έτσι υπολογίζεται το τμήμα του C που είναι εντός του S (Σχήμα 2.39 (γ)).
3. Η ένωση των αποτελεσμάτων των βημάτων 1 και 2 είναι το αποτέλεσμα της αποκοπής του S με το C (ή ισοδύναμα του C με το S) (Σχήμα 2.39 (δ)).

Το αποτέλεσμα του αλγορίθμου GH μπορεί να απαρτίζεται από ασύνδετα τμήματα. Η υλοποίηση που προτείνεται στην αρχική δημοσίευση προτείνει τη χρήση διπλά συνδεδεμένων λιστών για τις κορυφές των C και S με επιπλέον δείκτες για τη ένωση των ασύνδετων τμημάτων.

Η αλλαγή της κατάστασης της γραφίδας που περιγράφεται στον αλγόριθμο, πρακτικά, απαιτεί τον υπολογισμό όλων των τομών μεταξύ των ακμών των S και C. Οι τομές αυτές μπορούν να υπολογισθούν με την ρουτίνα `intersect_lines` που αναφέρεται στους προηγούμενους αλγορίθμους αποκοπής και στο Παράρτημα Γ. Η πολυπλοκότητα του Βήματος 1 (όπως και του 2) είναι $O(mn)$, όπου m και n τα πλήθη των κορυφών των πολυγώνων C και S αντίστοιχα· αυτή είναι και η συνολική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου GH. Στην πράξη, οι πολύπλοκες δομές που χρησιμοποιεί τον κάνουν λιγότερο αποτελεσματικό από τον SH.

Όπως περιγράφηκε, ο αλγόριθμος GH υπολογίζει την τομή των επιφανειών δύο πολυγώνων, $C \cap S$. Εύκολα γενικεύεται για τον υπολογισμό των $C \cup S$, $C - S$ και $S - C$ αλλάζοντας τις αρχικές καταστάσεις των γραφίδων για τα S και C (υπάρχουν 4 δυνατοί συνδυασμοί αρχικών καταστάσεων). Αν και αυτές οι γενικεύσεις δεν είναι χρήσιμες για το πρόβλημα της αποκοπής, ωστόσο έχουν άλλες εφαρμογές.

2.10 Ασκήσεις

1. Γενικεύστε τον αλγόριθμο `line3` ώστε να λειτουργεί σ' όλα τα οκταμόρια.
2. Υλοποιήστε τους αλγορίθμους `line1`, `line2` και `line3` και συγκρίνετε την απόδοσή τους χρονομετρώντας τους για ένα μεγάλο πλήθος ευθυγράμμων τμημάτων.
3. Τροποποιήστε τον αλγόριθμο `line3`, ώστε να περιλαμβάνει μια επιπλέον παράμετρο `thickness` η οποία ορίζει το πάχος της ευθείας σε εικονοστοιχεία. Το πάχος μετράται στον δευτερεύοντα άξονα.
4. Μετατρέψτε τον αλγόριθμο `circle`, ώστε να σχεδιάζει κύκλο με τυχαίο ακέραιο κέντρο (x_c, y_c).

5. Ο αλγόριθμος `triangle1` μπορεί να γενικευτεί στον `convex1` ο οποίος σχεδιάζει τυχαία κυρτά πολύγωνα, υπολογίζοντας αυξητικά τις (γραμμικές) συναρτήσεις των ακμών τους για όλα τα εικονοστοιχεία του περιβάλλοντος κιβωτίου τους. Υλοποιήστε τον `convex1`.

6. Σχεδιάστε έναν μή-αναδρομικό αλγόριθμο γεμίσματος. *Βοήθεια:* Σκεφθείτε τρόπους γεμίσματος πολλαπλών εικονοστοιχείων ταυτόχρονα. Ίσως χρειαστεί να φυλάξετε σημεία «διακλάδωσης» (από τα οποία μπορεί να ξεκινήσει το γέμισμα μιας γειτονικής γραμμής σάρωσης) σε μια λίστα.

7. Υλοποιήστε αλγόριθμο σχεδίασης ευθείας με αντιταύτιση, αγνοώντας την απόδοσή του. Το πάχος της ευθείας πρέπει να δίνεται σαν πραγματική παράμετρος σε μονάδες εικονοστοιχείων.

8. Ορίστε μια απλή 2Δ σκηνή χρησιμοποιώντας ένα μικρό αριθμό τριγώνων με τα σχετικά χρώματα. Χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο `triangle1` για να σχεδιάσετε τη σκηνή. Σχεδιάστε την πάλι σε τριπλάσια ανάλυση ($s = 3$) και μεταφιλτράρετέ την χρησιμοποιώντας:

   (α) το φίλτρο συνέλιξης 3×3 που δίνεται στην Ενότητα 2.8.2,

   (β) ένα φίλτρο 3×3 μ' όλα τα βάρη ίσα.

   Συγκρίνετε τα αποτελέσματα. (*Σημείωση*: τα βάρη και των δύο φίλτρων πρέπει να είναι κανονικοποιημένα).

9. Υλοποιήστε τους αλγορίθμους αποκοπής ευθείας CS και LB και συγκρίνετε την απόδοσή τους. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να σχεδιάσετε ένα πείραμα που να περιλαμβάνει μια γεννήτρια τυχαίων ευθύγραμμων τμημάτων.

10. Υλοποιήστε τους αλγορίθμους αποκοπής πολυγώνων SH και GH και συγκρίνετε την απόδοσή τους. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να σχεδιάσετε ένα πείραμα που να περιλαμβάνει μια γεννήτρια τυχαίων πολυγώνων.

11. Γενικεύστε τον αλγόριθμο GH ώστε να υπολογίζει τα:

    - $C \cup S$,
    - $C - S$,
    - $S - C$.

12. Υλοποιήστε τον αλγόριθμο αποκοπής SH για παράθυρο αποκοπής (ορθογώνιο παραλληλόγραμμο), χρησιμοποιώντας μια σωλήνωση 4 σταδίων που εκτελούνται σε μια σωλήνωση 4 επεξεργαστών. Υπολογίστε την επιτάχυνση σε σχέση με την σειριακή υλοποίηση. Εκτελέστε τους αλγορίθμους για μεγάλα πλήθη πολυγώνων εισόδου, ώστε το αρχικό κόστος γεμίσματος της σηλήνωσης να γίνει αμελητέο.

3

Συστήματα συντεταγμένων και μετασχηματισμοί στις 2Δ και 3Δ

Η αλλαγή δεν είναι πράγμα κακό, αν γίνεται στη σωστή κατεύθυνση.

—Winston Churchill

3.1 Εισαγωγή

Στα γραφικά είναι συχνά αναγκαίο να αλλάξει η μορφή των αντικειμένων ή, αντίστοιχα, να αλλάξει το σύστημα συντεταγμένων. Για παράδειγμα η ψηφιακή μορφή ενός αυτοκινήτου μπορεί να χρησιμοποιηθεί πολλαπλές φορές στο μοντέλο μιας σκηνής, τοποθετημένο σε διάφορες θέσεις και προσανατολισμούς και ίσως και σε διαφορετικά μεγέθη. Στη συνθετική κίνηση, ένα αντικείμενο μπορεί να αλλάζει από καρέ σε καρέ: αυτός ο μετασχηματισμός μπορεί να εμπλέκει τη θέση, τον προσανατολισμό, το μέγεθος, ή ακόμα και το σχήμα του. Επίσης, καθώς αντικείμενα διατρέχουν τα στάδια της σωλήνωσης γραφικών, το σύστημα συντεταγμένων τους αλλάζει αρκετές φορές (π.χ. από συντεταγμένες αντικειμένου σε συντεταγμένες κόσμου, από συντεταγμένες κόσμου σε συντεταγμένες παρατηρητή κλπ).

Όλες οι παραπάνω αλλαγές χρησιμοποιούν ένα κοινό στοιχείο για την υλοποίησή τους: *μετασχηματισμούς συντεταγμένων*. Οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων είναι το πιο σημαντικό και κλασικό θέμα στα γραφικά: είναι τα *εργαλεία της αλλαγής*.

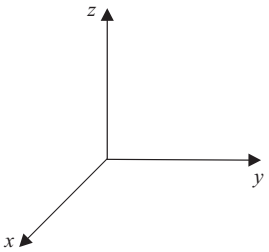
Στο παρόν βιβλίο θα παριστάνουμε τα σημεία[1] στον τριδιάστατο Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{E}^3$ ως διανύσματα στήλες 3×1

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}.$$

Οι γραμμικοί μετασχηματισμοί παριστάνονται σαν πίνακες 3×3 που πολλαπλασιάζονται από αριστερά με ένα σημείο, παράγοντας ένα άλλο σημείο:

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_4 & m_5 & m_6 \\ m_7 & m_8 & m_9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}.$$

[1] Για έναν τυπικό ορισμό σημείων και διανυσμάτων δείτε την Ενότητα Α.2.



Σχήμα 3.1: *Δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων.*

Σημειώστε ότι αν τα σημεία παριστάνονταν με διανύσματα γραμμής 1×3, τότε ο ανάστροφος του παραπάνω πίνακα μετασχηματισμού θα έπρεπε να πολλαπλασιαστεί από δεξιά με το σημείο:

$$\begin{bmatrix} p'_x & p'_y & p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 & m_4 & m_7 \\ m_2 & m_5 & m_8 \\ m_3 & m_6 & m_9 \end{bmatrix}.$$

Στο βιβλίο αυτό τα τριδιάστατα συστήματα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε είναι δεξιόστροφα (Σχήμα 3.1).

3.2 Συσχετισμένοι μετασχηματισμοί

Στα μαθηματικά *μετασχηματισμός* ονομάζεται μια απεικόνιση της οποίας τα πεδία ορισμού και τιμών είναι το ίδιο σύνολο, π.χ. από το $\mathbb{E}^3$ στο $\mathbb{E}^3$. Στα γραφικά και στην οπτικοποίηση μας ενδιαφέρουν κυρίως οι *συσχετισμένοι μετασχηματισμοί*, οι οποίοι διατηρούν σημαντικές γεωμετρικές ιδιότητες των αντικειμένων που μετασχηματίζουν (βλέπε Ενότητα 3.10). Συγκεκριμένα, διατηρούν τους *συσχετισμένους συνδυασμούς* που περιλαμβάνουν τα ευθύγραμμα τμήματα και τα κυρτά πολύγωνα τα οποία είναι δομικά στοιχεία των μοντέλων μας.

Ένας *συσχετισμένος συνδυασμός* σημείων $\mathbf{p_0}, \mathbf{p_1}, ..., \mathbf{p_n} \in \mathbb{E}^3$ είναι ένα σημείο $\mathbf{p} \in \mathbb{E}^3$ που ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathbf{p_i}, \tag{3.1}$$

με $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ και $\sum_{i=0}^{n} a_i = 1$. Τα $a_0, a_1, ..., a_n$ είναι οι *συσχετισμένες συντεταγμένες* του $\mathbf{p}$ σε σχέση με τα $\mathbf{p_0}, \mathbf{p_1}, ..., \mathbf{p_n}$. Ένας συσχετισμένος συνδυασμός είναι *κυρτός*, αν όλες οι συσχετισμένες συντεταγμένες a_i είναι μη αρνητικές. Στην περίπτωση αυτή ο συσχετισμένος συνδυασμός $\mathbf{p}$ είναι εντός της κυρτής περιβάλλουσας των αρχικών σημείων $\mathbf{p_0}, \mathbf{p_1}, ..., \mathbf{p_n}$.[2]

Τα ευθύγραμμα τμήματα, τα τρίγωνα και τα τετράεδρα (βασικά δομικά στοιχεία για

[2] Άτυπα, η κυρτή περιβάλλουσα ορίζεται ως το ελάχιστο κυρτό σχήμα που περιλαμβάνει τα δοθέντα σημεία.

την κατασκευή των αντίστοιχων μοντέλων) είναι ειδικές περιπτώσεις συσχετισμένων συνδυασμών. Το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των σημείων $\mathbf{p_1}$ και $\mathbf{p_2}$ μπορεί να ορισθεί ως το σύνολο των σημείων $\mathbf{p}$ που ικανοποιούν $\mathbf{p} = a_1 \cdot \mathbf{p_1} + a_2 \cdot \mathbf{p_2}$ με $0 \leq a_1 \leq 1$ και $a_2 = 1 - a_1$. Έτσι, $a_1 + a_2 = 1$ και $a_1, a_2 \geq 0$· οπότε έχουμε ένα κυρτό συσχετισμένο συνδυασμό. Παρομοίως, το τρίγωνο με κορυφές $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$ και $\mathbf{p_3}$ μπορεί να ορισθεί ως το σύνολο των σημείων $\mathbf{p}$ που ικανοποιούν $\mathbf{p} = a_1 \cdot \mathbf{p_1} + a_2 \cdot \mathbf{p_2} + a_3 \cdot \mathbf{p_3}$ με $0 \leq a_1, a_2, a_3 \leq 1$ και $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, που είναι επίσης ένας κυρτός συσχετισμένος συνδυασμός.

Συσχετισμένος μετασχηματισμός είναι ένας μετασχηματισμός που διατηρεί τους συσχετισμένους συνδυασμούς, δηλαδή που διατηρεί τη σχέση των σημείων των συσχετισμένων συνδυασμών. Μαθηματικά, ένας μετασχηματισμός $\Phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ είναι συσχετισμένος αν

$$\Phi(\mathbf{p}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \Phi(\mathbf{p_i}), \tag{3.2}$$

όπου $\mathbf{p} = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathbf{p_i}$ είναι ένας συσχετισμένος συνδυασμός. Με άλλα λόγια, το αποτέλεσμα της εφαρμογής ενός συσχετισμένου μετασχηματισμού πάνω στο αποτέλεσμα $\mathbf{p}$ ενός συσχετισμένου συνδυασμού πρέπει να ισούται με τον συσχετισμένο συνδυασμό των αποτελεσμάτων της εφαρμογής του συσχετισμένου μετασχηματισμού πάνω στα αρχικά σημεία, με τα ίδια βάρη a_i. Για παράδειγμα, ένας συσχετισμένος μετασχηματισμός θα μετατρέψει το μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος στο μέσο του μετασχηματισμένου ευθυγράμμου τμήματος.

Ο παραπάνω ορισμός έχει μεγάλη *πρακτική σημασία*, καθώς ένας συσχετισμένος μετασχηματισμός μπορεί να εφαρμοσθεί πάνω σε ένα συσχετισμένο συνδυασμό εφαρμοζόμενος μόνο πάνω στα σημεία ορισμού και όχι στα «εσωτερικά» σημεία του. Για παράδειγμα, για να εφαρμοσθεί ένας συσχετισμένος μετασχηματισμός σε ένα τρίγωνο, είναι αρκετό θεωρητικά να εφαρμοσθεί στις 3 κορυφές του, και δεν χρειάζεται να εφαρμοσθεί στα (άπειρα) εσωτερικά του σημεία.

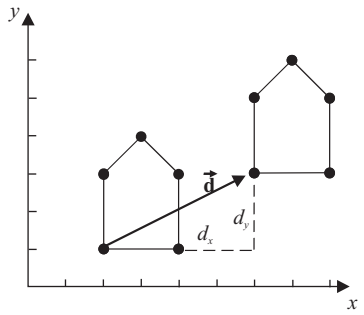
Απεικονίσεις της μορφής:

$$\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \overrightarrow{\mathbf{t}}, \tag{3.3}$$

όπου $\mathbf{A}$ είναι ένας πίνακας 3×3 και $\overrightarrow{\mathbf{t}}$ ένα διάνυσμα 3×1, είναι συσχετισμένοι μετασχηματισμοί στο $\mathbb{E}^3$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ο μετασχηματισμός (3.3) διατηρεί τους συσχετισμένους συνδυασμούς:

$$\begin{aligned}
\Phi(\sum_{i=0}^{n} a_i \mathbf{p_i}) &= \mathbf{A}(\sum_{i=0}^{n} a_i \mathbf{p_i}) + \overrightarrow{\mathbf{t}} \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i \mathbf{A}\mathbf{p_i} + \sum_{i=0}^{n} a_i \overrightarrow{\mathbf{t}} \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i (\mathbf{A}\mathbf{p_i} + \overrightarrow{\mathbf{t}}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i \Phi(\mathbf{p_i}).
\end{aligned}$$



Σχήμα 3.2: *2Δ μεταφορά.*

□

Οι τέσσερις βασικοί συσχετισμένοι μετασχηματισμοί: *μεταφορά, αλλαγή κλίμακας, περιστροφή* και *στρέβλωση* είναι ειδικές περιπτώσεις της Εξίσωσης (3.3), όπως θα δούμε στην Ενότητα 3.3.

3.3 2Δ συσχετισμένοι μετασχηματισμοί

Για λόγους απλότητας, θα ξεκινήσουμε περιγράφοντας τους βασικούς διδιάστατους (2Δ) συσχετισμένους μετασχηματισμούς. Η προηγούμενη συζήτηση περί 3Δ συσχετισμένων μετασχηματισμών ισχύει και στην 2Δ περίπτωση και τα 2Δ αποτελέσματα γενικεύονται άμεσα στις 3Δ.

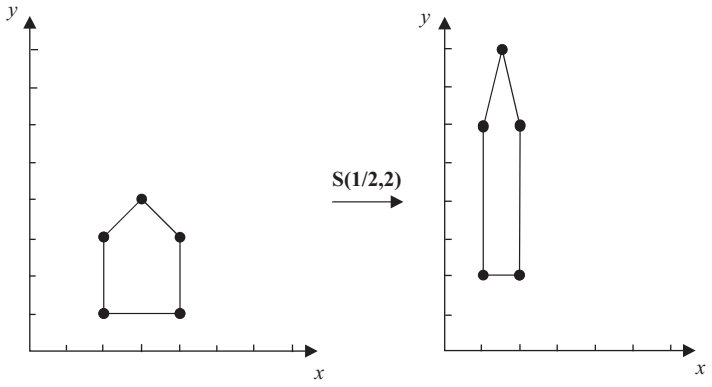
Οι συσχετισμένοι μετασχηματισμοί που θα περιγράψουμε μετατρέπουν ένα σημείο σε ένα άλλο σημείο. Για να μετατρέψουμε ένα αντικείμενο, απλά μετατρέπουμε όλα τα σημεία που το ορίζουν, π.χ. τις κορυφές των πολυγώνων του. Η ορίζουσα ιδιότητα των συσχετισμένων μετασχηματισμών (διατήρηση των συσχετισμένων συνδυασμών), εξασφαλίζει ότι το αποτέλεσμα θα είναι σωστό και δεν χρειάζεται να μετατρέψουμε όλα τα εσωτερικά σημεία των αντικειμένων.

3.3.1 2Δ μεταφορά

Η *μεταφορά* εκφράζει μετακίνηση κατά συγκεκριμένη απόσταση σε συγκεκριμένη κατεύθυνση, πράγματα που ορίζονται από το διάνυσμα μεταφοράς. Η μεταφορά ενός 2Δ σημείου $\mathbf{p} = [x, y]^{\mathrm{T}}$ κατά το διάνυσμα $\vec{\mathbf{d}} = [d_x, d_y]^{\mathrm{T}}$ δίνει ένα νέο σημείο $\mathbf{p}' = [x', y']^{\mathrm{T}}$, το οποίο είναι το αποτέλεσμα της πρόσθεσης του $\vec{\mathbf{d}}$ στο $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \vec{\mathbf{d}}. \tag{3.4}$$

Αυτή είναι ειδική περίπτωση της Εξίσωσης (3.3), όπου $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ και $\vec{\mathbf{t}} = \vec{\mathbf{d}}$ ($\mathbf{I}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας 2×2). Το Σχήμα 3.2 δείχνει το αποτέλεσμα της μεταφοράς σε ένα απλό αντικείμενο.



Σχήμα 3.3: *2Δ Αλλαγή κλίμακας.*

3.3.2 2Δ αλλαγή κλίμακας

Η *αλλαγή κλίμακας* αλλάζει το μέγεθος των αντικειμένων. Η αλλαγή του μεγέθους σε κάθε διάσταση ορίζεται από τον αντίστοιχο παράγοντα αλλαγής κλίμακας. Στις 2 διαστάσεις έχουμε 2 παράγοντες αλλαγής κλίμακας, τον s_x και τον s_y, οι οποίοι πολλαπλασιάζονται με τις αντίστοιχες συντεταγμένες ενός 2Δ σημείου $\mathbf{p} = [x, y]^{\mathrm{T}}$ για να δώσουν το $\mathbf{p}' = [x', y']^{\mathrm{T}}$ $\mathbf{p}' = [x', y']^{\mathrm{T}}$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{S}(s_x, s_y) \cdot \mathbf{p} \tag{3.5}$$

όπου

$$\mathbf{S}(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}.$$

Καθώς δεν είναι δυνατόν να παρατηρηθεί το αποτέλεσμα της αλλαγής κλίμακας πάνω σε ένα σημείο, το Σχήμα 3.3 δίνει το αποτέλεσμά της πάνω σε ένα απλό αντικείμενο. Παρατηρούμε ότι η αλλαγή κλίμακας είναι ειδική περίπτωση της εξίσωσης (3.3), όπου $\mathbf{A} = \mathbf{S}(s_x, s_y)$ και $\overrightarrow{\mathbf{t}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Αν ένας παράγοντας αλλαγής κλίμακας είναι μικρότερος του 1, τότε το μέγεθος του αντικειμένου μικραίνει στην αντίστοιχη διάσταση, ενώ αν είναι μεγαλύτερος του 1 μεγαλώνει.

Η αλλαγή κλίμακας έχει ως «παρενέργεια» μια μεταφορά που είναι αντίστοιχη του παράγοντα αλλαγής κλίμακας. Στο Σχήμα 3.3 παρατηρούμε πως το αντικείμενο μετακινείται προς το κέντρο του συστήματος συντεταγμένων στον άξονα x (παράγοντας αλλαγής κλίμακας < 1), ενώ απομακρύνεται από αυτό στον άξονα y (παράγοντας αλλαγής κλίμακας > 1).

Μια αλλαγή κλίμακας ονομάζεται *ισοτροπική*, αν όλοι οι παράγοντες αλλαγής κλίμακας είναι ίσοι[3]. Στις 2 διαστάσεις αυτό συνεπάγεται $s_x = s_y$. Η ισοτροπική αλλαγή κλίμακας διατηρεί την ομοιότητα των αντικειμένων (γωνίες) ενώ η μη ισοτροπική δεν

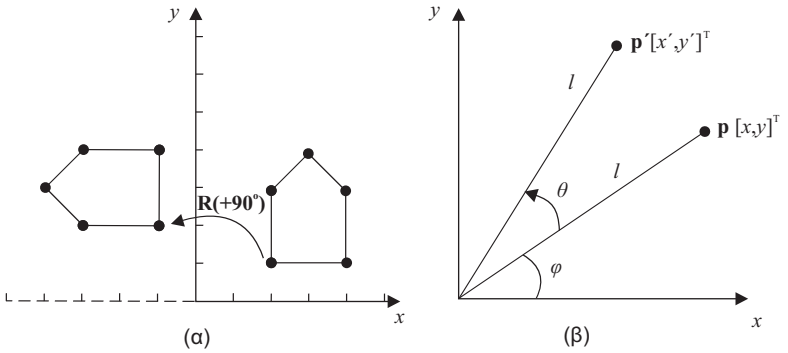
[3]Αυτή ονομάζεται επίσης και *ομοιόμορφη*. Αντίθετα, όταν $s_x \neq s_y$, έχουμε *μη ομοιόμορφη* αλλαγή κλίμακας.

τη διατηρεί (βλ. επίσης Ενότητα 3.10).

Στις 2Δ ο *κατοπτρισμός* πάνω σε άξονα μπορεί να περιγραφεί σαν ειδική περίπτωση αλλαγής κλίμακας με παράγοντα −1. Ο κατοπτρισμός πάνω στον άξονα x είναι $\mathbf{S}(1, -1)$, ενώ ο κατοπτρισμός πάνω στον άξονα y είναι $\mathbf{S}(-1, 1)$.

3.3.3 2Δ περιστροφή

Η *περιστροφή* περιστρέφει αντικείμενα γύρω από το κέντρο συντεταγμένων. Η απόσταση από το κέντρο δεν αλλάζει. Ακολουθούμε τη σύμβαση ότι μια περιστροφή αντίθετη από την φορά του ρολογιού είναι θετική. Έτσι στο Σχήμα 3.4 (α), το αντικείμενο στρέφεται κατά +90°.



Σχήμα 3.4: *2Δ περιστροφή.*

Με τη βοήθεια του Σχήματος 3.4 (β), μπορούμε να υπολογίσουμε το $\mathbf{p}' = [x', y']^{\mathrm{T}}$ από το $\mathbf{p} = [x, y]^{\mathrm{T}}$:

$$x' = l\cos(\phi + \theta) = l(\cos\phi\ \cos\theta - \sin\phi\ \sin\theta) = x\ \cos\theta - y\ \sin\theta;$$

$$y' = l\sin(\phi + \theta) = l(\cos\phi\ \sin\theta + \sin\phi\ \cos\theta) = x\ \sin\theta + y\ \cos\theta.$$

Οπότε,

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{p}, \tag{3.6}$$

όπου

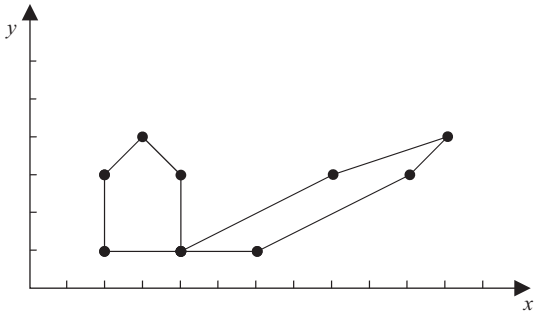
$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Η περιστροφή είναι ειδική περίπτωση της εξίσωσης (3.3), όπου $\mathbf{A} = \mathbf{R}(\theta)$ και $\vec{\mathbf{t}} = \vec{\mathbf{0}}$.

3.3.4 2Δ Στρέβλωση

Η στρέβλωση είναι ο τελευταίος βασικός συσχετισμένος μετασχηματισμός και έχει ως αποτέλεσμα τη μεταβολή μιας συντεταγμένης (αντικειμένου) κατά ποσό που

εξαρτάται από την τιμή της άλλης συντεταγμένης *επί* τον παράγοντα στρέβλωσης[4]. Ένα φυσικό παράδειγμα στρέβλωσης αποτελεί η τοποθέτηση μιας δεσμίδας από κάρτες πάνω σε ένα τραπέζι, η τοποθέτηση ενός σκληρού βιβλίου δίπλα στις κάρτες και η ελαφριά κλίση του βιβλίου. Όσο πιο ψηλά ήταν αρχικά μια κάρτα, τόσο περισσότερο θα «στρεβλωθεί» από την κλίση του βιβλίου. Παρατηρήστε ότι ενώ η κάθετη θέση της κάρτας δεν θα αλλάξει, η οριζόντια θέση της θα αλλάξει κατά ποσό ανάλογο της κάθετης θέσης της. Το Σχήμα 3.5 δείχνει το αποτέλεσμα μιας στρέβλωσης κατά τον άξονα x με παράγοντα στρέβλωσης 2.



Σχήμα 3.5: *2Δ στρέβλωση.*

Η στρέβλωση ενός σημείου $\mathbf{p} = [x, y]^{\mathrm{T}}$ κατά τον άξονα x έχει ως αποτέλεσμα το σημείο $\mathbf{p}' = [x', y']^{\mathrm{T}}$, όπου

$$x' = x + ay, \quad y' = y,$$

ενώ η στρέβλωση κατά τον άξονα y δίνει

$$x' = x, \quad y' = bx + y,$$

όπου a και b οι αντίστοιχοι παράγοντες στρέβλωσης. Σε μορφή πίνακα, η στρέβλωση κατά τον άξονα x είναι

$$\mathbf{p}' = \mathbf{SH_x}(a) \cdot \mathbf{p}, \tag{3.7}$$

όπου

$$\mathbf{SH_x}(a) = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ενώ η στρέβλωση κατά τον άξονα y είναι

$$\mathbf{p}' = \mathbf{SH_y}(b) \cdot \mathbf{p}, \tag{3.8}$$

όπου

$$\mathbf{SH_y}(b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}.$$

[4]Σε περισσότερες (π.χ. d) διαστάσεις, η στρέβλωση μεταβάλει $d - 1$ συντεταγμένες κατά ποσό που ισούται με την άλλη συντεταγμένη, επί τους αντίστοιχους παράγοντες στρέβλωσης. Στην Ενότητα 3.7 θα δούμε την τριδιάστατη περίπτωση.

Η στρέβλωση είναι ειδική περίπτωση της εξίσωσης (3.3), όπου $\mathbf{A} = \mathbf{SH_x}(a)$ ή $\mathbf{A} = \mathbf{SH_y}(b)$ και $\overrightarrow{\mathbf{t}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

3.4 Σύνθετοι Μετασχηματισμοί

Οι πρακτικά χρήσιμοι μετασχηματισμοί στα γραφικά και στην οπτικοποίηση σπάνια αποτελούνται από έναν απλό βασικό μετασχηματισμό. Συνήθως αποτελούνται από δύο ή περισσότερα βήματα (βλ. τα 2Δ και 3Δ παραδείγματα των ενοτήτων 3.6 και 3.8). Τέτοιοι μετασχηματισμοί πρέπει να εφαρμοσθούν στα αντικείμενα μιας σκηνής, τα οποία μπορεί να απαρτίζονται από χιλιάδες ή και εκατομμύρια κορυφές.

Για παράδειγμα έστω ότι θέλουμε να περιστρέψουμε ένα 2Δ αντικείμενο κατά 45° και στη συνέχεια να του αλλάξουμε κλίμακα (ισοτροπικά) κατά παράγοντα 2. Πρέπει να εφαρμόσουμε πρώτα τον πίνακα περιστροφής:

$$\mathbf{R}(45^\circ) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

και στη συνέχεια τον πίνακα αλλαγής κλίμακας:

$$\mathbf{S}(2,2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

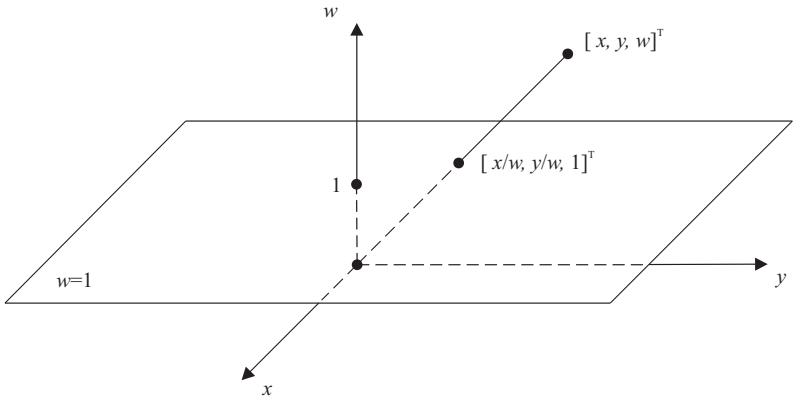
σε κάθε κορυφή του αντικειμένου.

Παρότι είναι δυνατό να εφαρμόσουμε τους μετασχηματισμούς διαδοχικά σε κάθε κορυφή $\mathbf{p}$: $\mathbf{S}(2,2) \cdot (\mathbf{R}(45^\circ) \cdot \mathbf{p})$, είναι πιο αποτελεσματικό να εκμεταλλευτούμε την *προσεταιριστική* ιδιότητα του πολλαπλασιασμού πινάκων[5] και να εφαρμόσουμε τον σύνθετο μετασχηματισμό (πίνακα) στις κορυφές: $(\mathbf{S}(2,2) \cdot \mathbf{R}(45^\circ)) \cdot \mathbf{p}$. Ο σύνθετος μετασχηματισμός (πίνακας) υπολογίζεται μια φορά και εφαρμόζεται διαδοχικά στις κορυφές, πράγμα που —γενικά— περιορίζει σημαντικά το υπολογιστικό κόστος (βλ. Ασκήσεις, Ενότητα 3.11).

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν έχει την *αντιμεταθετική* ιδιότητα[6], οπότε η σειρά του γινομένου των βασικών πινάκων μετασχηματισμού είναι σημαντική. Έχοντας επιλέξει την παράσταση ενός σημείου ως διάνυσμα-στήλη (που συνεπάγεται ότι οι πίνακες μετασχηματισμών πολλαπλασιάζονται από αριστερά με τα σημεία), πρέπει να γράψουμε την σύνθεση των πινάκων με σειρά αντίστροφη της εφαρμογής τους. Στο παραπάνω παράδειγμα για να εφαρμόσουμε πρώτα την περιστροφή και μετά την αλλαγή κλίμακας, υπολογίζουμε τον σύνθετο πίνακα $\mathbf{S}(2,2) \cdot \mathbf{R}(45^\circ)$. Γενικά, για να εφαρμόσουμε την ακολουθία μετασχηματισμών $T_1, T_2, \ldots, T_m$, υπολογίζουμε τον σύνθετο πίνακα $\mathbf{T_m} \cdot \ldots \cdot \mathbf{T_2} \cdot \mathbf{T_1}$.

Δυστυχώς, υπάρχει ένα πρόβλημα με τον μετασχηματισμό μεταφοράς, ο οποίος δεν μπορεί να περιγραφεί με ένα γραμμικό πίνακα μετασχηματισμού. Με άλλα λόγια, δεν

[5] $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$.
[6] $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.



Σχήμα 3.6: *2Δ ομογενείς συντεταγμένες.*

μπορεί να περιγραφεί με τη μορφή $x' = ax + by$ και $y' = cx + dy$. Συνεπώς, η μεταφορά δεν μπορεί να συμπεριληφθεί σε ένα σύνθετο μετασχηματισμό. Ευτυχώς υπάρχει μια σχετικά απλή λύση στο πρόβλημα αυτό: οι ομογενείς συντεταγμένες.

3.4.1 Ομογενείς συντεταγμένες

Οι *ομογενείς συντεταγμένες* χρησιμοποιούν μια επιπλέον διάσταση από τον χώρο εργασίας. Στο 2Δ χώρο, τα ομογενή σημεία έχουν τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix},$$

όπου w μια νέα συντεταγμένη που αντιστοιχεί στην επιπλέον διάσταση, με $w \neq 0$.

Θέτοντας πάντα $w = 1$ διατηρούμε την αρχική διάσταση του χώρου, αφού χρησιμοποιούμε μόνο την «τομή» $w = 1$. Στην 2Δ περίπτωση, χρησιμοποιούμε το επίπεδο $w = 1$ αντί του επιπέδου xy (Σχήμα 3.6). Σημεία των οποίων οι ομογενείς συντεταγμένες είναι πολλαπλάσιες μεταξύ τους είναι ισοδύναμα. Έτσι, τα $[1, 2, 3]^{\mathrm{T}}$ και $[2, 4, 6]^{\mathrm{T}}$ παριστάνουν το ίδιο σημείο, το σημείο δε αυτό δίνεται από τη μοναδική τους *βασική παράσταση* για την οποία ισχύει $w = 1$ και λαμβάνεται διαιρώντας όλες τις συντεταγμένες με το w: $[x/w, y/w, w/w]^{\mathrm{T}} = [x/w, y/w, 1]^{\mathrm{T}}$. Για παράδειγμα τα παραπάνω ισοδύναμα σημεία έχουν την βασική παράσταση $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1]^{\mathrm{T}}$. Ισοδύναμα σημεία (δηλαδή σημεία με την ίδια βασική παράσταση) είναι συνευθειακά, πάνω σε ευθεία που περνά από το κέντρο συντεταγμένων (Σχήμα 3.6). Γενικά, χρησιμοποιούμε τη βασική παράσταση για σημεία και βεβαιωνόμαστε ότι οι μετασχηματισμοί μας διατηρούν αυτήν την ιδιότητα.

Ας δούμε πως οι ομογενείς συντεταγμένες ενοποιούν τον μετασχηματισμό της μεταφοράς. Εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι τα σημεία μας έχουν $w = 1$ για να παραστήσουμε την μεταφορά ενός σημείου $\mathbf{p} = [x, y, w]^{\mathrm{T}}$ κατά ένα διάνυσμα $\overrightarrow{\mathbf{d}} = [d_x, d_y]^{\mathrm{T}}$

ως γραμμικό μετασχηματισμό:

$$\begin{aligned} x' &= 1x + 0y + d_x w &&= x + d_x, \\ y' &= 0x + 1y + d_y w &&= y + d_y, \\ w' &= 0x + 0y + 1w &&= 1. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ο μετασχηματισμός της συντεταγμένης w εξασφαλίζει ότι το σημείο αποτέλεσμα $\mathbf{p}' = [x', y', w']^{\mathrm{T}}$ θα έχει $w' = 1$. Οι παραπάνω γραμμικές εκφράσεις μπορούν να ενσωματωθούν σε μορφή πίνακα —όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα— χειριζόμενοι την μεταφορά όπως και τους υπόλοιπους μετασχηματισμούς.

Για τους απλούς πίνακες συσχετισμένων μετασχηματισμών της Ενότητας 3.3, το κέντρο συντεταγμένων $[0, 0]^{\mathrm{T}}$ είναι ένα *σταθερό σημείο*, δηλαδή ένα σημείο που δεν μεταβάλλεται κατά τον μετασχηματισμό:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ένα δευτερεύον θετικό αποτέλεσμα των ομογενών συντεταγμένων είναι ότι δεν υπάρχει σταθερό σημείο για τους ομογενείς συσχετισμένους μετασχηματισμούς. Το κέντρο 2Δ συντεταγμένων είναι το $[0, 0, 1]^{\mathrm{T}}$ το οποίο δεν είναι σταθερό σημείο για τους πίνακες των ομογενών συσχετισμένων μετασχηματισμών. Το σημείο $[0, 0, 0]^{\mathrm{T}}$ είναι εκτός του επιπέδου $w = 1$ και, επιπλέον, «δεν επιτρέπεται» καθώς έχει $w = 0$.

Στην Ενότητα 3.5, τα σημεία θα παριστάνονται με ομογενείς συντεταγμένες. Η ομογενής παράσταση ενός 2Δ σημείου θα έχει τη μορφή $[x, y, 1]^{\mathrm{T}}$ και ενός 3Δ σημείου τη μορφή $[x, y, z, 1]^{\mathrm{T}}$. Για συντομία στην παρουσίαση συχνά θα παραλείπουμε την ομογενή συντεταγμένη, εννοώντας πάντα την ομογενή μορφή πινάκων, σημείων και διανυσμάτων.

3.5 2Δ ομογενείς συσχετισμένοι μετασχηματισμοί

Οι γραμμικές εκφράσεις (3.9) που ορίζουν την 2Δ μεταφορά μπορούν να παρασταθούν ως ένας ομογενής πίνακας:

$$\mathbf{T}(\vec{\mathbf{d}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Έτσι, $\mathbf{p}' = \mathbf{T}(\vec{\mathbf{d}}) \cdot \mathbf{p}$ και μπορούμε να χειριστούμε τη μεταφορά με σύνθεση πινάκων, όπως και τους υπόλοιπους βασικούς συσχετισμένους μετασχηματισμούς. Η τελευταία γραμμή ενός ομογενούς πίνακα μετασχηματισμού είναι πάντα $[0, 0, 1]$, ώστε να διατηρείται η μοναδιαία τιμή της συντεταγμένης w. Στη συνέχεια δίνονται οι ομογενείς πίνακες για τους υπόλοιπους βασικούς συσχετισμένους μετασχηματισμούς.

2Δ ομογενής αλλαγή κλίμακας:

$$\mathbf{S}(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

2Δ ομογενής περιστροφή:

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

2Δ ομογενής στρέβλωση:

$$\mathbf{SH_x}(a) = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

$$\mathbf{SH_y}(b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

Συχνά είναι απαραίτητο να αντιστραφεί ένας μετασχηματισμός, όπως θα γίνει αντιληπτό από τα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν. Για το σκοπό αυτό πρέπει να έχουμε διαθέσιμους τους αντίστροφους των βασικών συσχετισμένων μετασχηματισμών. Η μεταφορά αντιστρέφεται με το αντίθετο διάνυσμα μεταφοράς:

$$\mathbf{T}^{-1}(\vec{\mathbf{d}}) = \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{d}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

Η αλλαγή κλίμακας αντιστρέφεται με αντιστροφή των παραγόντων αλλαγής κλίμακας:

$$\mathbf{S}^{-1}(s_x, s_y) = \mathbf{S}\left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

Η περιστροφή αντιστρέφεται λαμβάνοντας την αντίθετη γωνία περιστροφής:

$$\mathbf{R}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

Η στρέβλωση αντιστρέφεται με τον αντίθετο παράγοντα στρέβλωσης:

$$\mathbf{SH}_{\mathbf{x}}^{-1}(a) = \mathbf{SH}_{\mathbf{x}}(-a) = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.18}$$

$$\mathbf{SH}_{\mathbf{y}}^{-1}(b) = \mathbf{SH}_{\mathbf{y}}(-b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.19}$$

Η εφαρμογή ενός μετασχηματισμού πάνω σε ένα αντικείμενο (*μετασχηματισμός αντικειμένου*), είναι ισοδύναμη με την εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού πάνω στο σύστημα συντεταγμένων (*μετασχηματισμός άξονα*). Για παράδειγμα, η ισοτροπική αλλαγή κλίμακας ενός αντικειμένου κατά 2 είναι ισοδύναμη με την ισοτροπική αλλαγή κλίμακας του συστήματος συντεταγμένων κατά $\frac{1}{2}$ (σμίκρυνση).

Ακολουθούν ορισμένες απλές αλλά χρήσιμες ιδιότητες της σύνθεσης ομογενών συσχετισμένων μετασχηματισμών:

- $\mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{d1}}) \cdot \mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{d2}}) = \mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{d2}}) \cdot \mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{d1}}) = \mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{d1}} + \overrightarrow{\mathbf{d2}})\cdot$
- $\mathbf{S}(s_{x1}, s_{y1}) \cdot \mathbf{S}(s_{x2}, s_{y2}) = \mathbf{S}(s_{x2}, s_{y2}) \cdot \mathbf{S}(s_{x1}, s_{y1}) = \mathbf{S}(s_{x1} \cdot s_{x2}, s_{y1} \cdot s_{y2})\cdot$
- $\mathbf{R}(\theta\mathbf{1}) \cdot \mathbf{R}(\theta\mathbf{2}) = \mathbf{R}(\theta\mathbf{2}) \cdot \mathbf{R}(\theta\mathbf{1}) = \mathbf{R}(\theta\mathbf{1} + \theta\mathbf{2})\cdot$
- $\mathbf{S}(s_x, s_y)\cdot\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{R}(\theta)\cdot\mathbf{S}(s_x, s_y)$ μόνο για ισοτροπική αλλαγή κλίμακας, δηλαδή για $s_x = s_y$.

Υπάρχουν παρόμοιοι ομογενείς πίνακες για τους 3Δ συσχετισμένους μετασχηματισμούς, όπως θα δούμε στην Ενότητα 3.7.

3.6 Παραδείγματα 2Δ μετασχηματισμών

Παράδειγμα 3.1 (Περιστροφή γύρω από τυχαίο σημείο.) Βρείτε τον πίνακα μετασχηματισμού $\mathbf{R}(\theta, \mathbf{p})$ που απαιτείται για την περιστροφή γύρω από τυχαίο σημείο $\mathbf{p}$, κατά γωνία θ (Σχήμα 3.7).

Ο 2Δ πίνακας περιστροφής $\mathbf{R}(\theta)$ [Εξίσωση (3.12)] περιστρέφει αντικείμενα γύρω από το κέντρο συντεταγμένων. Για την περιστροφή γύρω από τυχαίο σημείο $\mathbf{p} = [p_x, p_y]^{\mathrm{T}}$, πρέπει πρώτα να μεταφέρουμε το $\mathbf{p}$ στο κέντρο συντεταγμένων, να εκτελέσουμε περιστροφή γύρω από το κέντρο και τέλος να αναιρέσουμε την αρχική μεταφορά.

Βήμα 1. Μεταφορά κατά $-\overrightarrow{\mathbf{p}}$, $\mathbf{T}(-\overrightarrow{\mathbf{p}})$.

Βήμα 2. Περιστροφή κατά θ, $\mathbf{R}(\theta)$.

Βήμα 3. Μεταφορά κατά $\overrightarrow{\mathbf{p}}$, $\mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{p}})$.

$$\mathbf{R}(\theta, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & p_x - p_x\cos\theta + p_y\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & p_y - p_x\sin\theta - p_y\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

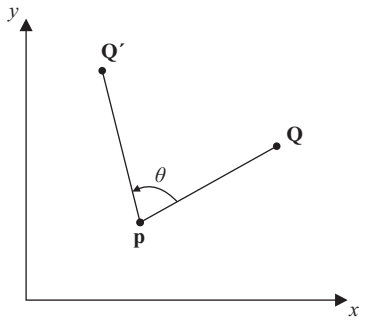
Παράδειγμα 3.2 (Περιστροφή τριγώνου γύρω από σημείο.) Περιστρέψτε το τρίγωνο $\triangle\mathbf{abc}$ κατά 45° γύρω από το σημείο $\mathbf{p} = [-1, -1]^{\mathrm{T}}$, όπου $\mathbf{a} = [0, 0]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = [1, 1]^{\mathrm{T}}$ και $\mathbf{c} = [5, 2]^{\mathrm{T}}$.

Το τρίγωνο παριστάνεται με τον πίνακα **T**, οι στήλες του οποίου περιέχουν τις ομογενείς συντεταγμένες των κορυφών του:

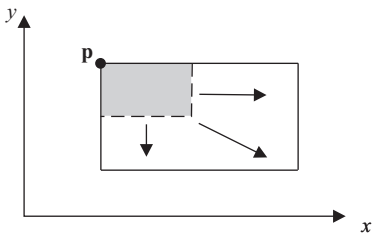
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Θα εφαρμόσουμε τον πίνακα $\mathbf{R}(\theta, \mathbf{p})$ του Παραδείγματος 3.1 στο τρίγωνο

$$\mathbf{R}(45^\circ, [-1, -1]^{\mathrm{T}}) \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & \frac{3}{2}\sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 & 2\sqrt{2}-1 & \frac{9}{2}\sqrt{2}-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 3.7: *Περιστροφή γύρω από τυχαίο σημείο.*



Σχήμα 3.8: *Αλλαγή κλίμακας σε σχέση με τυχαίο σημείο.*

Το τρίγωνο μετά την περιστροφή συνεπώς είναι το $\triangle \mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ με:

$$\mathbf{a}' = [-1, \sqrt{2} - 1]^{\mathrm{T}},$$
$$\mathbf{b}' = [-1, 2\sqrt{2} - 1]^{\mathrm{T}}, \text{ και}$$
$$\mathbf{c}' = [\frac{3}{2}\sqrt{2} - 1, \frac{9}{2}\sqrt{2} - 1]^{\mathrm{T}}.$$

Παράδειγμα 3.3 (Αλλαγή κλίμακας σε σχέση με τυχαίο σημείο.) Βρείτε τον πίνακα μετασχηματισμού $\mathbf{S}(s_x, s_y, \mathbf{p})$ που απαιτείται για την αλλαγή κλίμακας κατά s_x και s_y σε σχέση με τυχαίο σημείο $\mathbf{p}$ (Σχήμα 3.8).

Ο 2Δ πίνακας αλλαγής κλίμακας $\mathbf{S}(s_x, s_y)$ (Εξίσωση (3.11)) εφαρμόζει αλλαγή κλίμακας σε σχέση με το κέντρο συντεταγμένων. Συγκεκριμένα, η μεταφορά (παρενέργεια) της αλλαγής κλίμακας γίνεται σχετικά με το κέντρο συντεταγμένων. Για να επιτευχθεί αλλαγή κλίμακας σε σχέση με τυχαίο σημείο $\mathbf{p} = [p_x, p_y]^{\mathrm{T}}$ πρέπει, πρώτα να μεταφέρουμε το $\mathbf{p}$ στο κέντρο συντεταγμένων, στη συνέχεια να εφαρμόσουμε αλλαγή κλίμακας σε σχέση με το κέντρο και τέλος να αναιρέσουμε την μεταφορά.

Βήμα 1. Μεταφορά κατά $-\overrightarrow{\mathbf{p}}$, $\mathbf{T}(-\overrightarrow{\mathbf{p}})$.

Βήμα 2. Αλλαγή κλίμακας κατά s_x, s_y, $\mathbf{S}(s_x, s_y)$.

Βήμα 3. Μεταφορά κατά $\overrightarrow{\mathbf{p}}$, $\mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{p}})$.

$$\mathbf{S}(s_x, s_y, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} s_x & 0 & p_x - p_x s_x \\ 0 & s_y & p_y - p_y s_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 3.4 (Αλλαγή κλίμακας τριγώνου σε σχέση με σημείο.) Διπλασιάστε τα μήκη των ακμών του τριγώνου $\triangle \mathbf{abc}$ διατηρώντας σταθερή την θέση της κορυφής του $\mathbf{c}$. Οι συντεταγμένες των κορυφών του είναι $\mathbf{a} = [0, 0]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = [1, 1]^{\mathrm{T}}$ και $\mathbf{c} = [5, 2]^{\mathrm{T}}$.

Πρόκειται για το ίδιο τρίγωνο με το Παράδειγμα 3.2, το οποίο μπορεί να παρασταθεί με τον πίνακα $\mathbf{T}$. Θα εφαρμόσουμε τον πίνακα $\mathbf{S}(s_x, s_y, \mathbf{p})$ του Παραδείγματος 3.3

στο τρίγωνο $\triangle\mathbf{abc}$, θέτοντας τους παράγοντες αλλαγής κλίμακας ίσους με 2 και το $\mathbf{p} = \mathbf{c}$:

$$\mathbf{S}(2, 2, [5, 2, 1]^{\mathrm{T}}) \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς το μεγενθυμένο τρίγωνο είναι το $\triangle\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ με $\mathbf{a}' = [-5, -2]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b}' = [-3, 0]^{\mathrm{T}}$, και $\mathbf{c}' = [5, 2]^{\mathrm{T}}$. Με απλό υπολογισμό φαίνεται ότι, όντως, τα μήκη των ακμών του έχουν διπλασιασθεί.

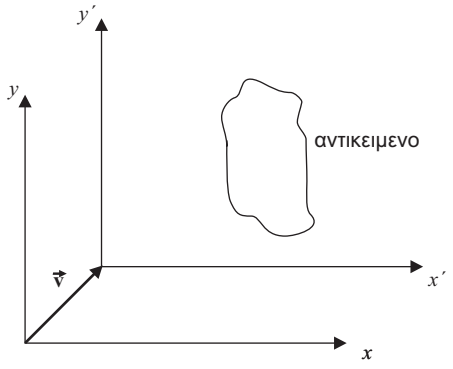
Παράδειγμα 3.5 (Μετασχηματισμός άξονα.) Βρείτε τον πίνακα που περιγράφει τη μεταφορά του συστήματος συντεταγμένων κατά το διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}} = [v_x, v_y]^{\mathrm{T}}$.

Αυτό είναι ένα παράδειγμα μετασχηματισμού άξονα, δηλαδή του συστήματος συντεταγμένων. Το σύστημα συντεταγμένων μεταφέρεται κατά το διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}} = [v_x, v_y]^{\mathrm{T}}$ σχετικά με τα αντικείμενα (Σχήμα 3.9).

Ο απαιτούμενος πίνακας μετασχηματισμού πρέπει να παράγει τις συντεταγμένες των αντικειμένων σε σχέση με το νέο σύστημα συντεταγμένων. Αυτό επιτυγχάνεται εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό στα αντικείμενα, δηλαδή:

$$\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -v_x \\ 0 & 1 & -v_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρόμοια ισχύουν για οποιονδήποτε άλλο μετασχηματισμό άξονα. Το αποτέλεσμά του επιτυγχάνεται εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό στα αντικείμενα.



Σχήμα 3.9: *Μεταφορά άξονα.*

Παράδειγμα 3.6 (Καθρεπτισμός ως προς τυχαίο άξονα.) Βρείτε τον πίνακα μετασχηματισμού που απαιτείται για τον καθρεπτισμό (συμμετρία), ως προς άξονα που ορίζεται από ένα σημείο $\mathbf{p} = [p_x, p_y]^{\mathrm{T}}$ και ένα διάνυσμα κατεύθυνσης $\vec{\mathbf{v}} = [v_x, v_y]^{\mathrm{T}}$ (Σχήμα 3.10).

Ακολουθούμε την εξής λογική. Πρώτον, ο τυχαίος άξονας ταυτίζεται με τον άξονα x, μετά καθρεπτίζουμε ως προς τον άξονα x και τέλος αναιρούμε την ταύτιση του άξονα. Η ταύτιση του τυχαίου άξονα με τον x απαιτεί δύο απλά βήματα: α) μια μεταφορά κατά $-\vec{\mathbf{p}}$ και β) μια περιστροφή κατά την γωνία θ που σχηματίζεται μεταξύ του διανύσματος $\vec{\mathbf{v}}$ και του άξονα x. Εύκολα φαίνεται ότι:

$$\sin\theta = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \text{ και } \cos\theta = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}.$$

Τα απαιτούμενα βήματα είναι λοιπόν τα εξής:

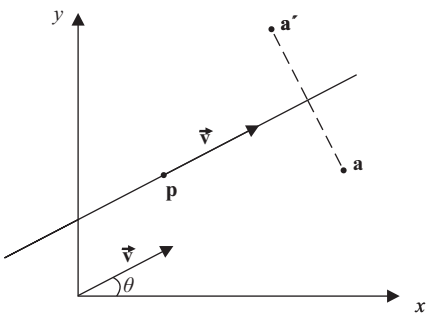
Βήμα 1. Μεταφορά κατά $-\vec{\mathbf{p}}$, $\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{p}})$.

Βήμα 2. Περιστροφή κατά $-\theta$ (αρνητική: κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού), $\mathbf{R}(-\theta)$.

Βήμα 3. Καθρεπτισμός ως προς τον άξονα x, $\mathbf{S}(1, -1)$.

Βήμα 4. Περιστροφή κατά θ, $\mathbf{R}(\theta)$.

Βήμα 5. Μεταφορά κατά $\vec{\mathbf{p}}$, $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{p}})$.



Σχήμα 3.10: *Καθρεπτισμός ως προς τυχαίο άξονα.*

$$\mathbf{M}_{\text{SYM}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta & p_x - p_x(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2p_y\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta & p_y - p_y(\sin^2\theta - \cos^2\theta) - 2p_x\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 3.7 (Καθρεπτισμός πολυγώνου.) Υπολογίστε τον καθρεπτισμό δοθέντος πολυγώνου σε σχέση με (α) την ευθεία $y = 2$ και (β) τον άξονα που ορίζεται από το σημείο $\mathbf{p} = [0, 2]^{\text{T}}$ και το διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}} = [1, 1]^{\text{T}}$. Δίνονται οι κορυφές του πολυγώνου $\mathbf{a} = [-1, 0]^{\text{T}}$, $\mathbf{b} = [0, -2]^{\text{T}}$, $\mathbf{c} = [1, 0]^{\text{T}}$ και $\mathbf{d} = [0, 2]^{\text{T}}$.

Το πολύγωνο μπορεί να παρασταθεί με τον 3×4 πίνακα Π, οι στήλες του οποίου αντιστοιχούν στις ομογενείς συντεταγμένες των κορυφών του πολυγώνου:

$$\Pi = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Θα πολλαπλασιάσουμε από αριστερά τον πίνακα $\mathbf{M}_{\text{SYM}}$ του παραδείγματος 3.6 με τον πίνακα των κορυφών Π.

Στην περίπτωση (α), $\mathbf{p} = [0, 2]^{\text{T}}$ και $\vec{\mathbf{v}} = [1, 0]^{\text{T}}$, οπότε $\theta = 0°$, $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = 1$, και έχουμε:

$$\begin{aligned} \Pi' &= \mathbf{M}_{\text{SYM}} \cdot \Pi \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση (β), $\mathbf{p} = [0, 2]^{\text{T}}$ και $\vec{\mathbf{v}} = [1, 1]^{\text{T}}$, οπότε $\sin\theta = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ και

έχουμε:

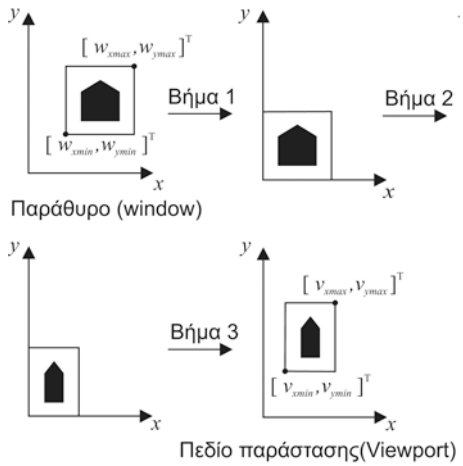
$$\begin{aligned}\Pi' &= \mathbf{M}_{\text{SYM}} \cdot \Pi \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.8 (Μετασχηματισμός παράστασης (Window-to-Viewport Transformation).) Στα γραφικά και στην οπτικοποίηση, συχνά, απαιτείται ένας μετασχηματισμός παράστασης, που απεικονίζει τα περιεχόμενα ενός 2Δ *παράθυρου* (window) σε ένα 2Δ *πεδίο παράστασης* (viewport), (Σχήμα 3.11). Τόσο το παράθυρο όσο και το πεδίο παράστασης είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα με ακμές παράλληλες στους άξονες συντεταγμένων. Για παράδειγμα, ένα ζεύγος παράθυρου / πεδίου παράστασης είναι μια οθόνη σινεμά (16 : 9) και μια οθόνη τηλεόρασης (4 : 3) αντίστοιχα. Ζητείται να βρεθεί ο πίνακας μετασχηματισμού από παράθυρο σε πεδίο παράστασης. Πώς παραμορφώνει τα αντικείμενα ο μετασχηματισμός αυτός;

Έστω ότι το παράθυρο και το πεδίο παράστασης ορίζονται με δύο αντίθετες κορυφές τους, αντίστοιχα $[w_{\text{xmin}}, w_{\text{ymin}}]^{\text{T}}$, $[w_{\text{xmax}}, w_{\text{ymax}}]^{\text{T}}$ και $[v_{\text{xmin}}, v_{\text{ymin}}]^{\text{T}}$, $[v_{\text{xmax}}, v_{\text{ymax}}]^{\text{T}}$ (Σχήμα 3.11).

Ο μετασχηματισμός παράστασης $\mathbf{M}_{\text{WV}}$ μπορεί να υλοποιηθεί με τρία βασικά βήματα:

Βήμα 1. Μεταφορά του $[w_{\text{xmin}}, w_{\text{ymin}}]^{\text{T}}$ στο κέντρο, με τον πίνακα $\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{w}}_{\text{min}})$, όπου



Σχήμα 3.11: *Μετασχηματισμός παράστασης (Window-to-viewport transformation).*

$\overrightarrow{\mathbf{w}}_{\text{min}} = [w_{\text{xmin}}, w_{\text{ymin}}]^{\text{T}}$.

Βήμα 2. Αλλαγή κλίμακας του παραθύρου σε αυτήν του πεδίου παράστασης, με τον πίνακα $\mathbf{S}(s_x, s_y)$ όπου $s_x = \frac{v_{\text{xmax}} - v_{\text{xmin}}}{w_{\text{xmax}} - w_{\text{xmin}}}$ και $s_y = \frac{v_{\text{ymax}} - v_{\text{ymin}}}{w_{\text{ymax}} - w_{\text{ymin}}}$.

Βήμα 3. Μεταφορά κατά την ελάχιστη κορυφή του πεδίου παράστασης $[v_{\text{xmin}}, v_{\text{ymin}}]^{\text{T}}$, με τον πίνακα $\mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{v}}_{\text{min}})$ όπου $\overrightarrow{\mathbf{v}}_{\mathbf{min}} = [v_{\text{xmin}}, v_{\text{ymin}}]^{\text{T}}$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\text{WV}} &= \mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{v}}_{\text{min}}) \cdot \mathbf{S}(s_x, s_y) \cdot \mathbf{T}(-\overrightarrow{\mathbf{w}}_{\text{min}}) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & v_{\text{xmin}} \\ 0 & 1 & v_{\text{ymin}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{v_{\text{xmax}} - v_{\text{xmin}}}{w_{\text{xmax}} - w_{\text{xmin}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_{\text{ymax}} - v_{\text{ymin}}}{w_{\text{ymax}} - w_{\text{ymin}}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -w_{\text{xmin}} \\ 0 & 1 & -w_{\text{ymin}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{v_{\text{xmax}} - v_{\text{xmin}}}{w_{\text{xmax}} - w_{\text{xmin}}} & 0 & v_{\text{xmin}} - w_{\text{xmin}} \frac{v_{\text{xmax}} - v_{\text{xmin}}}{w_{\text{xmax}} - w_{\text{xmin}}} \\ 0 & \frac{v_{\text{ymax}} - v_{\text{ymin}}}{w_{\text{ymax}} - w_{\text{ymin}}} & v_{\text{ymin}} - w_{\text{ymin}} \frac{v_{\text{ymax}} - v_{\text{ymin}}}{w_{\text{ymax}} - w_{\text{ymin}}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Καθώς ο μετασχηματισμός $\mathbf{M}_{\text{WV}}$ περιέχει μη ισοτροπική αλλαγή κλίμακας ($s_x \neq s_y$), τα αντικείμενα γενικά θα παραμορφώνονται κατά τη μετάβαση από το παράθυρο στο πεδίο παράστασης (οι γωνίες αλλάζουν). Έτσι, ένας κύκλος θα γίνει έλλειψη και ένα τετράγωνο θα γίνει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Ο *λόγος διαστάσεων* (aspect ratio) είναι ο λόγος της x προς την y διάσταση. Για το παράθυρο και το πεδίο παράστασης είναι αντίστοιχα:

$$a_w = \frac{w_{\text{xmax}} - w_{\text{xmin}}}{w_{\text{ymax}} - w_{\text{ymin}}}, \quad a_v = \frac{v_{\text{xmax}} - v_{\text{xmin}}}{v_{\text{ymax}} - v_{\text{ymin}}}.$$

Αν $a_w \neq a_v$ τότε τα αντικείμενα παραμορφώνονται. Ένας τρόπος αποφυγής της παραμόρφωσης αυτής είναι να χρησιμοποιηθεί η μεγαλύτερη περιοχή του πεδίου παράστασης η οποία έχει τον ίδιο λόγο διαστάσεων με το παράθυρο. Για παράδειγμα μπορούμε να μεταβάλλουμε το σύνορο v_{xmax} ή v_{ymax} του πεδίου παράστασης ως εξής: αν $(a_v > a_w)$ τότε $v_{\text{xmax}} = v_{\text{xmin}} + a_w * (v_{\text{ymax}} - v_{\text{ymin}})$· διαφορετικά αν $(a_v < a_w)$ τότε $v_{\text{ymax}} = v_{\text{ymin}} + \frac{(v_{\text{xmax}} - v_{\text{xmin}})}{a_w}$.

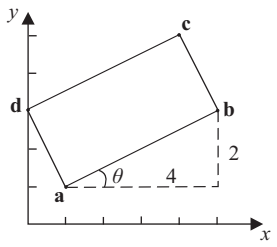
Παράδειγμα 3.9 (Παράδειγμα μετασχηματισμού παράστασης.) Βρείτε τον μετασχηματισμό παράστασης από το παράθυρο $[w_{\text{xmin}}, w_{\text{ymin}}]^{\text{T}} = [1,1]^{\text{T}}, [w_{\text{xmax}}, w_{\text{ymax}}]^{\text{T}} = [3,5]^{\text{T}}$ στο πεδίο παράστασης $[v_{\text{xmin}}, v_{\text{ymin}}]^{\text{T}} = [0,0]^{\text{T}}, [v_{\text{xmax}}, v_{\text{ymax}}]^{\text{T}} = [1,1]^{\text{T}}$. Αν δημιουργεί παραμόρφωση, πως μπορεί να διορθωθεί;

Άμεση εφαρμογή του πίνακα $\mathbf{M}_{\text{WV}}$ του παραδείγματος 3.8 για το παραπάνω ζεύγος παραθύρου και πεδίου παράστασης δίνει:

$$\mathbf{M}_{\text{WV}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε $a_w = \frac{1}{2}$ και $a_v = \frac{1}{1}$, οπότε υπάρχει παραμόρφωση αφού $(a_v > a_w)$. Αυτή μπορεί να διορθωθεί με μείωση του μεγέθους του πεδίου παράστασης θέτοντας $v_{\text{xmax}} = v_{\text{xmin}} + a_w * (v_{\text{ymax}} - v_{\text{ymin}}) = \frac{1}{2}$.

Παράδειγμα 3.10 (Μετασχηματισμός παράστασης από παράθυρο με κλίση.) Έστω ότι το παράθυρο έχει κλίση, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.12 και ότι δίνεται από τις 4 κορυφές του $\mathbf{a} = [1,1]^{\text{T}}$, $\mathbf{b} = [5,3]^{\text{T}}$, $\mathbf{c} = [4,5]^{\text{T}}$, και $\mathbf{d} = [0,3]^{\text{T}}$. Βρείτε τον μετασχηματισμό $\mathbf{M}_{\text{WV}}^{\text{TILT}}$ που το απεικονίζει στο πεδίο παράστασης $[v_{\text{xmin}}, v_{\text{ymin}}]^{\text{T}} = [0,0]^{\text{T}}$, $[v_{\text{xmax}}, v_{\text{ymax}}]^{\text{T}} = [1,1]^{\text{T}}$.



Σχήμα 3.12: *Μετασχηματισμός παράστασης από παράθυρο με κλίση.*

Η γωνία θ που σχηματίζει η ακμή **ab** του παραθύρου με την οριζόντια ευθεία που περνά από το **a** έχει $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ και $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Ο απαιτούμενος μετασχηματισμός $\mathbf{M}_{\text{WV}}^{\text{TILT}}$ θα είναι η σύνθεση των ακόλουθων βημάτων:

Βήμα 1. Περιστροφή του παραθύρου κατά γωνία $-\theta$ γύρω από το σημείο **a**. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τον πίνακα $\mathbf{R}(\theta, \mathbf{p})$ του Παραδείγματος 3.1 ως $\mathbf{R}(-\theta, \mathbf{a})$.

Βήμα 2. Εφαρμογή του μετασχηματισμού παράστασης $\mathbf{M}_{\text{WV}}$ στο παράθυρο που έχει υποστεί περιστροφή.

Πριν από την εφαρμογή του βήματος 2 πρέπει να βρούμε τις μέγιστες x και y συντεταγμένες του περιστραμμένου παράθυρου υπολογίζοντας

$$\mathbf{c}' = \mathbf{R}(-\theta, \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 + 2\sqrt{5} \\ 1 + \sqrt{5} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Οπότε, $[w_{\text{xmin}}, w_{\text{ymin}}]^{\text{T}} = \mathbf{a}$, $[w_{\text{xmax}}, w_{\text{ymax}}]^{\text{T}} = \mathbf{c}'$, και έχουμε

$$\mathbf{M}_{\text{WV}}^{\text{TILT}} = \mathbf{M}_{\text{WV}} \cdot \mathbf{R}(-\theta, \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 1-\frac{3}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 1-\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.7 3Δ ομογενείς συσχετισμένοι μετασχηματισμοί

Οι ομογενείς συντεταγμένες στις τρεις διαστάσεις λειτουργούν με παρόμοιο τρόπο όπως και στις δύο διαστάσεις (βλέπε Ενότητα 3.4.1). Μια επιπλέον συντεταγμένη προστίθεται και έτσι δημιουργείται η τετράδα $[x, y, z, w]^{\text{T}}$, όπου w η ομογενής συντεταγμένη. Σημεία των οποίων οι συντεταγμένες είναι πολλαπλάσιες μεταξύ τους είναι ισοδύναμα, π.χ. τα $[1, 2, 3, 2]^{\text{T}}$ και $[2, 4, 6, 4]^{\text{T}}$ είναι ισοδύναμα. Η (μοναδική) *βασική παράσταση* ενός σημείου έχει $w = 1$ και λαμβάνεται διαιρώντας το με την συντεταγμένη w:

$$[x/w, y/w, z/w, w/w]^{\text{T}} = [x/w, y/w, z/w, 1]^{\text{T}}$$

όπου $w \neq 0$. Για παράδειγμα, για το παραπάνω ζεύγος ισοδύναμων σημείων,

$$[\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{2}]^{\text{T}} = [\frac{2}{4}, \frac{4}{4}, \frac{6}{4}, \frac{4}{4}]^{\text{T}} = [\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 1]^{\text{T}}.$$

Θέτοντας $w = 1$ (βασική παράσταση) λαμβάνουμε μια 3Δ προβολή του 4Δ χώρου.

Εφόσον τα σημεία παριστάνονται με διανύσματα 4×1, οι πίνακες μετασχηματισμού είναι 4×4. Όπως και στην 2Δ περίπτωση, για λόγους συντομίας κάποιες φορές θα παραλείπουμε την ομογενή συντεταγμένη. Όλοι οι μετασχηματισμοί που ακολουθούν είναι συσχετισμένοι.

3.7.1 3Δ ομογενής μεταφορά

Η 3Δ μεταφορά ορίζεται από ένα 3Δ διάνυσμα $\vec{\mathbf{d}} = [d_x, d_y, d_z]^{\text{T}}$ και ενσωματώνεται σε μορφή πίνακα ως εξής:

$$\mathbf{T}(\vec{\mathbf{d}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.21}$$

Όπως και στις 2Δ, το βασικό πλεονέκτημα των ομογενών συντεταγμένων είναι ότι

μπορούν να συνθέσουν τον πίνακα της μεταφοράς με άλλους συσχετισμένους πίνακες μετασχηματισμών μέσω του πολλαπλασιασμού πινάκων.

Το αντίστροφο μιας μεταφοράς περιγράφεται από τον πίνακα $\mathbf{T}^{-1}(\vec{\mathbf{d}}) = \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{d}})$.

3.7.2 3Δ ομογενής αλλαγή κλίμακας

Η 3Δ αλλαγή κλίμακας είναι ανάλογη της 2Δ αλλαγής κλίμακας. Έχει τρεις παράγοντες αλλαγής κλίμακας, s_x, s_y, και s_z. Αν κάποιος παράγοντας είναι μικρότερος του 1, τότε το αντικείμενο μικραίνει στην αντίστοιχη διάσταση, ενώ αν είναι μεγαλύτερος του 1 μεγαλώνει. Και πάλι έχει ως παρενέργεια μια μεταφορά ανάλογη των παραγόντων αλλαγής κλίμακας. Σε μορφή πίνακα είναι

$$\mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

Η αλλαγή κλίμακας ονομάζεται *ισοτροπική* αν $s_x = s_y = s_z$. Η ισοτροπική αλλαγή κλίμακας διατηρεί την ομοιότητα των αντικειμένων (γωνίες).

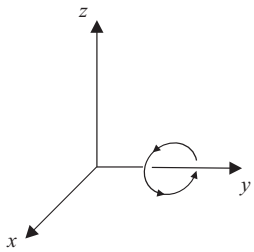
Ο *καθρεπτισμός* πάνω σε ένα από τα κύρια επίπεδα (xy, xz, ή yz) μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση αλλαγής κλίμακας, χρησιμοποιώντας παράγοντα αλλαγής κλίμακας -1. Για παράδειγμα, ο καθρεπτισμός πάνω στο επίπεδο xy είναι $\mathbf{S}(1, 1, -1)$.

Το αντίστροφο μιας αλλαγής κλίμακας περιγράφεται από τον πίνακα $\mathbf{S}^{-1}(s_x, s_y, s_z) = \mathbf{S}(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}, \frac{1}{s_z})$.

3.7.3 3Δ ομογενής περιστροφή

Η 3Δ περιστροφή είναι αρκετά διαφορετική από την 2Δ περίπτωση, καθώς το αντικείμενο γύρω από το οποίο περιστρέφουμε είναι ένας *άξονας* και όχι ένα σημείο. Ο άξονας περιστροφής μπορεί να είναι τυχαίος, αλλά οι βασικοί μετασχηματισμοί περιστροφής στρέφουν γύρω από τους κύριους άξονες x, y, και z. Αυτοί μπορούν να συνδυασθούν για να περιγράψουν περιστροφή γύρω από τυχαίο άξονα, όπως θα φανεί στα παραδείγματα που ακολουθούν. Σε δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων μια περιστροφή γύρω από έναν άξονα a είναι *θετική*, αν είναι αντίστροφη της φοράς των δεικτών του ρολογιού, όταν την παρατηρούμε από το θετικό τμήμα του άξονα πρός το κέντρο. Το Σχήμα 3.13 δείχνει την φορά της θετικής περιστροφής γύρω από τον άξονα y.

Κατά την 3Δ περιστροφή, η απόσταση από τον άξονα περιστροφής δεν μεταβάλλεται. Συνεπώς η περιστροφή δεν αλλάζει την συντεταγμένη που αντιστοιχεί στον άξονα περιστροφής. Απλοί τριγωνομετρικοί υπολογισμοί, παρόμοιοι με την 2Δ περίπτωση, οδηγούν στους ακόλουθους πίνακες περιστροφής γύρω από τους κύριους άξονες x, y,



Σχήμα 3.13: *Θετική περιστροφή γύρω από τον άξονα ψ.*

και z:

$$\mathbf{R_x}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{3.23}$$

$$\mathbf{R_y}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{3.24}$$

$$\mathbf{R_z}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

Οι αντίστροφοι πίνακες περιστροφής είναι $\mathbf{R_x}^{-1}(\theta) = \mathbf{R_x}(-\theta)$, $\mathbf{R_y}^{-1}(\theta) = \mathbf{R_y}(-\theta)$ και $\mathbf{R_z}^{-1}(\theta) = \mathbf{R_z}(-\theta)$.

Η περιστροφή μπορεί επίσης να εκφρασθεί και με quaternions, όπως θα δούμε στην Ενότητα 3.9.

3.7.4 3Δ ομογενής στρέβλωση

Ο 3Δ μετασχηματισμός στρέβλωσης «στρεβλώνει» αντικείμενα ως προς ένα από τα κύρια επίπεδα. Με άλλα λόγια, αυξάνει τις δύο συντεταγμένες κατά ποσό ίσο με την τρίτη συντεταγμένη επί τους αντίστοιχους παράγοντες στρέβλωσης. Συνεπώς, στις 3Δ έχουμε τρείς περιπτώσεις στρέβλωσης που αντιστοιχούν στα τρία κύρια επίπεδα xy, xz, και yz.

Η στρέβλωση κατά το επίπεδο xy αυξάνει την x συντεταγμένη κατά ποσό ίσο με την z συντεταγμένη επί τον παράγοντα στρέβλωσης a και την y συντεταγμένη κατά

ποσό ίσο με την z συντεταγμένη επί τον παράγοντα στρέβλωσης b:

$$\mathbf{SH_{xy}}(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.26}$$

Οι στρεβλώσεις κατά τα επίπεδα xz και yz είναι παρόμοιες:

$$\mathbf{SH_{xz}}(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{3.27}$$

$$\mathbf{SH_{yz}}(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.28}$$

Οι αντίστροφοι πίνακες στρέβλωσης λαμβάνονται χρησιμοποιώντας τους αντίθετους παράγοντες στρέβλωσης: $\mathbf{SH}^{-1}_{\mathbf{xy}}(a,b) = \mathbf{SH_{xy}}(-a,-b)$, $\mathbf{SH}^{-1}_{\mathbf{xz}}(a,b) = \mathbf{SH_{xz}}(-a,-b)$, $\mathbf{SH}^{-1}_{\mathbf{yz}}(a,b) = \mathbf{SH_{yz}}(-a,-b)$.

3.8 Παραδείγματα 3Δ μετασχηματισμών

Παράδειγμα 3.11 (Σύνθετη περιστροφή.) Έστω ότι επιθυμούμε περιστροφή γύρω από τον άξονα x κατά θ_x ακολουθούμενη από περιστροφή γύρω από τον y κατά θ_y. Υπολογίστε τον πίνακα μετασχηματισμού που περιγράφει αυτή τη σύνθετη περιστροφή και αποφανθείτε αν η σειρά περιστροφής έχει σημασία.

Από τον ορισμό του, ο σύνθετος πίνακας περιστροφής υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{BEND}} &= \mathbf{R_y}(\theta_y) \cdot \mathbf{R_x}(\theta_x) \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x & 0 \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_x\sin\theta_y & \cos\theta_x\sin\theta_y & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x & 0 \\ -\sin\theta_y & \sin\theta_x\cos\theta_y & \cos\theta_x\cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Για να διαπιστώσουμε αν η σειρά των περιστροφών είναι σημαντική, θα υπολογί-

σουμε τη σύνθεση και με αντίστροφη σειρά:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}'_{\text{BEND}} &= \mathbf{R_x}(\theta_x)\cdot\mathbf{R_y}(\theta_y)\\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x & 0\\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y & 0\\ \sin\theta_x\sin\theta_y & \cos\theta_x & -\sin\theta_x\cos\theta_y & 0\\ -\cos\theta_x\sin\theta_y & \sin\theta_x & \cos\theta_x\cos\theta_y & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Καθώς $\mathbf{M}_{\text{BEND}} \neq \mathbf{M}'_{\text{BEND}}$, η σειρά των περιστροφών είναι όντως σημαντική.

Σημειώνουμε ότι κατά τη σύνθεση περιστροφών γύρω από τους άξονες $x-$, $y-$ και $z-$, ένα πρόβλημα γνωστό ως *κλείδωμα αντιζύγων* (gimbal lock) μπορεί να παρατηρηθεί (βλέπε Ενότητα 17.2.1).

Παράδειγμα 3.12 (Ευθυγράμμιση διανύσματος με άξονα.) Βρείτε τον μετασχηματισμό $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}})$ που απαιτείται για την ευθυγράμμιση δοσμένου διανύσματος $\vec{\mathbf{v}} = [a, b, c]^{\text{T}}$ με το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{k}}$ κατά μήκος του θετικού άξονα z.

Η αρχική κατάσταση φαίνεται στο Σχήμα 3.14 (α). Ένας τρόπος επίτευξης του σκοπού μας περιλαμβάνει δύο περιστροφές:

Βήμα 1. Περιστροφή γύρω από τον άξονα x κατά θ_1, ώστε το $\vec{\mathbf{v}}$ να έρθει στο $\vec{\mathbf{v_1}}$ που κείται πάνω στο επίπεδο xz (Σχήμα 3.14 (β)), $\mathbf{R_x}(\theta_1)$.

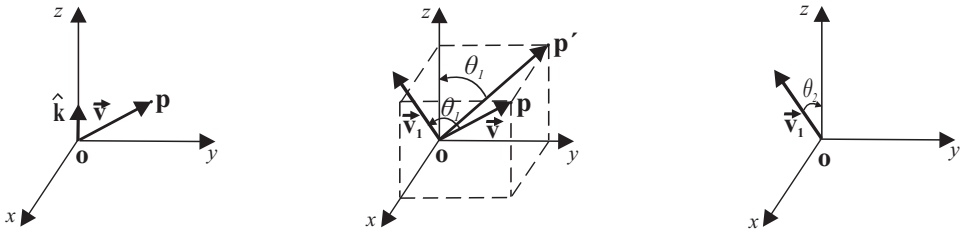
Βήμα 2. Περιστροφή του $\vec{\mathbf{v_1}}$ γύρω από τον y κατά θ_2, ώστε ευθυγραμμιστεί με το $\hat{\mathbf{k}}$ (Σχήμα 3.14 (γ)), $\mathbf{R_y}(\theta_2)$.

Ο πίνακας περιστροφής $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}})$ συνεπώς είναι:

$$\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}}) = \mathbf{R_y}(\theta_2)\cdot\mathbf{R_x}(\theta_1).$$

Πρέπει να υπολογίσουμε τις γωνίες θ_1 και θ_2. Παρατηρώντας το Σχήμα 3.14 (b), η γωνία θ_1 είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της προβολής του $\vec{\mathbf{v}}$ στο επίπεδο yz και του άξονα z. Για το άκρο $\mathbf{p}$ του $\vec{\mathbf{v}}$, έχουμε $\mathbf{p} = [a, b, c]^{\text{T}}$, οπότε το άκρο της προβολής του στο yz είναι $\mathbf{p}' = [0, b, c]^{\text{T}}$. Υποθέτοντας ότι τα b και c δεν είναι και τα δύο ίσα με 0, λαμβάνουμε

$$\sin\theta_1 = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}, \qquad \cos\theta_1 = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$



Σχήμα 3.14: *Ευθυγράμμιση τυχαίου διανύσματος με το* $\hat{\mathbf{k}}$.

Συνπεώς,

$$\mathbf{R_x}(\theta_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} & -\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} & \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον $\mathbf{R_x}(\theta_1)$ στο $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ [7] για να πάρουμε την προβολή του $\overrightarrow{\mathbf{v_1}}$ στο xz:

$$\overrightarrow{\mathbf{v_1}} = \mathbf{R_x}(\theta_1) \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}} = \mathbf{R_x}(\theta_1) \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ \sqrt{b^2+c^2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

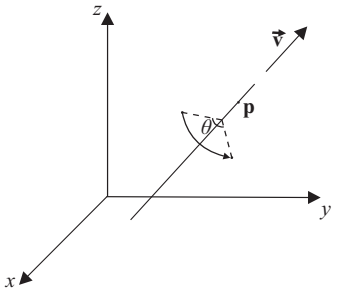
Σημειώνουμε ότι $|\overrightarrow{\mathbf{v_1}}| = |\overrightarrow{\mathbf{v}}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Από το Σχήμα 3.14 (c), μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε:

$$\sin\theta_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Έτσι,

$$\mathbf{R_y}(\theta_2) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 & \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[7] Αυτό είναι ισοδύναμο με περιστροφή του άκρου **p** του διανύσματος.



Σχήμα 3.15: *Περιστροφή γύρω από τυχαίο άξονα.*

Ο ζητούμενος πίνακας $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}})$ μπορεί τώρα να υπολογισθεί:

$$\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}}) = \mathbf{R_y}(\theta_2) \cdot \mathbf{R_x}(\theta_1) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{|\vec{\mathbf{v}}|} & -\frac{ab}{\lambda|\vec{\mathbf{v}}|} & -\frac{ac}{\lambda|\vec{\mathbf{v}}|} & 0 \\ 0 & \frac{c}{\lambda} & -\frac{b}{\lambda} & 0 \\ \frac{a}{|\vec{\mathbf{v}}|} & \frac{b}{|\vec{\mathbf{v}}|} & \frac{c}{|\vec{\mathbf{v}}|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.29}$$

όπου $|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ και $\lambda = \sqrt{b^2 + c^2}$.

Θα υπολογίσουμε επίσης τον αντίστροφο πίνακα $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}})^{-1}$, καθώς είναι χρήσιμος στο Παράδειγμα 3.13:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}(\vec{\mathbf{v}}) &= (\mathbf{R_y}(\theta_2) \cdot \mathbf{R_x}(\theta_1))^{-1} = \mathbf{R_x}(\theta_1)^{-1} \cdot \mathbf{R_y}(\theta_2)^{-1} \\ &= \mathbf{R_x}(-\theta_1) \cdot \mathbf{R_y}(-\theta_2) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{|\vec{\mathbf{v}}|} & 0 & \frac{a}{|\vec{\mathbf{v}}|} & 0 \\ -\frac{ab}{\lambda|\vec{\mathbf{v}}|} & \frac{c}{\lambda} & \frac{b}{|\vec{\mathbf{v}}|} & 0 \\ -\frac{ac}{\lambda|\vec{\mathbf{v}}|} & -\frac{b}{\lambda} & \frac{c}{|\vec{\mathbf{v}}|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Αν τα b και c είναι και τα δύο 0, τότε το $\vec{\mathbf{v}}$ συμπίπτει με τον άξονα x, και αρκεί να περιστρέψουμε γύρω από τον y κατά 90° ή −90°, ανάλογα με το πρόσημο του a. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}}) = \mathbf{R_y}(-\theta_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{a}{|a|} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{|a|} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 3.13 (Περιστροφή γύρω από τυχαίο άξονα με 2 μεταφορές και 5 βασικές περιστροφές.) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που περιστρέφει κατά γωνία θ γύρω από τυχαίο άξονα ο οποίος ορίζεται από ένα διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}}$ και ένα σημείο $\mathbf{p}$ (Σχήμα 3.15).

Μπορούμε να ευθυγραμμίσουμε το δοσμένο διάνυσμα με τον άξονα z χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}})$. Έτσι, μετατρέπουμε το πρόβλημα της περι-

στροφής γύρω από τυχαίο άξονα σε περιστροφή γύρω από τον άξονα z. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο σύνθετο μετασχηματισμό:

Βήμα 1. Μεταφορά του $\mathbf{p}$ στο κέντρο συντεταγμένων, $\mathbf{T}(-\overrightarrow{\mathbf{p}})$.

Βήμα 2. Ευθυγράμμιση του $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ με τον άξονα z με τον πίνακα $\mathbf{A}(\overrightarrow{\mathbf{v}})$ του Παραδείγματος 3.12.

Βήμα 3. Περιστροφή γύρω από τον άξονα z κατά την επιθυμητή γωνία θ, $\mathbf{R_z}(\theta)$.

Βήμα 4. Αναίρεση της ευθυγράμμισης, $\mathbf{A}^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{v}})$.

Βήμα 5. Αναίρεση της μεταφοράς, $\mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{p}})$.

Έτσι ο απαιτούμενος μετασχηματισμός είναι:

$$\mathbf{M}_{\text{ROT-AXIS}} = \mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{R_z}(\theta) \cdot \mathbf{A}(\overrightarrow{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{T}(-\overrightarrow{\mathbf{p}}). \tag{3.30}$$

Παράδειγμα 3.14 (Μετατροπή συστήματος συντεταγμένων με 1 μεταφορά και 3 βασικές περιστροφές.) Να βρεθεί ο απαιτούμενος μετασχηματισμός $\mathbf{M}_{\text{ALIGN}}$ για την ευθυγράμμιση δοσμένου 3Δ συστήματος συντεταγμένων με διανύσματα βάσης $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$ με το σύστημα συντεταγμένων xyz με διανύσματα βάσης $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$. Το κέντρο του πρώτου συστήματος συντεταγμένων σχετικά με το xyz είναι $\mathbf{O_{lmn}}$.

Απαιτείται ένας μετασχηματισμός άξονα. Η ευθυγράμμιση της βάσης $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$ με την βάση $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ αντιστοιχεί στην μετατροπή του συστήματος συντεταγμένων ενός αντικειμένου από το $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ στο $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$. Η λύση είναι μια απλή επέκταση του μετασχηματισμού $\mathbf{A}(\overrightarrow{\mathbf{v}})$ του Παραδείγματος 3.12. Απαιτούνται τρία βήματα:

Βήμα 1. Μεταφορά κατά $-\mathbf{O_{lmn}}$ ώστε να συμπέσουν τα δύο κέντρα συντεταγμένων, $\mathbf{T}(-\overrightarrow{\mathbf{O}}_{\mathbf{lmn}})$.

Βήμα 2. Χρήση του $\mathbf{A}(\overrightarrow{\mathbf{v}})$ του Παραδείγματος 3.12 για την ευθυγράμμιση του διανύσματος βάσης $\hat{\mathbf{n}}$ με το διάνυσμα βάσης $\hat{\mathbf{k}}$. Η νέα κατάσταση απεικονίζεται στο Σχήμα 3.16. Πίνακας μετασχηματισμού $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{v}})$.

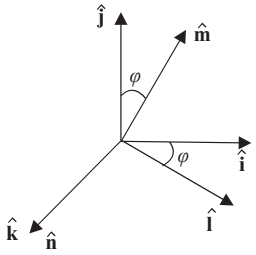
Βήμα 3. Περιστροφή κατά φ γύρω από τον άξονα z για να ευθυγραμμισθούν και οι άλλοι δύο άξονες, $\mathbf{R_z}(\varphi)$.

$$\mathbf{M}_{\text{ALIGN}} = \mathbf{R_z}(\varphi) \cdot \mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{T}(-\overrightarrow{\mathbf{O}}_{\mathbf{lmn}}) \tag{3.31}$$

Για να υπολογισθεί το φ πρέπει να μετασχηματισθεί το διάνυσμα $\hat{\mathbf{l}}$ ή το $\hat{\mathbf{m}}$ με τον $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}})$, π.χ. $\hat{\mathbf{m}}' = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{m}}$. Οι τιμές $\sin\varphi$ και $\cos\varphi$ που χρειάζονται για την περιστροφή είναι απλά οι x και y συντεταγμένες του $\hat{\mathbf{m}}'$, αντίστοιχα.

Ας δούμε ένα παράδειγμα. Έστω ότι τα ορθοκανονικά διανύσματα βάσης των δύο συστημάτων συντεταγμένων είναι

$$\hat{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$



Σχήμα 3.16: *Ευθυγράμμιση δύο συστημάτων συντεταγμένων.*

$$\hat{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{29}} \\ \frac{4}{\sqrt{29}} \\ \frac{2}{\sqrt{29}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} -\frac{32}{\sqrt{1653}} \\ \frac{25}{\sqrt{1653}} \\ -\frac{2}{\sqrt{1653}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{57}} \\ -\frac{2}{\sqrt{57}} \\ \frac{7}{\sqrt{57}} \end{bmatrix},$$

και ότι τα κέντρα των δύο συστημάτων συμπίπτουν ($\mathbf{O_{lmn}} = [0,0,0]^{\mathrm{T}}$). Τα διανύσματα βάσης του δεύτερου συστήματος εκφράζονται ως προς το πρώτο. Τότε, από τις συντεταγμένες του $\hat{\mathbf{n}}$, $a = -\frac{2}{\sqrt{57}}$, $b = -\frac{2}{\sqrt{57}}$, $c = \frac{7}{\sqrt{57}}$ και $\lambda = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{(-\frac{2}{\sqrt{57}})^2 + (\frac{7}{\sqrt{57}})^2}$ (βλέπε Παράδειγμα 3.12).

Συνεπώς,

$$\mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{53}{57}} & -\frac{4}{\sqrt{3021}} & \frac{14}{\sqrt{3021}} & 0 \\ 0 & \frac{7}{\sqrt{53}} & \frac{2}{\sqrt{53}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{57}} & -\frac{2}{\sqrt{57}} & \frac{7}{\sqrt{57}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

και

$$\hat{\mathbf{m}}' = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{m}} = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \begin{bmatrix} -\frac{32}{\sqrt{1653}} \\ \frac{25}{\sqrt{1653}} \\ -\frac{2}{\sqrt{1653}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{32}{\sqrt{1537}} \\ 3\sqrt{\frac{57}{1537}} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

οπότε

$$\sin\varphi = -\frac{32}{\sqrt{1537}} \text{ και } \cos\varphi = 3\sqrt{\frac{57}{1537}}.$$

Συνεπώς,

$$\mathbf{R_z}(\varphi) = \begin{bmatrix} 3\sqrt{\frac{57}{1537}} & \frac{32}{\sqrt{1537}} & 0 & 0 \\ -\frac{32}{\sqrt{1537}} & 3\sqrt{\frac{57}{1537}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τέλος, αφού τα κέντρα των δύο συστημάτων συντεταγμένων συμπίπτουν, η Εξί-

σωση (3.31) γίνεται

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\text{ALIGN}} &= \mathbf{R_z}(\varphi)\cdot\mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}})\cdot\mathbf{ID}\\ &= \begin{bmatrix} 3\sqrt{\frac{57}{1537}} & \frac{32}{\sqrt{1537}} & 0 & 0\\ -\frac{32}{\sqrt{1537}} & 3\sqrt{\frac{57}{1537}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{53}{57}} & -\frac{4}{\sqrt{3021}} & \frac{14}{\sqrt{3021}} & 0\\ 0 & \frac{7}{\sqrt{53}} & \frac{2}{\sqrt{53}} & 0\\ -\frac{2}{\sqrt{57}} & -\frac{2}{\sqrt{57}} & \frac{7}{\sqrt{57}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{29}} & \frac{4}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{29}} & 0\\ -\frac{32}{\sqrt{1653}} & \frac{25}{\sqrt{1653}} & -\frac{2}{\sqrt{1653}} & 0\\ -\frac{2}{\sqrt{57}} & -\frac{2}{\sqrt{57}} & \frac{7}{\sqrt{57}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.15 (Αλλαγή βάσης.) Υπολογίστε τον μετασχηματισμό $\mathbf{M}_{\text{BASIS}}$ που απαιτείται για την αλλαγή της ορθοκανονικής βάσης ενός συστήματος συντεταγμένων από $B1 = (\hat{\mathbf{i}}_1, \hat{\mathbf{j}}_1, \hat{\mathbf{k}}_1)$ σε $B2 = (\hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{j}}_2, \hat{\mathbf{k}}_2)$ και αντίστροφα.

Έστω ότι οι συντεταγμένες του ίδιου διανύσματος στις δύο βάσεις είναι αντίστοιχα $\vec{\mathbf{v}}_{B1}$ και $\vec{\mathbf{v}}_{B2}$. Αν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων βάσης $\hat{\mathbf{i}}_2$, $\hat{\mathbf{j}}_2$, και $\hat{\mathbf{k}}_2$ στην $B1$ είναι

$$\hat{\mathbf{i}}_{2,B1} = \begin{bmatrix} a\\ b\\ c \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{j}}_{2,B1} = \begin{bmatrix} d\\ e\\ f \end{bmatrix}, \text{ και } \quad \hat{\mathbf{k}}_{2,B1} = \begin{bmatrix} p\\ q\\ r \end{bmatrix},$$

τότε μπορεί εύκολα να δειχθεί (βλέπε Ασκήσεις, Ενότητα 3.11) ότι

$$\vec{\mathbf{v}}_{B1} = \begin{bmatrix} a & d & p\\ b & e & q\\ c & f & r \end{bmatrix}\cdot\vec{\mathbf{v}}_{B2}. \tag{3.32}$$

Συνεπώς,

$$\mathbf{M}^{-1}_{\text{BASIS}} = \begin{bmatrix} a & d & p\\ b & e & q\\ c & f & r \end{bmatrix}.$$

Αφού η $B2$ είναι μια ορθοκανονική βάση, ο $\mathbf{M}^{-1}_{\text{BASIS}}$ είναι ορθογώνιος πίνακας, και συνεπώς ο αντίστροφός του ισούται με τον ανάστροφό του. Άρα,

$$\mathbf{M}_{\text{BASIS}} = (\mathbf{M}^{-1}_{\text{BASIS}})^{\text{T}} = \begin{bmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ p & q & r \end{bmatrix},$$

που έχει ομογενή μορφή

$$\mathbf{M}_{\text{BASIS}} = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ p & q & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.33}$$

Παράδειγμα 3.16 (Μετατροπή συστήματος συντεταγμένων με αλλαγή βάσης.) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα αλλαγής βάσης του Παραδείγματος 3.15 για να ευθυγραμμίσετε δοσμένο 3Δ σύστημα συντεταγμένων με διανύσματα βάσης $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$, με το σύστημα xyz με διανύσματα βάσης $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$. Το κέντρο του πρώτου συστήματος σχετικά με το xyz είναι $\mathbf{O_{lmn}}$ [Cunn90].

Όπως στο παράδειγμα 3.14, ο απαιτούμενος μετασχηματισμός είναι μετασχηματισμός άξονα. Αντιστοιχεί στην μετατροπή του συστήματος συντεταγμένων ενός αντικειμένου από $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ σε $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$. Η αλλαγή βάσης μπορεί να αντικαταστήσει τις τρείς περιστροφές του Παραδείγματος 3.14. Οπότε, τα βήματα που απαιτούνται για την ευθυγράμμιση του πρώτου συστήματος συντεταγμένων με το δεύτερο είναι:

Βήμα 1. Μεταφορά κατά $-\mathbf{O_{lmn}}$ ώστε να συμπέσουν τα κέντρα των δύο συστημάτων, $\mathbf{T}(-\overrightarrow{\mathbf{O}}_{\mathbf{lmn}})$.

Βήμα 2. Χρήση του $\mathbf{M}_{\text{BASIS}}$ για αλλαγή βάσης από $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ σε $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{ALIGN2}} &= \mathbf{M}_{\text{BASIS}} \cdot \mathbf{T}(-\overrightarrow{\mathbf{O}}_{\mathbf{lmn}}) \\ &= \begin{bmatrix} a & b & c & -(a\,o_x + b\,o_y + c\,o_z) \\ d & e & f & -(d\,o_x + e\,o_y + f\,o_z) \\ p & q & r & -(p\,o_x + q\,o_y + r\,o_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.34}$$

όπου τα διανύσματα βάσης $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$ εκφραζόμενα στη βάση $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ είναι $\hat{\mathbf{l}} = [a, b, c]^{\mathrm{T}}$, $\hat{\mathbf{m}} = [d, e, f]^{\mathrm{T}}$, $\hat{\mathbf{n}} = [p, q, r]^{\mathrm{T}}$, και $\mathbf{O_{lmn}} = [o_x, o_y, o_z]^{\mathrm{T}}$.

Για ένα αριθμητικό παράδειγμα, ας πάρουμε τις τιμές του Παραδείγματος 3.14 για τις βάσεις $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ και $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$. Μεταφορά δεν απαιτείται, καθώς τα δύο κέντρα συμπίπτουν. Αφού η δεύτερη βάση εκφράζεται ως προς την πρώτη, μπορούμε να γράψουμε κατευθείαν τον πίνακα αλλαγής βάσης:

$$\mathbf{M}_{\text{BASIS}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{29}} & \frac{4}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{29}} \\ -\frac{32}{\sqrt{1653}} & \frac{25}{\sqrt{1653}} & -\frac{2}{\sqrt{1653}} \\ -\frac{2}{\sqrt{57}} & -\frac{2}{\sqrt{57}} & \frac{7}{\sqrt{57}} \end{bmatrix},$$

που έχει ομογενή μορφή

$$\mathbf{M}_{\text{BASIS}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{29}} & \frac{4}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{29}} & 0 \\ -\frac{32}{\sqrt{1653}} & \frac{25}{\sqrt{1653}} & -\frac{2}{\sqrt{1653}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{57}} & -\frac{2}{\sqrt{57}} & \frac{7}{\sqrt{57}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

και είναι ίσος με τον πίνακα $\mathbf{M}_{\text{ALIGN}}$ του Παραδείγματος 3.14 για τα ίδια διανύσματα βάσης.

Παράδειγμα 3.17 (Περιστροφή γύρω από τυχαίο άξονα με αλλαγή βάσης.) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα αλλαγής βάσης του Παραδείγματος 3.15 για να βρείτε ένα εναλλακτικό μετασχηματισμό για την περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από τυχαίο άξονα ο οποίος ορίζεται από διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}}$ και σημείο $\mathbf{p}$ (Σχήμα 3.15) [Cunn90].

Έστω,

$$\vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}.$$

Τότε η εξίσωση του επιπέδου που περνά από το $\mathbf{p}$ και είναι κάθετο στο $\vec{\mathbf{v}}$ είναι

$$a(x - x_p) + b(y - y_p) + c(z - z_p) = 0.$$

Έστω $\mathbf{q}$ ένα σημείο πάνω σε αυτό το επίπεδο, τέτοιο ώστε $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$ (αυτό μπορεί εύκολα να βρεθεί από την εξίσωση του επιπέδου, διαλέγοντας τιμές για τα x και y και λύνοντάς την για την τιμή του z). Επίσης, έστω $\vec{\mathbf{m}} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ και $\vec{\mathbf{l}} = \vec{\mathbf{m}} \times \vec{\mathbf{v}}$. Κανονικοποιούμε τα διανύσματα $\vec{\mathbf{l}}$, $\vec{\mathbf{m}}$ και $\vec{\mathbf{v}}$ για να ορίσουμε τη βάση συστήματος συντεταγμένων $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{v}})$ με τον έναν άξονα να είναι ο $\vec{\mathbf{v}}$ και οι άλλοι δύο πάνω στο δοσμένο επίπεδο. Είναι έτσι δυνατό να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό $\mathbf{M}_{\text{BASIS}}$ για να το ευθυγραμμίσουμε με το σύστημα συντεταγμένων xyz και μετά να εκτελέσουμε την επιθυμητή περιστροφή κατά θ γύρω από τον άξονα z. Τα απαιτούμενα βήματα λοιπόν είναι:

Βήμα 1. Μεταφορά του $\mathbf{p}$ στο κέντρο, $\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{p}})$.

Βήμα 2. Ευθυγράμμιση της βάσης $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{v}})$ με την βάση $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$, $\mathbf{M}_{\text{BASIS}}$.

Βήμα 3. Περιστροφή γύρω από τον άξονα z κατά την επιθυμητή γωνία θ, $\mathbf{R}_{\mathbf{z}}(\theta)$.

Βήμα 4. Αναίρεση της ευθυγράμμισης, $\mathbf{M}_{\text{BASIS}}^{-1}$.

Βήμα 5. Αναίρεση της μεταφοράς, $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{p}})$.

$$\mathbf{M}_{\text{ROT-AXIS2}} = \mathbf{T}(\vec{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{M}_{\text{BASIS}}^{-1} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{z}}(\theta) \cdot \mathbf{M}_{\text{BASIS}} \cdot \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{p}}). \tag{3.35}$$

Σε σύγκριση με τον γεωμετρικά υπολογισμένο πίνακα $\mathbf{M}_{\text{ROT-AXIS}}$, ο αλγεβρικός υπολογισμός του $\mathbf{M}_{\text{ROT-AXIS2}}$ είναι απλούστερος.

Παράδειγμα 3.18 (Περιστροφή πυραμίδας.) Περιστρέψτε την πυραμίδα που ορίζεται από τις κορυφές $\mathbf{a} = [0,0,0]^{\text{T}}$, $\mathbf{b} = [1,0,0]^{\text{T}}$, $\mathbf{c} = [0,1,0]^{\text{T}}$ και $\mathbf{d} = [0,0,1]^{\text{T}}$ κατά 45° γύρω από τον άξονα που ορίζεται από το σημείο $\mathbf{c}$ και το διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}} = [0,1,1]^{\text{T}}$ (Σχήμα 3.17).

Η πυραμίδα μπορεί να παρασταθεί από έναν πίνακα $\mathbf{P}$, οι στήλες του οποίου είναι οι ομογενείς συντεταγμένες των κορυφών της:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα $\mathbf{M}_{\text{ROT-AXIS}}$ [Εξίσωση (3.30)] για την περιστροφή της πυραμίδας. Οι απαιτούμενοι υποπίνακες είναι:

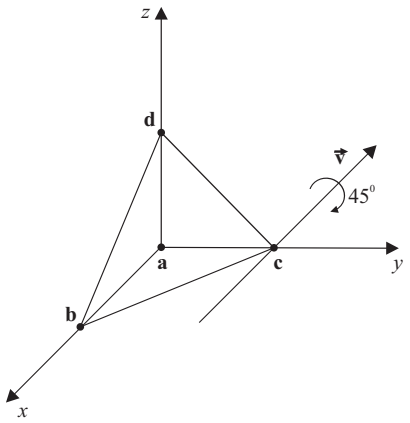
$$\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{c}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}}(45^\circ) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1}(\vec{\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}(\vec{\mathbf{c}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Οι παραπάνω συντίθενται σύμφωνα με την Εξίσωση (3.30) δίνοντας:

$$\mathbf{M}_{\text{ROT-AXIS}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$



Σχήμα 3.17: *Περιστροφή πυραμίδας γύρω από άξονα.*

και η περιστραμμένη πυραμίδα υπολογίζεται ως εξής

$$\mathbf{P}' = \mathbf{M}_{\text{ROT-AXIS}} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1+\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{4-\sqrt{2}}{4} & 1 & \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}-4}{4} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Οι κορυφές της περιστραμμένης πυραμίδας είναι $\mathbf{a}' = \left[\frac{1}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}-2}{4}\right]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b}' = \left[\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{4-\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}-4}{4}\right]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{c}' = \left[0, 1, 0\right]^{\mathrm{T}}$ και $\mathbf{d}' = \left[1, \frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]^{\mathrm{T}}$.

3.9 Quaternions⊛

Οι περιστροφές γύρω από έναν τυχαίο άξονα έχουν ήδη περιγραφεί στα Παραδείγματα 3.13 και 3.17. Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε έναν εναλλακτικό τρόπο έκφρασης τέτοιων περιστροφών, χρησιμοποιώντας *quaternions*. Όπως θα δούμε, αυτή η έκφραση των περιστροφών έχει ενδιαφέρουσες ιδιότητες, και, το κυριότερο, είναι εξαιρετικά χρήσιμη όταν θέλουμε να υπολογίσουμε ενδιάμεσες θέσεις κατά την περιστροφή ενός αντικειμένου για την παραγωγή συνθετικής κίνησης (animation), όπως θα περιγραφεί στην Ενότητα 17.2.1. Τα quaternions αναπτύχθηκαν από τον Sir William Hamilton το 1843 ως μία επέκταση των μιγαδικών αριθμών.

3.9.1 Μαθηματικές ιδιότητες των quaternions

Ένα quaternion q αποτελείται από τέσσερις πραγματικούς αριθμούς:

$$q = (s, x, y, z),$$

από τους οποίος ο s καλείται το *βαθμωτό* μέρος του q και το $\vec{\mathbf{v}} = (x, y, z)$ καλείται το *διανυσματικό* μέρος του q. Έτσι μπορούμε να γράψουμε το q και ως:

$$q = (s, \vec{\mathbf{v}}). \tag{3.36}$$

Τα quaternions μπορούν να ειδωθούν ως μία επέκταση των μιγαδικών αριθμών στις τέσσερις διαστάσεις: χρησιμοποιώντας «φανταστικές μονάδες» i, j, και k τέτοιες, ώστε $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ και $ij = k$, $ji = -k$, κ.ο.κ. κυκλικά, το quaternion q μπορεί να γραφεί ως:

$$q = s + xi + yj + zk. \tag{3.37}$$

Ένας πραγματικός αριθμός u αντιστοιχεί στο quaternion $(u, \vec{\mathbf{0}})$. Ένα σύνηθες διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}}$ αντιστοιχεί στο quaternion $(0, \vec{\mathbf{v}})$ και, παρομοίως, ένα σημείο $\mathbf{p}$ στο quaternion $(0, \mathbf{p})$.

Για τα ακόλουθα θέτουμε $q_i = (s_i, \vec{\mathbf{v}}_i)$.

Η *πρόσθεση* μεταξύ quaternions ορίζεται με φυσικό τρόπο ως:

$$q_1 + q_2 = (s_1, \vec{\mathbf{v}}_1) + (s_2, \vec{\mathbf{v}}_2) = (s_1 + s_2, \ \vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2). \tag{3.38}$$

Ο *πολλαπλασιασμός* μεταξύ quaternions είναι πιο πολύπλοκος, και το αποτέλεσμά του μπορεί να υπολογισθεί από τη σχέση (3.37) και τις ιδιότητες των φανταστικών μονάδων. Δίνουμε δύο εύχρηστες μοφές για τον πολλαπλασιασμό quaternions:

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 &= (s_1 s_2 - \vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}_2, && s_1 \vec{\mathbf{v}}_2 + s_2 \vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2) \\ &= (s_1 s_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2, && s_1 x_2 + x_1 s_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2, \\ & && s_1 y_2 + y_1 s_2 + z_1 x_2 - x_1 z_2, \\ & && s_1 z_2 + z_1 s_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Ο πολλαπλασιασμός μεταξύ quaternions είναι προσεταιριστικός· όμως *δεν* είναι αντιμεταθετικός, όπως φαίνεται από την πρώτη από τις παραπάνω σχέσεις στην οποία εμπλέκεται το εξωτερικό γινόμενο $\vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2$ το οποίο, επίσης, δεν είναι αντιμεταθετικό.

Το *συζυγές* quaternion του q ορίζεται ως:

$$\overline{q} = (s, -\vec{\mathbf{v}}), \tag{3.40}$$

και μπορεί εύκολα να επαληθευτεί ότι:

$$\overline{q_1 \cdot q_2} = \overline{q_2} \cdot \overline{q_1}. \tag{3.41}$$

Το *μέτρο* του q ορίζεται ως:

$$|q|^2 = q \cdot \overline{q} = \overline{q} \cdot q = s^2 + |\vec{\mathbf{v}}|^2 = s^2 + x^2 + y^2 + z^2, \tag{3.42}$$

και μπορεί να δειχθεί ότι $|q_1 \cdot q_2| = |q_1| \, |q_2|$. Ένα quaternion του οποίου το μέτρο είναι ίσο με 1 καλείται *μοναδιαίο*.

Το *αντίστροφο* quaternion του q ορίζεται ως:

$$q^{-1} = \frac{1}{|q|^2}\,\overline{q}, \tag{3.43}$$

και επομένως $q \cdot q^{-1} = q^{-1} \cdot q = 1$. Αν το q είναι μοναδιαίο quaternion, τότε $q^{-1} = \overline{q}$.

3.9.2 Έκφραση περιστροφής με quaternions

Όπως ήδη αναφέρθηκε, τα quaternions μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εκφραστούν τυχαίες περιστροφές. Συγκεκριμένα, μία περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από έναν άξονα *που διέρχεται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων* και του οποίου η διεύθυνση ορίζεται από ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$, αντιπροσωπεύεται από το *μοναδιαίο* quaternion:

$$q = (\cos\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\,\hat{\mathbf{n}}), \tag{3.44}$$

και εφαρμόζεται σε ένα σημείο $\mathbf{p}$, το οποίο αντιπροσωπεύεται από το quaternion $p = (0, \mathbf{p})$, χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$p' = q \cdot p \cdot q^{-1} = q \cdot p \cdot \overline{q} \tag{3.45}$$

(η δεύτερη ισότητα ισχύει καθώς το q είναι μοναδιαίο). Αυτή η σχέση δίνει:

$$p' = \big(0,\ (s^2 - \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}})\mathbf{p} + 2\vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{p}) + 2s(\vec{\mathbf{v}} \times \mathbf{p})\big), \tag{3.46}$$

όπου $s = \cos\frac{\theta}{2}$ και $\vec{\mathbf{v}} = \sin\frac{\theta}{2}\ \hat{\mathbf{n}}$. Σημειώνεται ότι το quaternion p' που προκύπτει αντιπροσωπεύει ένα σύνηθες σημείο $\mathbf{p}'$ καθώς έχει μηδενικό βαθμωτό μέρος. Παρακάτω δείχνουμε ότι το $\mathbf{p}'$ είναι πράγματι η εικόνα του αρχικού σημείου $\mathbf{p}$, μετά την περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από τον δοσμένο άξονα.

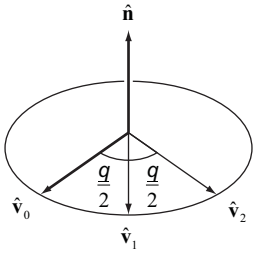
Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση είναι πολύ εύκολο να εκφραστεί αλγεβρικά το αποτέλεσμα δύο διαδοχικών περιστροφών. Υποθέτοντας ότι αυτές αντιπροσωπεύονται από τα μοναδιαία quaternions q_1 και q_2, το αποτέλεσμα της σύνθετης περιστροφής είναι:

$$q_2 \cdot (q_1 \cdot p \cdot \overline{q_1}) \cdot \overline{q_2} = (q_2 \cdot q_1) \cdot p \cdot (\overline{q_1} \cdot \overline{q_2}) = (q_2 \cdot q_1) \cdot p \cdot \overline{(q_2 \cdot q_1)},$$

και, επομένως, η σύνθετη περιστροφή αντιπροσωπεύεται από το quaternion $q = q_2 \cdot q_1$ (το οποίο είναι επίσης μοναδιαίο). Σε σύγκριση με τον ισοδύναμο πολλαπλασιασμό πινάκων περιστροφής, ο πολλαπλασιασμός quaternions είναι απλούστερος, απαιτεί λιγότερες πράξεις, και συνεπώς είναι αριθμητικά πιο ευσταθής.

Θα επιβεβαιώσουμε τώρα τις σχέσεις (3.44) και (3.45). Ας θεωρήσουμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{v}}_0$, έναν άξονα περιστροφής $\hat{\mathbf{n}}$, και τις εικόνες $\hat{\mathbf{v}}_1$ και $\hat{\mathbf{v}}_2$ του $\hat{\mathbf{v}}_0$ μετά από δύο διαδοχικές περιστροφές κατά γωνία $\frac{\theta}{2}$ γύρω από τον άξονα $\hat{\mathbf{n}}$ (Σχήμα 3.18)· τα αντίστοιχα quaternions είναι $p_0 = (0, \hat{\mathbf{v}}_0)$, $p_1 = (0, \hat{\mathbf{v}}_1)$, $p_2 = (0, \hat{\mathbf{v}}_2)$.

Αρχικά θα δείξουμε ότι $p_2 = q \cdot p_0 \cdot \overline{q}$ για $q = (\cos\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\ \hat{\mathbf{n}})$. Παρατηρούμε



Σχήμα 3.18: *Περιστροφή μοναδιαίου διανύσματος.*

ότι $\cos\frac{\theta}{2} = \hat{\mathbf{v}}_0 \cdot \hat{\mathbf{v}}_1$ και $\sin\frac{\theta}{2}\,\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{v}}_0 \times \hat{\mathbf{v}}_1$, επομένως μπορούμε να γράψουμε το q ως $q = (\hat{\mathbf{v}}_0 \cdot \hat{\mathbf{v}}_1,\ \hat{\mathbf{v}}_0 \times \hat{\mathbf{v}}_1) = p_1 \cdot \overline{p_0}$. Παρομοίως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $q = p_2 \cdot \overline{p_1}$. Τότε:

$$\begin{aligned} q \cdot p_0 \cdot \overline{q} &= (p_1 \cdot \overline{p_0}) \cdot p_0 \cdot \overline{(p_2 \cdot \overline{p_1})} \\ &= (p_1 \cdot \overline{p_0}) \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot \overline{p_2} \\ &= p_1 \cdot p_1 \cdot \overline{p_2} \\ &= p_2, \end{aligned}$$

καθώς $p_1 \cdot p_1 = (-1,\ \overrightarrow{\mathbf{0}}) = -1$ διότι $|\hat{\mathbf{v}}_1| = 1$, και επίσης $(-1) \cdot \overline{p_2} = -(0, -\hat{\mathbf{v}}_2) = (0, \hat{\mathbf{v}}_2) = p_2$. Αυτό αποδεικνύει ότι η πράξη $q \cdot p_0 \cdot \overline{q}$ έχει ως αποτέλεσμα την περιστροφή του $\hat{\mathbf{v}}_0$ κατά γωνία θ γύρω από τον $\hat{\mathbf{n}}$.

Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι η πράξη $q \cdot p_1 \cdot \overline{q}$ έχει ως αποτέλεσμα την ίδια περιστροφή για το $\hat{\mathbf{v}}_1$, ενώ η $q \cdot (0, \hat{\mathbf{n}}) \cdot \overline{q}$ δίνει τον $\hat{\mathbf{n}}$, κάτι που συμφωνεί με το γεγονός ότι ο $\hat{\mathbf{n}}$ είναι ο άξονας της περιστροφής.

Πλέον μπορούμε να γενικεύσουμε τα παραπάνω για ένα τυχαίο διάνυσμα: τα τρία διανύσματα $\hat{\mathbf{v}}_0$, $\hat{\mathbf{v}}_1$, και $\hat{\mathbf{n}}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και επομένως ένα διάνυσμα $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός αυτών, $\overrightarrow{\mathbf{p}} = \lambda_0\hat{\mathbf{v}}_0 + \lambda_1\hat{\mathbf{v}}_1 + \lambda\hat{\mathbf{n}}$. Τότε:

$$\begin{aligned} q \cdot (0, \overrightarrow{\mathbf{p}}) \cdot \overline{q} &= q \cdot (0,\ \lambda_0\hat{\mathbf{v}}_0 + \lambda_1\hat{\mathbf{v}}_1 + \lambda\hat{\mathbf{n}}) \cdot \overline{q} \\ &= q \cdot (0, \lambda_0\hat{\mathbf{v}}_0) \cdot \overline{q} \ +\ q \cdot (0, \lambda_1\hat{\mathbf{v}}_1) \cdot \overline{q} \ +\ q \cdot (0, \lambda\hat{\mathbf{n}}) \cdot \overline{q} \\ &= \lambda_0(q \cdot (0, \hat{\mathbf{v}}_0) \cdot \overline{q}) \ +\ \lambda_1(q \cdot (0, \hat{\mathbf{v}}_1) \cdot \overline{q}) \ +\ \lambda(q \cdot (0, \hat{\mathbf{n}}) \cdot \overline{q}), \end{aligned}$$

το οποίο είναι ακριβώς ένα quaternion με βαθμωτό μέρος μηδέν και διανυσματικό μέρος που σχηματίζεται από τις συνιστώσες του περιστραμμένου $\overrightarrow{\mathbf{p}}$.

3.9.3 Μετατροπές μεταξύ quaternions και πινάκων περιστροφής

Για να ενσωματωθούν οι περιστροφές στην έκφρασή τους με quaternions σε μία σειρά μετασχηματισμών που εκφράζονται με πίνακες, είναι απαραίτητη η κατασκευή ενός πίνακα περιστροφής, αν δίνεται ένα μοναδιαίο quaternion, και αντίστροφα. Υπενθυμίζουμε ότι, αντίθετα από τις περιστροφές που περιγράφονται στα Παραδείγματα 3.13 και 3.17, τα quaternions αντιπροσωπεύουν περιστροφές γύρω από έναν άξονα ο οποί-

ος διέρχεται από την αρχή των συντεταγμένων. Αν αυτό δεν συμβαίνει, χρειάζεται η συνήθης σειρά μετασχηματισμών: μεταφορά στην αρχή, περιστροφή, μεταφορά στην αρχική θέση.

Μπορεί να αποδειχθεί [Shoe87] ότι ο πίνακας περιστροφής που αντιστοιχεί σε μία περιστροφή που αντιπροσωπεύειται από το μοναδιαίο quaternion $q = (s, x, y, z)$ είναι ο:

$$\mathbf{R}_q = \begin{bmatrix} 1-2y^2-2z^2 & 2xy-2sz & 2xz+2sy & 0 \\ 2xy+2sz & 1-2x^2-2z^2 & 2yz-2sx & 0 \\ 2xz-2sy & 2yz+2sx & 1-2x^2-2y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.47}$$

Για την αντίστροφη διαδικασία, αν ένας πίνακας:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & 0 \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

αντιπροσωπεύει μία περιστροφή, το αντίστοιχο quaternion $q = (s, x, y, z)$ μπορεί να υπολογιστεί ως εξής. Στον πίνακα $\mathbf{R}_q$ αθροίζουμε τα στοιχεία της διαγωνίου και έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} m_{00}+m_{11}+m_{22}+1 &= 1-2y^2-2z^2+1-2x^2-2z^2+1-2x^2-2y^2+1 \\ &= 4-4(x^2+y^2+z^2) = 4-4(1-s^2) = 4s^2 \end{aligned} \tag{3.48}$$

(υπενθυμίζουμε ότι το q είναι μοναδιαίο quaternion και άρα $s^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$), επομένως:

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{m_{00}+m_{11}+m_{22}+1}. \tag{3.49}$$

Οι υπόλοιπες συντεταγμένες x, y, και z του q μπορούν να υπολογιστούν αφαιρώντας στοιχεία του $\mathbf{R}_q$ που είναι συμμετρικά ως προς τη διαγώνιο. Έτσι αν $s \neq 0$:

$$x = \frac{m_{21}-m_{12}}{4s}, \quad y = \frac{m_{02}-m_{20}}{4s}, \quad z = \frac{m_{10}-m_{01}}{4s}. \tag{3.50}$$

Αν $s = 0$ (ή αν το s είναι πολύ κοντά στο 0, ώστε να βελτιωθεί η αριθμητική ακρίβεια) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα διαφορετικό σύνολο σχέσεων. Για παράδειγμα:

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{m_{00}-m_{11}-m_{22}+1},$$

$$y = \frac{m_{01}+m_{10}}{4x}, \quad z = \frac{m_{02}+m_{20}}{4x}, \quad s = \frac{m_{21}-m_{12}}{4x}.$$

Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [Shoe87] για πληρέστερη περιγραφή.

Παράδειγμα 3.19 (Περιστροφή πυραμίδας.) Θα επεξεργαστούμε και πάλι το Παράδειγμα 3.18 χρησιμοποιώντας quaternions.

Η ζητούμενη περιστροφή είναι κατά 45° γύρω από έναν άξονα που ορίζεται από το σημείο $\mathbf{c} = [0,1,0]^{\mathrm{T}}$ και τη διεύθυνση $\overrightarrow{\mathbf{v}} = [0,1,1]^{\mathrm{T}}$. Καθώς ο άξονας δεν διέρχεται από την αρχή των συντεταγμένων, πρέπει να τον μεταφέρουμε κατά $-\overrightarrow{\mathbf{c}}$, να πραγματοποιήσουμε την περιστροφή χρησιμοποιώντας τον πίνακα $\mathbf{R}_q$ από τη σχέση (3.47), και να τον μεταφέρουμε πίσω. Πρέπει επίσης να κανονικοποιήσουμε το διάνυσμα διεύθυνσης λαμβάνοντας $\hat{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{v}}/|\overrightarrow{\mathbf{v}}| = [0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]^{\mathrm{T}}$.

Το quaternion που εκφράζει τη στροφή κατά 45° γύρω από άξονα με διεύθυνση $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ είναι το:

$$q = \Big(\cos\frac{45^\circ}{2},\ \sin\frac{45^\circ}{2}\hat{\mathbf{v}}\Big) = \Big(\cos 22.5^\circ,\ 0,\ \frac{\sin 22.5^\circ}{\sqrt{2}},\ \frac{\sin 22.5^\circ}{\sqrt{2}}\Big).$$

Από τους τριγωνομετρικούς τύπους διπλάσιου τόξου έχουμε:

$$\cos^2 22.5^\circ = \frac{1+\cos 45^\circ}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4},$$
$$\sin^2 22.5^\circ = \frac{1-\cos 45^\circ}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Επομένως:

$$\mathbf{R}_q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

και ο τελικός πίνακας μετασχηματισμού είναι:

$$\mathbf{M}_{\mathrm{ROT-AXIS3}} = \mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{c}}) \cdot \mathbf{R}_q \cdot \mathbf{T}(-\overrightarrow{\mathbf{c}}),$$

ο οποίος είναι ίσος με τον πίνακα $\mathbf{M}_{\mathrm{ROT-AXIS}}$ του Παραδείγματος 3.18.

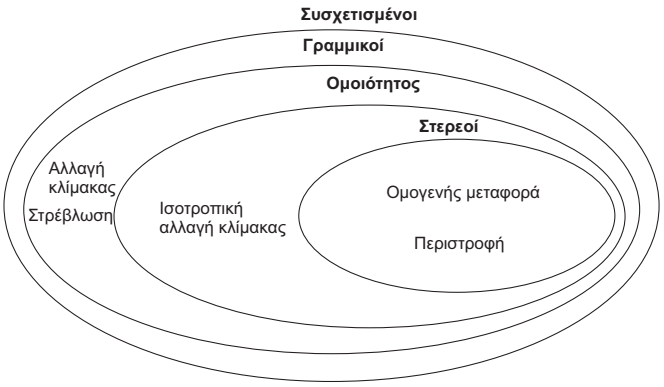
3.10 Γεωμετρικές ιδιότητες

Η ευρεία αποδοχή των συσχετισμένων μετασχηματισμών στα γραφικά κσι στην οπτικοποίηση οφείλεται στο γεγονός ότι διατηρούν σημαντικές γεωμετρικές ιδιότητες των αντικειμένων. Για παράδειγμα, αν Φ είναι ένας συσχετισμένος μετασχηματισμός και $\mathbf{p}$ και $\mathbf{q}$ είναι σημεία, τότε:

$$\Phi(\lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{q}) = \lambda\Phi(\mathbf{p}) + (1-\lambda)\Phi(\mathbf{q}), \tag{3.51}$$

για $0 \le \lambda \le 1$. Αφού το σύνολο $\{\lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{q},\ \ \lambda \in [0,1]\}$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ $\mathbf{p}$ και $\mathbf{q}$, η Εξίσωση (3.51) ορίζει ότι ο συσχετισμένος μετασχηματισμός ενός ευθύγραμμου τμήματος με τον Φ είναι ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα. Επιπλέον, διατηρούνται οι λόγοι αποστάσεων $\lambda/(1-\lambda)$ πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα.

Ο πίνακας 3.1 δίνει επιγραμματικά τις ιδιότητες των συσχετισμένων μετασχηματι-



Σχήμα 3.19: *Κατηγορίες συσχετισμένων ομογενών μετασχηματισμών.*

σμών και τριών υποκατηγοριών τους.

Οι βασικοί συσχετισμένοι μετασχηματισμοί που ανήκουν στις υποκατηγορίες *γραμμικοί*, *ομοιότητος* και *στερεοί* φαίνονται στο Σχήμα 3.19.

Οι γραμμικοί μετασχηματισμοί μπορούν να παρασταθούν με ένα πίνακα **A**, ο οποίος πολλαπλασιάζεται από αριστερά με το σημείο που μετασχηματίζεται. Όλοι οι ομογενείς συσχετισμένοι μετασχηματισμοί είναι γραμμικοί. Από τους μη ομογενείς βασικούς μετασχηματισμούς, η μεταφορά δεν είναι γραμμική. Οι συσχετισμένοι και οι γραμμικοί μετασχηματισμοί διατηρούν τις περισσότερες σημαντικές γεωμετρικές ιδιότητες εκτός από τις γωνίες και τις αποστάσεις (για τους λόγους αναλογιών, βλ. Κεφάλαιο 4).

Οι μετασχηματισμοί ομοιότητος διατηρούν την ομοιότητα των αντικειμένων. Το αποτέλεσμα ενός τέτοιου μετασχηματισμού πάνω σε ένα αντικείμενο είναι ένα όμοιο με το αρχικό αντικείμενο, εκτός ίσως από το μέγεθός του που μπορεί να έχει μεταβληθεί ισοτροπικά. Οι μετασχηματισμοί ομοιότητος διατηρούν τις γωνίες αλλά όχι τις αποστάσεις και περιλαμβάνουν: περιστροφή, ομογενή μεταφορά, ισοτροπική αλλαγή κλίμακας, καθώς και συνθέσεις των παραπάνω.

Η πιο περιοριστική κατηγορία είναι οι στερεοί μετασχηματισμοί που διατηρούν όλα τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των αντικειμένων. Οποιαδήποτε σύνθεση περιστροφών και ομογενών μεταφορών είναι ένας στερεός μετασχηματισμός.

Ιδιότητα που διατηρείται	**Συσχετισμένοι**	**Γραμμικοί**	**Ομοιότητος**	**Στερεοί**
Γωνίες	Όχι	Όχι	Ναι	Ναι
Αποστάσεις	Όχι	Όχι	Όχι	Ναι
Λόγοι αποστάσεων	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι
Παραλληλία ευθειών	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι
Συσχετισμένοι συνδυασμοί	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι
Ευθείες γραμμές	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι
Λόγοι αναλογιών	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι

Πίνακας 3.1: *Γεωμετρικές ιδιότητες που διατηρούν οι μετασχηματισμοί κατά κατηγορία.*

3.11 Ασκήσεις

1. Αν τα 3Δ σημεία παριστάνονταν σαν διανύσματα-γραμμές $[x, y, z, 1]$ (αντί για διανύσματα στήλες) δείξτε τι θα άλλαζε στη σύνθεση μετασχηματισμών.

2. Αν αντί για δεξιόστροφο χρησιμοποιείτο αριστερόστροφο 3Δ σύστημα συντεταγμένων δείξτε πώς θα άλλαζαν οι βασικοί 3Δ συσχετισμένοι μετασχηματισμοί.

3. Έστω, ότι ένας σύνθετος μετασχηματισμός αποτελούμενος από m βασικούς 3Δ συσχετισμένους μετασχηματισμούς πρέπει να εφαρμοσθεί σε n κορυφές αντικειμένων. Συγκρίνετε το κόστος της διαδοχικής εφαρμογής των βασικών μετασχηματισμών στις κορυφές με το κόστος της σύνθεσής τους σε έναν τελικό πίνακα και της εφαρμογής του τελικού πίνακα στις κορυφές. Η σύγκριση πρέπει να περιλαμβάνει το συνολικό αριθμό πολλαπλασιασμών και προσθέσεων που απαιτούνται. Εφαρμογή: $m = 2, 4, 8$ και $n = 10, 10^3, 10^6$.

4. Αποδείξτε ότι η Εξίσωση (3.32) στο Παράδειγμα 3.15 ισχύει.

5. Βρείτε *δύο* μετασχηματισμούς (πίνακες) για την ευθυγράμμιση διανύσματος $\overrightarrow{\mathbf{op}}$ με το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{j}}$ του θετικού άξονα y, όπου $\mathbf{o}$ το κέντρο του συστήματος συντεταγμένων και $\mathbf{p}$ δοσμένο 3Δ σημείο.

6. Δείξτε για ποια από τα παρακάτω ζεύγη 3Δ μετασχηματισμών ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα:

   (α) Μεταφορά και περιστροφή,

   (β) Αλλαγή κλίμακας και περιστροφή,

   (γ) Μεταφορά και αλλαγή κλίμακας,

   (δ) Δύο περιστροφές,

   (ε) Ισοτροπική αλλαγή κλίμακας και περιστροφή.

7. Έστω ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με ακμές παράλληλες με τους άξονες συντεταγμένων, το οποίο ορίζεται από δύο διαμετρικά αντίθετες κορυφές του $[x_{\min}, y_{\min}, z_{\min}]^{\mathrm{T}}$ και $[x_{\max}, y_{\max}, z_{\max}]^{\mathrm{T}}$. Βρείτε 3Δ μετασχηματισμό για την απεικόνιση του παραπάνω παραλληλεπιπέδου στο χώρο του μοναδιαίου κύβου χωρίς παραμόρφωση (διατήρηση του λόγου διαστάσεων) και, στη συνέχεια, την περιστροφή του κατά γωνία θ γύρω από άξονα που ορίζεται από σημείο $\mathbf{p}$ και διάνυσμα $\overrightarrow{\mathbf{v}}$.

8. Βρείτε τους ομογενείς πίνακες που απαιτούνται για τον μετασχηματισμό του μοναδιαίου κύβου, ο οποίος ορίζεται από τον πίνακα των κορυφών του:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{G} & \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

σε καθένα από τα ακόλουθα σχήματα:

$$\mathbf{S1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ y & y & y+1 & y+1 & y & y & y+1 & y+1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ y^2 & y^2 & y(y+1) & y(y+1) & y^2 & y^2 & y(y+1) & y(y+1) \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

όπου y το τελευταίο ψηφίο του έτους γεννήσεώς σας.

9. Υπολογίστε τον πίνακα του 3Δ μετασχηματισμού παράστασης. Τόσο το 3Δ παράθυρο, όσο και το 3Δ πεδίο παράστασης είναι ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με ακμές παράλληλες με τους άξονες συντεταγμένων που ορίζονται από δύο διαμετρικά αντίθετες κορυφές τους $[w_{\text{xmin}}, w_{\text{ymin}}, w_{\text{zmin}}]^{\text{T}}$, $[w_{\text{xmax}}, w_{\text{ymax}}, w_{\text{zmax}}]^{\text{T}}$ και $[v_{\text{xmin}}, v_{\text{ymin}}, v_{\text{zmin}}]^{\text{T}}$, $[v_{\text{xmax}}, v_{\text{ymax}}, v_{\text{zmax}}]^{\text{T}}$, αντίστοιχα.

10. Βρείτε τον 3Δ μετασχηματισμό για τον καθρεπτισμό σε επίπεδο ο οποίος ορίζεται από σημείο $\mathbf{p}$ και κάθετο διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}}$.

11. Χρησιμοποιήστε τον πίνακα $\mathbf{M}_{\text{ROT-AXIS2}}$ [Εξίσωση (3.35)] για την περιστροφή της πυραμίδας του Παραδείγματος 3.18. Βεβαιωθείτε ότι λαμβάνετε το ίδιο αποτέλεσμα.

12. Έστω, ότι n διαδοχικές περιστροφές πρόκειται να εφαρμοσθούν σε ένα σημείο, γύρω από διάφορους άξονες που περνούν από το κέντρο συντεταγμένων. Συγκρίνετε το κόστος του υπολογισμού ενός σύνθετου πίνακα περιστροφής από τους πίνακες περιστροφής των αξόνων με το κόστος της χρήσης quaternions για την έκφραση των περιστροφών. Στους υπολογισμούς σας πρέπει να συμπεριλάβετε το κόστος της δημιουργίας των πινάκων περιστροφής των αξόνων [π.χ. με το αποτέλεσμα της Εξίσωσης (3.30) χωρίς μεταφορά] και των quaternions (με τη Εξίσωση (3.44)), και στην περίπτωση των quaternions το κόστος της μετατροπής στον τελικό πίνακα περιστροφής (Εξίσωση (3.47)).

4

Προβολές και μετασχηματισμοί παρατήρησης

Η προοπτική είναι για τη ζωγραφική ότι το χαλινάρι για το άλογο, το πηδάλιο για το πλοίο.
—Leonardo da Vinci

4.1 Εισαγωγή

Στα γραφικά και στην οπτικοποίηση, τα μοντέλα που απαρτίζουν τις συνθετικές σκηνές είναι γενικά τριδιάστατα, ενώ οι συσκευές εξόδου (οθόνες και εκτυπωτές) είναι διδιάστατες.[1] Πρέπει συνεπώς να γίνει μια *προοπτική απεικόνιση*, ή απλά *προβολή*, σε κάποιο στάδιο της σωλήνωσης γραφικών και αυτή συνήθως τοποθετείται μετά τα στάδια περικοπής και πριν το στάδιο της δημιουργίας εικόνας (rendering). Οι παράμετροι της προβολής καθορίζονται κατά τον *μετασχηματισμό παρατήρησης*[2] ο οποίος ορίζει την μετάβαση από το σύστημα συντεταγμένων κόσμου (ΣΣΚ) στον κανονικοποιημένο χώρο οθόνης (ΚΧΟ – CSS) μέσω του συστήματος συντεταγμένων παρατηρητή (ΣΣΠ) (Σχήμα 4.1). Ο μετασχηματισμός παρατήρησης καθορίζει επίσης στο ΣΣΠ τα όρια αποκοπής (για την περικοπή στο οπτικό πεδίο).

Το σκεπτικό πίσω από τα παραπάνω συστήματα συντεταγμένων είναι το ακόλουθο: Τα αντικείμενα αρχικά ορίζονται στο δικό τους τοπικό σύστημα συντεταγμένων το οποίο μπορεί, π.χ., να είναι το αποτέλεσμα μιας διαδικασίας ψηφιοποίησης ή σχεδιασμού. Τα αντικείμενα ενοποιούνται στο ΣΣΚ όπου τοποθετούνται κατάλληλα μετασχηματισμένα. Το ΣΣΚ ουσιαστικά χρησιμοποιείται για να ορίσει το μοντέλο ενός συνθετικού κόσμου. Η μετάβαση από το ΣΣΚ στο ΣΣΠ, που αφορά αλλαγή συστήματος συντεταγμένων, γίνεται για τη διευκόλυνση λειτουργιών όπως η περικοπή (π.χ. ορισμός των ορίων περικοπής από τον χρήστη) και η προβολή. Τελικά, η μετάβαση από το ΣΣΠ στο ΚΧΟ εξασφαλίζει ότι όλα τα αντικείμενα που επέζησαν της περικοπής θα είναι ορισμένα σε ένα κανονικοποιημένο χώρο (που συνήθως έχει όρια από −1 ως 1),

[1] Οι τριδιάστατες συσκευές εξόδου είναι ερευνητικό πεδίο. Παρότι υπάρχουν ήδη κάποια εμπορικά προϊόντα, αυτά είναι είτε πολύ ακριβά είτε πολύ περιορισμένα ως προς την τρίτη διάσταση.

[2] Ο όρος «μετασχηματισμός παρατήρησης» χρησιμοποιείται εκτενώς στα γραφικά, παρότι δεν είναι μετασχηματισμός με τη στενή μαθηματική έννοια (δηλαδή μια απεικόνιση με το ίδιο σύνολο ορισμού και τιμών).

ο οποίος μπορεί εύκολα να κλιμακωθεί στις πραγματικές συντεταγμένες μιας συσκευής εξόδου, ενώ παράλληλα έχει υψηλή ακρίβεια παράστασης πραγματικών αριθμών (κοντά στο 0).



Σχήμα 4.1: *Επισκόπηση συστημάτων συντεταγμένων που εμπλέκονται στον μετασχηματισμό παράστασης.*

4.2 Προβολές

Στα μαθηματικά, *προβολή* είναι όρος που χρησιμοποιείται για την περιγραφή τεχνικών για τη δημιουργία της *εικόνας* ενός αντικειμένου πάνω σε ένα άλλο απλούστερο αντικείμενο, όπως μια ευθεία, ένα επίπεδο, ή μια επιφάνεια. Ένα *κέντρο προβολής*, μαζί με σημεία του αντικειμένου που προβάλλεται, χρησιμοποιούνται για τον ορισμό των ευθειών *προβολής* (ή απλά προβολείς), βλέπε Σχήμα 4.3. Η τομή ενός προβολέα με το απλό αντικείμενο (π.χ. το επίπεδο προβολής) δημιουργεί την απεικόνιση ενός σημείου του αρχικού αντικειμένου. Προβολές μπορούν να ορισθούν σε χώρους τυχαίων διαστάσεων.

Στα γραφικά και στην οπτικοποίηση μας ενδιαφέρουν, γενικά, προβολές από τον 3Δ στον 2Δ χώρο (ο 2Δ χώρος ονομάζεται *επίπεδο προβολής* και μοντελοποιεί τη 2Δ συσκευή εξόδου). Κυρίως, μας ενδιαφέρουν δύο προβολές:

- *Προοπτική προβολή*, όπου η απόσταση του κέντρου προβολής από το επίπεδο προβολής είναι πεπερασμένη,
- *Παράλληλη προβολή*, όπου η απόσταση του κέντρου προβολής από το επίπεδο προβολής είναι άπειρη.

Ιδιότητα που διατηρείται	Συσχετισμένοι	Προοπτικοί
Γωνίες	Όχι	Όχι
Αποστάσεις	Όχι	Όχι
Λόγοι αποστάσεων	Ναι	Όχι
Παραλληλία ευθειών	Ναι	Όχι
Συσχετισμένοι συνδυασμοί	Ναι	Όχι
Ευθείες γραμμές	Ναι	Ναι
Λόγοι αναλογιών	Ναι	Ναι

Πίνακας 4.1: *Ιδιότητες συσχετισμένων μετασχηματισμών και προοπτικών απεικονίσεων.*

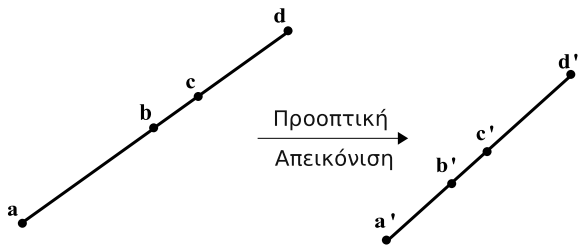
Οι προοπτικές απεικονίσεις *δεν* είναι συσχετισμένοι μετασχηματισμοί και, συνεπώς, δεν περιγράφονται με συσχετισμένους πίνακες μετασχηματισμού. Ο Πίνακας 4.1 δίνει συνοπτικά τις διαφορές μεταξύ των συσχετισμένων μετασχηματισμών και των προοπτικών απεικονίσεων ως προς τις ιδιότητες των αντικειμένων που διατηρούν.

Οι παράλληλες ευθείες δεν προβάλλονται σε παράλληλες ευθείες εκτός αν το επίπεδό τους είναι παράλληλο με το επίπεδο προβολής. Οι προβολές τους μοιάζουν να τέμνονται στο *σημείο φυγής*. Μια ευθεία απεικονίζεται σε ευθεία, αλλά οι λόγοι αποστάσεων πάνω στην ευθεία δεν διατηρούνται. Συνεπώς, οι συσχετισμένοι συνδυασμοί δεν διατηρούνται από τις προβολές· σε αντίθεση, οι λόγοι αποστάσεων διατηρούνται από τους συσχετισμένους μετασχηματισμούς από τον ορισμό τους. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 4.2,

$$\frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{bd}} \neq \frac{\mathbf{a'b'}}{\mathbf{b'd'}}.$$

Οι προβολές όμως διατηρούν τους λόγους αναλογιών, και πάλι στο Σχήμα 4.2,

$$\frac{\frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{cd}}}{\frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{bd}}} = \frac{\frac{\mathbf{a'c'}}{\mathbf{c'd'}}}{\frac{\mathbf{a'b'}}{\mathbf{b'd'}}}.$$



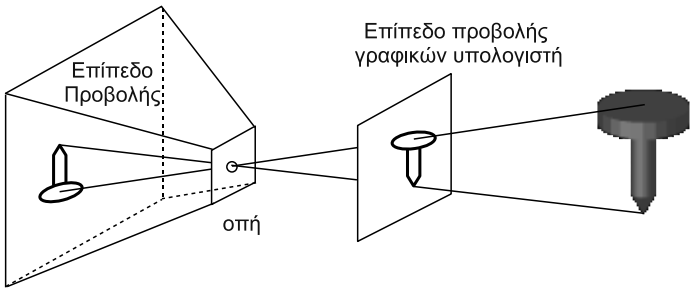
Σχήμα 4.2: *Λόγοι αποστάσεων πάνω σε ευθεία κατά την προοπτική απεικόνιση.*

Συνέπεια των παραπάνω είναι ότι για να περιγραφεί πλήρως η προοπτική απεικόνιση μιας ευθείας χρειαζόμαστε την απεικόνιση τριών σημείων της ευθείας, σε αντίθεση με τους συσχετισμένους μετασχηματισμούς όπου χρειαζόμαστε μόνο δύο. (Αυτό γενικεύεται στα επίπεδα και σε άλλα αντικείμενα που ορίζονται από σύνολα σημείων: για την προοπτική απεικόνιση ενός αντικειμένου χρειαζόμαστε την απεικόνιση ενός

παραπάνω σημείου από ότι για μια συσχετισμένη απεικόνισή του). Το αποτέλεσμα αυτό έχει σημαντικές επιπτώσεις για τις *ιδιότητες* ενός αντικειμένου κατά την προοπτική απεικόνιση. Για παράδειγμα αν και η «ευθύτητα» μιας ευθείας διατηρείται και μπορεί να περιγραφεί με την απεικόνιση δύο μόνον σημείων της, ιδιότητες όπως το βάθος ή το χρώμα της πρέπει να απεικονισθούν μέσω τριών σημείων (βλέπε Ενότητα 2.7).

4.2.1 Προοπτική προβολή

Η προοπτική προβολή μοιάζει με το οπτικό σύστημα των ματιών μας και μπορεί να μοντελοποιηθεί με σημειακή κάμερα οπής (Σχήμα 4.3). Η οπή της κάμερας είναι το κέντρο προβολής και το επίπεδο προβολής, όπου σχηματίζεται το είδωλο, είναι το επίπεδο εικόνας. Το απλό μοντέλο της σημειακής κάμερας δημιουργεί ένα αντεστραμμένο είδωλο. Στα γραφικά παίρνουμε ένα όρθιο είδωλο τοποθετώντας το επίπεδο προβολής «μπροστά» από την οπή της κάμερας.



Σχήμα 4.3: *Μοντέλο σημειακής κάμερας για την προοπτική προβολή.*

Έστω, ότι το κέντρο προβολής συμπίπτει με το κέντρο συντεταγμένων και ότι το επίπεδο προβολής είναι κάθετο στον αρνητικό άξονα z σε απόσταση d από το κέντρο (Σχήμα 4.4). Ένα 3Δ σημείο $\mathbf{P} = [x, y, z]^{\mathrm{T}}$ προβάλλεται στο σημείο $\mathbf{P'} = [x', y', d]^{\mathrm{T}}$ του επιπέδου προβολής. Ας θεωρήσουμε τις προβολές $\mathbf{P_1}$ και $\mathbf{P'_1}$ των σημείων $\mathbf{P}$ και $\mathbf{P'}$ αντίστοιχα πάνω στο επίπεδο yz. Από τα όμοια τρίγωνα $\triangle\mathbf{OP_1P_2}$ και $\triangle\mathbf{OP'_1P'_2}$, έχουμε:

$$\frac{\mathbf{P'_1P'_2}}{\mathbf{OP'_2}} = \frac{\mathbf{P_1P_2}}{\mathbf{OP_2}}.$$

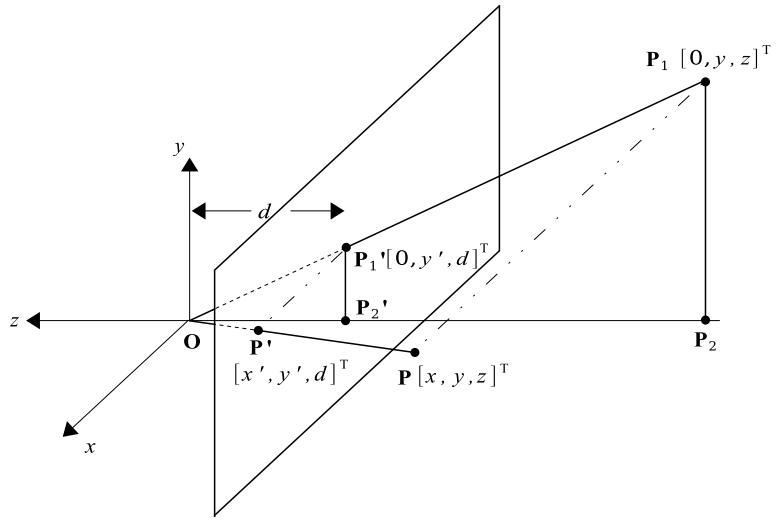
Καθώς $y' = \mathbf{P'_1P'_2}$, $d = \mathbf{OP'_2}$, $y = \mathbf{P_1P_2}$, και $z = \mathbf{OP_2}$,

$$y' = \frac{d \cdot y}{z}. \tag{4.1}$$

Η έκφραση για το x' μπορεί να εξαχθεί με παρόμοιο τρόπο:

$$x' = \frac{d \cdot x}{z}. \tag{4.2}$$

Οι εξισώσεις της προοπτικής προβολής δεν είναι γραμμικές, καθώς περιλαμβάνουν



Σχήμα 4.4: *Προοπτική προβολή.*

διαίρεση με το z και χρειάζεται ένα μικρό τέχνασμα για να τις εκφράσουμε σε μορφή πίνακα. Ο πίνακας:

$$\mathbf{P_{PER}} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

μεταβάλλει την ομογενή συντεταγμένη και απεικονίζει τις συντεταγμένες ενός σημείου $[x, y, z, 1]^{\mathrm{T}}$ ως εξής:

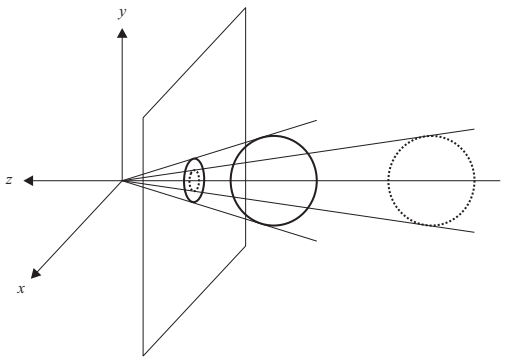
$$\mathbf{P_{PER}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot d \\ y \cdot d \\ z \cdot d \\ z \end{bmatrix}.$$

Για να επιτευχθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα χρειάζεται διαίρεση με την ομογενή συντεταγμένη, καθώς η τιμή της δεν είναι πλέον ίση με 1:

$$\begin{bmatrix} x \cdot d \\ y \cdot d \\ z \cdot d \\ z \end{bmatrix} / z = \begin{bmatrix} \frac{x \cdot d}{z} \\ \frac{y \cdot d}{z} \\ d \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της προοπτικής προβολής είναι η *προοπτική σμίκρυνση*· το γεγονός ότι το προβαλλόμενο μέγεθος ενός αντικειμένου είναι αντιθέτως ανάλογο με την απόστασή του από το κέντρο προβολής (Σχήμα 4.5).

Η προοπτική σμίκρυνση ήταν γνωστή στους αρχαίους Έλληνες αλλά οι νόμοι της προοπτικής δεν μελετήθηκαν σε βάθος έως τον Leonardo da Vinci. Αυτό εξηγεί για-

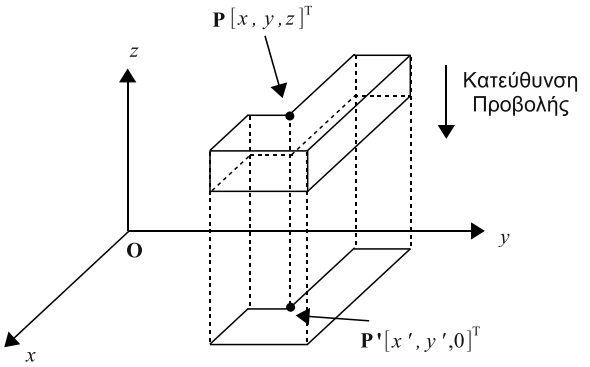


Σχήμα 4.5: *Προοπτική σμίκρυνση.*

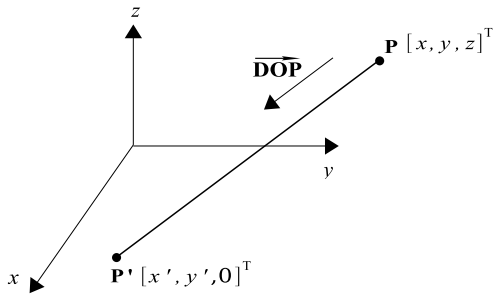
τί σε κάποιες παλιές απεικονίσεις (π.χ. αγιογραφίες) φιγούρες που βρίσκονται μακριά είναι σχετικά μεγάλες. Μόνο τους τελευταίους αιώνες η ζωγραφική προσπάθησε να λάβει ρεαλιστική μορφή και να προσομοιώσει τον τρόπο που βλέπουμε. Παλαιότερα κυριαρχούσαν συμβολικού τύπου κριτήρια, λ.χ. το μέγεθος των χαρακτήρων ήταν ανάλογο της σημασίας τους.

4.2.2 Παράλληλη προβολή

Στην παράλληλη προβολή το κέντρο προβολής βρίσκεται σε άπειρη απόσταση από το επίπεδο προβολής και συνεπώς οι προβολείς είναι παράλληλοι μεταξύ τους. Για να περιγράψουμε την προβολή αυτή χρειάζεται να ορίσουμε την *κατεύθυνση προβολής* (ένα διάνυσμα) και το επίπεδο προβολής. Θα διακρίνουμε δύο είδη παράλληλης προβολής: την *ορθογραφική*, όπου η κατεύθυνση προβολής είναι κάθετη στο επίπεδο προβολής και την *πλάγια*, όπου η κατεύθυνση προβολής δεν είναι απαραίτητα κάθετη στο επίπεδο προβολής.



Σχήμα 4.6: *Ορθογραφική προβολή πάνω στο επίπεδο* xy.



Σχήμα 4.7: *Πλάγια προβολή.*

Ορθογραφική προβολή.

Οι ορθογραφικές προβολές συνήθως χρησιμοποιούν ένα από τα κύρια επίπεδα του χώρου σαν επίπεδο προβολής. Έστω ότι το επίπεδο αυτό είναι το xy (Σχήμα 4.6). Ένα σημείο $\mathbf{P} = [x, y, z]^{\mathrm{T}}$ θα προβληθεί στο $[x', y', z']^{\mathrm{T}} = [x, y, 0]^{\mathrm{T}}$. Ο ακόλουθος πίνακας επιτυγχάνει το ζητούμενο αποτέλεσμα:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{ORTHO}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

οπότε $\mathbf{P}' = \mathbf{P}_{\mathbf{ORTHO}} \cdot \mathbf{P}$.

Πλάγια προβολή.

Εδώ η κατεύθυνση προβολής δεν είναι απαραίτητα κάθετη στο επίπεδο προβολής. Έστω, ότι η κατεύθυνση προβολής είναι:

$$\overrightarrow{\mathbf{DOP}} = [DOP_x, DOP_y, DOP_z]^{\mathrm{T}}$$

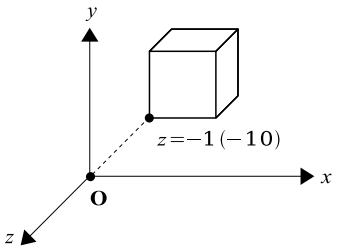
και το επίπεδο προβολής είναι το επίπεδο xy (Σχήμα 4.7).

Τότε η προβολή $\mathbf{P}' = [x', y', 0]^{\mathrm{T}}$ ενός σημείου $\mathbf{P} = [x, y, z]^{\mathrm{T}}$ θα είναι:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \lambda \cdot \overrightarrow{\mathbf{DOP}} \tag{4.5}$$

για κάποιο λ. Αλλά η z συντεταγμένη του $\mathbf{P}'$ είναι 0, οπότε η Εξίσωση (4.5) γίνεται:

$$0 = z + \lambda \cdot DOP_z \quad \text{ή} \quad \lambda = -\frac{z}{DOP_z}$$



Σχήμα 4.8: *Παράδειγμα προοπτικής προβολής: κύβος.*

Οι άλλες δύο συντεταγμένες του $\mathbf{P}'$ μπορούν τώρα να εξαχθούν από την Εξίσωση (4.5):

$$x' = x + \lambda \cdot DOP_x = x - \frac{DOP_x}{DOP_z} \cdot z$$

και, παρομοίως,

$$y' = y - \frac{DOP_y}{DOP_z} \cdot z.$$

Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να εκφρασθούν σε μορφή πίνακα ως:

$$\mathbf{P}_{\textbf{OBLIQUE}}(\overrightarrow{\mathbf{DOP}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{DOP_x}{DOP_z} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{DOP_y}{DOP_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.6}$$

έτσι ώστε $\mathbf{P}' = \mathbf{P}_{\textbf{OBLIQUE}}(\overrightarrow{\mathbf{DOP}}) \cdot \mathbf{P}$.

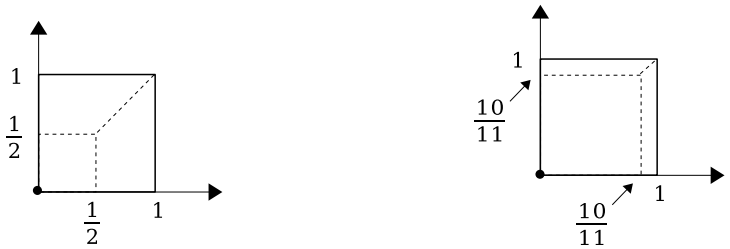
4.3 Παραδείγματα προβολών

Παράδειγμα 4.1 (Προοπτική προβολή κύβου.) Βρείτε τις προοπτικές προβολές ενός κύβου με ακμή μήκους 1 μονάδας όταν (α) το επίπεδο προβολής είναι το $z = -1$ και (β) το επίπεδο προβολής είναι το $z = -10$. Ο κύβος τοποθετείται πάνω στο επίπεδο προβολής όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.8.

Οι κορυφές του κύβου μπορούν να παρασταθούν σαν στήλες ενός πίνακα 4×8. Στην περίπτωση (α), ο κύβος είναι:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Το αποτέλεσμα της προβολής λαμβάνεται πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα προο-



Σχήμα 4.9: *Προοπτική προβολή κύβου (α) στο επίπεδο ζ= −1 και (β) στο επίπεδο ζ= −10.*

πτικής προβολής της Εξίσωσης (4.3) ($d = -1$) με τον **C**:

$$\mathbf{P_{PER}} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{C}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix},$$

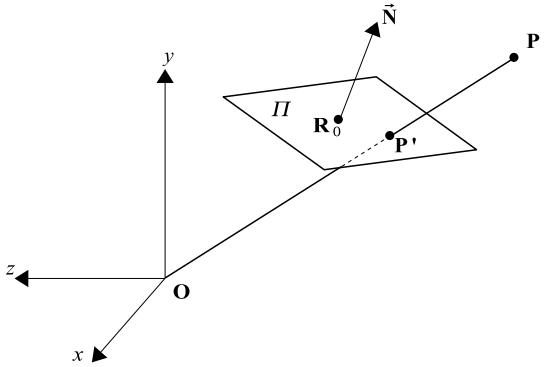
ο οποίος πρέπει να κανονικοποιηθεί με την ομογενή συντεταγμένη δίνοντας:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 4.9(α).

Στην περίπτωση (β), ο αρχικός κύβος είναι:

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -10 & -10 & -10 & -10 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 4.10: *Προοπτική προβολή σε τυχαίο επίπεδο.*

Πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα προοπτικής προβολής ($d = -10$) με τον $\mathbf{C}'$ δίνει:

$$\begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{C}' =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -10 & -10 & 0 & 0 & -10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -10 & 0 & 0 & -10 & -10 \\ 100 & 100 & 100 & 100 & 110 & 110 & 110 & 110 \\ -10 & -10 & -10 & -10 & -11 & -11 & -11 & -11 \end{bmatrix},$$

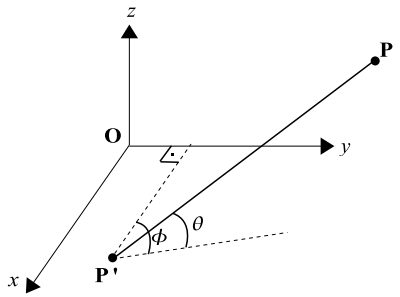
και η κανονικοποίηση με την ομογενή συντεταγμένη δίνει:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{10}{11} & \frac{10}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{10}{11} & \frac{10}{11} \\ -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 4.9(β). Προσέξτε πως η «απομακρυσμένη» πλευρά του κύβου έχει προβληθεί διαφορετικά στις δύο περιπτώσεις.

Παράδειγμα 4.2 (Προοπτική προβολή σε τυχαίο επίπεδο.) Υπολογίστε την προοπτική προβολή σημείου $\mathbf{P} = [x, y, z]^{\mathrm{T}}$ πάνω σε επίπεδο Π που ορίζεται από ένα σημείο $\mathbf{R_0} = [x_0, y_0, z_0]^{\mathrm{T}}$ και ένα κανονικό διάνυσμα $\vec{\mathbf{N}} = [n_x, n_y, n_z]^{\mathrm{T}}$. Το κέντρο προβολής είναι το κέντρο συντεταγμένων **O**.

Θεωρήστε την προβολή $\mathbf{P'} = [x', y', z']^{\mathrm{T}}$ του $\mathbf{P} = [x, y, z]^{\mathrm{T}}$ (Σχήμα 4.10). Καθώς τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathbf{OP'}}$ και $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$ είναι παράλληλα, $\overrightarrow{\mathbf{OP'}} = a \cdot \overrightarrow{\mathbf{OP}}$ για κάποιο a και οι εξισώσεις



Σχήμα 4.11: *Γωνίες αζιμούθιου και ύψους για την πλάγια προβολή.*

προβολής για κάθε συντεταγμένη είναι:

$$x' = ax, \quad y' = ay, \quad z' = az. \tag{4.7}$$

Πρέπει όμως να βρεθεί και η βαθμωτή τιμή a. Το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathbf{R_0P'}}$ είναι πάνω στο επίπεδο προβολής, οπότε το εσωτερικό του γινόμενο με το κάθετο διάνυσμα του επιπέδου $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ είναι 0:

$$\overrightarrow{\mathbf{N}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{R_0P'}} = 0,$$

ή

$$n_x(x' - x_0) + n_y(y' - y_0) + n_z(z' - z_0) = 0,$$

ή

$$n_x x' + n_y y' + n_z z' = n_x x_0 + n_y y_0 + n_z z_0.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των x', y', και z' από την Εξίσωση (4.7), θέτοντας $c = n_x x_0 + n_y y_0 + n_z z_0$, και λύνοντας για το a δίνει:

$$a = \frac{c}{n_x x + n_y y + n_z z}.$$

Σημειώστε ότι οι εξισώσεις προβολής περιλαμβάνουν διαίρεση με ένα συνδυασμό των x, y, και z (στην απλή προοπτική είχαμε μόνον το z στον παρονομαστή). Μπορούμε να εκφράσουμε τις εξισώσεις προβολής σε μορφή πίνακα μεταβάλλοντας την ομογενή συντεταγμένη, όπως και στην απλή προοπτική:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{PER},\Pi} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

Συνεπώς, για να προβληθεί το σημείο $\mathbf{P}$ στο επίπεδο Π, εφαρμόζουμε τον $\mathbf{P}_{\mathbf{PER},\Pi}$ και μετά διαιρούμε με την ομογενή συντεταγμένη $n_x x + n_y y + n_z z$.

Παράδειγμα 4.3 (Πλάγια προβολή με γωνίες αζιμούθιου και ύψους.) Μερικές φορές —κυρίως στον αρχιτεκτονικό σχεδιασμό— οι πλάγιες προβολές ορίζονται με γωνίες αζιμούθιου και ύψους που καθορίζουν τη σχέση της κατεύθυνσης προβολής με το επίπεδο προβολής. Βρείτε τον πίνακα προβολής για την περίπτωση αυτή.

Έστω, ότι το επίπεδο προβολής είναι το xy και ϕ και θ οι γωνίες αζιμούθιου και ύψους της κατεύθυνσης προβολής (Σχήμα 4.11). Με απλή τριγωνομετρία μπορεί να δειχθεί (βλέπε Ασκήσεις, Ενότητα 4.8), ότι το διάνυσμα της κατεύθυνσης προβολής είναι $\overrightarrow{\mathbf{DOP}} = [\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta]^{\mathrm{T}}$. Συνεπώς, ο πίνακας $\mathbf{P}_{\mathbf{OBLIQUE}}$ της Εξίσωσης (4.6) γίνεται:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{OBLIQUE}}(\phi,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{\cos\phi}{\tan\theta} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\sin\phi}{\tan\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

Παράδειγμα 4.4 (Πλάγια προβολή σε τυχαίο επίπεδο.) Καθορίστε την απεικόνιση πλάγιας προβολής πάνω σε τυχαίο επίπεδο Π που ορίζεται από ένα σημείο $\mathbf{R_0} = [x_0, y_0, z_0]^{\mathrm{T}}$ και κάθετο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathbf{N}} = [n_x, n_y, n_z]^{\mathrm{T}}$. Η κατεύθυνση προβολής δίνεται από το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathbf{DOP}} = [\mathrm{DOP}_x, \mathrm{DOP}_y, \mathrm{DOP}_z]^{\mathrm{T}}$.

Πρώτα θα μετατρέψουμε το επίπεδο Π έτσι, ώστε να ταυτίζεται με το xy. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα πλάγιας προβολής της Εξίσωσης (4.6), και τέλος θα αναιρέσουμε τον πρώτο μετασχηματισμό. Αυτό απαιτεί πέντε βήματα:

Βήμα 1. Μεταφορά του $\mathbf{R_0}$ στο κέντρο, $\mathbf{T}(-\overrightarrow{\mathbf{R_0}})$.

Βήμα 2. Ευθυγράμμιση του $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ με τον θετικό άξονα z. Αυτό επιτυγχάνεται με τον πίνακα $\mathbf{A}(\overrightarrow{\mathbf{N}})$ του Παραδείγματος 3.12.

Βήμα 3. Χρήση του πίνακα πλάγιας προβολής της Εξίσωσης (4.6), έχοντας μετατρέψει την κατεύθυνση προβολής σύμφωνα με τα βήματα 1 και 2:

$$\overrightarrow{\mathbf{DOP}}' = \mathbf{A}(\overrightarrow{\mathbf{N}}) \cdot \mathbf{T}(-\overrightarrow{\mathbf{R_0}}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{DOP}}.$$

Βήμα 4. Αναίρεση της ευθυγράμμισης, $\mathbf{A}(\overrightarrow{\mathbf{N}})^{-1}$.

Βήμα 5. Αναίρεση της μεταφοράς, $\mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{R_0}})$.

Συνεπώς,

$$\mathbf{P}_{\mathbf{OBLIQUE},\Pi}(\overrightarrow{\mathbf{DOP}}) = \mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{R_0}}) \cdot \mathbf{A}(\overrightarrow{\mathbf{N}})^{-1} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{OBLIQUE}}(\overrightarrow{\mathbf{DOP}}') \cdot \mathbf{A}(\overrightarrow{\mathbf{N}}) \cdot \mathbf{T}(-\overrightarrow{\mathbf{R_0}}). \tag{4.10}$$

4.4 Μετασχηματισμός παρατήρησης

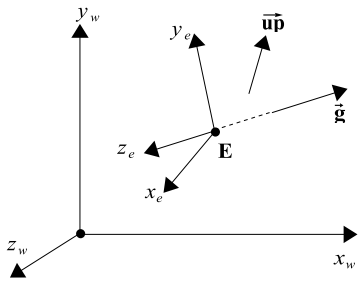
Ένας *μετασχηματισμός παρατήρησης* (ΜΠ) ορίζει όλη τη διαδικασία μετατροπής συντεταγμένων από το σύστημα συντεταγμένων κόσμου (ΣΣΚ) ως τον κανονικοποιημένο χώρο οθόνης (ΚΧΟ) μέσω του συστήματος συντεταγμένων παρατηρητή (ΣΣΠ). Επιπλέον, ορίζει τα όρια για την περικοπή στο οπτικό πεδίο στο ΣΣΠ. Όλα τα συστήματα συντεταγμένων είναι δεξιόστροφα. Θα διαιρέσουμε την περιγραφή του ΜΠ σε δύο τμήματα: το πρώτο περιγράφει την μετατροπή από το ΣΣΚ στο ΣΣΠ, ενώ το δεύτερο την μετατροπή από το ΣΣΠ στον ΚΧΟ. Το δεύτερο τμήμα θα διαιρεθεί περαιτέρω για να εξετασθούν χωριστά οι περιπτώσεις της ορθογραφικής και της προοπτικής προβολής. Προεκτάσεις που θα εξετασθούν αφορούν την πλάγια προβολή και μη συμμετρικό στερεό παρατήρησης για την προοπτική προβολή. Σημειώστε ότι η συντεταγμένη z διατηρείται κατά την μετατροπή από το ΣΣΠ στον ΚΧΟ, καθώς κάποια από τα στάδια που ακολουθούν τον ΜΠ χρειάζονται 3Δ δεδομένα.

4.4.1 ΣΣΚ σε ΣΣΠ

Το πρώτο βήμα είναι η μετάβαση από το ΣΣΚ στο ΣΣΠ. Το ΣΣΠ μπορεί να ορισθεί μέσα στο ΣΣΚ με τις ακόλουθες παραμέτρους:

- το κέντρο του ΣΣΠ **E**·
- την κατεύθυνση παρατήρησης $\overrightarrow{\mathbf{g}}$·
- την «άνω» κατεύθυνση $\overrightarrow{\mathbf{up}}$.

Το κέντρο **E** παριστάνει το σημείο παρατήρησης, όπου βρίσκεται ένας φανταστικός παρατηρητής. Το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathbf{up}}$ ορίζει την «άνω» κατεύθυνση και *δεν* είναι απαραίτητο να είναι κάθετο στο $\overrightarrow{\mathbf{g}}$. Δεδομένης της επιλογής δεξιόστροφου συστήματος συντεταγμένων, έχουμε αρκετά δεδομένα για να ορίσουμε τους άξονες του ΣΣΠ x_e, y_e, και z_e.



Σχήμα 4.12: *ΣΣΚ σε ΣΣΠ.*

Οι άξονες x_e και y_e πρέπει να ευθυγραμμισθούν με τους αντίστοιχους άξονες του ΚΧΟ με την συνήθη σύμβαση ότι ο x_e είναι ο οριζόντιος άξονας και αυξάνει προς τα

δεξιά και y_e είναι ο κάθετος άξονας και αυξάνει προς τα πάνω. Παράλληλα, πρέπει να κατασκευαστεί ένα δεξιόστροφο ΣΣΠ. Έτσι, διαλέγουμε άξονα z_e που αυξάνει προς την κατεύθυνση του παρατηρητή· με άλλα λόγια η κατεύθυνση παρατήρησης $\overrightarrow{\mathbf{g}}$ είναι ευθυγραμμισμένη με τον αρνητικό άξονα z_e. Τα διανύσματα που ορίζουν τους 2 άλλους άξονες του ΣΣΠ υπολογίζονται με εξωτερικά γινόμενα ως εξής (Σχήμα 4.12):

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{z_e}} &= -\overrightarrow{\mathbf{g}},\\ \overrightarrow{\mathbf{x_e}} &= \overrightarrow{\mathbf{up}} \times \overrightarrow{\mathbf{z_e}},\\ \overrightarrow{\mathbf{y_e}} &= \overrightarrow{\mathbf{z_e}} \times \overrightarrow{\mathbf{x_e}}.\end{aligned}$$

Έχοντας ορίσει το ΣΣΠ, πρέπει στη συνέχεια να γίνει η μετατροπή από το ΣΣΚ στο ΣΣΠ. Πρακτικά, αφού υπολογισθεί ο πίνακας $\mathbf{M_{WCS\to ECS}}$, οι κορυφές όλων των αντικειμένων πολλαπλασιάζονται με αυτόν από δεξιά. Όπως δείχθηκε στο Παράδειγμα 3.16, η μετατροπή του συστήματος συντεταγμένων μπορεί να επιτευχθεί με 2 μετασχηματισμούς: μια μεταφορά κατά $-\overrightarrow{\mathbf{E}} = [E_x, E_y, E_z]^{\mathrm{T}}$ ακολουθούμενη από ένα μετασχηματισμό περιστροφής· ο δεύτερος μπορεί να εκφρασθεί ως αλλαγή βάσης. Έστω, ότι τα διανύσματα βάσης των αξόνων του ΣΣΠ εκφρασμένα στο ΣΣΚ είναι $\hat{\mathbf{x}}_e = [a_x, a_y, a_z]^{\mathrm{T}}$, $\hat{\mathbf{y}}_e = [b_x, b_y, b_z]^{\mathrm{T}}$, και $\hat{\mathbf{z}}_e = [c_x, c_y, c_z]^{\mathrm{T}}$. Τότε:

$$\mathbf{M_{WCS\to ECS}} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z & 0\\ b_x & b_y & b_z & 0\\ c_x & c_y & c_z & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -E_x\\ 0 & 1 & 0 & -E_y\\ 0 & 0 & 1 & -E_z\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

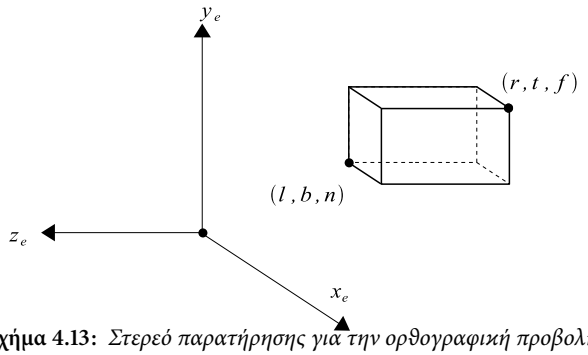
4.4.2 ΣΣΠ σε ΚΧΟ

Στη συνέχεια θα μετατρέψουμε τη σκηνή μας από το ΣΣΠ στον ΚΧΟ. Εδώ διακρίνουμε 2 περιπτώσεις: ορθογραφική προβολή σε ένα από τα τρία βασικά επίπεδα του 3Δ χώρου (θα χρησιμοποιήσουμε το xy) και προοπτική προβολή.

Ορθογραφική προβολή.

Έστω, ότι έχουμε ορθογραφική προβολή πάνω στο επίπεδο xy. Πρέπει να επιλέξουμε ένα τμήμα του χώρου το οποίο θα απεικονισθεί στον ΚΧΟ. Αυτό το τμήμα ονομάζεται *στερεό παρατήρησης* και παίρνει τη μορφή ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Μπορεί να ορισθεί από δύο διαμετρικά αντίθετες κορυφές, οι οποίες ορίζουν ταυτόχρονα και τα επίπεδα αποκοπής που χρησιμοποιούνται στην περικοπή στο οπτικό πεδίο (Σχήμα 4.13):

- $x_e = l$, το *αριστερό* επίπεδο αποκοπής,
- $x_e = r$, το *δεξί* επίπεδο αποκοπής, $(r > l)$,
- $y_e = b$, το *κάτω* επίπεδο αποκοπής,



Σχήμα 4.13: *Στερεό παρατήρησης για την ορθογραφική προβολή.*

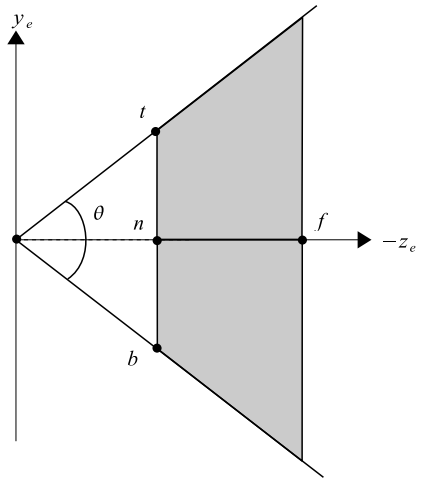
- $y_e = t$, το *πάνω* επίπεδο αποκοπής, $(t > b)$,
- $z_e = n$, το *έμπροσθεν* επίπεδο αποκοπής,
- $z_e = f$, το *όπισθεν* επίπεδο αποκοπής, ($f < n$, καθώς ο άξονας z_e έχει κατεύθυνση προς τον παρατηρητή).

Δεδομένου ότι θέλουμε να διατηρήσουμε την συντεταγμένη z, ο πίνακας ορθογραφικής προβολής πάνω στο επίπεδο xy [βλέπε Εξίσωση (4.4)] είναι απλά ο μοναδιαίος πίνακας. Το στερεό παρατήρησης μπορεί να μετατραπεί στον ΚΧΟ με μία μεταφορά και μία αλλαγή κλίμακας. Θέλουμε να απεικονίσουμε τις τιμές (l, b, n) στο –1 και τις τιμές (r, t, f) στο 1, οπότε ο απαιτούμενος μετασχηματισμός είναι:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^{\mathbf{ORTHO}}_{\mathbf{ECS}\rightarrow\mathbf{CSS}} &= \mathbf{S}\left(\frac{2}{r-l}, \frac{2}{t-b}, \frac{2}{f-n}\right) \cdot \mathbf{T}\left(-\frac{r+l}{2}, -\frac{t+b}{2}, -\frac{n+f}{2}\right) \cdot \mathbf{ID} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{f-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{r+l}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{t+b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{n+f}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{2}{f-n} & -\frac{n+f}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Συνεπώς, με ορθογραφική προβολή, ένα σημείο του ΣΣΚ $\mathbf{X_w} = [x_w, y_w, z_w, 1]^{\mathrm{T}}$ απεικονίζεται στον ΚΧΟ με τον:

$$\mathbf{X_s} = \mathbf{M}^{\mathbf{ORTHO}}_{\mathbf{ECS}\rightarrow\mathbf{CSS}} \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{WCS}\rightarrow\mathbf{ECS}} \cdot \mathbf{X_w}.$$



Σχήμα 4.14: *Στερεό παρατήρησης για την προοπτική προβολή (yz όψη).*

Προοπτική προβολή.

Στην περίπτωση αυτή το στερεό παρατήρησης είναι μια κόλουρη πυραμίδα, που είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $-z_e$. Στο Σχήμα 4.14 φαίνεται σκιασμένη η yz όψη της. Αυτό το στερεό παρατήρησης μπορεί να ορισθεί με 4 παραμέτρους:

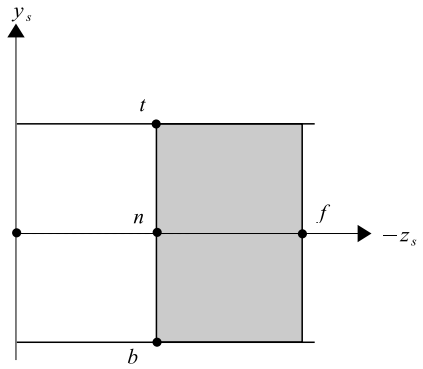
- θ, η γωνία (εύρος) του οπτικού πεδίου στην κατεύθυνση του y,
- $aspect$, ο λόγος του πλάτους ως προς το ύψος μιας τομής της πυραμίδας[3]
- $z_e = n$, το έμπροσθεν επίπεδο αποκοπής,
- $z_e = f$, το όπισθεν επίπεδο αποκοπής ($f < n$).

Υποθέτουμε ότι η προβολή γίνεται πάνω στο έμπροσθεν επίπεδο αποκοπής $z_e = n$. Το πάνω, κάτω, δεξί και αριστερό όριο αποκοπής στο βάθος του έμπροσθεν επιπέδου αποκοπής μπορούν να εξαχθούν από τις παραπάνω παραμέτρους ως εξής:

$$\begin{aligned} t &= |n| \cdot \tan(\frac{\theta}{2}), \\ b &= -t, \\ r &= t \cdot \text{aspect}, \\ l &= -r. \end{aligned}$$

Μπορούμε να τροποποιήσουμε τον πίνακα προοπτικής προβολής (P_{PER} της Εξίσωσης (4.3)). Πρέπει να γίνει ειδική μεταχείριση στη συντεταγμένη z, η οποία πρέπει να διατηρηθεί για τους αλγόριθμους απομάκρυνσης κρυμμένων επιφανειών (αλλά και

[3]Για παράδειγμα για την τομή που ορίζεται από το επίπεδο $z = n$, το ύψος είναι η απόσταση μεταξύ του t και του b (Σχήμα 4.14), και το πλάτος η απόσταση μεταξύ του l και του r.



Σχήμα 4.15: *Το προοπτικό στερεό παρατήρησης μετασχηματισμένο σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο (yz όψη).*

άλλους) στον χώρο οθόνης. Όμως η απλή φύλαξη της z_e συντεταγμένης θα παραμορφώσει τα αντικείμενα. Χρειαζόμαστε μια απεικόνιση που να διατηρεί ευθείες και επίπεδα, δηλ. ευθείες και επίπεδα του ΣΣΠ πρέπει να απεικονίζονται σε ευθείες και επίπεδα του ΚΧΟ. Όπως δείχνεται στο [Newm81], μια απεικόνιση που το επιτυγχάνει αυτό είναι η $z_s = A + B/z_e$, όπου τα A και B είναι σταθερές. Με την αντιστροφή της συντεταγμένης z η απεικόνιση αυτή μοιάζει με τις απεικονίσεις για τις συντεταγμένες x και y. Απαιτούμε να έχουμε $(z_e = n) \Rightarrow (z_s = n)$ και $(z_e = f) \Rightarrow (z_s = f)$, οπότε παίρνουμε δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους, από τις οποίες προκύπτει $A = (n + f)$ και $B = -nf$.[4] Η απεικόνιση που επελέγη δεν μεταβάλλει τις τιμές των ορίων $z_e = n$ και $z_e = f$· πράγμα που δεν ισχύει για τις τιμές z_e μεταξύ των δύο ορίων. Συνεπώς, ο πίνακας προοπτικής προβολής είναι:

$$\mathbf{P_{VT}} = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -nf \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

που κάνει την συντεταγμένη w να ισούται με z_e και συνεπώς πρέπει να ακολουθηθεί από μια διαίρεση με z_e, η οποία ονομάζεται *προοπτική διαίρεση*. Ο μετασχηματισμός $\mathbf{P_{VT}}$ μετατρέπει την κόλουρη πυραμίδα του Σχήματος 4.14 στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του Σχήματος 4.15. Τα όρια αποκοπής δεν επηρεάζονται από τον $\mathbf{P_{VT}}$.

Η τρέχουσα κατάσταση μοιάζει με αυτήν πριν την ορθογραφική προβολή, με την διαφορά ότι το στερεό παρατήρησης είναι ήδη συμμετρικό ως προς τον άξονα $-z_e$. Για να ολοκληρωθεί η μετατροπή από το ΣΣΠ στον ΚΧΟ, πρέπει συνεπώς να ακολουθήσουν τον $\mathbf{P_{VT}}$ μια μεταφορά (κατά τον z_e μόνο) και μια αλλαγή κλίμακας:

[4] Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να απαιτήσουμε $(z_e = n) \Rightarrow (z_s = -n)$ και $(z_e = f) \Rightarrow (z_s = -f)$ ώστε μεγαλύτερες τιμές του z_s να αντιστοιχούν σε μεγαλύτερη απόσταση από το σημείο παρατήρησης, πράγμα που θα έδινε $A = -(n + f)$ και $B = nf$.

$$\mathbf{M}^{\mathbf{PERSP}}_{\mathbf{ECS}\rightarrow\mathbf{CSS}} = \mathbf{S}(\frac{2}{r-l}, \frac{2}{t-b}, \frac{2}{f-n}) \cdot \mathbf{T}(0, 0, -\frac{n+f}{2}) \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{VT}}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{f-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{n+f}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -nf \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n+f}{f-n} & -\frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.13}$$

Ένα σημείο του ΣΣΚ $\mathbf{X_w} = [x_w, y_w, z_w, 1]^{\mathrm{T}}$ μπορεί συνεπώς να μετατραπεί στον ΚΧΟ με προοπτική προβολή με τον:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{\mathbf{PERSP}}_{\mathbf{ECS}\rightarrow\mathbf{CSS}} \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{WCS}\rightarrow\mathbf{ECS}} \cdot \mathbf{X_w},$$

ακολουθούμενο από την προοπτική διαίρεση με την συντεταγμένη w (που ισούται με z_e). Η περικοπή στο οπτικό πεδίο συνήθως γίνεται αμέσως πριν την προοπτική διαίρεση (βλέπε Ενότητα 4.6) εξασφαλίζοντας ότι οι συντεταγμένες x, y και z κάθε σημείου οποιουδήποτε αντικειμένου θα είναι εντός των ορίων αποκοπής:

$$-w \leq x, y, z \leq w.$$

Η προοπτική διαίρεση που ακολουθεί, ολοκληρώνει την μετάβαση στον ΚΧΟ και όλα τα σημεία είναι πλέον εντός του διαστήματος $[-1, 1]$:

$$\mathbf{X_s} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} / w.$$

Θα παρακολουθήσουμε δύο συγκεκριμένα σημεία σε αυτήν την απεικόνιση για να γίνει πιο ξεκάθαρη η διαδικασία. Παίρνουμε τα οριακά σημεία με συντεταγμένες ΣΣΠ $[l, b, n, 1]^{\mathrm{T}}$ και $[0, 0, f, 1]^{\mathrm{T}}$ (Σχήμα 4.14). Εφαρμόζοντας τον πίνακα προοπτικής προ-

βολής $\mathbf{P_{VT}}$ δίνει:

$$\mathbf{P_{VT}} \cdot \begin{bmatrix} l \\ b \\ n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ln \\ bn \\ n^2 \\ n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P_{VT}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f^2 \\ f \end{bmatrix} .$$

Η ομογενής συντεταγμένη δεν έχει πλέον τιμή 1. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη σύνθεση των πινάκων αλλαγής κλίμακας και μεταφοράς:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} ln \\ bn \\ n^2 \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n \\ -n \\ -n \\ n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f^2 \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ f \end{bmatrix} .$$

Σημειώνουμε ότι $r - l = -2l$ και $t - b = -2b$, αφού $r = -l$ και $t = -b$ λόγω της συμμετρίας της κόλουρης πυραμίδας ως προς τον $-z_e$. Τέλος, η προοπτική διαίρεση δίνει τις συντεταγμένες των σημείων στον ΚΧΟ:

$$\begin{bmatrix} -n \\ -n \\ -n \\ n \end{bmatrix} /n = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ f \end{bmatrix} /f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

4.5 Προεκταμένος μετασχηματισμός παρατήρησης

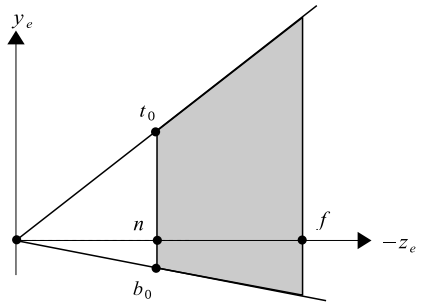
Παρότι ο παραπάνω μετασχηματισμός παρατήρησης είναι ικανοποιητικός για τις περισσότερες περιπτώσεις, υπάρχουν κάποιες ενδιαφέρουσες προεκτάσεις του.

4.5.1 Κόλουρη πυραμίδα μη συμμετρική ως προς τον άξονα z_e

Μια γενίκευση της προοπτικής προβολής φαίνεται στο Σχήμα 4.16. Το στερεό παρατήρησης, που είναι κόλουρη πυραμίδα, δεν είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα z_e. Αυτό συναντάται, π.χ., σε στερεοσκοπικά συστήματα όπου τα 2 σημεία παρατήρησης έχουν μια μικρή απόσταση μεταξύ τους κατά την κατεύθυνση του άξονα x_e.

Το παραπάνω στερεό παρατήρησης μπορεί να ορισθεί δίνοντας άμεσα τις παραμέτρους των επιπέδων αποκοπής:

- $z_e = n_0$, το έμπροσθεν επίπεδο αποκοπής (όπως πριν),
- $z_e = f_0$, το όπισθεν επίπεδο αποκοπής, $f_0 < n_0$ (όπως πριν),
- $y_e = b_0$, η συντεταγμένη y_e του κάτω επιπέδου αποκοπής στην τομή του με το έμπροσθεν επίπεδο αποκοπής,



Σχήμα 4.16: *Στερεό παρατήρησης κόλουρη πυραμίδα, μη συμμετρική ως προς τον άξονα z_e (yz όψη).*

- $y_e = t_0$, η συντεταγμένη y_e του πάνω επιπέδου αποκοπής στην τομή του με το έμπροσθεν επίπεδο αποκοπής,
- $x_e = l_0$, η συντεταγμένη x_e του αριστερού επιπέδου αποκοπής στην τομή του με το έμπροσθεν επίπεδο αποκοπής,
- $x_e = r_0$, η συντεταγμένη x_e του δεξιού επιπέδου αποκοπής στην τομή του με το έμπροσθεν επίπεδο αποκοπής.

Μια στρέβλωση στο επίπεδο xy μπορεί να μετατρέψει την παραπάνω πυραμίδα, έτσι ώστε να είναι συμμετρική ως προς τον άξονα z_e. Πρέπει να υπολογίσουμε τις παραμέτρους A και B του γενικού πίνακα στρέβλωσης στο xy:

$$\mathbf{SH_{xy}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & A & 0 \\ 0 & 1 & B & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.14}$$

Θεωρώντας τη στρέβλωση στη συντεταγμένη y_e, πρέπει να απεικονίσουμε το κέντρο του ευθύγραμμου τμήματος $t_0 b_0$ στο 0:

$$\frac{b_0 + t_0}{2} + B \cdot n_0 = 0,$$

που λύνοντας για τον παράγοντα στρέβλωσης B δίνει $B = -\frac{b_0+t_0}{2n_0}$. Παρομοίως ο παράγοντας στρέβλωσης στο x_e είναι $A = -\frac{l_0+r_0}{2n_0}$. Έτσι ο απαιτούμενος μετασχηματισμός στρέβλωσης είναι:

$$\mathbf{SH_{NON-SYM}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{l_0+r_0}{2n_0} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{b_0+t_0}{2n_0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τα όρια αποκοπής πρέπει επίσης να μεταβληθούν ώστε να ανταποκρίνονται στο

συμμετρικό σχήμα της νέας πυραμίδας:

$$\begin{aligned} n &= n_0, & f &= f_0, \\ l &= l_0 - \frac{l_0 + r_0}{2}, & r &= r_0 - \frac{l_0 + r_0}{2}, \\ b &= b_0 - \frac{b_0 + t_0}{2}, & t &= t_0 - \frac{b_0 + t_0}{2}. \end{aligned}$$

Αν αντικαταστήσουμε τις παραπάνω ισότητες στον πίνακα $\mathbf{M}^{\mathbf{PERSP}}_{\mathbf{ECS}\rightarrow\mathbf{CSS}}$ και απλοποιήσουμε παίρνουμε:

$$\mathbf{M}^{\mathbf{PERSP}}_{\mathbf{ECS}\rightarrow\mathbf{CSS}} = \begin{bmatrix} \frac{2n_0}{r_0-l_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2n_0}{t_0-b_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n_0+f_0}{f_0-n_0} & -\frac{2n_0 f_0}{f_0-n_0} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με τον αρχικό πίνακα $\mathbf{M}^{\mathbf{PERSP}}_{\mathbf{ECS}\rightarrow\mathbf{CSS}}$, με τα όρια αποκοπής να έχουν αντικατασταθεί από τα αρχικά όρια αποκοπής. Συνεπώς, δεν είναι απαραίτητο να υπάρχουν αρχικά όρια αποκοπής και να τα μετατρέπουμε μετά τη στρέβλωση· μπορούμε να τα ονομάσουμε από την αρχή n, f, l, r, b, t.

Ο μετασχηματισμός συμμετρίας $\mathbf{SH}_{\mathbf{NON-SYM}}$ πρέπει να προηγηθεί του $\mathbf{M}^{\mathbf{PERSP}}_{\mathbf{ECS}\rightarrow\mathbf{CSS}}$, και η απεικόνιση ΣΣΠ → ΚΧΟ στην περίπτωση της μη συμμετρικής προοπτικής προβολής γίνεται:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{\mathbf{PERSP-NON-SYM}}_{\mathbf{ECS}\rightarrow\mathbf{CSS}} &= \mathbf{M}^{\mathbf{PERSP}}_{\mathbf{ECS}\rightarrow\mathbf{CSS}} \cdot \mathbf{SH}_{\mathbf{NON-SYM}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n+f}{f-n} & -\frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{l+r}{2n} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{b+t}{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & -\frac{l+r}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & -\frac{b+t}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n+f}{f-n} & -\frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

4.5.2 Πλάγια προβολή

Παρόλο που η ορθογραφική προβολή είναι η πιο διαδεδομένη παράλληλη προβολή, υπάρχουν εφαρμογές όπου απαιτείται η πιο γενική περίπτωση της πλάγιας παράλληλης προβολής, όπως στον υπολογισμό των πλάγιων όψεων 3Δ οθονών [Theo90]. Σε τέτοιες περιπτώσεις η απεικόνιση $\mathbf{M}^{\mathbf{ORTHO}}_{\mathbf{ECS}\rightarrow\mathbf{CSS}}$ δεν αρκεί, και η κατεύθυνση προβο-

λής πρέπει να ληφθεί υπόψη. Το στερεό παρατήρησης στην περίπτωση αυτή είναι ένα παραλληλεπίπεδο με έξι πλευρές (Σχήμα 4.17) που μπορεί να ορισθεί με τις έξι παραμέτρους που χρησιμοποιήθηκαν για τη μη συμμετρική πυραμίδα $(n_0, f_0, b_0, t_0, l_0, r_0)$ συν το διάνυσμα της κατεύθυνσης προβολής $\overrightarrow{\mathbf{DOP}}$.

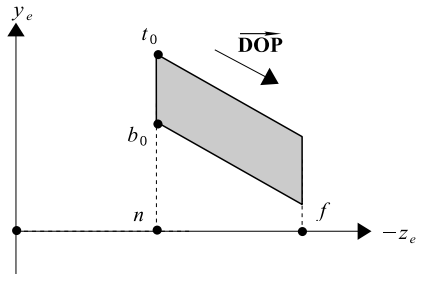
Αρχικά μεταφέρουμε το στερεό παρατήρησης ώστε το σημείο (l_0, b_0, n_0) να ταυτισθεί με το κέντρο του ΣΣΠ και στη συνέχεια εφαρμόζουμε στρέβλωση στο επίπεδο xy (βλέπε Εξίσωση (4.14)), ώστε το παραλληλεπίπεδο να γίνει ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Θεωρήστε το σημείο που ορίζεται από το κέντρο και το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathbf{DOP}} = [\mathrm{DOP}_x, \mathrm{DOP}_y, \mathrm{DOP}_z]^{\mathrm{T}}$. Η συντεταγμένη (DOP_y) πρέπει να «στρεβλωθεί» στο 0:

$$\mathrm{DOP}_y + B \cdot \mathrm{DOP}_z = 0,$$

που λύνοντας για τον παράγοντα στρέβλωσης στον y δίνει $B = -\frac{\mathrm{DOP}_y}{\mathrm{DOP}_z}$. Παρομοίως, ο παράγοντας στρέβλωσης στον x είναι $A = -\frac{\mathrm{DOP}_x}{\mathrm{DOP}_z}$. Ο απαιτούμενος μετασχηματισμός συνεπώς είναι:

$$\mathbf{SH_{PARALLEL}} \cdot \mathbf{T_{PARALLEL}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{\mathrm{DOP}_x}{\mathrm{DOP}_z} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\mathrm{DOP}_y}{\mathrm{DOP}_z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -l_0 \\ 0 & 1 & 0 & -b_0 \\ 0 & 0 & 1 & -n_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Σημειώστε ότι ο πίνακας $\mathbf{SH_{PARALLEL}}$ είναι σχεδόν ταυτόσημος με τον πίνακα της πλάγιας προβολής $\mathbf{P_{OBLIQUE}}$ (Εξίσωση (4.6)), με τη διαφορά ότι διατηρεί την συντεταγμένη z. Τα όρια αποκοπής πρέπει να μεταβληθούν ώστε να ανταποκρίνονται στο



Σχήμα 4.17: *Στερεό παρατήρησης παράλληλης προβολής (yz όψη).*

νέο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο:

$$\begin{aligned} n &= 0, \\ f &= f_0 - n_0, \\ l &= 0, \\ r &= r_0 - l_0, \\ b &= 0, \\ t &= t_0 - b_0. \end{aligned}$$

Ο μετασχηματισμός συμμετρίας $\mathbf{SH}_{\mathbf{PARALLEL}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{PARALLEL}}$ πρέπει να προηγηθεί του $\mathbf{M}^{\mathbf{ORTHO}}_{\mathbf{ECS}\rightarrow\mathbf{CSS}}$ και η απεικόνιση ΣΣΠ → ΚΧΟ στην περίπτωση της γενικής παράλληλης προβολής είναι:

$$\mathbf{M}^{\mathbf{PARALLEL}}_{\mathbf{ECS}\rightarrow\mathbf{CSS}} = \mathbf{M}^{\mathbf{ORTHO}}_{\mathbf{ECS}\rightarrow\mathbf{CSS}} \cdot \mathbf{SH}_{\mathbf{PARALLEL}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{PARALLEL}}.$$

4.6 Περικοπή στο οπτικό πεδίο και μετασχηματισμός παρατήρησης

Όπως αναφέρθηκε στην Ενότητα 5.3, η περικοπή στο οπτικό πεδίο υλοποιείται με αλγόριθμους 3Δ αποκοπής. Ο μετασχηματισμός παρατήρησης ορίζει τα 3Δ όρια αποκοπής. Η αποκοπή λαμβάνει χώρα στον ΚΧΟ, μετά την εφαρμογή του $\mathbf{M}^{\mathbf{PERSP}}_{\mathbf{ECS}\rightarrow\mathbf{CSS}}$ ή του $\mathbf{M}^{\mathbf{ORTHO}}_{\mathbf{ECS}\rightarrow\mathbf{CSS}}$, αντίστοιχα, αλλά πριν τη διαίρεση με το w στον πρώτο. Συνεπώς τα όρια αποκοπής για την προοπτική προβολή είναι:

$$-w \leq x, y, z \leq w$$

ενώ για την ορθογραφική ή την παράλληλη προβολή είναι:

$$-1 \leq x, y, z \leq 1.$$

Μια λογική ερώτηση είναι «γιατί να γίνει η περικοπή στο οπτικό πεδίο με αποκοπή στις 3Δ και όχι στις 2Δ, αφού απορριφθεί η συντεταγμένη z;» Υπάρχουν σημαντικοί λόγοι για να γίνεται η αποκοπή 3Δ αντικειμένων στις 3Δ και όχι στις 2Δ. Πρώτον, στην περίπτωση της προοπτικής προβολής, μετά την απόρριψη της συντεταγμένης z δεν υπάρχει αρκετή πληροφορία για την αποκοπή αντικειμένων που βρίσκονται πίσω από το κέντρο προβολής **E**, και τα οποία θα εμφανίζονταν ανάποδα στο επίπεδο προβολής. Δεύτερον, και πάλι στην προοπτική προβολή, αποφεύγουμε τη διαίρεση με το 0 (για σημεία με $z_e = 0$), εφόσον το έμπροσθεν επίπεδο αποκοπής τοποθετηθεί κατάλληλα, ενώ αποφεύγουμε επίσης και το κόστος της προοπτικής διαίρεσης για σημεία που αποκόπτονται. Τρίτον, ο συνδυασμός του έμπροσθεν και του όπισθεν επιπέδου αποκοπής περιορίζει το διάστημα βάθους και επιτρέπει την ιδανική αξιοποίηση της ακρίβειας του καταχωρητή βάθους. Για το λόγο αυτό, πρέπει να επιλέγουμε το μικρότερο δυνατό

διάστημα βάθους στο στερεό παρατήρησης.

Οι αλγόριθμοι 2Δ αποκοπής του Κεφαλαίου 2 γενικεύονται εύκολα στις 3Δ, όπως περιγράφεται στο Κεφάλαιο 5.

4.7 Ο μετασχηματισμός πεδίου παράστασης

Το *πεδίο παράστασης* είναι το ορθογώνιο τμήμα της οθόνης όπου απεικονίζονται τα περιεχόμενα του στερεού παρατήρησης και μπορεί να καταλαμβάνει και ολόκληρη την οθόνη. Ένα πεδίο παράστασης συνήθως ορίζεται από την κάτω-αριστερή και την πάνω-δεξιά κορυφή του $[x_{\min}, y_{\min}]^{\mathrm{T}}$ και $[x_{\max}, y_{\max}]^{\mathrm{T}}$ σε συντεταγμένες εικονοστοιχείων, ή για τη διατήρηση της συντεταγμένης z, $[x_{\min}, y_{\min}, z_{\min}]^{\mathrm{T}}$ και $[x_{\max}, y_{\max}, z_{\max}]^{\mathrm{T}}$. Ο *μετασχηματισμός πεδίου παράστασης* μετατρέπει αντικείμενα από τον ΚΧΟ στο σύστημα συντεταμένων παραθύρου (ΣΣΘ)[5]. Περιλαμβάνει μια αλλαγή κλίμακας και μια μεταφορά:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^{\mathbf{VIEWPORT}}_{\mathbf{CSS\to VCS}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{x_{\min}+x_{\max}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{y_{\min}+y_{\max}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{z_{\min}+z_{\max}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{x_{\max}-x_{\min}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y_{\max}-y_{\min}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z_{\max}-z_{\min}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{x_{\max}-x_{\min}}{2} & 0 & 0 & \frac{x_{\min}+x_{\max}}{2} \\ 0 & \frac{y_{\max}-y_{\min}}{2} & 0 & \frac{y_{\min}+y_{\max}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{z_{\max}-z_{\min}}{2} & \frac{z_{\min}+z_{\max}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Αυτό είναι γενίκευση του 2Δ μετασχηματισμού παράστασης (βλέπε Παράδειγμα 3.8). Σημειώνουμε ότι η συντεταγμένη z διατηρείται από τον μετασχηματισμό παράστασης για χρήση σε αλγορίθμους χώρου οθόνης, όπως ο αλγόριθμος Z-buffer (βλέπε Ενότητα 5.5.1).

Αφού όλα τα περιεχόμενα του στερεού παρατήρησης εμφανίζονται στο πεδίο παράστασης, το μέγεθος του τελευταίου ορίζει το τελικό μέγεθος των αντικειμένων στην οθόνη. Η επιλογή ενός μεγάλου πεδίου παράστασης (π.χ. ολόκληρη η οθόνη) θα μεγαλώσει τα αντικείμενα ενώ ένα μικρό πεδίο παράστασης θα τα μικρύνει.

4.8 Ασκήσεις

1. Βρείτε τον πίνακα προοπτικής προβολής όταν το επίπεδο προβολής είναι το xy και το κέντρο προβολής είναι πάνω στον άξονα z σε απόσταση d από το κέντρο συντεταγμένων.

[5] Η συντομογραφία είναι ΣΣΘ αντί ΣΣΠ, καθώς το τελευταίο χρησιμοποιείται ήδη για το σύστημα συντεταγμένων παρατηρητή.

2. Βρείτε τον πίνακα προοπτικής προβολής όταν το επίπεδο προβολής είναι το $z = -5$ και το κέντρο προβολής είναι το $[0, 0, 7]^{\mathrm{T}}$.

3. Χρησιμοποιήστε οποιονδήποτε πίνακα προοπτικής προβολής για τον υπολογισμό της προβολής ενός απλού αντικειμένου (π.χ. τριγώνου) που βρίσκεται «πίσω» από τον παρατηρητή, έχοντας ονομάσει τις κορυφές του. Μπορείτε συνεπώς να δώσετε έναν σημαντικό λόγο για να γίνεται η περικοπή στο οπτικό πεδίο (αποκοπή) *πριν* την προβολή;

4. Αποδείξτε ότι $\overrightarrow{\mathbf{DOP}} = [\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta]^{\mathrm{T}}$ στο Παράδειγμα 4.3.

5. Δύο σημαντικές περιπτώσεις πλάγιας προβολής σε σχεδιαστικές εφαρμογές είναι οι *Cavalier* και *Cabinet*. Αυτές αντιστοιχούν σε γωνίες ύψους $\theta = 45°$ και $\theta = 63°$ (βλέπε Παράδειγμα 4.3). Βρείτε τις αντίστοιχες προβολές του μοναδιαίου κύβου στο επίπεδο xy, χρησιμοποιώντας γωνία αζιμούθιου της επιλογής σας. Μετρήστε έτσι τα μήκη των προβολών των ακμών του κύβου που αρχικά ήταν κάθετες στο επίπεδο xy. Τι παρατηρείτε;

6. Γράψτε ένα απλό πρόγραμμα που να επιτρέπει στο χρήστη την διαδραστική περιστροφή του μοναδιαίου κύβου γύρω από τους άξονες x, y ή z. Χρησιμοποιήστε τρία παράθυρα για την απεικόνιση μιας προοπτικής προβολής καθώς και πλάγιων προβολών *Cavalier* και *Cabinet* (δείτε προηγούμενη άσκηση).

7. Γράψτε ένα απλό πρόγραμμα που να επιτρέπει στο χρήστη τον πειραματισμό με τον μετασχηματισμό παρατήρησης με χρήση προοπτικής προβολής. Συγκεκριμένα, ο χρήστης πρέπει να μπορεί να αλλάζει διαδραστικά τα θ, aspect, n και f σε μια σκηνή της επιλογής σας. *Σημείωση*: θα πρέπει να συμπεριλάβετε έναν 3Δ αλγόριθμο αποκοπής.

5

Περικοπή και Απομάκρυνση Κρυμμένων Επιφανειών

...οι επιστρώσεις χρώματος προχωρούσαν... από το ακούραστο χέρι του ζωγράφου. Το αρχικό σχέδιο φαινόταν μόνο στα άκρα. Σιγά-σιγά εξαφανίστηκε τελείως.
—Arnulf Rainer

5.1 Εισαγωγή

Ο κόσμος μας αποτελείται από ένα τεράστιο πλήθος αντικειμένων. Ανά πάσα στιγμή, μπορούμε να δούμε μόνον ένα πολύ μικρό ποσοστό των αντικειμένων αυτών, λόγω περιορισμών του οπτικού μας πεδίου καθώς και παρεμπόδισης μεταξύ των αντικειμένων. Για παράδειγμα, αν είμαστε μέσα σε ένα δωμάτιο δεν βλέπουμε αντικείμενα πίσω από τους τοίχους καθώς παρεμποδίζονται από τους ίδιους τους τοίχους. Επίσης δεν βλέπουμε αντικείμενα που βρίσκονται πίσω μας αφού είναι εκτός του οπτικού μας πεδίου. Σε αναλογία, ένας τυπικός συνθετικός κόσμος αποτελείται από μεγάλο αριθμό στοιχειωδών αντικειμένων, αλλά το ποσοστό αυτών που σχετίζονται με τη δημιουργία ενός συγκεκριμένου καρέ είναι πολύ μικρό.

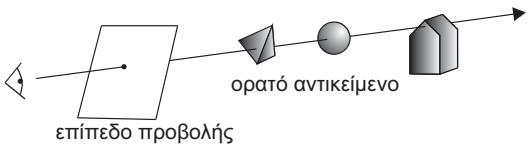
Οι αλγόριθμοι *περικοπής* απομακρύνουν στοιχειώδη αντικείμενα που είναι άσχετα με τη δημιουργία του τρέχοντος καρέ επειδή

- βρίσκονται εκτός του οπτικού πεδίου (*περικοπή στο οπτικό πεδίο*),
- παρεμποδίζονται από άλλα αντικείμενα (*περικοπή παρεμποδιζομένων*),
- παρεμποδίζονται από έμπροσθεν όψεις του ίδιου αντικειμένου (*περικοπή πίσω όψεων*).[1]

Η περικοπή στο οπτικό πεδίο απομακρύνει αντικείμενα που είναι εκτός του οπτικού πεδίου και υλοποιείται με αλγορίθμους 3Δ αποκοπής.

Η περικοπή πίσω όψεων απομακρύνει πολύγωνα που δεν έχουν προσανατολισμό προς το σημείο παρατήρησης, και συνεπώς δεν είναι ορατά, αφού παρεμποδίζονται

[1] Αυτό θεωρείται ειδική περίπτωση επειδή υπάρχει μια πολύ αποτελεσματική μέθοδος για την αντιμετώπισή του.



Σχήμα 5.1: *Το πρόβλημα της παρεμπόδισης.*

από έμπροσθεν όψεις του ίδιου αντικειμένου. Αυτό επιτυγχάνεται με έναν απλό έλεγχο του κανονικού τους διανύσματος.

Το πρόβλημα της *παρεμπόδισης* (ή *ορατότητας*) αναφέρεται στην εύρεση του ορατού αντικειμένου σε κάθε τμήμα της εικόνας. Μπορεί να λυθεί υπολογίζοντας το πρώτο αντικείμενο που τέμνεται από κάθε σχετική ακτίνα[2] που πηγάζει από το σημείο παρατήρησης[3] (Σχήμα 5.1).

Χωρίς τη λύση του προβλήματος της παρεμπόδισης δεν είναι δυνατόν να δημιουργηθούν σωστές συνθετικές εικόνες. Δεν εκπλήσει λοιπόν το γεγονός ότι ήταν ένα από τα πρώτα προβλήματα που μελετήθηκαν από τον κοινότητα των Γραφικών [Appe68, Suth74b]. Θεωρητικά, το πρόβλημα της παρεμπόδισης θεωρείται σήμερα λυμένο και ένα πλήθος αλγορίθμων *απομάκρυνσης κρυμμένων επιφανειών* (ΑΚΕ) έχουν προταθεί. Οι αλγόριθμοι ΑΚΕ ταξινομούν τα στοιχειώδη σχήματα (π.χ. πολύγωνα), έμμεσα ή άμεσα. Η ταξινόμηση γίνεται στη διάσταση του βάθους z, καθώς η ορατότητα εξαρτάται από την σειρά στο βάθος. Η ταξινόμηση στις διαστάσεις x και y μπορεί να μειώσει το μέγεθος της έργου ταξινόμησης στον z, καθώς στοιχειώδη αντικείμενα που δεν επικαλύπτονται στον x ή στον y δεν είναι δυνατόν να παρεμποδίζουν το ένα το άλλο.

Οι αλγόριθμοι ΑΚΕ κατηγοριοποιούνται, σύμφωνα με τον χώρο στον οποίο λειτουργούν, ως αλγόριθμοι *χώρου αντικειμένων* ή αλγόριθμοι *χώρου εικόνας*. Οι αλγόριθμοι χώρου αντικειμένων λειτουργούν στο ΣΣΠ (πριν την προοπτική προβολή) ενώ οι αλγόριθμοι χώρου εικόνας στον ΚΧΟ (μετά την προοπτική προβολή)[4], βλέπε Κεφάλαιο 4.

Η γενική μορφή ενός αλγορίθμου ΑΚΕ χώρου αντικειμένων είναι:

```
για κάθε στοιχειώδες αντικείμενο
    εύρεση ορατού τμήματός του
        (συγκρίνοντάς το με τα υπόλοιπα στοιχ. αντικείμενα)
    εμφάνιση ορατού τμήματος
```

ο οποίος έχει πολυπλοκότητα $O(P^2)$ όπου P το πλήθος των στοιχειωδών αντικειμένων. Η γενική μορφή ενός αλγορίθμου ΑΚΕ χώρου εικόνας είναι:

```
για κάθε εικονοστοιχείο
    εύρεση του πλησιέστερου στοιχειώδους αντικείμενο Π
    καταχώρηση χρώματος Π στο εικονοστοιχείο
```

[2]Ακτίνα είναι μια ημι-ευθεία που ορίζεται από ένα σημείο και ένα διάνυσμα.

[3]Υποθέτουμε μη διαφανή αντικείμενα.

[4]Σημειώνουμε ότι ο λόγος για τη διατήρηση της συντεταγμένης z μετά την προβολή είναι η ΑΚΕ (βλέπε Ενότητα 5.5).

ο οποίος έχει πολυπλοκότητα $O(pP)$ όπου p το πλήθος των εικονοστοιχείων της οθόνης.[5] Από νωρίς στην ιστορία των Γραφικών, οι αλγόριθμοι ΑΚΕ αναγνωρίστηκε ότι καθορίζουν τη ροή της σωλήνωσης γραφικών. Για το λόγο αυτό αναπτύχθηκαν αρχιτεκτονικές ειδικού σκοπού, που στηρίζονταν κυρίως στην παράλληλη επεξεργασία [Deer88, Fuch85, Theo89a]. Η εμπειρία αυτή μεταβιβάστηκε κατόπιν στους επεξεργαστές γραφικών.

Εφαρμογές βασιζόμενες σε διαδραστικές περιηγήσεις πολύπλοκων σκηνών, όπως παιχνίδια και ανακατασκευές χώρων, έκαναν το υπολογιστικό κόστος των αλγορίθμων ΑΚΕ δυσβάσταχτο ακόμα και με υποστήριξη από επεξεργαστές γραφικών. Παρατηρήθηκε ότι μεγάλα πλήθη στοιχειωδών αντικειμένων μπορούν εύκολα να απομακρυνθούν, χωρίς τους υπολογιστικά ακριβούς υπολογισμούς των αλγορίθμων ΑΚΕ, απλά επειδή αποκρύπτονται από κάποιο μεγάλο αντικείμενο. Έτσι αναπτύχθηκαν οι αλγόριθμοι *περικοπής παρεμποδιζομένων*.

Η περικοπή πίσω όψεων απομακρύνει περίπου τα μισά στοιχειώδη αντικείμενα (τις πίσω όψεις) με ένα απλό έλεγχο, με συνολικό κόστος $O(P)$ όπου P το πλήθος των στοιχειωδών αντικειμένων. Η περικοπή στο οπτικό πεδίο απομακρύνει από τα εναπομένοντα στοιχειώδη αντικείμενα αυτά που βρίσκονται εκτός του οπτικού πεδίου (δηλαδή τα περισσότερα από αυτά) με κόστος $O(Pv)$, όπου v το μέσο πλήθος κορυφών ανά στοιχειώδες αντικείμενο[6]. Η περικοπή παρεμποδιζομένων έχει επίσης κόστος $O(P)$ με τους συνήθεις αλγορίθμους. Η ροή καθορίζεται λοιπόν από τους αλγορίθμους ΑΚΕ που έχουν κόστος $O(P^2)$ ή $O(pP)$ ανάλογα με το είδος του αλγορίθμου —όπως αναφέρεται παραπάνω— όπου p το πλήθος των εικονοστοιχείων της οθόνης. Για το λόγο αυτό χρειάζεται να δοθεί έμφαση στα στάδια περικοπής που προηγούνται της ΑΚΕ.

5.2 Περικοπή πίσω όψεων

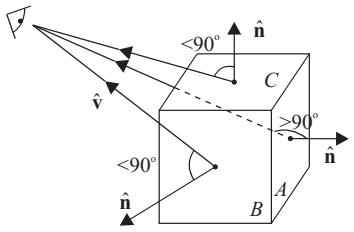
Έστω μια αδιαφανής σφαίρα, η επιφάνεια της οποίας παριστάνεται από έναν αριθμό μικρών πολυγώνων. Μόνο τα μισά περίπου από τα πολύγωνα αυτά θα είναι ορατά, ανεξάρτητα από την οπτική γωνία, και συγκεκριμένα αυτά που βρίσκονται εντός του ημισφαιρίου που είναι προσανατολισμένο προς το σημείο παρατήρησης. Αν τα μοντέλα μας είναι κατασκευασμένα έτσι, ώστε οι πίσω όψεις τους να μην είναι ποτέ ορατές, μπορούμε εύκολα να περικόψουμε αυτές τις *πίσω όψεις*, ως προς τον παρατηρητή.

Οι απαραίτητοι περιορισμοί στα στερεά μοντέλα ώστε να μην είναι ορατές οι πίσω όψεις είναι να απαρτίζονται από επιφάνειες χωρίς σύνορο, να είναι 2Δ πολλαπλότητες (manifolds) και να μην έχουν διαφάνεια. Σημειώνουμε ότι δεν είναι απαραίτητο να είναι κυρτά. Τα συνήθη μοντέλα (π.χ. αυτά που χρησιμοποιούνται στα 3Δ παιχνίδια και σε σχεδιαστικές εφαρμογές) ικανοποιούν τους παραπάνω περιορισμούς.

Οι πίσω όψεις (πολύγωνα) μπορούν να ανιχνευθούν υπολογίζοντας τη γωνία που

[5] Όπως θα φανεί παρακάτω στο κεφάλαιο αυτό, οι παραπάνω εκφράσεις πολυπλοκότητας μπορούν να βελτιστοποιηθούν.

[6] Καθώς το v είναι συνήθως ίσο με 3 (τρίγωνα), η περικοπή στο οπτικό πεδίο μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει κόστος $O(P)$.



Σχήμα 5.2: *Ανιχνεύοντας τις πίσω όψεις ενός κύβου.*

σχηματίζει το κανονικό διάνυσμά τους $\hat{\mathbf{n}}$ (που έχει φορά προς το εξωτερικό του στερεού αντικειμένου) με το διάνυσμα παρατήρησης $\hat{\mathbf{v}}$. Αν η γωνία αυτή είναι μεγαλύτερη από 90°, τότε το πολύγωνο είναι πίσω όψη. Στο Σχήμα 5.2, το A είναι πίσω όψη ενώ τα B και C δεν είναι. Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων, ο έλεγχος πίσω όψεων γίνεται:

$$\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}} < 0. \tag{5.1}$$

Τα διανύσματα $\hat{\mathbf{n}}$ και $\hat{\mathbf{v}}$ μπορούν να υπολογισθούν όπως δείχνεται στην Ενότητα 12.5. Η περικοπή πίσω όψεων είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική καθώς απομακρύνει περίπου το 50% των πολυγώνων.

Καθώς, τόσο το βήμα ελέγχου της περικοπής πίσω όψεων, όσο και ο υπολογισμός των δύο διανυσμάτων απαιτούν σταθερό χρόνο, το κόστος της περικοπής πίσω όψεων είναι ανάλογο του πλήθους των πολυγώνων $O(P)$.

5.3 Περικοπή στο οπτικό πεδίο

Ο μετασχηματισμός παρατήρησης του Κεφαλαίου 4 ορίζει το οπτικό πεδίο του παρατηρητή[7]. Αυτό συνήθως περιορίζεται από μια ελάχιστη και μια μέγιστη τιμή βάθους[8], ορίζοντας έτσι το τριδιάστατο *στερεό παρατήρησης*. Ανάλογα με το είδος προβολής, το στερεό παρατήρησης παίρνει τη μορφή κόλουρης πυραμίδας ή ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Στόχος της περικοπής στο οπτικό πεδίο είναι η απομάκρυνση εκείνων των στοιχειωδών αντικειμένων, ή τμημάτων τους, που βρίσκονται εκτός του στερεού παρατήρησης και είναι συνεπώς άσχετα με την τρέχουσα οπτική γωνία. Όπως περιγράφηκε στην Ενότητα 4.6, η περικοπή στο οπτικό πεδίο πρέπει να γίνει μετά τον μετασχηματισμό από το ΣΣΠ στον ΚΧΟ (δηλαδή μετά την εφαρμογή του πίνακα $\mathbf{M}^{\mathbf{PERSP}}_{\mathbf{ECS}\rightarrow\mathbf{CSS}}$ ή του πίνακα $\mathbf{M}^{\mathbf{ORTHO}}_{\mathbf{ECS}\rightarrow\mathbf{CSS}}$), αλλά πρίν τη διαίρεση με το w στην περίπτωση της προοπτικής προβολής. Με άλλα λόγια, η περικοπή στο οπτικό πεδίο πρέπει να γίνει στις 3Δ για τους λόγους που αναφέρθηκαν στην Ενότητα 4.6.

[7] Συνήθως υποτίθεται ότι ο παρατηρητής είναι μονόφθαλμος. Για στερεοσκοπική όραση, μπορούν να χρησιμοποιηθούν δύο ξεχωριστά οπτικά πεδία.

[8] Οι περιορισμοί βάθους τίθενται για λόγους υπολογιστικής αποτελεσματικότητας και αριθμητικής ακρίβειας.

Η περικοπή στο οπτικό πεδίο υλοποιείται με επέκταση των 2Δ αλγορίθμων αποκοπής της Ενότητας 2.9 στις 3Δ. Τα στοιχειώδη αντικείμενα προς αποκοπή μπορεί να είναι σημεία, ευθύγραμμα τμήματα ή πολύγωνα, όπως και στην αποκοπή στις 2Δ. Η αποκοπή σημείων είναι τετριμμένη. Τόσο η αποκοπή ευθύγραμμων τμημάτων όσο και η αποκοπή πολυγώνων βασίζονται στο υπολογισμό της τομής ενός ευθυγράμμου τμήματος με τα επίπεδα που ορίζει το αντικείμενο αποκοπής.

Στις 3Δ το εσωτερικό του αντικειμένου αποκοπής μπορεί να ορισθεί ως:

$$\begin{aligned} x_{\min} \le x \le x_{\max}, \\ y_{\min} \le y \le y_{\max}, \\ z_{\min} \le z \le z_{\max}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Στην περίπτωση της ορθογραφικής ή της παράλληλης προβολής χρησιμοποιούμε τον πίνακα $\mathbf{M}^{\mathbf{ORTHO}}_{\mathbf{ECS}\rightarrow\mathbf{CSS}}$ της Ενότητας 4.4.2 ο οποίος απεικονίζει τα επίπεδα αποκοπής στο -1 και στο 1 έτσι ώστε:

$$x_{\min} = y_{\min} = z_{\min} = -1$$

και

$$x_{\max} = y_{\max} = z_{\max} = 1.$$

Στην περίπτωση της προοπτικής προβολής, ο πίνακας $\mathbf{M}^{\mathbf{PERSP}}_{\mathbf{ECS}\rightarrow\mathbf{CSS}}$ της Ενότητας 4.4.2 (πριν τη διαίρεση με το w) απεικονίζει τα επίπεδα αποκοπής στο $-w$ και στο w έτσι ώστε:

$$x_{\min} = y_{\min} = z_{\min} = -w$$

και

$$x_{\max} = y_{\max} = z_{\max} = w.$$

Η τιμή του w δεν είναι σταθερή αφού ισούται με τη ΣΣΠ συντεταγμένη z_e κάθε σημείου. Η αποκοπή ως προς την ομογενή συντεταγμένη w ονομάζεται *αποκοπή σε ομογενείς συντεταγμένες*.

Για ένα παραμετρικά ορισμένο ευθύγραμμο τμήμα $\mathbf{l}(t) = (1-t)\mathbf{p_1} + t\mathbf{p_2}$ από το $\mathbf{p_1} = [x_1, y_1, z_1, w_1]^{\mathrm{T}}$ στο $\mathbf{p_2} = [x_2, y_2, z_2, w_2]^{\mathrm{T}}$, η τιμή του w μπορεί να παρεμβληθεί γραμμικά $(1-t)w_1 + tw_2$. Έτσι οι ανισότητες (5.2) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ορίσουν το μέρος του ευθύγραμμου τμήματος που βρίσκεται εντός του αντικειμένου αποκοπής:

$$\begin{aligned} -\big((1-t)w_1 + tw_2\big) \le (1-t)x_1 + tx_2 \le (1-t)w_1 + tw_2, \\ -\big((1-t)w_1 + tw_2\big) \le (1-t)y_1 + ty_2 \le (1-t)w_1 + tw_2, \\ -\big((1-t)w_1 + tw_2\big) \le (1-t)z_1 + tz_2 \le (1-t)w_1 + tw_2, \end{aligned} \tag{5.3}$$

και οι 6 τομές της ευθείας που ορίζεται από το ευθύγραμμο τμήμα με τα επίπεδα του αντικειμένου αποκοπής βρίσκονται λύνοντας τις σχέσεις (5.3), σαν ανισότητες, για

την τιμή του t:

$$\begin{aligned}
\text{αριστερό: } t &= \frac{x_1 + w_1}{(x_1 - x_2) + (w_1 - w_2)},\\
\text{δεξί: } t &= \frac{x_1 - w_1}{(x_1 - x_2) + (w_2 - w_1)},\\
\text{κάτω: } t &= \frac{y_1 + w_1}{(y_1 - y_2) + (w_1 - w_2)},\\
\text{πάνω: } t &= \frac{y_1 - w_1}{(y_1 - y_2) + (w_2 - w_1)},\\
\text{έμπροσθεν: } t &= \frac{z_1 + w_1}{(z_1 - z_2) + (w_1 - w_2)},\\
\text{όπισθεν: } t &= \frac{z_1 - w_1}{(z_1 - z_2) + (w_2 - w_1)}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

5.3.1 3Δ αλγόριθμοι αποκοπής

Οι περισσότεροι αλγόριθμοι αποκοπής επεκτείνονται εύκολα στις 3Δ γενικεύοντας

- τον υπολογισμό τομής,
- τον έλεγχο εσωτερικού/εξωτερικού σημείου.

Οι αλγόριθμοι αποκοπής ουσιαστικά υπολογίζουν την τομή του αντικειμένου αποκοπής και του αποκοπτόμενου αντικειμένου, οπότε για να μεταβούμε από τις 2Δ στις 3Δ αντικαθιστούμε το 2Δ με το 3Δ αντικείμενο αποκοπής (που είναι το στερεό παρατήρησης). Στις 3Δ θα εξετάσουμε τους αλγορίθμους αποκοπής ευθύγραμμων τμημάτων Cohen–Sutherland και Liang–Barsky [Lian84] καθώς και τον αλγόριθμο αποκοπής πολυγώνων Sutherland–Hodgman [Suth74a].

3Δ αλγόριθμος αποκοπής ευθειών Cohen–Sutherland.

Καταρχήν μελετήστε τον 2Δ αλγόριθμο Cohen–Sutherland (CS) της Ενότητας 2.9.2. Στις 3Δ, έξι ψηφία κωδικοποιούν τις 27 διαμερίσεις του 3Δ χώρου που ορίζονται από τα επίπεδα του στερεού παρατήρησης. Η σημασία των ψηφίων αυτών είναι (βλέπε ανισότητες (5.2)):

Πρώτο ψηφίο. Τίθεται 1 αν $z > z_{\max}$, διαφορετικά 0

Δεύτερο ψηφίο. Τίθεται 1 αν $z < z_{\min}$, διαφορετικά 0

Τρίτο ψηφίο. Τίθεται 1 αν $y > y_{\max}$, διαφορετικά 0

Τέταρτο ψηφίο. Τίθεται 1 αν $y < y_{\min}$, διαφορετικά 0

Πέμπτο ψηφίο. Τίθεται 1 αν $x > x_{\max}$, διαφορετικά 0

Έκτο ψηφίο. Τίθεται 1 αν $x < x_{\min}$, διαφορετικά 0.

Ένας τέτοιος εξαψήφιος κωδικός χαρακτηρίζει κάθε 3Δ σημείο και παίρνει τιμή ανάλογα με την υποδιαίρεση του 3Δ χώρου στην οποία κείται το σημείο. Έστω $c1$ και $c2$ οι εξαψήφιοι κωδικοί των άκρων $\mathbf{p_1}$ και $\mathbf{p_2}$ ενός ευθυγράμμου τμήματος. Τότε ο φθηνός έλεγχος που προσδιορίζει ότι το ευθύγραμμο τμήμα είναι ολόκληρο εντός είναι $c1 \vee c2 = 000000$, ενώ ο αντίστοιχος έλεγχος για εκτός είναι $c1 \wedge c2 \neq 000000$, όπου $\vee$ και $\wedge$ οι λογικοί τελεστές διάζευξης και σύζευξης ψηφίο-προς-ψηφίο αντίστοιχα. Ακολουθεί ο ψευδοκώδικας του 3Δ αλγόριθμου αποκοπής CS:

```
CS_Clip_3D ( vertex p1, p2 );  {
    int c1, c2;
    vertex i;
    plane R;

    c1=mkcode (p1);
    c2=mkcode (p2);
    if ((c1 | c2) == 0)         /* p1p2 εντός */
    else if ((c1 & c2) != 0)    /* p1p2 εκτός */
    else    {
        R = επίπεδο στερεού παρατήρησης με (ψηφίο c1 != ψηφίο c2)
        i = intersect_plane_line (R, (p1,p2));
        if outside (R, p1)  CS_Clip_3D(i, p2);
        else                CS_Clip_3D(p1, i);
    }
}
```

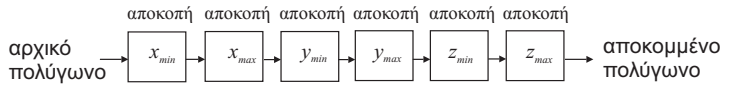
Αυτός διαφέρει από τον 2Δ αλγόριθμο CS ως προς τον υπολογισμό τομής και τον έλεγχο εξωτερικού σημείου. Χρησιμοποιείται ένας 3Δ αλγόριθμος τομής επιπέδου-ευθείας (αντί για έναν 2Δ αλγόριθμο τομής ευθείας-ευθείας). Σημειώστε ότι στον ψευδοκώδικα δεν δώσαμε τα όρια αποκοπής: στην περίπτωση της ορθογραφικής ή της παράλληλης προβολής αυτά είναι σταθερά επίπεδα (π.χ. $x = -1$) και χρησιμοποιούνται οι τομές επιπέδου-ευθείας του Παραρτήματος Γ, ενώ στην περίπτωση της προοπτικής προβολής και των ομογενών συντεταγμένων χρησιμοποιούνται οι τομές επιπέδου-ευθείας των Εξισώσεων (5.4). Ο έλεγχος εξωτερικού σημείου μπορεί να υλοποιηθεί εξετάζοντας το πρόσημο της τιμής της εξίσωσης του επιπέδου R για τις συντεταγμένες του $\mathbf{p_1}$.

3Δ αλγόριθμος αποκοπής ευθειών Liang–Barsky.

Καταρχήν μελετήστε τον 2Δ αλγόριθμο Liang–Barsky (LB) [Lian84] της Ενότητας 2.9.2. Το ευθύγραμμο τμήμα προς αποκοπή ορίζεται παραμετρικά από το αρχικό και το τελικό σημείο του $\mathbf{p_1}$ και $\mathbf{p_2}$, όπως παραπάνω.

Στην περίπτωση της ορθογραφικής ή παράλληλης προβολής, το αντικείμενο αποκοπής είναι ένας κύβος και οι υπολογισμοί του LB επεκτείνονται εύκολα στις 3Δ προσθέτοντας απλά μια τρίτη ανισότητα για την συντεταγμένη z:

$$z_{\min} \leq z_1 + t\Delta z \leq z_{\max}.$$



Σχήμα 5.3: *3Δ αλγόριθμος αποκοπής πολυγώνων Sutherland–Hodgman.*

Ο υπόλοιπος αλγόριθμος LB παραμένει όπως και στη 2Δ περίπτωση.

Στην περίπτωση της ορθογραφικής προβολής και των ομογενών συντεταγμένων, μπορούμε να ξαναγράψουμε τις ανισότητες (5.3), που ορίζουν το μέρος του παραμετρικού ευθύγραμμου τμήματος που βρίσκεται εντός του αντικειμένου αποκοπής ως εξής:

$$-(w_1 + t\Delta w) \le x_1 + t\Delta x \le w_1 + t\Delta w,$$
$$-(w_1 + t\Delta w) \le y_1 + t\Delta y \le w_1 + t\Delta w,$$
$$-(w_1 + t\Delta w) \le z_1 + t\Delta z \le w_1 + t\Delta w,$$

όπου $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$, και $\Delta w = w_2 - w_1$. Αυτές οι ανισότητες έχουν την κοινή μορφή $tp_i \le q_i$ για $i = 1, 2, ..6$, όπου:

$$\begin{aligned}
p_1 &= -\Delta x - \Delta w, & q_1 &= x_1 + w_1,\\
p_2 &= \Delta x - \Delta w, & q_2 &= w_1 - x_1,\\
p_3 &= -\Delta y - \Delta w, & q_3 &= y_1 + w_1,\\
p_4 &= \Delta y - \Delta w, & q_4 &= w_1 - y_1,\\
p_5 &= -\Delta z - \Delta w, & q_5 &= z_1 + w_1,\\
p_6 &= \Delta z - \Delta w, & q_6 &= w_1 - z_1.
\end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι οι λόγοι $\frac{q_i}{p_i}$ αντιστοιχούν στις παραμετρικές τιμές των σημείων τομής του ευθύγραμμου τμήματος με τα επίπεδα αποκοπής $i = 1, 2, ..6$ και ισοδυναμούν με τις Εξισώσεις (5.4). Ο υπόλοιπος αλγόριθμος LB παραμένει όπως και στις 2Δ.

3Δ αλγόριθμος αποκοπής πολυγώνων Sutherland–Hodgman.

Καταρχήν μελετήστε τον 2Δ αλγόριθμο Sutherland–Hodgman (SH) [Suth74a] της Ενότητας 2.9.3. Στις 3Δ το αντικείμενο αποκοπής πρέπει να είναι ένα κυρτό στερεό, το στερεό παρατήρησης, αντί για κυρτό πολύγωνο που είναι στις 2Δ. Ο αλγόριθμος SH αποτελείται από 6 στάδια σε σωλήνωση, ένα για κάθε όψη του στερεού παρατήρησης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.3[9].

Η λογική του αλγορίθμου παραμένει όπως και στην 2Δ περίπτωση. Οι βασικές διαφορές είναι:

Έλεγχος εσωτερικού σημείου. Ο έλεγχος εσωτερικού σημείου (`inside`) πρέπει να αλλάξει, ώστε να προσδιορίζει αν ένα σημείο είναι στον εσωτερικό ημι-χώρο ενός

[9] Ο αλγόριθμος SH μπορεί να εφαρμοσθεί για οποιοδήποτε άλλο κυρτό στερεό αντικείμενο αποκοπής: το πλήθος των σταδίων της σωλήνωσης είναι, τότε, ίσο με το πλήθος των επιπέδων που ορίζουν αυτό το κυρτό στερεό.

επιπέδου. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με εξέταση του προσήμου της τιμής της εξίσωσης του επιπέδου για τις συντεταγμένες του σημείου.

Υπολογισμός τομής. Το υποπρόγραμμα υπολογισμού τομής `intersect_lines` πρέπει να αντικατασταθεί από ένα υποπρόγραμμα `intersect_plane_line` που να υπολογίζει την τομή μιας ακμής του πολυγώνου με ένα επίπεδο του στερεού αντικειμένου αποκοπής. Ένας τέτοιος υπολογισμός τομής δίνεται στο Παράρτημα Γ, και συγκεκριμένα για προοπτική προβολή και ομογενείς συντεταγμένες μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι Εξισώσεις (5.4).

5.4 Περικοπή παρεμποδιζομένων

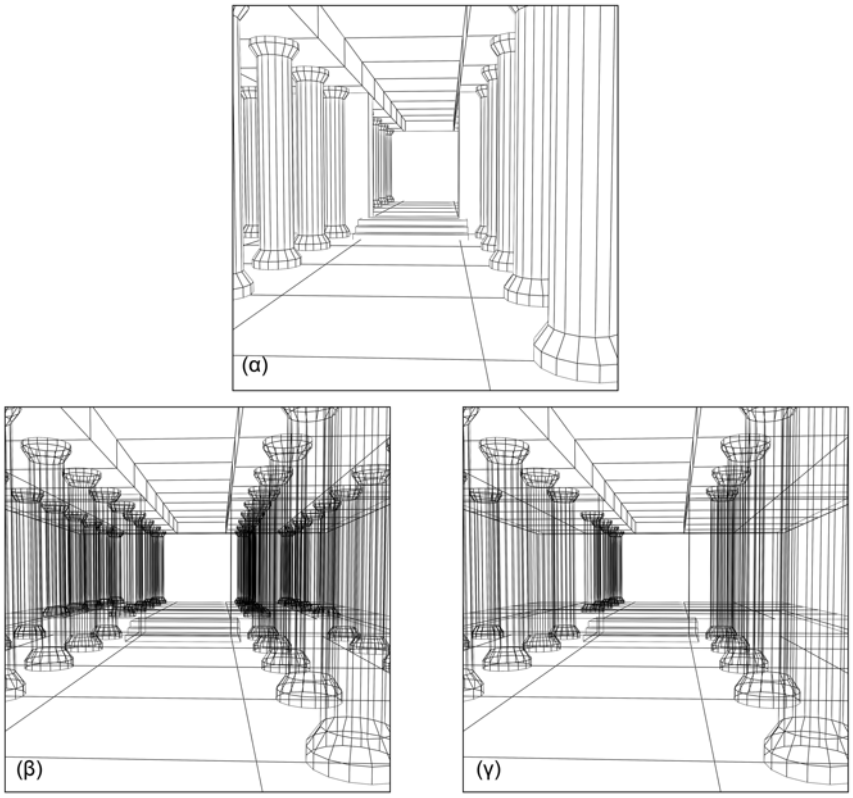
Σε μεγάλες σκηνές, μόνο ένα πολύ μικρό ποσοστό των αντικειμένων είναι ορατό από
μια τυχαία οπτική γωνία. Τα υπόλοιπα παρεμποδίζονται από άλλα αντικείμενα πλησιέστερα στον παρατηρητή (Σχήμα 5.4(β)). Η περικοπή παρεμποδιζομένων έχει σκοπό την *αποτελεσματική* απομάκρυνση μεγάλου πλήθους αντικειμένων, πριν τους υπολογιστικά ακριβούς αλγορίθμους απομάκρυνσης κρυμμένων επιφανειών (ΑΚΕ). Ας ορίσουμε το *σύνολο ορατών επιφανειών* ως το υποσύνολο των αντικειμένων που απεικονίζονται σε τουλάχιστον ένα εικονοστοιχείο της τελικής εικόνας (Σχήμα 5.4(α)). Ο στόχος των αλγορίθμων περικοπής παρεμποδιζομένων είναι ο υπολογισμός ενός εύκολα προσδιορίσιμου υπερσυνόλου των ορατών επιφανειών, έτσι, ώστε τα υπόλοιπα αντικείμενα να απομακρυνθούν. Αυτό το υπερσύνολο ονομάζεται *δυνητικά ορατό σύνολο* (ΔΟΣ ή PVS) [Aire91, CO03][10] (Σχήμα 5.4(γ)).

Οι αλγόριθμοι περικοπής παρεμποδιζομένων δεν ξοδεύουν χρόνο για τον ακριβή υπολογισμό των τμημάτων των στοιχειωδών αντικειμένων που είναι ορατά, πράγμα που κάνουν οι αλγόριθμοι ΑΚΕ. Αντίθετα, βρίσκουν ποια στοιχειώδη αντικείμενα είναι ολόκληρα *μη* ορατά και τα απομακρύνουν, προσδιορίζοντας έτσι το ΔΟΣ. Το ΔΟΣ στη συνέχεια γίνεται η είσοδος για τους αλγόριθμους ΑΚΕ οι οποίοι βρίσκουν την ακριβή λύση στο πρόβλημα της παρεμπόδισης (ή ορατότητας).

Ο στόχος πολυπλοκότητας των αλγορίθμων περικοπής παρεμποδιζομένων είναι να είναι ανάλογη προς το μέγεθος του ΔΟΣ. Στην πράξη όμως αυτή είναι συνήθως ανάλογη του πλήθους των δεδομένων εισόδου $O(P)$.

Υπάρχουν διάφορες ταξινομήσεις των αλγορίθμων περικοπής παρεμποδιζομένων, π.χ.
[CO03, Nire02]. Εδώ θα διακρίνουμε δύο κύριες κατηγορίες που πηγάζουν από τα πεδία εφαρμογής τους: *από-σημείο* και *από-περιοχή* . Οι πρώτοι λύνουν το πρόβλημα για *ένα* σημείο παρατήρησης και είναι καταλληλότεροι για γενικές σκηνές εξωτερικού χώρου, ενώ οι δεύτεροι το λύνουν για μια ολόκληρη περιοχή και είναι καταλληλότεροι για σκηνές εσωτερικού χώρου με μεγάλη πυκνότητα στοιχειωδών αντικειμένων. Οι

[10] Έχουν επίσης αναπτυχθεί αλγόριθμοι περικοπής παρεμποδιζομένων που υπολογίζουν *ακριβώς* το σύνολο ορατών επιφανειών, αλλά το υπολογιστικό τους κόστος είναι μεγάλο.



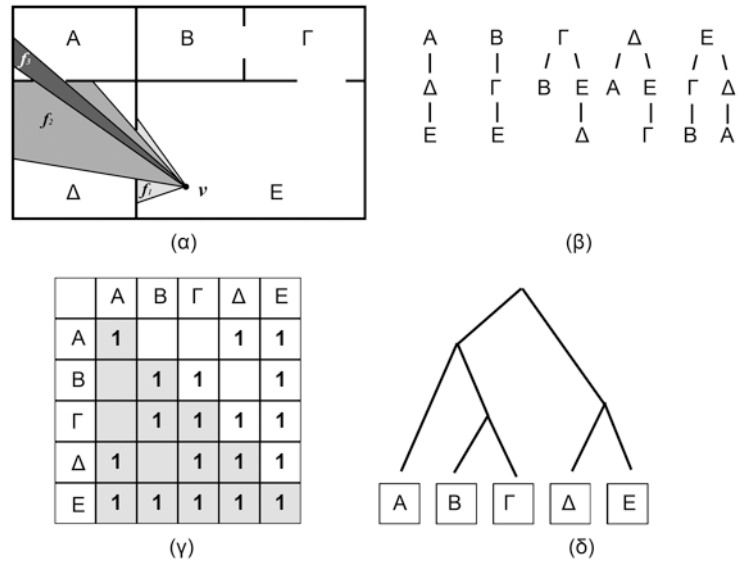
Σχήμα 5.4: *Γραμμικά διαγράμματα των στοιχειωδών αντικειμένων μιας σκηνής: (α) σύνολο ορατών επιφανειών, (β) όλα τα στοιχειώδη αντικείμενα, (γ) δυνητικά ορατό σύνολο.*

αλγόριθμοι από-περιοχή επίσης απαιτούν πολλούς προ-υπολογισμούς και είναι συνεπώς καταλληλότεροι για στατικές σκηνές.

5.4.1 Περικοπή παρεμποδιζομένων από-περιοχή

Κάποιες εφαρμογές, όπως αρχιτεκτονικές επισκοπήσεις και πολλά παιχνίδια, αποτελούνται από ένα σύνολο κυρτών περιοχών, ή *κελιών*, που συνδέονται με διάφανες *πύλες*. Στην απλούστερη μορφή της, μια σκηνή μπορεί να παρασταθεί από ένα 2Δ χάρτη όπου τα κελιά και οι πύλες είναι παράλληλα με τους άξονες x ή y [Tell91] (Σχήμα 5.5(α)). Θεωρώντας ότι οι «τοίχοι» των κελιών είναι αδιαφανείς, τα στοιχειώδη αντικείμενα μπορεί να είναι ορατά μεταξύ κελιών μόνο μέσω των πυλών. Η σχέση ορατότητας μεταξύ κελιών είναι αναδρομική: ένα κελί c_a μπορεί να είναι ορατό από ένα κελί c_b μέσω του κελιού c_m, αν υπάρχουν ευθείες που να συνδέουν κατάλληλα τις πύλες τους.

Ο αλγόριθμος απαιτεί ένα στάδιο προ-επεξεργασίας, αλλά αυτό εκτελείται μια μόνο φορά υποθέτοντας ότι τα κελιά και οι πύλες είναι σταθερά, πράγμα λογικό για τις



	A	B	Γ	Δ	E
A	1			1	1
B		1	1		1
Γ		1	1	1	1
Δ	1		1	1	1
E	1	1	1	1	1

Σχήμα 5.5: *(α) Σκηνή με κελιά και πύλες, (β) δένδρο ορατότητας των κελιών, (γ) πίνακας ΔΟΣ, (δ) δένδρο BSP.*

περισσότερες σκηνές. Κατά την προ-επεξεργασία κατασκευάζεται ένας πίνακας ΔΟΣ και ένα δένδρο BSP [Fuch80]. Ο πίνακας ΔΟΣ δίνει το ΔΟΣ για κάθε κελί που μπορεί να βρίσκεται ο παρατηρητής (Σχήμα 5.5(γ)). Καθώς η ορατότητα είναι συμμετρική ιδιότητα, ο πίνακας ΔΟΣ είναι επίσης συμμετρικός. Για να δημιουργήσουμε τον πίνακα ΔΟΣ, ξεκινούμε από ένα κελί c και επισκεπτόμαστε αναδρομικά όλα τα κελιά που είναι προσβάσιμα από αυτό βάσει του γράφου γειτνίασης, εφόσον υπάρχουν ευθείες που να επιτρέπουν την ορατότητα από το c μέσω των πυλών. Έτσι κατασκευάζεται το *δένδρο ορατότητας* του c που ορίζει το ΔΟΣ του c (Σχήμα 5.5(β)). Οι κόμβοι του δένδρου ορατότητας αντιστοιχούν σε 1 στην κατάλληλη γραμμή (ή στήλη) του πίνακα ΔΟΣ.

Κατά την προ-επεξεργασία κατασκευάζεται επίσης ένα δένδρο BSP (Σχήμα 5.5(δ)). Το δένδρο BSP χρησιμοποιεί διαχωριστικά επίπεδα, που μπορεί να είναι όρια κελιών, για να κατατμήσει αναδρομικά τη σκηνή. Τα φύλλα του δένδρου αντιστοιχούν στα κελιά. Ένα ισορροπημένο δένδρο BSP μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εντοπισθεί γρήγορα το κελί στο οποίο ανήκει ένα σημείο (π.χ. το σημείο παρατήρησης) σε χρόνο $O(\log_2 n_c)$, όπου n_c το πλήθος των κελιών.

Κατά την εκτέλεση, τα βήματα που απαιτούνται για την δημιουργία της εικόνας από το ΔΟΣ για ένα σημείο παρατήρησης **v** είναι:

- εύρεση του κελιού c του **v** με χρήση του δένδρου BSP,
- εύρεση του ΔΟΣ του κελιού c με χρήση του πίνακα ΔΟΣ,
- δημιουργία εικόνας από το ΔΟΣ.

Εδώ σημειώνουμε ότι το ΔΟΣ δεν μεταβάλλεται όσο το **v** παραμένει στο ίδιο κελί

(αυτή είναι η βασική ιδέα των αλγορίθμων από-περιοχή). Έτσι τα πρώτα 2 βήματα εκτελούνται μόνο όταν το **v** αλλάζει κελί. Κατά την εκτέλεση χρησιμοποιούνται μόνο οι δομές του δένδρου BSP και του πίνακα ΔΟΣ.

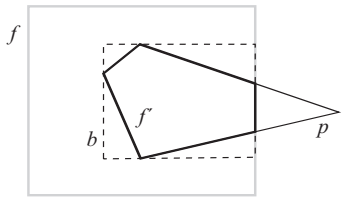
Σε μια δυναμική περιήγηση ο αλγόριθμος περικοπής μπορεί να βελτιστοποιηθεί περαιτέρω, συνδυαζόμενος με την περικοπή στο οπτικό πεδίο και την περικοπή πίσω όψεων. Η δημιουργία εικόνας μπορεί επιπλέον να περιοριστεί σε στοιχειώδη αντικείμενα που βρίσκονται ταυτόχρονα εντός του οπτικού πεδίου και εντός του ΔΟΣ. Το στερεό παρατήρησης πρέπει να δημιουργηθεί αναδρομικά από κελί σε κελί με βάση το δένδρο ορατότητας. Ο ακόλουθος ψευδοκώδικας ενσωματώνει τα παραπάνω (αλλά δεν αντικατοπτρίζει απαραίτητα την υλοποίηση σε μοντέρνους επεξεργαστές γραφικών)

```
portal_render(cell c, frustum f, list PVS); {
  for each polygon R in c {
      if ((R is portal) & (c' in PVS)) {
          /* Η πύλη R οδηγεί στο κελί c' */
          /* Υπολογισμός νέου στερεού παρατήρησης f' */
          f'=clip_frustum(f, R);
          if (f' <> empty) portal_render(c', f', PVS);
      }
      else if (R is portal) { }
      else    {  /* Το R δεν είναι πύλη */
          /* Περικοπή πίσω όψεων */
          if !back_face(R)    {
              /* Περικοπή στο οπτικό πεδίο */
              R'=clip_poly(f, R);
              if (R' <> empty) render(R);
          }
      }
  }
}

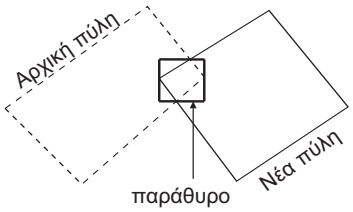


main()  {
  determine cell c of viewpoint using BSP tree;
  determine PVS of cell c using PVS matrix;
  f=original view frustum;
  portal_render(c, f, PVS);
}
```

Στο 2Δ παράδειγμα του Σχήματος 5.5(α), πρώτα βρίσκεται το κελί E στο οποίο ανήκει το σημείο παρατήρησης **v**. Αντικείμενα σε αυτό το κελί περικόπτονται με το αρχικό οπτικό πεδίο f_1. Η πρώτη πύλη, που οδηγεί στο κελί ΔΟΣ Δ, περιορίζει το οπτικό πεδίο στο f_2 και αντικείμενα εντός του κελιού Δ περικόπτονται με το νέο αυτό οπτικό πεδίο. Η δεύτερη πύλη, που οδηγεί στο κελί A, περιορίζει περαιτέρω το οπτικό πεδίο στο f_3



Σχήμα 5.6: *Το αρχικό οπτικό πεδίο (f), το πολύγωνο-πύλη (p), το νέο οπτικό πεδίο (f'), και το περιβάλλον κιβώτιό του (b).*



Σχήμα 5.7: *Τομή προβολών παλιάς και νέας πύλης με αποτέλεσμα περιβάλλον κιβώτιο ευθυγραμμισμένο με τους άξονες, μέσω του οποίου άλλα κελιά μπορεί να είναι ορατά.*

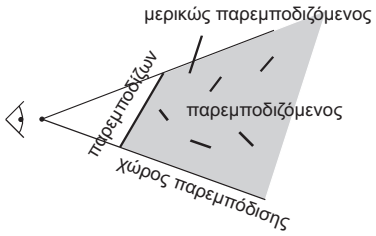
και αντικείμενα εντός του κελιού A περικόπτονται με το οπτικό πεδίο f_3. Η αναδρομική αυτή διαδικασία σταματά εδώ, αφού δεν υπάρχουν άλλες πύλες εντός του οπτικού πεδίου f_3.

Η εντολή `f'=clip_frustum(f, R)` υπολογίζει την τομή του τρέχοντος οπτικού πεδίου `f` με το στερεό που ορίζεται από το σημείο παρατήρησης και το πολύγωνο-πύλη `R`. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε τυχαία κυρτά στερεά, χάνοντας τη δυνατότητα εκμετάλλευσης του επεξεργαστή γραφικών. Μια λύση είναι η αντικατάσταση του `f'` από το περιβάλλον κιβώτιό του. Ένα 2Δ παράδειγμα δίνεται στο Σχήμα 5.6.

5.4.2 Περικοπή παρεμποδιζομένων από-σημείο

Για σκηνές εσωτερικού χώρου αποτελούμενες από κελιά και πύλες, οι Luebke και Georges [Lueb95] προτείνουν μια προσέγγιση χώρου εικόνας από-σημείο που δημιουργεί την εικόνα της σκηνής ξεκινώντας από το τρέχον κελί. Οποιοδόποτε άλλο αντικείμενο, πρέπει να είναι ορατό μέσω της προβολής των πυλών στο χώρο εικόνας, εφόσον βέβαια είναι εντός των ορίων αποκοπής. Γίνονται αναδρομικές κλήσεις για τα κελιά στα οποία οδηγούν οι πύλες και σε κάθε βήμα οι νέες πύλες τέμνονται με τις παλιές, ώσπου η τομή να είναι κενή. Για μείωση της πολυπλοκότητας των τομών συνήθως χρησιμοποιείται ένα απλούστερο σχήμα που περικλείει την πύλη, π.χ. το περιβάλλον κιβώτιο ευθυγραμμισμένο με τους άξονες. (Σχήμα 5.7).

Στη γενική περίπτωση *δεν* μπορεί να υποτεθείότι η σκηνή αποτελείται από κελιά και πύλες (π.χ. σκηνές εξωτερικού χώρου). Ο διαχωρισμός μιας τέτοιας σκηνής σε περιοχές δεν έχει νόημα, καθώς οι περιοχές δεν θα ήταν συναφείς ως προς τα χαρακτηριστικά παρεμπόδισης. Οι μέθοδοι περικοπής παρεμποδιζομένων από-σημείο, λύνουν



Σχήμα 5.8: *Παρεμποδιστής και παρεμποδιζόμενοι.*

το πρόβλημα για *ένα* σημείο παρατήρησης και συνεπώς δεν απαιτούν τον όγκο της προ-επεξεργασίας των μεθόδων από-περιοχή, αφού δεν προ-υπολογίζουν το ΔΟΣ.

Η κεντρική ιδέα των αλγορίθμων από-σημείο είναι ο *παρεμποδιστής*. Παρεμποδιστής είναι ένα στοιχειώδες αντικείμενο, ή συνδυασμός αντικειμένων, που παρεμποδίζει την ορατότητα μεγάλου πλήθους άλλων αντικειμένων, τους *παρεμποδιζόμενους*, σε σχέση με ένα συγκεκριμένο σημείο παρατήρησης (Σχήμα 5.8). Η περιοχή του χώρου που ορίζεται από το σημείο παρατήρησης και τον παρεμποδιστή ονομάζεται *χώρος παρεμπόδισης*. Αντικείμενα που βρίσκονται εξολοκλήρου εντός του χώρου παρεμπόδισης και «πίσω» από τον παρεμποδιστή μπορούν να περικοπούν. Τμηματικά παρεμποδιζόμενα αντικείμενα παραπέμπονται στον αλγόριθμο ΑΚΕ. Στην πράξη ο έλεγχος παρεμπόδισης εξετάζει αν ο περιβάλλον όγκος των αντικειμένων (βλέπε Ενότητα 5.6.1) βρίσκεται εντός του χώρου παρεμπόδισης.

Απαιτούνται δύο βασικά βήματα για την περικοπή παρεμποδιζομένων ως προς ένα συγκεκριμένο σημείο παρατήρησης **v**:

- δημιουργία ενός μικρού συνόλου καλών παρεμποδιστών για το **v**,
- περικοπή παρεμποδιζομένων με χρήση του παραπάνω συνόλου παρεμποδιστών.

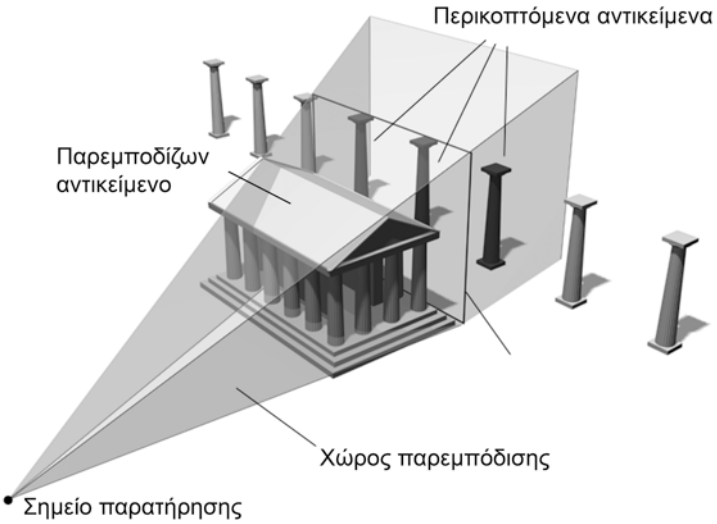
Οι Coorg και Teller [Coor97] χρησιμοποιούν *επίπεδους παρεμποδιστές* (δηλαδή επίπεδα αντικείμενα, όπως τρίγωνα) και τους ταξινομούν ανάλογα με την επιφάνεια της προβολής τους στο χώρο εικόνας. Όσο μεγαλύτερη είναι αυτή η επιφάνεια, τόσο σημαντικότερος ο παρεμποδιστής. Η συνάρτηση ταξινόμησης f_{planar} είναι:

$$f_{\text{planar}} = \frac{-A(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{v}})}{|\overrightarrow{\mathbf{v}}|^2}, \tag{5.5}$$

όπου A η επιφάνεια του επίπεδου παρεμποδιστή, $\hat{\mathbf{n}}$ το μοναδιαίο κανονικό του διάνυσμα και $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ το διάνυσμα που ορίζεται από το σημείο παρατήρησης προς το κέντρο του επίπεδου παρεμποδιστή.[11]

Ένας συνηθισμένος επίπεδος παρεμποδιστής είναι ο *αντιπρόσωπος* ενός αντικειμένου (Σχήμα 5.9). Ο αντιπρόσωπος είναι ένα κυρτό πολύγωνο, κάθετο στην κατεύθυνση παρατήρησης, *εγγεγραμμένο* εντός του χώρου παρεμπόδισης του παρεμποδιστή.

[11] Το τετράγωνο στον παρονομαστή οφείλεται στο γεγονός ότι η επιφάνεια προβολής είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης.



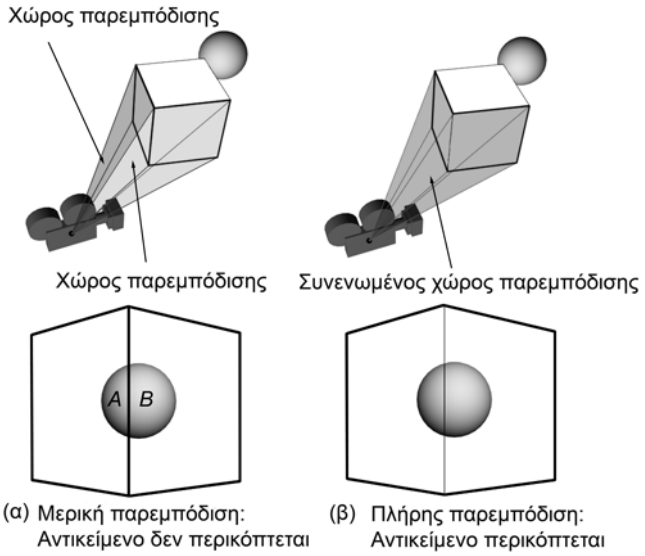
Σχήμα 5.9: *Χρήση επίπεδου παρεμποδιστή.*

Η περικοπή παρεμποδιζομένων μπορεί να γίνει πιο αποτελεσματική αν φυλάσσεται μια περιγραφή της σκηνής με μορφή ιεραρχικών περιβαλλόντων όγκων [Huds97]. Ξεκινώντας από το πρώτο επίπεδο, τα αντικείμενα ενός περιβάλλοντος όγκου που κείται εξολοκλήρου εντός ή εκτός του χώρου παρεμπόδισης, περικόπτονται ή σχεδιάζονται, αντίστοιχα. Ένας περιβάλλων όγκος που τέμνει τον χώρο παρεμπόδισης διασπάται στο επόμενο επίπεδο, και τα συστατικά του ελέγχονται ανεξάρτητα σε σχέση με το χώρο παρεμπόδισης (βλέπε επίσης Κεφάλαιο 9).

Η απλή περικοπή παρεμποδιζομένων, όπως περιγράφηκε, έχει το πρόβλημα της μερικής παρεμπόδισης (Σχήμα 5.10(α)). Ένα αντικείμενο μπορεί να μην περικλείεται στο χώρο παρεμπόδισης κανενός παρεμποδιστή και συνεπώς να μην περικοπεί, παρόλο που μπορεί να περικλείεται στο χώρο παρεμπόδισης ενός συνδυασμού γειτονικών παρεμποδιστών. Για τον λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί αλγόριθμοι που συνενώνουν χώρους παρεμπόδισης (Σχήμα 5.10(β)). Ο Παπαϊωάννου και συνεργάτες [Papa06] προτείνουν μια προέκταση του απλού επίπεδου παρεμποδιστή, τους *στερεούς παρεμποδιστές*, για το πρόβλημα αυτό. Συγκεκριμένα δημιουργούν έναν επίπεδο παρεμποδιστή για ολόκληρο τον όγκο ενός αντικειμένου.

5.5 Απομάκρυνση κρυμμένων επιφανειών

Οι αλγόριθμοι *απομάκρυνσης κρυμμένων επιφανειών* (ΑΚΕ) δίνουν την τελική λύση στο πρόβλημα της παρεμπόδισης (ορατότητας). Τα ορατά στοιχειώδη αντικείμενα (ή τμήματά τους) πρέπει να υπολογιστούν για να σχηματίσουν την τελική εικόνα. Για το σκοπό αυτό, οι αλγόριθμοι ΑΚΕ ταξινομούν τα αντικείμενα (άμεσα ή έμμεσα) με βάση τις τομές τους με τις ακτίνες προβολής. Αυτή η ταξινόμηση καταλήγει στη σύγκριση



Σχήμα 5.10: *(α) Το πρόβλημα της μερικής παρεμπόδισης, (β) μια λύση με συνένωση παρεμποδιστών.*

δύο σημείων $\mathbf{p_1}=[x_1, y_1, z_1, w_1]^{\mathrm{T}}$ και $\mathbf{p_2}=[x_2, y_2, z_2, w_2]^{\mathrm{T}}$ σχετικά με την παρεμπόδιση. Αν τα δύο σημεία βρίσκονται πάνω στην ίδια ακτίνα προβολής τότε αποτελούν ένα *ζεύγος παρεμπόδισης*, με το πλησιέστερο να παρεμποδίζει την ορατότητα του πιο απομακρυσμένου. Εδώ διαχωρίζουμε δύο περιπτώσεις (βλέπε Ενότητα 4.4.2):

Ορθογραφική προβολή. Υποθέτοντας ότι οι ακτίνες προβολής είναι παράλληλες με τον άξονα z_e (Σχήμα 5.11(α)), τα δύο σημεία θα αποτελούν ζεύγος παρεμπόδισης αν

$$(x_1 = x_2) \quad \text{και} \quad (y_1 = y_2).$$

Προοπτική προβολή. Στην περίπτωση αυτή (Σχήμα 5.11(β)), για να αποφανθούμε αν τα δύο σημεία αποτελούν ζεύγος παρεμπόδισης πρέπει να γίνει η προοπτική διαίρεση

$$(x_1/z_1 = x_2/z_2) \quad \text{και} \quad (y_1/z_1 = y_2/z_2).$$

Στην περίπτωση της προοπτικής προβολής, η (ακριβή) προοπτική διαίρεση γίνεται, ούτως ή άλλως, κατά την μετατροπή από το ΣΣΠ στο ΚΧΟ του μετασχηματισμού παρατήρησης (βλέπε Ενότητα 4.4.2). Αυτή ουσιαστικά μετατρέπει το στερεό παρατήρησης της προοπτικής προβολής σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο (βλέπε Σχήμα 4.15) καθιστώντας δυνατή την άμεση σύγκριση των συντεταγμένων x και y για τον προσδιορισμό ζευγών παρεμπόδισης. Για το λόγο αυτό η ΑΚΕ γίνεται *μετά* τον μετασχηματισμό παρατήρησης στον ΚΧΟ. Ο μετασχηματισμός παρατήρησης διατηρεί την συντεταγμένη z για την ΑΚΕ.

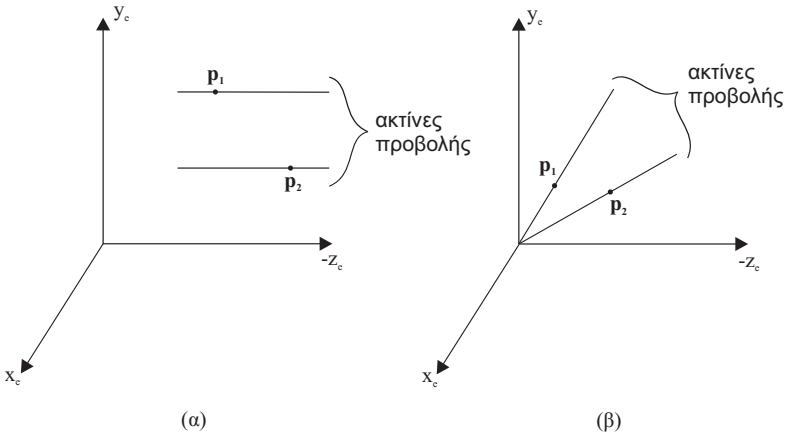
Οι περισσότεροι αλγόριθμοι ΑΚΕ εκμεταλλεύονται την *συνάφεια*, δηλαδή την ιδιότητα των στοιχειωδών γεωμετρικών αντικειμένων (όπως οι ευθείες και τα πολύγωνα) να διατηρούν κάποια χαρακτηριστικά τους τοπικά σταθερά ή να τα αλλάζουν με προβλέψιμο τρόπο. Για παράδειγμα, για να βρεθεί το βάθος z ενός πολυγώνου σε κάθε εικονοστοιχείο που αυτό καλύπτει, δεν είναι απαραίτητο να βρίσκεται η τομή του επιπέδου του με την ακτίνα που ορίζεται από το εικονοστοιχείο με το σημείο παρατήρησης (που είναι ένας ακριβός υπολογισμός). Αντίθετα, αξιοποιώντας το γεγονός ότι το βάθος μεταβάλλεται γραμμικά πάνω στην επιφάνεια του πολυγώνου, ξεκινώντας από το βάθος σε κάποιο εικονοστοιχείο μπορούμε να βρούμε το βάθος σε γειτονικά εικονοστοιχεία, προσθέτοντας μια σταθερά που εκφράζει τη γραμμική μεταβολή βάθους μεταξύ των δύο εικονοστοιχείων. Έτσι εκμεταλλευόμαστε την *συνάφεια επιφάνειας* για να αντικαταστήσουμε έναν ακριβό υπολογισμό (τομή ακτίνας-επιπέδου) με έναν αυξητικό υπολογισμό. Αυτό χρησιμοποιείται στον αλγόριθμο Z-buffer που θα δούμε παρακάτω. Άλλα είδη συνάφειας που χρησιμοποιούνται στην ΑΚΕ, καθώς και σε άλλους αλγόριθμους γραφικών, είναι: *συνάφεια ακμής*, *συνάφεια αντικειμένων*, *συνάφεια γραμμών σάρωσης* και *συνάφεια μεταξύ καρέ* [Suth74b].

5.5.1 Αλγόριθμος Z-buffer

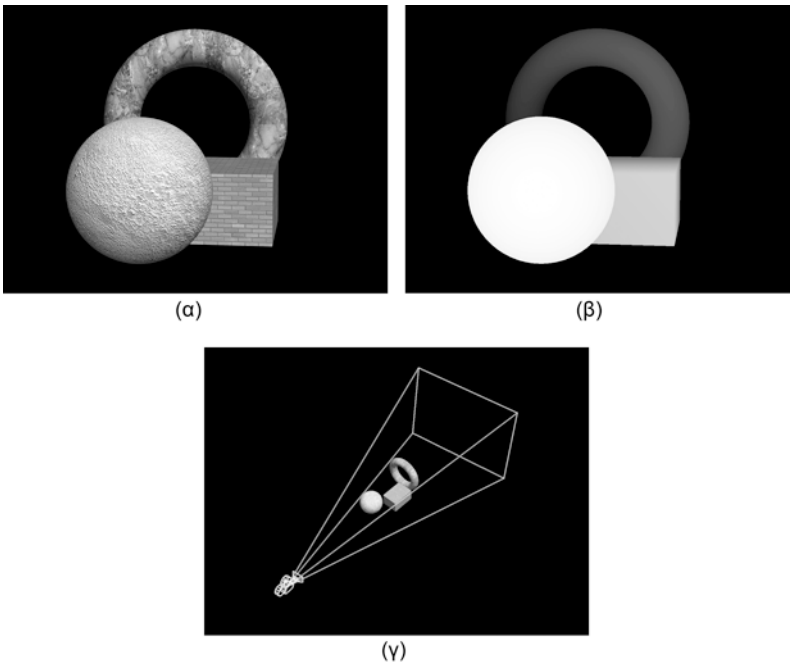
Ο αλγόριθμος Z-buffer είναι κλασικός αλγόριθμος ΑΚΕ χώρου εικόνας [Catm74] και αρχικά θεωρήθηκε ιδιαίτερα σπάταλος ως προς τις απαιτήσεις του σε μνήμη. Σήμερα υπάρχουν υλοποιήσεις του σε κάθε σύγχρονο επεξεργαστή γραφικών.

Η ιδέα του αλγορίθμου αυτού είναι η διατήρηση μιας 2Δ μνήμης τιμών βάθους με την ίδια ανάλυση όπως αυτή του καταχωρητή εικόνας (Σχήμα 5.12). Αυτός ονομάζεται *καταχωρητής βάθους*, ή Z-buffer. Υπάρχει αντιστοιχία ένα-προς-ένα των στοιχείων των καταχωρητών εικόνας και βάθους.

Κάθε αντικείμενο του καταχωρητή βάθους διατηρεί το ελάχιστο βάθος για το αντίστοιχο εικονοστοιχείο του καταχωρητή εικόνας. Πριν τη δημιουργία ενός καρέ, ο



Σχήμα 5.11: *Ακτίνες προβολής στην (α) ορθογραφική και (β) προοπτική προβολή.*



Σχήμα 5.12: *(α) Ο καταχωρητής εικόνας. (β) Ο καταχωρητής βάθους. (γ) Η 3Δ σκηνή. Στην εικόνα βάθους όσο πιο ανοικτό είναι το χρώμα τόσο μικρότερη η απόσταση από τον παρατηρητή.*

καταχωρητής βάθους αρχικοποιείται στη μέγιστη τιμή βάθους (συνήθως αυτή αντιστοιχεί στο βάθος f του όπισθεν επιπέδου αποκοπής). Έστω ότι κατά την παράσταση ενός στοιχειώδους αντικειμένου[12] υπολογίζουμε τα χαρακτηριστικά του (z_p, c_p) στο εικονοστοιχείο $\mathbf{p} = (x_p, y_p)$, όπου z_p το βάθος του στο $\mathbf{p}$ (απόσταση από το σημείο παρατήρησης) και c_p το χρώμα του στο $\mathbf{p}$. Υποθέτοντας ότι οι τιμές βάθους μειώνονται καθώς απομακρυνόμαστε από το σημείο παρατήρησης (ο άξονας $+z$ έχει κατεύθυνση προς το σημείο παρατήρησης), ο βασικός έλεγχος του αλγορίθμου Z-buffer είναι:

```
if (z-buffer[xp, yp] < zp)  {
    f-buffer[xp, yp] = cp;  /* ενημέρωση καταχωρητή εικόνας */
    z-buffer[xp, yp] = zp;  /* ενημέρωση καταχωρητή βάθους */
}
```

Σημειώνουμε ότι τα στοιχειώδη αντικείμενα μπορούν να ληφθούν με τυχαία σειρά, λόγω της έμμεσης ταξινόμησης που γίνεται μέσω του καταχωρητή βάθους.

Σημαντική επίπτωση στην αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου Z-buffer έχει ο υπολογισμός της τιμής βάθους z_p στα εικονοστοιχεία που καλύπτονται από ένα αντικείμενο. Ο υπολογισμός της τομής των ακτίνων παρατήρησης με το αντικείμενο είναι ακριβός. Εναλλακτικά, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την συνάφεια επιφάνειας του

[12] Εδώ χρησιμοποιούμε τον όρο «στοιχειώδες αντικείμενο», αντί για «πολύγωνο», καθώς ο καταχωρητής βάθους είναι κατάλληλος για οποιοδήποτε γεωμετρικό αντικείμενο του οποίου μπορούμε να υπολογίσουμε το βάθος. Πρακτικά, συνήθως έχουμε πολύγωνα και συγκεκριμένα τρίγωνα.

αντικειμένου για να υπολογίσουμε τις τιμές του βάθους αυξητικά. Για επίπεδα αντικείμενα (π.χ. τρίγωνα) αυτό απαιτεί 1 πρόσθεση ανά εικονοστοιχείο. Έστω ότι η εξίσωση του επιπέδου ενός αντικειμένου είναι:

$$F(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0$$

ή, καθώς ενδιαφερόμαστε για το βάθος:

$$F'(x, y) = z = -\frac{d}{c} - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y.$$

Η τιμή της F' υπολογίζεται αυξητικά από ένα εικονοστοιχείο (x, y) στο $(x+1, y)$ ως:

$$F'(x+1, y) - F'(x, y) = -\frac{a}{c}.$$

Έτσι, προσθέτοντας τις σταθερές πρώτες έμπροσθεν διαφορές της F' κατά x ή y (βλέπε Κεφάλαιο 2), μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή βάθους από εικονοστοιχείο σε εικονοστοιχείο με 1 πρόσθεση. Πρακτικά, οι τιμές βάθους στις κορυφές του αντικειμένου παρεμβάλλονται κατά μήκος και μεταξύ των ακμών του (δηλαδή πάνω στις γραμμές σάρωσης).

Το ίδιο ισχύει και για τις χρωματικές τιμές. Απλή παρεμβολή χρωμάτων μπορεί να γίνει παρομοίως με την παρεμβολή βάθους. Εναλλακτικά, αλγόριθμοι απεικόνισης υφής μπορούν να δώσουν χρωματικές τιμές ανά εικονοστοιχείο.

Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου Z-buffer είναι $O(Ps)$, όπου P το πλήθος των στοιχειωδών αντικειμένων και s το μέσο πλήθος εικονοστοιχείων που καλύπτεται από ένα στοιχειώδες αντικείμενο. Πάντως, η πρακτική υποδεικνύει ότι καθώς αυξάνεται το πλήθος των αντικειμένων P, το μέγεθός τους s μειώνεται αντίστοιχα, διατηρώντας μια σχετικά σταθερή πολυπλοκότητα βάθους[13]. Συνεπώς, το κόστος του Z-buffer μπορεί να θεωρηθεί ανάλογο της ανάλυσης εικόνας $O(p)$, όπου p το πλήθος των εικονοστοιχείων.

Τα βασικά πλεονεκτήματα του Z-buffer είναι η απλότητά του, η σταθερή του απόδοση, που είναι σχετικά ανεξάρτητη από την πολυπλοκότητα της σκηνής, και το γεγονός ότι μπορεί να επεξεργασθεί τα αντικείμενα με τυχαία σειρά. Η σταθερή του απόδοση τον κάνει ελκυστικό για τις σημερινές πολύπλοκες σκηνές, ενώ η απλότητά του συνέβαλλε στην υιοθέτησή του από κάθε σύγχρονο επεξεργαστή γραφικών. Μειονεκτήματά του είναι η δυσκολία υλοποίησης ειδικών εφέ (όπως η διαφάνεια) και η σταθερή ανάλυση του αποτελέσματός του που κληρονομείται από το χώρο εικόνας στον οποίο λειτουργεί. Η τελευταία οδηγεί σε προβλήματα αριθμητικής σύγκρισης βάθους αν τα όρια αποκοπής ορίζουν μεγάλη διάσταση βάθους, πράγμα που ονομάζεται *Z-fighting*.

Τα περιεχόμενα του καταχωρητή βάθους που υπολογίζονται κατά τη δημιουργία ενός καρέ μπορούν να χρησιμοποιηθούν ποικιλοτρόπως. Ένας απλός αλγόριθμος ε-

[13] Πολυπλοκότητα βάθους είναι το μέσο πλήθος αντικειμένων που τέμνονται από μια ακτίνα παρατήρησης.

πιτρέπει τη σωστή συνένωση δύο ή περισσότερων εικόνων που έχουν δημιουργηθεί με χρήση του Z-buffer [Duff85, Port84]. Αυτό μπορεί να είναι χρήσιμο για παράδειγμα όταν μέρη της εικόνας παράγονται από διαφορετικά πακέτα λογισμικού. Έστω (F_a, Z_a) και (F_b, Z_b) οι καταχωρητές εικόνας και βάθους αντίστοιχα δύο τμημάτων της σκηνής (π.χ. το ένα μπορεί να έχει παραχθεί με αλγόριθμο παρακολούθησης ακτίνας ενώ το άλλο με την κλασσική σωλήνωση γραφικών από πολυγωνικό μοντέλο). Αυτά μπορούν να συνενωθούν με σωστή απεικόνιση βάθους, επιλέγοντας σε κάθε εικονοστοιχείο το τμήμα που έχει μικρότερη τιμή βάθους[14]:

```
for (x=0; x<XRES; x++)
    for (y=0; y<YRES; y++)  {
        Fc[x,y] = (Za[x,y]>Zb[x,y])?Fa[x,y]:Fb[x,y];
        Zc[x,y] = (Za[x,y]>Zb[x,y])?Za[x,y]:Zb[x,y];
    }
```

Πολλοί άλλοι υπολογισμοί μπορούν να γίνουν με χρήση του Z-buffer, που περιλαμβάνουν τον υπολογισμό σκιών [Will78, Will98], τη μετατροπή επιφανειών σε ογκοστοιχεία [Kara99, Pass04], τον υπολογισμό διαγράμματος Voronoi [Hoff99], την ανακατασκευή 3Δ αντικειμένων [Papa02], την ανίχνευση συμμετριών και την ανάκτηση 3Δ αντικειμένων [Pass06]. Μια επισκόπηση εφαρμογών του Z-buffer βρίσκεται στο [Theo01].

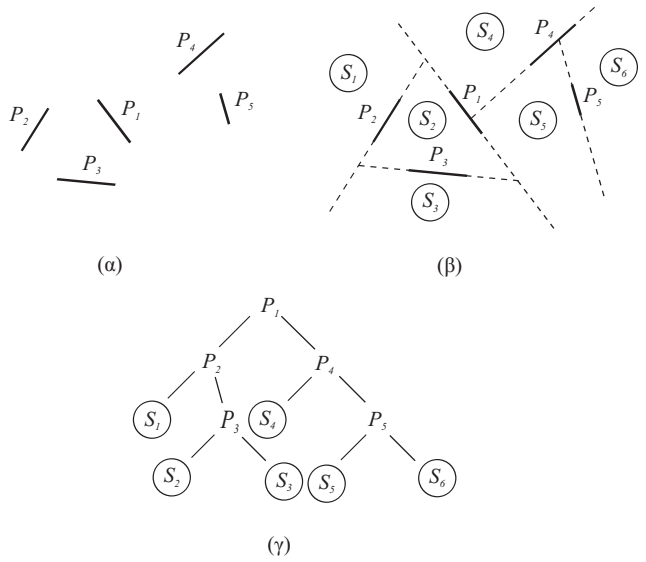
5.5.2 Αλγόριθμος BSP

Ο αλγόριθμος δυαδικής διαμέρισης χώρου (binary space partitioning (BSP)) [Fuch80, Fuch83] λειτουργεί στο χώρο αντικειμένων και χρησιμοποιεί ένα δυαδικό δένδρο που διαιρεί αναδρομικά τον 3Δ χώρο. Στη βασική του μορφή, κάθε κόμβος της δομής δένδρου αντιστοιχεί σ' ένα πολύγωνο της σκηνής. Οι εσωτερικοί κόμβοι, επιπλέον, διαιρούν τον 3Δ χώρο κατά το επίπεδο του πολυγώνου τους, έτσι ώστε οι αριστεροί απόγονοι ενός τέτοιου κόμβου να βρίσκονται στη μια πλευρά του επιπέδου και οι δεξιοί στην άλλη (Σχήμα 5.13).

Ο ακόλουθος αλγόριθμος δημιουργεί το δένδρο BSP:

```
BuildBSP(BSPnode, polygonDB);  {
    Select a polygon (plane) Pi from polygonDB;
    Assign Pi to BSPnode;
    /* Διαχωρισμός πολυγώνων σκηνής κατά το επίπεδο Pi,
    διαιρώντας πολύγωνα που τυχόν τέμνουν το Pi  */
    Partition(Pi, polygonDB, polygonDBL, polygonDBR);
    if (polygonDBL != empty) BuildBSP(BSPnode->Left,polygonDBL);
    if (polygonDBR != empty) BuildBSP(BSPnode->Right,polygonDBR);
}
```

[14] Και πάλι αυτό αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη τιμή z αφού έχουμε υποθέσει ότι ο άξονας $+z$ έχει κατεύθυνση προς τον παρατηρητή.



Σχήμα 5.13: *(α) Μια σκηνή, (β) μια κατάτμηση του χώρου με βάση τα πολύγωνα της σκηνής, (γ) το αντίστοιχο δένδρο BSP. Το παράδειγμα είναι 2Δ.*

Η επιλογή του επιπέδου διαχωρισμού P_i είναι κρίσιμη καθώς ιδανικά είναι επιθυμητό ένα ισορροπημένο δένδρο BSP. Επιλέγεται λοιπόν ένα επίπεδο που διαιρεί τη σκηνή σε δύο τμήματα με περίπου ίσα πλήθη πολυγώνων. Κατά τον διαχωρισμό, πολύγωνα που τέμνουν το επίπεδο διαχωρισμού πρέπει να διαιρεθούν σε δύο τμήματα. Αυτό επιτυγχάνεται με προέκταση ενός αλγορίθμου αποκοπής, ώστε να επιστρέφει τόσο τα «εσωτερικά» όσο και τα «εξωτερικά» τμήματα του πολυγώνου που αποκόπτεται.

Το δένδρο BSP μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εμφάνιση της σκηνής, χωρίς τις κρυμμένες επιφάνειες. Για ένα σημείο παρατήρησης **v** και ένα κόμβο του δένδρου BSP (που παριστάνει ένα επίπεδο διαχωρισμού), όλα τα πολύγωνα που βρίσκονται στην ίδια υποδιαίρεση με το **v** δεν είναι δυνατόν να αποκρύπτονται από πολύγωνα της άλλης υποδιαίρεσης. Συνεπώς, τα πολύγωνα της άλλης υποδιαίρεσης πρέπει να εμφανιστούν πρώτα (είναι πιο μακριά από το **v**). Αυτό ισχύει αναδρομικά και οδηγεί στον αλγόριθμο δημιουργίας εικόνας BSP που επιτυγχάνει την AKE με μια ενδοδιατεταγμένη διαδρομή του δένδρου BSP:

```
DisplayBSP(BSPnode, v);  {
    if IsLeaf(BSPnode) Render(BSPnode->Polygon)
    else if (v στην  «αριστερή» υποδιαίρεση του BSPnode->Polygon) {
        DisplayBSP(BSPnode->Right, v);
        Render(BSPnode->Polygon);
        DisplayBSP(BSPnode->Left, v);
    }
    else  /* v στην  «δεξιά» υποδιαίρεση του BSPnode->Polygon */  {
        DisplayBSP(BSPnode->Left, v);
        Render(BSPnode->Polygon);
```

```
            DisplayBSP(BSPnode->Right, v);
        }
    }
```

Ο αλγόριθμος `DisplayBSP` επισκέπτεται κάθε πολύγωνο μια φορά και συνεπώς έχει υπολογιστικό κόστος $O(P)$. Ο αλγόριθμος `BuildBSP` κοστίζει $O(P^2)$ καθώς, κατά το βήμα διαχωρισμού, το επιλεγμένο πολύγωνο πρέπει να συγκριθεί με όλα τα πολύγωνα της τρέχουσας υποδιαίρεσης και αυτό επαναλαμβάνεται για κάθε πολύγωνο. Η συνολική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου BSP είναι συνεπώς $O(P^2)$.

Για στατικές σκηνές ο αλγόριθμος `BuildBSP` χρησιμοποιείται μια φορά μόνο, ως στάδιο προ-επεξεργασίας, και στη συνέχεια για κάθε νέα θέση του παρατηρητή χρησιμοποιείται μόνο ο αλγόριθμος `DisplayBSP`. Άρα, ο αλγόριθμος του δένδρου BSP είναι ιδιαίτερα κατάλληλος για στατικές σκηνές και όχι για δυναμικές σκηνές όπου η σχετική θέση των αντικειμένων αλλάζει.

5.5.3 Αλγόριθμος ταξινόμησης κατά βάθος

Ο αλγόριθμος αυτός ταξινομεί τα πολύγωνα σύμφωνα με την απόστασή τους από τον παρατηρητή και τα εμφανίζει με ανάποδη σειρά απόστασης (από το πιο απομακρυσμένο προς το πλησιέστερο) [Newe72]. Αυτό μοιάζει με τον τρόπο που δουλεύει ένας ζωγράφος, ξεκινώντας από το φόντο και συνεχίζοντας με τα αντικείμενα από πίσω προς τα εμπρός· γι αυτό και είναι επίσης γνωστός ως «αλγόριθμος του *ζωγράφου*».

Το κριτήριο ταξινόμησης είναι συνήθως η ελάχιστη τιμή βάθους[15] των πολυγώνων. Ακολουθεί η βασική δομή του αλγορίθμου:

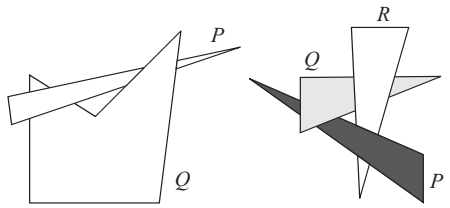
```
DepthSort(polygonDB);   {
    /* Ταξινόμηση της polygonDB κατά ελάχιστη τιμή z */
    for each polygon in polygonDB find MINZ and MAXZ;
    sort polygonDB according to MINZ;
    resolve overlaps in z;
    display polygons in order of sorted list;
}
```

Είναι δυνατόν να υπάρχουν επικαλύψεις στην διάσταση z, αν οι *εκτάσεις* [16] των πολυγώνων κατά τη διάσταση z επικαλύπτονται. Όταν συμβαίνει αυτό η ταξινόμηση είναι προβληματική, αφού δεν είναι ξεκάθαρο ποιο πολύγωνο κρύβει το άλλο. Υπάρχουν μάλιστα περιπτώσεις που δεν είναι δυνατόν να γίνει ταξινόμηση (Σχήμα 5.14).

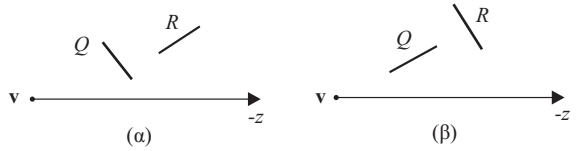
Όταν επικαλύπτονται οι εκτάσεις δύο πολυγώνων R και Q στη διάσταση z, χρησιμοποιείται μια σειρά ελέγχων για την εύρεση της σωστής σειράς τους στη λίστα εμφάνισης. Η θετική έκβαση ενός από τους παρακάτω ελέγχους, που παρατίθενται με σειρά

[15] Όταν ο άξονας $+z$ έχει κατεύθυνση προς τον παρατηρητή, η ελάχιστη τιμή βάθους αντιστοιχεί στη μέγιστη απόσταση από τον παρατηρητή.

[16] Με τον όρο *έκταση κατά τη διάσταση z* εννοούμε την περιοχή του χώρου που ορίζεται από τα επίπεδα z = MINZ και z = MAXZ, όπου τα MINZ και MAXZ είναι οι ελάχιστη και η μέγιστη συντεταγμένη z ενός πολυγώνου αντίστοιχα. Παρόμοιες εκτάσεις μπορούν να ορισθούν για τις διαστάσεις x και y.



Σχήμα 5.14: *Παραδείγματα πολυγώνων που δεν μπορούν να ταξινομηθούν κατά z σε μια σειρά που να λύνει το πρόβλημα της ΑΚΕ.*



Σχήμα 5.15: *(α) R πίσω από το Q και (β) Q μπροστά από το R.*

αυξανόμενης πολυπλοκότητας, καθορίζει ότι το Q δεν μπορεί να παρεμποδίζεται από το R:

1. Δεν επικαλύπτονται οι εκτάσεις των R και Q κατά τη διάσταση x.

2. Δεν επικαλύπτονται οι εκτάσεις των R και Q κατά τη διάσταση y.

3. Το R βρίσκεται εξολοκλήρου στον ημι-χώρο του Q ο οποίος δεν περιλαμβάνει το σημείο παρατήρησης $\mathbf{v}$. Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί ελέγχοντας ότι το πρόσημο της εξίσωσης επιπέδου του Q είναι ίδιο για όλες τις κορυφές του R και διαφορετικό από αυτό για το $\mathbf{v}$ (Σχήμα 5.15(α)):

$$\text{sign}(f_Q(\mathbf{r_i})) \neq \text{sign}(f_Q(\mathbf{v})) \qquad \forall \mathbf{r_i} \in R,$$

   όπου $f_Q(x, y, z) = a_Q x + b_Q y + c_Q z + d_Q = 0$ η εξίσωση επιπέδου του πολυγώνου Q.

4. Το Q βρίσκεται εξολοκλήρου στον ημι-χώρο του R ο οποίος περιλαμβάνει το σημείο παρατήρησης $\mathbf{v}$. Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί ελέγχοντας ότι το πρόσημο της εξίσωσης επιπέδου του R είναι ίδιο για όλες τις κορυφές του Q και για το $\mathbf{v}$ (Σχήμα 5.15(β)):

$$\text{sign}(f_R(\mathbf{q_i})) = \text{sign}(f_R(\mathbf{v})) \qquad \forall \mathbf{q_i} \in Q,$$

   όπου $f_R(x, y, z) = a_R x + b_R y + c_R z + d_R = 0$ η εξίσωση επιπέδου του πολυγώνου R.

5. Οι προβολές των R και Q δεν επικαλύπτονται.

Αν κανένας από τους παραπάνω ελέγχους δεν είναι θετικός, οι ρόλοι των R και Q αντιστρέφονται και οι Έλεγχοι 3 και 4 επαναλαμβάνονται, σε μια προσπάθεια απόδειξης ότι το Q δεν παρεμποδίζει το R. (Οι έλεγχοι 1, 2 και 5 δεν χρειάζεται να επαναληφθούν αφού είναι συμμετρικοί). Αν και πάλι δεν καταλήξουμε θετικά, το R διαιρείται στα δύο χρησιμοποιώντας το επίπεδο του Q (ή αντίστροφα), τα νέα πολύγωνα αντικαθιστούν το R στη λίστα και η διαδικασία επαναλαμβάνεται.

Η ταξινόμηση κατά βάθος λειτουργεί στο χώρο αντικειμένων, εκτός από το τελευταίο βήμα (εμφάνιση στην οθόνη) που γίνεται στο χώρο της εικόνας. Μια βελτιστοποίηση του αλγορίθμου αφορά στην εμφάνιση των πολυγώνων με αντίστροφη σειρά (από το πλησιέστερο προς τα πίσω), ακολουθώντας τον κανόνα ότι ένα πολύγωνο δεν εμφανίζεται σε εικονοστοιχεία που έχουν ήδη καλυφθεί από προγενέστερα (πλησιέστερα) πολύγωνα. Η διαδικασία δημιουργίας της εικόνας μπορεί μάλιστα να διακοπεί όταν όλα τα εικονοστοιχεία καλυφθούν από τουλάχιστον ένα πολύγωνο.

Το κόστος του βήματος ταξινόμησης είναι $O(P \log_2 P)$. Η επίλυση των επικαλύψεων κατά τον z στη χειρότερη περίπτωση, όπου όλα τα πολύγωνα επικαλύπτονται, κοστίζει $O(P^2)$. Σε τυπικές σκηνές με μεγάλη πολυπλοκότητα ο αλγόριθμος αυτός είναι αργός. Ένα από τα πλεονεκτήματά του είναι ότι μπορεί εύκολα να επεκταθεί για να χειριστεί τη διαφάνεια.

5.5.4 Αλγόριθμος εκπομπής ακτίνων (ray casting)

Όπως υποδεικνύει και το όνομά του, ο αλγόριθμος αυτός εκπέμπει μια *ακτίνα* για κάθε εικονοστοιχείο **p**. Η ακτίνα ορίζεται από το σημείο παρατήρησης **v** και το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathbf{p}-\mathbf{v}}$. Υπολογίζονται οι τομές με όλα τα αντικείμενα της σκηνής και η πλησιέστερη τομή στο **v** καθορίζει το ορατό αντικείμενο. Ένας αποτελεσματικός αλγόριθμος για την τομή ακτίνας-τριγώνου δίνεται στο Παράρτημα Γ. Ο αλγόριθμος αυτός όμως μπορεί να εφαρμοσθεί για οποιοδήποτε στοιχειώδες αντικείμενο ορίσουμε αλγόριθμο τομής με ακτίνα. Η βασική του μορφή είναι:

```
RayCasting(primitiveDB, v);   {
    for each pixel p   {
        minp = MAXINT;
        for each primitive R in primitiveDB  {
            /* υπολογισμός τομής ακτίνας (v,p) με R */
            i=intersect_primitive_ray(R,v,p);
            /* MAXINT αν δεν υπάρχει τομή */
            if (|i-v| < minp)  {
                p->nearest_primitive = R;
                minp = |i-v|
            }
        }
    }
}
```

Ακόμα και με χρήση αποτελεσματικών αλγορίθμων τομής και περιβαλλόντων όγκων (βλέπε Ενότητα 5.6.1), ο αλγόριθμος εκπομπής ακτίνων είναι αργός, $O(pP)$, κα-

Αλγόριθμος ΑΚΕ	Πολυπλοκότητα	Χώρος Εφαρμογής
Z-Buffer	$O(Ps) \simeq O(p)$	Εικόνας
BSP	$O(P^2)$	Αντικειμένων
Ταξινόμηση κατά βάθος	$O(P^2)$	Αντικειμένων
Εκπομπή ακτίνων	$O(pP)$	Εικόνας/Αντικειμένων

Πίνακας 5.1: *Πολυπλοκότητα και χώρος εφαρμογής αλγορίθμων ΑΚΕ.*

θώς δεν εκμεταλλεύεται την συνάφεια. Ωστόσο, είναι πολύ γενικός, αφού μπορεί εύκολα να εφαρμοσθεί στα περισσότερα στοιχειώδη αντικείμενα. Ένας απλός τρόπος επιτάχυνσής του είναι ο καταμερισμός των ακτίνων μεταξύ παράλληλων επεξεργαστών (βλέπε Κεφάλαια 15 και 9 για περισσότερες λεπτομέρειες).

Ο αλγόριθμος εκπομπής ακτίνων μπορεί να εφαρμοστεί, τόσο πριν, όσο και μετά την προοπτική προβολή. Στην πρώτη περίπτωση οι ακτίνες είναι οι ίδιες οι ακτίνες προβολής, ενώ στη δεύτερη είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους και κάθετες στο επίπεδο προβολής. Συνεπώς, ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να θεωρηθεί είτε χώρου αντικειμένων είτε χώρου εικόνας.

Συνοψίζοντας, ο Πίνακας 5.1 παρουσιάζει την πολυπλοκότητα και τον χώρο εφαρμογής των αλγορίθμων ΑΚΕ που μελετήθηκαν.

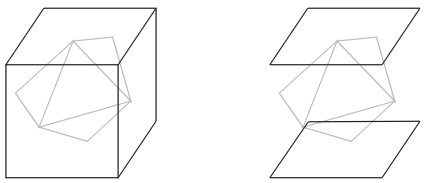
5.6 Βελτίωση απόδοσης

Η τρέχουσα Ενότητα περιλαμβάνει τεχνικές για τη βελτίωση της απόδοσης των υπολογισμών τομής που συχνά απαιτούνται στην περικοπή, στην ΑΚΕ, στην παρακολούθηση ακτίνων (Κεφάλαιο 15) και σε άλλους αλγορίθμους.

5.6.1 Περιβάλλοντες όγκοι

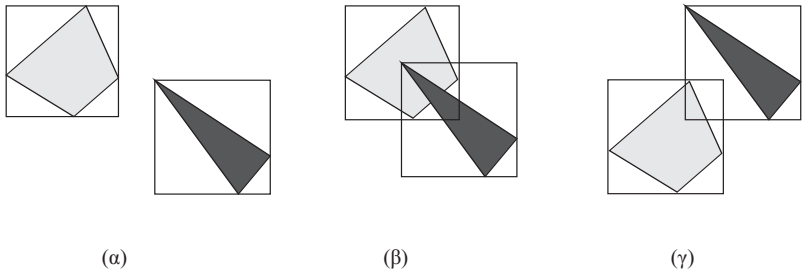
Οι *περιβάλλοντες όγκοι* χρησιμοποιούνται για βελτίωση της αποτελεσματικότητας ελέγχων τομής μεταξύ πολύπλοκων αντικειμένων.

Τα περισσότερα μοντέλα που κατασκευάζονται σε συνθετικούς κόσμους έχουν μεγάλη πολυπλοκότητα, καθώς μοντελοποιούν αντικείμενα του πραγματικού κόσμου με απλά στοιχειώδη σχήματα. Ένας απλός τρόπος μείωσης του κόστους υπολογισμού τομής για ένα πολύπλοκο αντικείμενο είναι η περιβολή του εντός ενός περιβάλλοντος

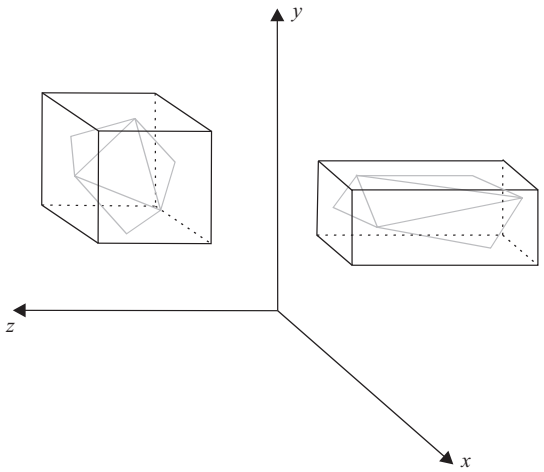


(α) (β)

Σχήμα 5.16: *(α) Παράδειγμα περιβάλλοντος όγκου, (β) ανοικτός περιβάλλων όγκος.*



Σχήμα 5.17: *2Δ παραδείγματα τομών περιβαλλόντων όγκων: (α) μη τεμνόμενοι, (β), (γ) τεμνόμενοι, (γ) τεμνόμενοι χωρίς να τέμνονται τα μοντέλα.*



Σχήμα 5.18: *Περιβάλλοντα κιβώτια ευθυγραμμισμένα με τους άξονες (axis-aligned bounding boxes – AABB).*

όγκου, όπως ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ή μια σφαίρα (Σχήμα 5.16). Ένας περιβάλλων όγκος δεν είναι απαραίτητα κλειστός, π.χ. μπορεί να χρησιμοποιηθεί η έκταση ενός αντικειμένου σε μια από τις διαστάσεις του 3Δ χώρου (Σχήμα 5.16(β)).

Ή τομή με τον περιβάλλοντα όγκο δεν συνεπάγεται και τομή με το περιβαλλόμενο μοντέλο, καθώς ο περιβάλλων όγκος συνήθως περιλαμβάνει και *κενό χώρο*. Σε περίπτωση τέτοιας τομής απαιτείται διεξοδική διερεύνηση, βρίσκοντας την (υπολογιστικά ακριβή) τομή με το μοντέλο. Αντίθετα η μη τομή με τον περιβάλλοντα όγκο συνεπάγεται και μη τομή με το μοντέλο, πράγμα που μειώνει το κόστος στις περισσότερες περιπτώσεις. Το Σχήμα 5.17 δίνει 2Δ παραδείγματα.

Όταν δεν τέμνεται ο περιβάλλων όγκος δεν υπολογίζεται τομή με το μοντέλο, πράγμα που μπορεί να μειώσει σημαντικά το κόστος εύρεσης τομών. Ένας καλός περιβάλλων όγκος πρέπει να έχει δύο χαρακτηριστικά: να είναι απλός και να έχει λίγο κενό χώρο.

Το πρώτο χαρακτηριστικό είναι απαραίτητο για να είναι φθηνοί οι έλεγχοι τομής με τον περιβάλλοντα όγκο. Το δεύτερο, για να μειωθούν οι περιπτώσεις όπου ενώ υπάρ-

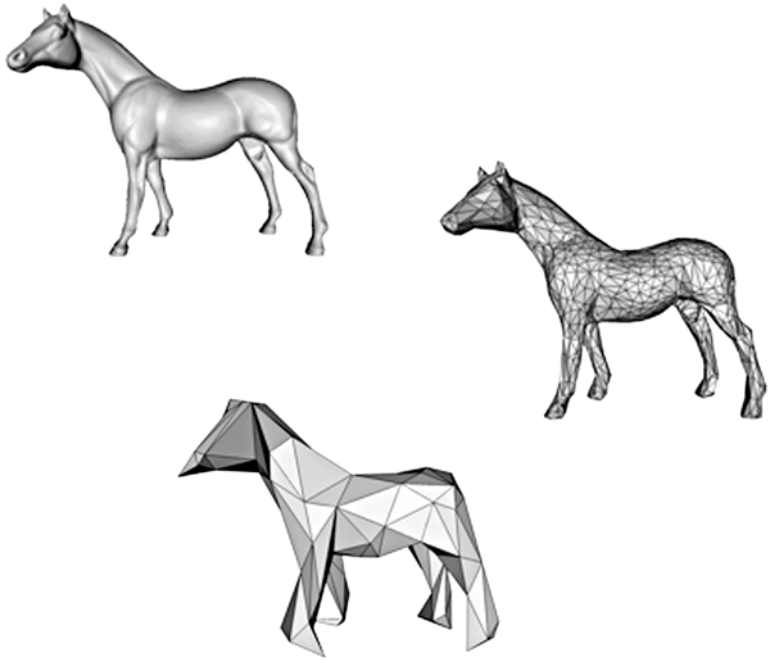
χει τομή με τον περιβάλλοντα όγκο δεν υπάρχει τομή με το περιβαλλόμενο μοντέλο. Δυστυχώς η ταυτόχρονη επίτευξη και των δύο χαρακτηριστικών είναι δύσκολη.

Εύκολα μπορεί να δημιουργηθεί περιβάλλον ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με πλευρές παράλληλες στα επίπεδα xy, yz και xz, από τα ελάχιστα και τα μέγιστα των συντεταγμένων των κορυφών του μοντέλου. Ένας τέτοιος περιβάλλων όγκος ονομάζεται *περιβάλλον κιβώτιο ευθυγραμμισμένο με τους άξονες (axis-aligned bounding box – AABB)* (Σχήμα 5.18). Τα AABB έχουν γενικά πολύ κενό χώρο. Το *προσανατολισμένο περιβάλλον κιβώτιο (oriented bounding box – OBB)* [Gott96] είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με τυχαίο προσανατολισμό. Με κατάλληλη επιλογή του προσανατολισμού, ένα OBB μπορεί να έχει λιγότερο κενό χώρο από ότι ένα AABB. Μπορούν να κατασκευαστούν και ιεραρχικοί περιβάλλοντες όγκοι οι οποίοι δίνουν καλύτερο συνδυασμό απλότητας και κενού χώρου. Αυτοί περιλαμβάνουν ιεραρχίες *k-DOP* [Klos98] (πολύεδρα των οποίων οι πλευρές μπορούν να έχουν μόνο προκαθορισμένους προσανατολισμούς) και ιεραρχίες OBB. Και τα δύο δημιουργούν δένδρα εγκιβωτισμένων όγκων. Η ρίζα αντιπροσωπεύει τον περιβάλλοντα όγκο που εσωκλείει ολόκληρο το μοντέλο. Αυτό περιέχει ιεραρχικά μικρότερους όγκους που εσωκλείουν τμήματα του μοντέλου, ως τα στοιχειώδη σχήματα. Κατά την εύρεση τομής, η δενδροειδής δομή βοηθά στο γρήγορο εντοπισμό της περιοχής όπου, ενδεχομένως, υπάρχει τομή. Μια άλλη ιεραρχική μέθοδος που είναι αποτελεσματική για πολύπλοκα αντικείμενα, είναι τα *προοδευτικά περιβλήματα (progressive hulls)*, δηλαδή μια σειρά περιβλημάτων αυξανόμενης πολυπλοκότητας που έχουν προοδευτικά λιγότερο κενό χώρο [Plat03] (Σχήμα 5.19). Κάθε περίβλημα της ιεραρχίας εσωκλείει όλα τα επερχόμενα περιβλήματα (και βέβαια όλα τα περιβλήματα εσωκλείουν το μοντέλο). Όσο πιο έξω είναι ένα περίβλημα, τόσο απλούστερο είναι, αλλά έχει και περισσότερο κενό χώρο. Τα περιβλήματα ελέγχονται διαδοχικά για τομή ξεκινώντας από το εξωτερικό (απλούστερο) και η διαδικασία σταματά όταν δεν βρεθεί τομή για κάποιο περίβλημα ή φτάσουμε στο μοντέλο (το οποίο πρέπει πλέον να ελεγχθεί αναλυτικά).

Ακολουθεί ο ψευδοκώδικας για τον ιεραρχικό έλεγχο τομής ενός μοντέλου `M`:

```
IntersectionTest(M);  {
    if BottomLevel(M)  return(LLIntersectionTest(M))
    else
        if LLIntersectionTest(BoundingVolume(M))  {
            v = false;
            for each component M->C
                v = (v || IntersectionTest(M->C));
            return(v);
        }
        else return(false);
}
```

όπου το `LLIntersectionTest` εκτελεί αναλυτικό έλεγχο τομής με τα στοιχειώδη αντικείμενα της παραμέτρου του και το `M->C` παριστάνει ένα επίπεδο χαμηλότερα στην ιεραρχία αντικειμένων.



Σχήμα 5.19: *Προοδευτικά περιβλήματα ως περιβάλλοντες όγκοι: άλογο με 96966 πολύγωνα ακολουθούμενο από τα περιβλήματά του με 2000 και 200 πολύγωνα.*

5.6.2 Υποδιαίρεση χώρου

Οι τεχνικές υποδιαίρεσης χώρου διαιρούν τον 3Δ χώρο σ' ένα διατεταγμένο σύνολο *κελιών*. Τα κελιά που καταλαμβάνει ένα μοντέλο καθορίζουν έμμεσα, την σχέση του στο χώρο με άλλα μοντέλα. Συνεπώς μπορούμε να ελέγξουμε αν υπάρχει πιθανότητα τομής μεταξύ δύο αντικειμένων ελέγχοντας αν καταλαμβάνουν κοινά κελιά. Επιπλέον, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ταξινόμηση των κελιών για να συνάγουμε αν ένα αντικείμενο A —δυνητικά— παρεμποδίζει ένα άλλο αντικείμενο B. Οι τεχνικές υποδιαίρεσης χώρου απαιτούν εξειδικευμένες δομές για τα κελιά και ένα βήμα προ-επεξεργασίας για την αντιστοίχιση αντικειμένων σε κελιά.

Μία συνήθης τεχνική υποδιαίρεσης του 3Δ χώρου είναι το *οκταδικό δένδρο (octree)* (Σχήμα 5.20). Αυτό υποδιαιρεί αναδρομικά ένα αρχικό κελί (πεπερασμένη περιοχή του 3Δ χώρου, π.χ. κύβος) σε οκτώ υπο-κελιά. Ανάλογα με την υλοποίηση, η υποδιαίρεση σταματά:

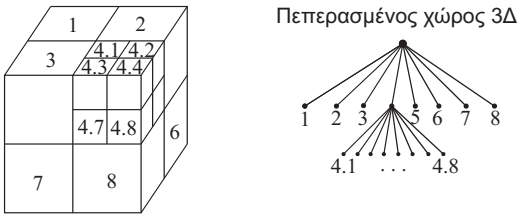
- όταν φθάσουμε σε ένα στοιχειώδες *ογκοστοιχείο (voxel)*, ή
- όταν η πολυπλοκότητα των αντικειμένων εντός του κελιού είναι κάτω από ένα όριο (π.χ., το κελί περιλαμβάνει ένα μόνο στοιχειώδες σχήμα).

Σε εφαρμογές περικοπής, μοντέλα που δεν καταλαμβάνουν κελιά ενδιαφέροντος μπορούν να απομακρυνθούν. Για παράδειγμα, κατά την περικοπή στο οπτικό πεδίο,

σχετικά είναι μόνο τα μοντέλα που καταλαμβάνουν κελιά που περιλαμβάνονται και στο οπτικό πεδίο. Κατά την περικοπή παρεμποδιζομένων, μόνο αντικείμενα που καταλαμβάνουν κελιά με τις ίδιες x και y συντεταγμένες χρειάζεται να ελεγχθούν για παρεμπόδιση. Επιπλέον, η ιδιότητα των κοινών κελιών μπορεί να αποφασιστεί στο υψηλότερο δυνατό επίπεδο του οκταδικού δένδρου για μείωση του υπολογιστικού κόστους.

5.7 Ασκήσεις

1. Επαναδιατυπώστε τον 3Δ αλγόριθμο Liang–Barksy έτσι, ώστε να είναι κατάλληλος για τυχαίο κυρτό πολύεδρο αποκοπής. Το πολύεδρο δίνεται ως σύνολο n επιπέδων P_i, $i = 1, 2, ..n$ με τα κανονικά τους διανύσματα $\vec{\mathbf{N}}_i$, $i = 1, 2, ..n$ που ορίζουν τον «εξωτερικό» ημι-χώρο κάθε επιπέδου. Ο όγκος του πολυέδρου είναι η τομή των «εσωτερικών» ημι-χώρων των n επιπέδων. Υποθέστε ότι το σύνολο των επιπέδων απαρτίζει ένα *κλειστό* κυρτό πολύεδρο.
2. Όπως η προηγούμενη, αλλά για τον 3Δ αλγόριθμο Sutherland–Hodgman. Τι πρόβλημα δημιουργεί η χρήση τυχαίου κυρτού πολυέδρου αποκοπής στην υλοποίηση σε υλικό;
3. ⊛ (Παράλληλη επεξεργασία.) Υλοποιήστε τα 6 στάδια του 3Δ αλγορίθμου Sutherland–Hodgman ως σωλήνωση 6 επεξεργαστών σε σύστημα παράλληλης επεξεργασίας της επιλογής σας. Μετρήστε την επιτάχυνση για διάφορα πλήθη πολυγώνων και εξηγήστε τα αποτελέσματα. Για περισσότερες πληροφορίες δείτε το [Theo89b].
4. ⊛ (Field programmable gate arrays (FPGA).) Όπως η προηγούμενη, αλλά να υλοποιήσετε την σωλήνωση σε σύστημα FPGA της επιλογής σας. Αν χρησιμοποιείτε μεταγλωττιστή υλικού (silicon compiler, π.χ. Handel-C), μπορείτε να προσπαθήσετε να γενικεύσετε τον κώδικα των σταδίων αποκοπής και στη συνέχεια να τον εξειδικεύσετε 6 φορές.
5. (Αποτελεσματικότητα περικοπής.) Να Υπολογίσετε χονδρικά το πλήθος των στοιχειωδών αντικειμένων που περικόπτονται από καθένα από τα 3 είδη περικοπής. Να αναφέρετε οποιεσδήποτε υποθέσεις χρειάζεται να κάνετε για τη σκηνή σας. Αν έχετε πρόσβαση σε σύστημα που μπορεί να εκτελέσει τα 3 είδη



Σχήμα 5.20: *Πεπερασμένος 3Δ χώρος και οκταδικό δένδρο.*

περικοπής, τρέξτε πειράματα για την πειραματική μέτρηση των περικοπτόμενων αντικειμένων για διάφορες παραμέτρους παρατήρησης.

6. (Συγχώνευση εικόνων βάθους.) Στο σύστημα γραφικών που χρησιμοποιείτε, βρείτε τον τρόπο να εξάγετε τις τελικές τιμές των καταχωρητών εικόνας και βάθους, μετά τη δημιουργία ενός καρέ. Στη συνέχεια υλοποιήστε αλγόριθμο για την συγχώνευση πολλαπλών τέτοιων ζευγών με σωστή διαχείριση του βάθους, γενικεύοντας έτσι τον αλγόριθμο του τέλους της Ενότητας 5.5.1.
7. (3Δ κέρσορας.) Στο σύστημα γραφικών που χρησιμοποιείτε, βρείτε τον τρόπο να εξάγετε τις τελικές τιμές των καταχωρητών εικόνας και βάθους, μετά τη δημιουργία ενός καρέ. Στη συνέχεια να υλοποιήσετε αλγόριθμο που να παρακολουθεί και να εμφανίζει έναν 3Δ κέρσορα σε μια ήδη δημιουργημένη εικόνα με σωστή ΑΚΕ (ο κέρσορας μπορεί να *κρύβεται* πίσω από τα αντικείμενα). Ο κέρσορας μπορεί να κινείται στις 3Δ, π.χ. χρησιμοποιώντας 6 πλήκτρα (2 για κάθε διάσταση). (*Βοήθημα:* θα χρειαστεί να υλοποιήσετε μικρή τροποποίηση στον αλγόριθμο Z-buffer).
8. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα του αλγορίθμου Z-buffer είναι η ικανότητά του να επεξεργάζεται τα αντικείμενα με τυχαία σειρά. Αυτό εξασφαλίζει ότι τα περιεχόμενα των καταχωρητών εικόνας και βάθους θα είναι ακριβώς τα ίδια, ανεξάρτητα από την σειρά επεξεργασίας των αντικειμένων; (*Βοήθημα:* Σκεφθείτε τις οριακές περιπτώσεις).
9. Να υλοποιήστε τον αλγόριθμο ΑΚΕ ταξινόμησης κατά βάθος, για μια σκηνή που αποτελείται από ένα μόνο κυρτό πολύεδρο που μεταφέρεται και περιστρέφεται τυχαία εντός κάποιων ορίων, όπως σε ένα screen-saver. (*Επισήμανση:* τα 5 βασικά βήματα του αλγορίθμου είναι αρκετά· δεν θα χρειαστεί να υποδιαιρέσετε τα πολύγωνα του πολυέδρου).
10. (Περιβάλλοντες όγκοι.) Υλοποιήστε τον αλγόριθμο τομής ακτίνας-τριγώνου του Παραρτήματος Γ. Στη συνέχεια επιλέξτε ένα πολύπλοκο μοντέλο αποτελούμενο από τουλάχιστον 1000 τρίγωνα. Αλλάξτε την κλίμακα του μοντέλου, έτσι ώστε να καταλαμβάνει περίπου το 10% του μοναδιαίου κύβου. Προσδιορίστε το περιβάλλον κιβώτιο του κλιμακωμένου μοντέλου από τα ελάχιστα και μέγιστα των x, y και z συντεταγμένων του. Μετά κατασκευάστε έναν απλό αλγόριθμο για την δημιουργία τυχαίων ακτίνων εντός του μοναδιαίου κύβου (ουσιαστικά για κάθε ακτίνα πρέπει να δημιουργείτε δύο τυχαία σημεία σε διαφορετικές πλευρές του κύβου). Δημιουργήστε έτσι από 1000 ως 10000 τυχαίες ακτίνες (με βήμα 1000) εντός του μοναδιαίου κύβου και μετρήστε το χρόνο που χρειάζεται για:

    - τον υπολογισμό της τομής κάθε ακτίνας (αν υπάρχει) με το μοντέλο, *χρησιμοποιώντας* το περιβάλλον κιβώτιο,
    - τον υπολογισμό της τομής κάθε ακτίνας (αν υπάρχει) με το μοντέλο, *μη χρησιμοποιώντας* το περιβάλλον κιβώτιο.

    Δημιουργήστε γράφημα μεταξύ του πλήθους των ακτίνων και του συνολικού χρόνου, με και χωρίς τη χρήση του περιβάλλοντος κιβωτίου.

6

Αναπαράσταση και απλοποίηση μοντέλων

Μιμεῖται γάρ ἡ τέχνη τήν φύσιν.
—Αριστοτέλης

6.1 Εισαγωγή

Οι 3Δ σκηνές που συντίθενται στα γραφικά και στην οπτικοποίηση απεικονίζουν αντικείμενα διαφόρων σχημάτων και δομών: στοιχειώδη γεωμετρικά σχήματα, όπως σφαίρες· επιφάνειες ελεύθερης μορφής με γνωστή μαθηματική περιγραφή, όπως πλέγματα NURBS (βλ. Κεφάλαιο 7)· τυχαίες επιφάνειες χωρίς συγκεκριμένη μαθηματική περιγραφή, όπως η επιφάνεια ενός ψηφιοποιημένου αντικειμένου· στερεά αντικείμενα των οποίων η εσωτερική δομή είναι εξίσου σημαντική με την επιφάνειά τους, όπως ένα ανθρώπινο όργανο· ακόμη και ακανόνιστα αντικείμενα, όπως καπνός.

Τα *μοντέλα* είναι προσεγγιστικές αναπαραστάσεις των αντίστοιχων αντικειμένων, που κατασκευάζονται έτσι ώστε να διατηρούν όσες περισσότερες ιδιότητες των αντικειμένων που αναπαριστούν είναι δυνατό, ενώ συγχρόνως επιδέχονται χειρισμούς απαιτούμενους σε αλγορίθμους γραφικών. Τα *πολυγωνικά μοντέλα* είναι η πιο συνήθης αναπαράσταση επιφανειών.

Ως αποτέλεσμα της αύξησης της επεξεργαστικής ισχύος των υπολογιστών και της προόδου των τεχνικών ψηφιοποίησης αντικειμένων, η ποσότητα της πληροφορίας που περιέχεται στα παραγόμενα μοντέλα αυξάνεται συνεχώς. Αν και η διαθέσιμη λεπτομέρεια είναι χρήσιμη για αρχειακούς σκοπούς ή άλλες εξειδικευμένες χρήσεις, οι συνήθεις εφαρμογές των γραφικών συχνά απαιτούν ή επωφελούνται από λιγότερο λεπτομερή μοντέλα. Η *απλοποίηση μοντέλων* στοχεύει στη μείωση της ποσότητας πληροφορίας που υπάρχει σε ένα μοντέλο χωρίς να θυσιάζει σημαντικά την ποιότητα της αναπαράστασης.

6.2 Επισκόπηση μορφών μοντέλων

Οι δύο κύριες κατηγορίες μοντέλων είναι οι *αναπαραστάσεις επιφάνειας* (που καλούνται επίσης *αναπαραστάσεις συνόρου* (boundary representations ή *b-reps*)), οι ο-

ποίες αναπαριστούν μόνο την επιφάνεια ενός αντικειμένου, και οι αναπαραστάσεις όγκου, οι οποίες αναπαριστούν ολόκληρο τον όγκο που καταλαμβάνει ένα (κλειστό) 3Δ αντικείμενο.

Οι αναπαραστάσεις επιφάνειας χρησιμοποιούνται πιο συχνά. Πολλά αντικείμενα δεν είναι κλειστά, επομένως οι αναπαραστάσεις όγκου δεν μπορούν να εφαρμοστούν. Επίσης τα περισσότερα αντικείμενα δεν είναι διαφανή, το εσωτερικό τους δεν είναι ορατό, και επομένως μπορούν να μειωθούν οι ανάγκες σε χώρο και επεξεργαστική ισχύ αν αναπαρίσταται μόνο η επιφάνειά τους η οποία, για οποιοδήποτε σκοπό, καθορίζει την εμφάνισή τους. Από την άλλη μεριά, αναπαραστάσεις όγκου χρησιμοποιούνται όταν απεικονίζονται ημιδιαφανή αντικείμενα ή, γενικότερα, αντικείμενα των οποίων ενδιαφέρει η εσωτερική δομή· ένα απτό παράδειγμα είναι η οπτικοποίηση τριδιάστατων πεδίων (βλ. την Ενότητα 18.2.2). Επιπλέον, αναπαραστάσεις διαμέρισης του χώρου χρησιμοποιούνται ως βοηθητικές δομές σε διάφορους αλγορίθμους γραφικών (βλ. για παράδειγμα, την Ενότητα 15.5.1).

Κάποιες μορφές μοντέλων δεν μπορούν να ενταχθούν εύκολα σε μία από τις παραπάνω δύο κατηγορίες. Μοντέλα που κατασκευάζονται με την τεχνική της Κατασκευαστικής Στερεάς Γεωμετρίας (*Constructive Solid Geometry, CSG*) αναπαριστούν ένα αντικείμενο συνδυάζοντας στοιχειώδη γεωμετρικά σχήματα (δείτε την Ενότητα 15.5.3 για μία σύντομη εισαγωγή). Επίσης, άμορφα αντικείμενα και φαινόμενα μπορούν να μοντελοποιηθούν ως νέφη σημείων ή συναθροίζοντας στοιχεία επιφανειών ή στερεών (όγκων).

Σχετικά με τα μοντέλα επιφάνειας, μπορούμε να διακρίνουμε αυτά τα οποία έχουν κάποια μαθηματική περιγραφή, όπως τα στοιχειώδη γεωμετρικά σχήματα, οι επιφάνειες NURBS (βλ. Κεφάλαιο 7), οι επιφάνειες υποδιαίρεσης (βλ. Κεφάλαιο 8), ή γενικές παραμετρικές επιφάνειες (βλ. Παράρτημα Β), καθώς και αυτά τα οποία δεν έχουν τέτοια μαθηματική περιγραφή. Τα τελευταία αποτελούνται από ένα σύνολο σημείων και ένα σύνολο (συνήθως επίπεδων) πολυγώνων που κατασκευάζονται με κορυφές αυτά τα σημεία· για το λόγο αυτό καλούνται *πολυγωνικά μοντέλα*. Συγκρίνοντας αυτές τις δύο μορφές μοντέλων επιφάνειας, σημειώνουμε ότι τα μαθηματικά μοντέλα αποτελούν συνήθως ακριβείς αναπαραστάσεις των αντίστοιχων αντικειμένων και επίσης επιτρέπουν ακριβείς υπολογισμούς μεγεθών που αφορούν το αντικείμενο, όπως του κανονικού διανύσματος· από την άλλη, είναι περιορισμένα σε συγκεκριμένα είδη αντικειμένων και δεν μπορούν να περιγράψουν τυχαία σχήματα. Αντιθέτως, τα πολυγωνικά μοντέλα αποτελούν προσεγγίσεις των αρχικών αντικειμένων, αν και μπορεί να είναι εξαιρετικά ακριβείς αν χρησιμοποιηθούν αρκετές κορυφές· είναι οι πιο γενικές αναπαραστάσεις, καθώς δεν υπάρχει πρακτικά όριο στο είδος των αντικειμένων που μπορούν να παραστήσουν—ακόμη και οι μαθηματικές αναπαραστάσεις απεικονίζονται συνήθως σε «διακριτή» μορφή, ως πολυγωνικά μοντέλα.

Τα πολυγωνικά μοντέλα μπορεί να αποτελούνται από πολύγωνα οποιουδήποτε πλήθους κορυφών· στην πράξη, τα πιο κοινά πολυγωνικά μοντέλα είναι αυτά που αποτελούνται από τετράπλευρα ή τρίγωνα. Μοντέλα αποτελούμενα από τετράπλευρα παράγονται με φυσικό τρόπο κατά τη σχεδίαση παραμετρικών επιφανειών (για παράδειγμα, επιφανειών τανυστικό γινόμενο, βλ. Ενότητα 7.6). Δυστυχώς ένα τετράπλευρο

στις 3Δ δεν είναι απαραίτητα επίπεδο, κάτι που δυσχεραίνει όλους τους υπολογισμούς πάνω στα (μη επίπεδα) τετράπλευρα του μοντέλου· από την άλλη μεριά, αν απαιτείται όλα τα τετράπλευρα να είναι επίπεδα, περιορίζεται το σχήμα και η ευελιξία του μοντέλου. Αυτά τα προβλήματα δεν υφίστανται σε τριγωνικά μοντέλα, καθώς ένα τρίγωνο είναι πάντοτε επίπεδο· επιπλέον ένα πολύγωνο μπορεί πάντα να τριγωνοποιηθεί αποδοτικά [Prep85, O'Ro98] και, επομένως, ένα τριγωνικό μοντέλο μπορεί να παραχθεί από οποιοδήποτε πολυγωνικό μοντέλο. Για τους λόγους αυτούς, τα τριγωνικά μοντέλα (που καλούνται επίσης *τριγωνικά πλέγματα*) προτιμώνται σχεδόν πάντοτε σε κάθε εφαρμογή που χρησιμοποιεί πολυγωνικά μοντέλα.

Τα πολυγωνικά μοντέλα γενικεύονται στις αναπαραστάσεις όγκου στα *πολυεδρικά μοντέλα*. Το στοιχειώδες πολυεδρικό σχήμα είναι το τετράεδρο, και τα *τετραεδρικά πλέγματα* αποτελούν την πιο γενική και ευέλικτη αναπαράσταση μοντέλων όγκου. Παρόλα αυτά, μοντέλα αποτελούμενα από παραλληλεπίπεδα εμφανίζονται πάρα πολύ συχνά, κυρίως ως το αποτέλεσμα διαδικασιών διαμέρισης του χώρου που χρησιμοποιούν ορθογώνια πλέγματα· τα παραγόμενα παραλληλεπίπεδα καλούνται *voxels* (volume elements–στοιχεία όγκου). Χρησιμοποιούνται επίσης ιεραρχικές αναπαραστάσεις όγκου όπως τα οκταδικά δένδρα (βλ. Ενότητα 15.5.1) και τα δένδρα δυαδικής διαμέρισης χώρου (BSP trees (βλ. Ενότητα 5.5.2).

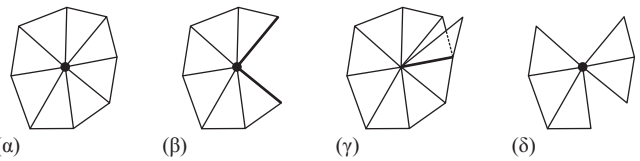
Στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με τα πολυγωνικά μοντέλα.

6.3 Ιδιότητες πολυγωνικών μοντέλων

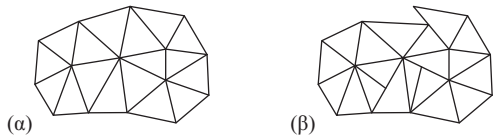
Ένα μοντέλο επιφάνειας είναι διδιάστατη *πολλαπλότητα* (ή απλώς πολλαπλότητα), αν κάθε σημείο της επιφάνειας έχει μία γειτονιά ομοιομορφική με έναν ανοικτό δίσκο (ανοικτός δίσκος είναι το εσωτερικό ενός κύκλου).[1] Με άλλα λόγια, ενώ η επιφάνεια υφίσταται στον τριδιάστατο χώρο, είναι τοπολογικά επίπεδη όταν εξετάζεται από κοντά σε μία αρκετά μικρή περιοχή γύρω από οποιοδήποτε σημείο της. Σε μία επιφάνεια που είναι πολλαπλότητα, κάθε ακμή ανήκει σε ακριβώς δύο έδρες και γύρω από κάθε κορυφή υπάρχει ένας κλειστός βρόχος εδρών. Ομοίως, ένα μοντέλο επιφάνειας είναι *πολλαπλότητα με σύνορο* αν κάθε σημείο της επιφάνειας έχει μια γειτονιά ομοιομορφική με έναν ημι-δίσκο. Σε μία πολλαπλότητα με σύνορο, κάποιες ακμές (αυτές που βρίσκονται στο σύνορο του μοντέλου) ανήκουν σε ακριβώς μία έδρα, και γύρω από κάποιες κορυφές (αυτές στο σύνορο) ο βρόχος των εδρών είναι ανοικτός. Το Σχήμα 6.1 παρουσιάζει κάποια τριγωνικά μοντέλα που είναι πολλαπλότητες και κάποια που δεν είναι. Για τις συνήθεις, τριδιάστατες επιφάνειες, μία πολλαπλότητα χωρίς σύνορο είναι *κλειστή* επιφάνεια.

Συνήθως υποθέτουμε ότι τα πολύγωνα που αποτελούν ένα πολυγωνικό μοντέλο εφάπτονται μόνο κατά μήκος των ακμών τους, και οι ακμές του μοντέλου τέμνονται

[1] Δύο αντικείμενα είναι *ομοιομορφικά* αν το ένα μπορεί να παραμορφωθεί με συνεχή και αντιστρέψιμο τρόπο (τέντωμα και καμπύλωση) ώστε να αποκτήσει το σχήμα του άλλου. Για παράδειγμα, ένας κύκλος και ένα τετράγωνο είναι ομοιομορφικά, όπως είναι και ένας κύβος, μία σφαίρα και ένα τετράεδρο. Τα ομοιομορφικά αντικείμνα έχουν κοινές τοπολογικές ιδιότητες όπως αριθμός οπών, το αν είναι πολλαπλότητες ή όχι, κ.λπ.)



Σχήμα 6.1: *(α) Τμήμα επιφάνειας που είναι πολλαπλότητα· (β) Συνοριακή κορυφή μίας πολλαπλότητας με σύνορο· (γ) Ακμή που παραβιάζει τον ορισμό της πολλαπλότητας· (δ) Κορυφή που παραβιάζει τον ορισμό της πολλαπλότητας με σύνορο.*



Σχήμα 6.2: *Το τριγωνικό πλέγμα (α) είναι απλοειδές σύμπλοκο, ενώ το (β) δεν είναι.*

μόνο στα άκρα τους. Τα τριγωνικά μοντέλα που ικανοποιούν αυτή την ιδιότητα καλούνται *απλοειδή σύμπλοκα*· το Σχήμα 6.2 παρουσιάζει ένα παράδειγμα τριγωνικού πλέγματος που είναι απλοειδές σύμπλοκο και ένα που δεν είναι.

Οι επιφάνειες διακρίνονται επίσης ως προς το αν μπορεί να οριστεί σε αυτές *προσανατολισμός* ή όχι. Διαισθητικά, μία προσανατολισμένη επιφάνεια έχει δύο «όψεις» — όπως μία σελίδα χαρτιού. Στις περισσότερες επιφάνειες που συναντώνται στην πράξη μπορεί να οριστεί προσανατολισμός. Στις κλειστές προσανατολισμένες επιφάνειες διακρίνονται η «εσωτερική» και η «εξωτερική» τους όψη. Το Σχήμα 6.3 παρουσιάζει ένα παράδειγμα επιφάνειας στην οποία *δεν* μπορεί να οριστεί προσανατολισμός, την ταινία του Möbius: αυτή η ταινία έχει στην πραγματικότητα μόνο μία όψη, καθώς αν ξεκινήσουμε από ένα σημείο της και κινηθούμε κατά μήκος της, θα φτάσουμε τελικά στο σημείο εκκίνησης έχοντας διατρέξει πλήρως όλη την επιφάνειά της. Κατά σύμβαση, το *κανονικό διάνυσμα* μίας κλειστής προσανατολισμένης επιφάνειας έχει φορά προς το εξωτερικό της επιφάνειας.

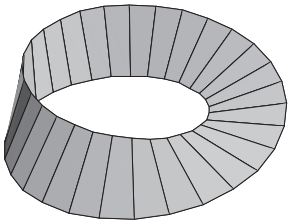
Τα κλειστά μοντέλα που είναι πολλαπλότητες ικανοποιούν την *εξίσωση τουEuler*,

$$V - E + F = 2, \tag{6.1}$$

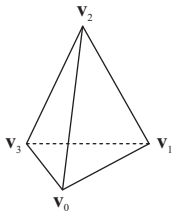
όπου V είναι ο αριθμός των κορυφών, E είναι ο αριθμός των ακμών, και F είναι ο αριθμός των όψεων του μοντέλου. Εξειδικεύοντάς την για κλειστά τριγωνικά μοντέλα (βλ. Άσκηση 1), αυτή η εξίσωση υποδεικνύει ότι ο αριθμός των τριγώνων του μοντέλου είναι περίπου διπλάσιος από τον αριθμό των κορυφών του, καθώς επίσης και ότι ο μέσος αριθμός τριγώνων γύρω από κάθε κορυφή είναι έξι. Η εξίσωση του Euler έχει γενικευτεί για μοντέλα που δεν είναι πολλαπλότητες ως εξής:

$$V - E + F = 2 - 2G, \tag{6.2}$$

όπου G είναι το *γένος* του μοντέλου· γένος ενός μοντέλου μπορεί να θεωρηθεί ο αριθ-



Σχήμα 6.3: *Η ταινία του Möbius, μία επιφάνεια στην οποία δεν ορίζεται προσανατολισμός.*



Σχήμα 6.4: *Το πολυγωνικό μοντέλο ενός τετραέδρου.*

μός των διαμπερών οπών του μοντέλου· για παράδειγμα, ένας τόρος έχει γένος 1, ένας διπλός τόρος έχει γένος 2, κ.ο.κ.

6.4 Δομές δεδομένων για πολυγωνικά μοντέλα

Για την αναπαράσταση πολυγωνικών μοντέλων έχουν προταθεί διάφορες δομές δεδομένων. Αυτές διαφέρουν ως προς τον τύπο των πολυγωνικών μοντέλων που μπορούν να αναπαραστήσουν, ως προς το πλήθος και το είδος των πληροφοριών του μοντέλου που διατηρούν άμεσα, και ως προς επιπλέον πληροφορίες που μπορούν ή δεν μπορούν να εξαχθούν από αυτές. Πληροφορίες χρήσιμες στις εφαρμογές γραφικών είναι οι εξής:

- *Τοπολογικές πληροφορίες*. Αν το μοντέλο είναι πολλαπλότητα, αν είναι κλειστό, αν έχει σύνορο ή οπές.

- *Πληροφορίες γειτνίασης*. Γειτονικές έδρες μίας δεδομένης ακμής και έδρας, ακμές και έδρες γύρω από δεδομένη κορυφή, το σύνορο ενός ανοικτού μοντέλου.

- *Ιδιότητες που έχουν αποδοθεί στο μοντέλο*. Κάθετα διανύσματα, χρώματα, ιδιότητες υλικών (βλ. Κεφάλαιο 12), συντεταγμένες υφής (βλ. Κεφάλαιο 14).

Οι πιο απλοϊκές δομές δεδομένων που έχουν χρησιμοποιηθεί είναι η *άμεση λίστα ακμών* (η *αναπαράσταση πλέγματος*) και η *άμεση λίστα εδρών*, οι οποίες περιέχουν, για κάθε ακμή ή έδρα του μοντέλου, τις συντεταγμένες των κορυφών του. Για παράδειγμα,

η λίστα ακμών του τετραέδρου του Σχήματος 6.4 είναι

$$\begin{aligned} e_0 &= \big((x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1)\big), & e_3 &= \big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big), \\ e_1 &= \big((x_0, y_0, z_0), (x_2, y_2, z_2)\big), & e_4 &= \big((x_1, y_1, z_1), (x_3, y_3, z_3)\big), \\ e_2 &= \big((x_0, y_0, z_0), (x_3, y_3, z_3)\big), & e_5 &= \big((x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)\big), \end{aligned}$$

και η λίστα εδρών είναι

$$\begin{aligned} f_0 &= \big((x_3, y_3, z_3), (x_2, y_2, z_2), (x_1, y_1, z_1)\big), \\ f_1 &= \big((x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_0, y_0, z_0)\big), \\ f_2 &= \big((x_1, y_1, z_1), (x_0, y_0, z_0), (x_3, y_3, z_3)\big), \\ f_3 &= \big((x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big). \end{aligned}$$

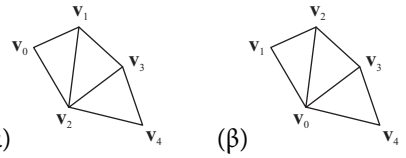
Η αναπαράσταση πλέγματος στην πραγματικότητα δεν είναι αναπαράσταση συνόρου, καθώς δεν προσδιορίζει τις έδρες του μοντέλου· αυτές μπορούν να εξαχθούν από τα δεδομένα των ακμών, όμως η διαδικασία δεν είναι άμεση και μπορεί να μην είναι μονοσήμαντη. Για παράδειγμα, αν δίνονται οι παραπάνω ακμές ενός τετραέδρου, δεν μπορούμε να ξέρουμε αν το τετράεδρο είναι κλειστό ή αν κάποια από τις έδρες του λείπει.

Η άμεση λίστα εδρών έχει επίσης σοβαρά μειονεκτήματα και δεν χρησιμοποιείται πλέον. Χρησιμοποιεί άσκοπα χώρο αποθήκευσης καθώς οι συντεταγμένες κάθε κορυφής επαναλαμβάνονται σε κάθε ακμή ή έδρα που την περιέχει· δεν παρέχει πληροφορίες γειτνίασης των ακμών και εδρών· ο υπολογισμός πληροφοριών γειτνίασης μπορεί πιθανώς να είναι προβληματικός, καθώς οι κοινές κορυφές μπορούν να ανιχνευθούν μόνο μέσω σύγκρισης των συντεταγμένων, όπου όμως μπορεί να υπεισέλθουν προβλήματα αριθμητικής ακρίβειας. Παρομοίως, η τροποποίηση του μοντέλου είναι αρκετά πολύπλοκη διαδικασία και υπάρχει κίνδυνος αλλοίωσης του μοντέλου, εάν δεν ανιχνευθούν σωστά οι γειτονικές έδρες.

Αρκετά από αυτά τα μειονεκτήματα αντιμετωπίζονται από την *δεικτοδοτημένη λίστα εδρών*. Αυτή η σύνθετη δομή δεδομένων περιέχει μία λίστα των κορυφών του μοντέλου και μία λίστα των εδρών του· οι κορυφές κάθε έδρας δίνονται ως αναφορές στη λίστα των κορυφών. Για παράδειγμα, το τετράεδρο του Σχήματος 6.4 αναπαρίσταται ως

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= (x_0, y_0, z_0), & f_0 &= (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1), \\ \mathbf{v}_1 &= (x_1, y_1, z_1), & f_1 &= (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0), \\ \mathbf{v}_2 &= (x_2, y_2, z_2), & f_2 &= (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_3), \\ \mathbf{v}_3 &= (x_3, y_3, z_3), & f_3 &= (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2). \end{aligned}$$

Αυτή η δομή δεδομένων μπορεί να παραστήσει οποιοδήποτε είδος πολυγωνικού μοντέλου, είναι πολύ πιο συμπαγής από την άμεση λίστα εδρών και επιτρέπει απευθείας τροποποιήσεις στις θέσεις των κορυφών του μοντέλου. Οι ακμές του μοντέλου μπορούν να ευρεθούν άμεσα, αλλά επαναλαμβάνονται σε κάθε πολύγωνο που τις περιέχει, επομένως για να παραχθεί μία έγκυρη λίστα μοναδικών ακμών του μοντέλου



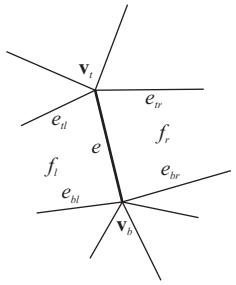
Σχήμα 6.5: *(α) Μία ταινία τριγώνων* $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$*, (β) Μία βεντάλια τριγώνων* $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$*.*

είναι απαραίτητη κάποια επεξεργασία. Επιπρόσθετα, η δεικτοδοτημένη λίστα εδρών δεν παρέχει πληροφορίες γειτνίασης για το μοντέλο, αν και τα δεδομένα που περιέχει είναι αρκετά για να υπολογιστούν. Όταν αυτή η δομή χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση προσανατολισμένων μοντέλων, οι κορυφές κάθε έδρας αναφέρονται, κατά σύμβαση, σε συγκεκριμένη σειρά: είτε κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού είτε κατά την αντίστροφη, όπως φαίνονται από το εξωτερικό του μοντέλου. Χρησιμοποιώντας αυτή τη σύμβαση, διευκολύνονται οι υπολογισμοί στο μοντέλο, ιδιαίτερα οι υπολογισμοί κανονικών διανυσμάτων (βλ. Ενότητα 12.5.1). Ειδικότερα για τριγωνικά μοντέλα, προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί η επανάληψη δεδομένων, οι περισσότερες βιβλιοθήκες γραφικών μπορούν να χειριστούν γειτονικά τρίγωνα πιο αποδοτικά ως *ταινίες τριγώνων* (triangle strips) ή *βεντάλιες τριγώνων* (triangle fans) (Σχήμα 6.5).

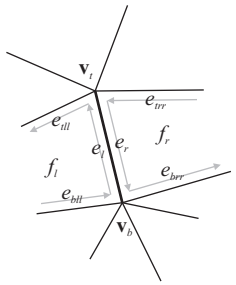
Χάρη στη γενικότητα, την απλότητα, και τη συμπάγειά της, η δεικτοδοτημένη λίστα εδρών αποτελεί τη βάση για πολλές κοινές μορφές αρχείων για 3Δ μοντέλα, όπως οι μορφές .OBJ (αντικείμενο Wavefront, [Murr96]) και .PLY [PLY07]. Σε αυτές τις μορφές αρχείων, η δομή επαυξάνεται με άλλα δεικτοδοτημένα δεδομένα για τα χαρακτηριστικά του μοντέλου (βλ. παραπάνω), τα οποία μπορεί να συνδέονται είτε με τις κορυφές είτε με τις έδρες του μοντέλου· για παράδειγμα, η αναπαράσταση ενός χρωματισμένου κύβου θα περιλαμβάνει μία λίστα χρωμάτων και μία λίστα καταχωρίσεων που θα υποδεικνύουν το χρώμα κάθε έδρας.

Υπάρχουν επίσης αρκετές πιο εξελιγμένες δομές δεδομένων για την αναπαράσταση πολυγωνικών μοντέλων, οι οποίες περιλαμβάνουν άμεσα κάποιες πληροφορίες γειτνίασης και επιτρέπουν την εύκολη εξαγωγή περισσότερων σχέσεων γειτνίασης. Όλες αυτές οι δομές είναι δεικτοδοτημένες και περιέχουν τουλάχιστον μία λίστα κορυφών στην οποία αναφέρονται τα υπόλοιπα στοιχεία του μοντέλου (ακμές και έδρες). Οι περισσότερες από αυτές τις δομές χειρίζονται μοντέλα τα οποία είναι πολλαπλότητες αλλά αποτελούνται από τυχαία πολύγωνα.

Μία τέτοια δομή δεδομένων είναι η αναπαράσταση *πτερωτής ακμής* (winged-edge) [Baum72]. Σε αυτή τη δομή, κεντρικός κόμβος πληροφορίας είναι η ακμή. Κάθε ακμή αποθηκεύει αναφορές στις δύο κορυφές της, στις δύο γειτονικές έδρες της, και στις τέσσερις γειτονικές ακμές της κατά μήκος των γειτονικών εδρών (Σχήμα 6.6). Η δομή πτερωτής ακμής αποθηκεύει επίσης, για κάθε κορυφή, αναφορά προς μία από τις ακμές που τη χρησιμοποιούν, και για κάθε έδρα, αναφορά προς μία από τις ακμές της. Αυτή η πρόσθετη πληροφορία επιτρέπει την «πλοήγηση» στην τοπολογία του μοντέλου και τον υπολογισμό ερωτημάτων γειτνίασης, πολλών μάλιστα σε σταθερό χρόνο. Η δομή πτερωτής ακμής μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να αναπαριστά και κάποιους τύπους



Σχήμα 6.6: *Η δομή δεδομένων πτερωτής ακμής. Η παχιά ακμή είναι* $e(\mathbf{v}_t, \mathbf{v}_b, f_l, f_r, e_{tl}, e_{tr}, e_{bl}, e_{br})$.



Σχήμα 6.7: *Η αναπαράσταση ημι-ακμής. Η παχιά ακμή διαχωρίζεται σε δύο ημι-ακμές,* $\tau\iota\varsigma\ e_l(\mathbf{v}_b, \mathbf{v}_t, f_l, e_{bll}, e_{tll}, e_r)$ *και* $e_r(\mathbf{v}_t, \mathbf{v}_b, f_r, e_{trr}, e_{brr}, e_l)$.

μοντέλων που δεν είναι πολλαπλότητες.

Η δομή δεδομένων *ημι-ακμής* (half-edge) [Weil85] είναι παρόμοια με την αναπαράσταση πτερωτής ακμής, αν και χρησιμοποιεί *προσανατολισμένες* ακμές: κάθε ακμή του μοντέλου «διαχωρίζεται» σε δύο ημι-ακμές, καθεμία από τις οποίες αποθηκεύει αναφορές στην αρχική και τελική κορυφή της, στη γειτονική έδρα της, στις δύο γειτονικές ακμές της κατά μήκος της γειτονικής έδρας της, και στην αντίθετή της ημι-ακμή (Σχήμα 6.7). Καθώς αυτός ο προσανατολισμός των ακμών ενυπάρχει στα μοντέλα που είναι πολλαπλότητες, η δομή ημι-ακμής είναι πιο αποδοτική από τη δομή πτερωτής ακμής για αρκετά ερωτήματα γειτνίασης.

Τέλος, η δομή δεδομένων *τετρα-ακμή* (quad-edge) [Guib85] είναι παρόμοια με τις παραπάνω αναπαραστάσεις, όμως η υλοποίησή της είναι πιο πολύπλοκη [Lisc94], επιτρέποντας τον αποδοτικό υπολογισμό ερωτημάτων γειτνίασης και, ιδιαίτερα, καθιστώντας την ικανή να αναπαριστά ταυτόχρονα μία πολλαπλότητα και την *δυϊκή* της. Το δυϊκό ενός μοντέλου προκύπτει στρέφοντας τις ακμές του κατά 90 μοίρες, αντικαθιστώντας τις κορυφές με έδρες και αντίστροφα: το δυϊκό ενός τετραέδρου είναι επίσης τετράεδρο, το δυϊκό ενός κύβου είναι οκτάεδρο και αντίστροφα. Αυτή η ιδιότητα της δομής τετρα-ακμής είναι χρήσιμη στο πεδίο της *υπολογιστικής γεωμετρίας*, η οποία μελετά γεωμετρικά προβλήματα με αλγοριθμικές μεθόδους.

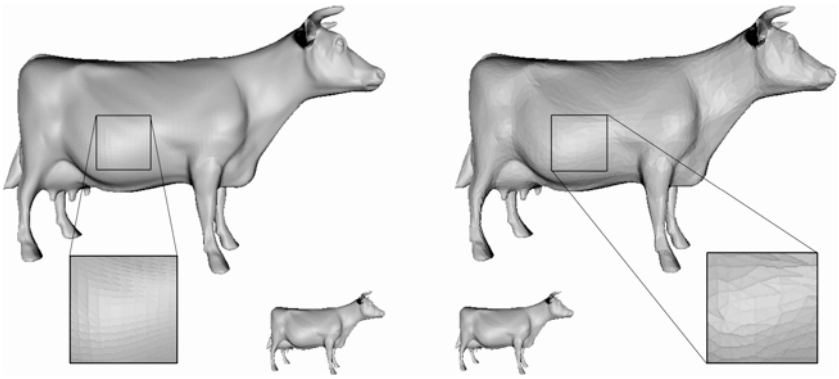
6.5 Απλοποίηση πολυγωνικών μοντέλων

Τα πολυγωνικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται στην πράξη παράγονται συνήθως αυτόματα, κατά τη σχεδίαση μαθηματικά οριζόμενων επιφανειών, με 3Δ σάρωση πραγματικών αντικειμένων ή με άλλες παρόμοιες διαδικασίες. Η επιδίωξη υψηλής ακρίβειας αναπαράστασης, υποβοηθούμενη από τη συνεχή αύξηση της υπολογιστικής ισχύος καθώς και τις προόδους στις τεχνικές 3Δ σάρωσης και άλλων τεχνικών συλλογής δεδομένων, οδηγεί στην παραγωγή μοντέλων τα οποία συλλαμβάνουν και τις παραμικρές λεπτομέρειες των αναπαριστώμενων επιφανειών, με τίμημα, όμως, το πολύ μεγάλο πλήθος κορυφών και εδρών τους. Επιπρόσθετα, το μέγεθος των πολυγώνων που τα αποτελούν είναι συνήθως ομοιόμορφο σε όλη την επιφάνεια του μοντέλου λόγω των τεχνικών που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή τους.

Ως παράδειγμα αναφέρουμε το έργο *Digital Michelangelo* [Levo00] που ασχολήθηκε με τη σάρωση και την ανακατασκευή κάποιων από τα γλυπτά που φιλοτέχνησε ο Μιχαήλ Άγγελος. Χρησιμοποιώντας την πιο εξελιγμένη τεχνολογία 3Δ σάρωσης που ήταν διαθέσιμη τότε, τα γλυπτά σαρώθηκαν σε ανάλυση μέχρι και 1/4 του χιλιοστού, και τα τριγωνικά πλέγματα που παράχθηκαν περιέχουν μερικές εκατοντάδες χιλιάδες τρίγωνα (ανάλογα και με το φυσικό μοντέλο του γλυπτού) και καταλαμβάνουν αρκετά GigaByte αποθηκευτικού χώρου. Τέτοια λεπτομέρεια είναι σίγουρα απαιτούμενη για αρχειακούς σκοπούς, όμως είναι πιθανότατα άχρηστη για οποιαδήποτε άλλη πρακτική εφαρμογή, καθώς είναι ορατή μόνο σε εξαιρετικά μεγάλη μεγέθυνση. Επιπλέον, η επεξεργασία της ποσότητας δεδομένων αυτών των μοντέλων είναι δύσκολη έως αδύνατη, ακόμη και από τους πιο εξελιγμένους υπολογιστές για αρκετά χρόνια ακόμη.

Σε αρκετά μικρότερη κλίμακα, τα μοντέλα συνήθως δημιουργούνται με την μεγαλύτερη λεπτομέρεια που αναμένεται να είναι χρήσιμη σε μία συγκεκριμένη εφαρμογή. Ακόμη και σε αυτή την περίπτωση, η εφαρμογή μπορεί να επωφεληθεί από πολλαπλές *αναλύσεις* (*επίπεδα λεπτομέρειας* – level of detail, LOD) του μοντέλου, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε διαφορετικές συνθήκες θέασης. Για παράδειγμα, όταν η προβολή στην οθόνη ενός μοντέλου είναι αρκετά μικρή, μόνο ένα μικρό μέρος της λεπτομέρειάς του είναι ευδιάκριτο και η σχεδίαση περισσότερων λεπτομερειών θα αποτελούσε απλώς σπατάλη πόρων (Σχήμα 6.8). Επίσης, σε πολλές καταστάσεις θα ήταν επωφελής η διαφοροποίηση της λεπτομέρειας σε διαφορετικές περιοχές του μοντέλου· για παράδειγμα, συνεπίπεδα τρίγωνα θα μπορούσαν να συγχωνευθούν σε λιγότερα και μεγαλύτερα, ενώ περιοχές της επιφάνειας πλησιέστερες στον παρατηρητή θα απαιτούσαν περισσότερη λεπτομέρεια από αυτές που είναι πιο απομακρυσμένες. Όλα αυτά ισχύουν ιδιαίτερα για διαδραστικές εφαρμογές που εμφανίζουν πολύπλοκες σκηνές, στις οποίες ο συνολικός αριθμός πολυγώνων που πρέπει να υποστούν επεξεργασία κάθε στιγμή είναι σημαντικός.

Για τους λόγους αυτούς, έχουν αναπτυχθεί αρκετές τεχνικές *απλοποίησης* μοντέλων. Κοινός στόχος τους είναι η μείωση του αριθμού των εδρών ενός πολυγωνικού μοντέλου, διατηρώντας την εμφάνιση και τη δομή του αρχικού μοντέλου όσο καλύτερα είναι αυτό δυνατό για συγκεκριμένο αριθμό εδρών. Οι εφαρμογές που χρησιμοποιούν τα απλοποιημένα μοντέλα συνήθως εκμεταλλεύονται πολλαπλα επίπεδα λε-



Σχήμα 6.8: *Πάνω: Το μοντέλο της αγελάδας με 5000 τρίγωνα (αριστερά) και απλοποιημένο σε 1000 τρίγωνα (δεξιά). Κάτω: Τα ίδια μοντέλα σε μικρότερο μέγεθος· οι διαφορές τους δεν είναι πλέον ευδιάκριτες. (Η απλοποίηση έγινε με το λογισμικό QSlim [Garl97].)*

πτομέρειας του αρχικού μοντέλου επιλέγοντας δυναμικά αυτό που ταιριάζει καλύτερα, κάθε στιγμή, στη διαμόρφωση της σκηνής.

Η ιδέα της απλοποίησης μοντέλων δεν είναι καινούργια [Clar76], όμως οι πιο ενδιαφέρουσες τεχνικές απλοποίησης αναπτύχθηκαν σχετικά πρόσφατα. Οι τεχνικές αυτές διαφέρουν μεταξύ τους σε πολλά σημεία: μπορούν να εφαρμοστούν σε διαφορετικές κατηγορίες μοντέλων, απλοποιούν τα μοντέλα με διαφορετικούς τρόπους, έχουν διαφορετικές προτεραιότητες και εφαρμογές.

Ως προς τους τομείς εφαρμογής τους, οι αλγόριθμοι απλοποίησης αντιμετωπίζουν με μεγαλύτερη ευκολία μοντέλα που αποτελούν κλειστές πολλαπλότητες. Το σύνορο μη κλειστών μοντέλων αντιμετωπίζεται επίσης, στις περισσότερες περιπτώσεις, όμως μοντέλα που δεν αποτελούν πολλαπλότητες μπορούν να απλοποιηθούν από σχετικά λίγους αλγορίθμους.

Μία ταξινόμηση των μεθόδων απλοποίησης μπορεί να γίνει ως προς τα αν η μέθοδος παράγει *διακριτά* ή *συνεχή* επίπεδα λεπτομέρειας του αρχικού μοντέλου. Στην πρώτη περίπτωση, ορίζεται ένας επιδιωκόμενος αριθμός εδρών και ο αλγόριθμος παράγει ένα νέο μοντέλο με αυτό τον αριθμό εδρών· αν ζητηθεί ένα άλλο επίπεδο λεπτομέρειας, πρέπει ο αλγόριθμος να εκτελεστεί εξαρχής. Στη δεύτερη περίπτωση, χρησιμοποιώντας τοπικές απλοποιήσεις του μοντέλου (αφαίρεση μεμονωμένων κορυφών, ακμών ή εδρών), ο αλγόριθμος παράγει μία συνεχή ακολουθία ολοένα και απλούστερων μοντέλων, από το αρχικό λεπτομερές μοντέλο μέχρι ένα απλό, *βασικό* μοντέλο. Καταγράφοντας τα βήματα απλοποίησης, μπορεί να παραχθεί οποιοδήποτε ενδιάμεσο επίπεδο λεπτομέρειας. Έναν τέτοιο αλγόριθμο παρουσιάζουμε στην ενότητα 6.5.1.

Οι αλγόριθμοι συνεχούς απλοποίησης είναι πολύ πιο ενδιαφέροντες από αυτούς που παράγουν διακριτά μοντέλα. Εκτός από την ευελιξία που παρέχουν στην ανάλυση των απλοποιούμενων μοντέλων, αρκετοί από αυτούς είναι εύκολα *αντιστρέψιμοι*, επιτρέποντας στην εφαρμογή να κινείται εμπρός ή πίσω μεταξύ ενδιάμεσων επιπέδων λεπτομέρειας. Επιπλέον, κάποιοι αλγόριθμοι επιτρέπουν την *επιλεκτική* εκλέπτυνση (προσθήκη λεπτομέρειας) και εκτράχυνση (αφαίρεση λεπτομέρειας) του πλέγματος.

Με αυτό τον τρόπο καθιστούν εφικτή τη δυναμική προσαρμογή της λεπτομέρειας σε διαφορετικές περιοχές του μοντέλου ανάλογα με τις ανάγκες της εφαρμογής. Τέλος, είναι συνήθως δυνατή η *ομαλή* εκλέπτυνση ή εκτράχυνση του πλέγματος, κάτι που ελαχιστοποιεί τις οπτικές ατέλειες κατά την εναλλαγή επιπέδων λεπτομέρειας σε διαδραστικές εφαρμογές.

Ένα σημαντικό ζήτημα για όλους τους αλγορίθμους απλοποίησης είναι το πώς μπορεί να αποτιμηθεί η ποιότητα ενός απλοποιημένου μοντέλου σε σχέση με το αρχικό. Μέτρα της ποιότητας της απλοποίησης χρησιμοποιούνται από την πλειοψηφία των αλγορίθμων απλοποίησης ώστε να βρεθεί η «καλύτερη» θέση για την τοποθέτηση μιας νέας κορυφής ή ώστε να καθοριστεί η ακμή που θα πρέπει να αφαιρεθεί πρώτη για να ελαχιστοποιηθεί η διαφορά του απλοποιημένου μοντέλου από το αρχικό. Αυτά τα μέτρα χρησιμοποιούνται επίσης για τον υπολογισμό μίας συνολικής εκτίμησης της ποιότητας του τελικού μοντέλου, έτσι ώστε διαφορετικοί αλγόριθμοι να μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους [Cign98].

Η μέθοδος που χρησιμοποιείται πιο συχνά για αυτή την εκτίμηση είναι η μέτρηση κάποιας μορφής απόστασης μεταξύ του απλοποιημένου και του αρχικού μοντέλου. Για παράδειγμα, η *απόσταση Hausdorff* [Prep85] μετράει την μέγιστη απόσταση μεταξύ οποιωνδήποτε δύο σημείων δύο επιφανειών M ανδ M' ως

$$d_\infty(M, M') = \max\left(\max_{\mathbf{v}\in M}\{d(\mathbf{v}, M')\}, \max_{\mathbf{v}'\in M'}\{d(\mathbf{v}', M)\}\right),$$

όπου

$$d(\mathbf{v}, M) = \min_{\mathbf{w}\in M}\{|\mathbf{v} - \mathbf{w}|\}$$

είναι η απόσταση ενός σημείου $\mathbf{v}$ από μία επιφάνεια M, οριζόμενη ως η απόσταση του $\mathbf{v}$ από το πλησιέστερο σημείο $\mathbf{w}$ της επιφάνειας. Εναλλακτικά, η *μέση τετραγωνική απόσταση* δύο επιφανειών είναι

$$d_2(M, M') = \frac{1}{s}\int_{\mathbf{v}\in M} d(\mathbf{v}, M') + \frac{1}{s'}\int_{\mathbf{v}'\in M'} d(\mathbf{v}', M),$$

όπου s και s' είναι οι επιφάνειες των M και M', αντίστοιχα. Στην πράξη, αυτές οι σχέσεις πρέπει να διακριτοποιηθούν ώστε να εφαρμοστούν σε πολυγωνικά μοντέλα· αυτό επιτυγχάνεται δειγματοληπτώντας ένα πλήθος σημείων στις δύο επιφάνειες και χρησιμοποιώντας αυτά για τους υπολογισμούς. Άλλες προσεγγίσεις της απόστασης χρησιμοποιούνται συχνά από συγκεκριμένους αλγορίθμους καθώς ταιριάζουν καλύτερα με τους υπολογισμούς που πραγματοποιούν.

6.5.1 Απλοποίηση με διαδοχικές καταρρεύσεις ακμών

Ως ένα παράδειγμα μεθόδου απλοποίησης πολυγωνικών μοντέλων, παρουσιάζουμε την απλοποίηση τριγωνικών πλεγμάτων με διαδοχικές καταρρεύσεις ακμών. Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα [Pupp97, Garl99] για ανασκοπήσεις πολύ περισσότερων μεθόδων απλοποίησης.

Η κατάρρευση ακμής (edge collapse) [Hopp96] είναι μία τοπική πράξη σε ένα τριγωνικό πλέγμα η οποία αφαιρεί μία ακμή του μοντέλου και τα δύο εφαπτόμενα αυτής τρίγωνα συρρικνώνοντας την ακμή σε μία μοναδική κορυφή (Σχήμα 6.9). Χρησιμοποιώντας καταρρεύσεις ακμών, είναι σχετικά εύκολο να υπολογιστεί ένα μέτρο της απόστασης του απλοποιημένου πλέγματος από αυτό πριν την κατάρρευση της ακμής, καθώς διαφέρουν μόνο στις όψεις γύρω από την αφαιρούμενη ακμή. Υποθέτουμε εδώ ότι το μοντέλο είναι πολλαπλότητα, όμως παραλλαγές της μεθόδου υποστηρίζουν και μοντέλα που δεν είναι πολλαπλότητες. Οι ακμές που πρόκειται να αφαιρεθούν τοποθετούνται σε μία ουρά προτεραιότητας, χρησιμοποιώντας ως προτεραιότητα κάποιο μέτρο της επίδρασης της αφαίρεσής τους στο σφάλμα απλοποίησης, έτσι ώστε αυτές που θα έχουν μικρότερη επίδραση να αφαιρεθούν πρώτες. Ο αλγόριθμος συνοψίζεται στα εξής βήματα:

1. Για κάθε ακμή του μοντέλου που μπορεί να αφαιρεθεί,[2] υπολογίζεται μία προτεραιότητα κατάρρευσης· οι ακμές ταξινομούνται σε μία ουρά προτεραιότητας.

2. Εφόσον υπάρχουν ακμές στην ουρά και ο στόχος της απλοποίησης (για παράδειγμα, ένα μέγιστο σφάλμα ή ένας αριθμός όψεων για το βασικό πλέγμα) δεν έχει επιτευχθεί

   (α) αφαιρείται από την ουρά η ακμή με την υψηλότερη προτεραιότητα,

   (β) αυτή η ακμή καταρρέει, αφαιρείται (το πλέγμα αλλάζει μόνο τοπικά γύρω από αυτή την ακμή),

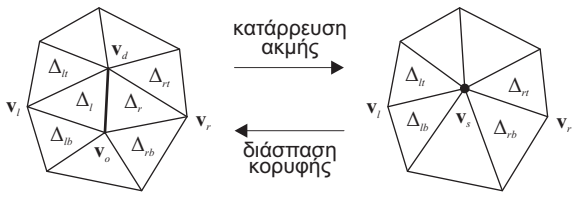
   (γ) υπολογίζονται ξανά οι προτεραιότητες όλων των ακμών απου επηρεάζονται από την κατάρρευση.

Το αποτέλεσμα αυτής της μεθόδου εξαρτάται από δύο παράγοντες:

- το μέτρο που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση κάθε κατάρρευσης ακμής και την απόδοση της προτεραιότητάς της, και

- τη θέση της νέας κορυφής για κάθε κατάρρευση ακμής.

[2]Για παράδειγμα, αν ο αλγόριθμος απλοποίησης πρέπει να διατηρήσει την τοπολογία του μοντέλου, δεν θα αφαιρέσει ακμές που θα δημιουργήσουν ή θα καταστρέψουν οπές σε αυτό.



Σχήμα 6.9: *Οι πράξεις της κατάρρευσης ακμής και της διάσπασης κορυφής.*

Σχετικά με τους δύο αυτούς παράγοντες της μεθόδου έχουν προταθεί πολλές και διαφορετικές τεχνικές, οι οποίες συνήθως υλοποιούν διαφορετικούς συμβιβασμούς μεταξύ της ταχύτητας και της ποιότητας της απλοποίησης. Σε κάποιες υλοποιήσεις, η θέση της νέας κορυφής είναι σταθερή, για παράδειγμα σε ένα από τα δύο άκρα της ακμής ή στο μέσο της. Σε πολλές άλλες υλοποιήσεις, οι παραπάνω παράγοντες είναι συσχετισμένοι: η θέση της νέας κορυφής υπολογίζεται ως το αποτέλεσμα μίας διαδικασίας βελτιστοποίησης η οποία στοχεύει στην ελαχιστοποίηση του σφάλματος απλοποίησης (εκτιμώμενο με κάποιο κατάλληλο μέτρο)· το ελάχιστο σφάλμα που επιτυγχάνεται χρησιμοποιείται και ως η προτεραιότητα της αντίστοιχης κατάρρευσης ακμής.

Ως παράδειγμα, παρουσιάζουμε τη μέθοδο *τετραγωνικού μέτρου σφάλματος* (quadric error metric) [Garl97, Garl98, Heck99], η οποία ελαχιστοποιεί την τετραγωνική απόσταση της νέας κορυφής από τις όψεις γύρω από την αφαιρούμενη ακμή. Αν Δ είναι μία τριγωνική όψη του μοντέλου με εξίσωση του αντίστοιχου επιπέδου

$$ax + by + cz + d = 0,$$

η τετραγωνική απόσταση ενός σημείου $\mathbf{x} = [x, y, z]^{\mathrm{T}}$ από το επίπεδο της Δ είναι

$$\begin{aligned} Q_{\Delta}(\mathbf{x}) &= \frac{(ax + by + cz + d)^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{(\vec{\mathbf{n}}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + d)^2}{|\vec{\mathbf{n}}|^2} = (\hat{\mathbf{n}}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + \hat{d})^2 \\ &= \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}^{\mathrm{T}})\mathbf{x} + 2\hat{d}\hat{\mathbf{n}}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + \hat{d}^2, \end{aligned}$$

όπου $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\mathbf{n}}}{|\vec{\mathbf{n}}|}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της Δ και $\hat{d} = \frac{d}{|\vec{\mathbf{n}}|}$. Επομένως, μπορεί να αναπαρασταθεί από την τετραγωνική μορφή

$$Q_{\Delta} = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, p) = (\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}^{\mathrm{T}}, \hat{d}\hat{\mathbf{n}}, \hat{d}^2)$$

έτσι ώστε

$$Q_{\Delta}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} + 2\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + p.$$

Με αυτό το συμβολισμό, το άθροισμα των τετραγωνικών αποστάσεων του $\mathbf{x}$ από δύο τρίγωνα Δ_1 και Δ_2 μπορεί να υπολογιστεί αθροίζοντας κατά συντεταγμένες τις αντίστοιχες τετραγωνικές μορφές $Q_{\Delta_1} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1, p_1)$ και $Q_{\Delta_2} = (\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2, p_2)$:

$$\begin{aligned} Q_{\Delta_1}(\mathbf{x}) + Q_{\Delta_2}(\mathbf{x}) &= \left(Q_{\Delta_1} + Q_{\Delta_2}\right)(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\mathbf{x} + 2(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + (p_1 + p_2). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αυτή είναι μία τετραγωνική μορφή παρόμοια με αυτές των Q_{Δ_i}· επίσης αυτό το αποτέλεσμα γενικεύεται άμεσα σε οποιονδήποτε αριθμό τριγώνων. Ο αλγόριθμος απλοποίησης αποδίδει, αρχικά, σε κάθε κορυφή $\mathbf{v}$ του πλέγματος την τετραγωνική μορφή που εκφράζει το άθροισμα των (τετραγωνικών) αποστάσεων ενός σημείου από τις όψεις γύρω από αυτή την κορυφή (κάθε όρος του αθροίσματος μπορεί να πολλαπλασιαστεί με το εμβαδό της αντίστοιχης όψης ως βάρος για καλύτερη

κλιμάκωση):

$$Q_{\mathbf{v}} = \sum_{\Delta \text{ γύρω από το } \mathbf{x}} w_\Delta Q_\Delta.$$

Τότε, όταν μία ακμή $e(\mathbf{v}_o, \mathbf{v}_d)$ καταρρέει, η συνολική τετραγωνική απόσταση της προκύπτουσας ακμής $\mathbf{v}_s$ από όλες τις όψεις γύρω από τις $\mathbf{v}_o$ και $\mathbf{v}_d$ είναι

$$Q(\mathbf{v}_s) = Q_{\mathbf{v}_o}(\mathbf{v}_s) + Q_{\mathbf{v}_d}(\mathbf{v}_s),$$

και επομένως αναπαρίσταται από την τετραγωνική μορφή

$$Q = Q_{\mathbf{v}_o} + Q_{\mathbf{v}_d},$$

η οποία είναι της γνωστής μορφής $Q = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, p)$. Ως βέλτιστη θέση για την κορυφή $\mathbf{v}_s$ μπορεί να θεωρηθεί αυτή που ελαχιστοποιεί την Q. Παραγωγίζοντας την Q, μπορεί εύκολα να φανεί ότι το ελάχιστο αυτής επιτυγχάνεται στο

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b},$$

και το ελάχιστο αυτό είναι

$$Q(\mathbf{v}_s) = -\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + p = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_s + p.$$

Αν ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι ιδιάζων, τότε η ελαχιστοποίηση περιορίζεται πάνω στην ακμή $e(\mathbf{v}_o, \mathbf{v}_d)$. Αν και αυτό αποτύχει επίσης, η $\mathbf{v}_s$ επιλέγεται μεταξύ των $\mathbf{v}_o$ και $\mathbf{v}_d$ ανάλογα με το ποια από αυτές δίνει τη μικρότερη τιμή στην Q.

Η απλοποίηση με χρήση διαδοχικών καταρρεύσεων ακμών έχει όλα τα πλεονεκτήματα των μεθόδων συνεχών επιπέδων λεπτομέρειας. Πρώτον, είναι εύκολα αντιστρέψιμη, πραγματοποιώντας *διασπάσεις κορυφών* (vertex splits) (Σχήμα 6.9) στο τραχύ βασικό μοντέλο σε σειρά αντίστροφη των αντίστοιχων καταρρεύσεων ακμών, με την προϋπόθεση να έχουν αποθηκευθεί οι θέσεις των αρχικών κορυφών στην αντίστοιχη κατάρρευση ακμής. Το βασικό πλέγμα, μαζί με την ακολουθία των διασπάσεων κορυφών που οδηγούν στο αρχικό μοντέλο, καλείται *προοδευτικό πλέγμα* (progressive mesh). Δεύτερον, διατηρώντας κάποιες επιπλέον πληροφορίες για τις γειτονικές κορυφές και όψεις κάθε αφαιρούμενης ακμής, είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί επιλεκτική εκλέπτυνση (selective refinement) και εκτράχυνση του πλέγματος σε περιοχές που ενδιαφέρουν [Xia96, Hopp97, DF97a, DF97b, DF98, Pupp98]. Επιπλέον, όπως έχει ήδη αναφερθεί, διάφορα μέτρα σφάλματος και στρατηγικές τοποθέτησης της κορυφής μπορούν να εφαρμοστούν, ώστε η μέθοδος να προσαρμοστεί σε διαφορετικούς σκοπούς και διαθέσιμους πόρους.

Η απλοποίηση μεγάλων μοντέλων είναι μία λειτουργία αρκετά χρονοβόρα, ιδιαίτερα αν χρησιμοποιείται κάποια διαδικασία βελτιστοποίησης· συνεπώς πραγματοποιείται συνήθως εκ των προτέρων και το αποτέλεσμά της αποθηκεύεται. Ωστόσο, τα επίπεδα λεπτομέρειας που προκύπτουν μπορούν να χρησιμοποιηθούν διαδραστικά σε πραγματικό χρόνο για την επιλεκτική εκλέπτυνση του μοντέλου. Η υποδομή για την

υποστήριξη απλοποίησης βασισμένης σε καταρρεύσεις ακμών υπάρχει ήδη σε αρκετές βιβλιοθήκες γραφικών.

6.6 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι στην περίπτωση *τριγωνικών* μοντέλων, η βασική εξίσωση του Euler (6.1) απλοποιείται σε $F + 4 = 2V$ ορ $3V = 6 + E$.

2. Κατασκευάστε έναν αλγόριθμο που να παράγει τη λίστα ακμών ενός μοντέλου που αναπαρίσταται με δεικτοδοτημένη λίστα εδρών. Ο αλγόριθμος πρέπει επίσης να αναφέρει τα ακόλουθα:

   - αν το μοντέλο είναι πολλαπλότητα ή όχι·
   - τις συνοριακές ακμές του, αν έχει.

3. Κατασκευάστε έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό των ακόλουθων πληροφοριών γειτνίασης ενός μοντέλου που αναπαρίσταται με δεικτοδοτημένη λίστα εδρών:

   - όλες τις ακμές γύρω από μία δεδομένα κορυφή·
   - όλες τις έδρες γύρω από μία δεδομένω κορυφή·
   - τις γειτονικές έδρες μίας δεδομένης έδρας.

4. Κατασκευάστε έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό της αναπαράστασης πτερωτής ακμής ενός μοντέλου που είναι πολλαπλότητα, εφόσον δίνεται η αναπαράστασή του με δεικτοδοτημένη λίστα εδρών.

5. Δεδομένης της αναπαράστασης πτερωτής ακμής ενός πολυγωνικού μοντέλου, κατασκευάστε έναν αλγόριθμο που να απαριθμεί

   - όλες τις κορυφές μίας δεδομένης έδρας·
   - όλες τις ακμές μίας δεδομένης έδρας·
   - όλες τις ακμές γύρω από μία κορυφή·
   - όλες τις έδρες γύρω από μία κορυφή.

6. Επαναλάβετε την Άσκηση 5 χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση ημι-ακμής.

7. Ένας απλός αλγόριθμος απλοποίησης τριγωνικών μοντέλων βασίζεται στη συγχώνευση σχεδόν συνεπίπεδων γειτονικών εδρών και στην τριγωνοποίηση εκ νέου του παραγόμενου πολυγώνου με λιγότερα τρίγωνα [Hink93, Kalv96]. Κατασκευάστε ένα πρόγραμμα που να υλοποιεί αυτή τη μέθοδο απλοποίησης. Αυτός ο αλγόριθμος παράγει εύκολα μία συνεχή ακολουθία απλοποιημένων μοντέλων;

8. Μία κατάρρευση ακμής μπορεί να αλλάξει την τοπολογία ενός τριγωνικού μοντέλου. Βρείτε μία περίπτωση που συμβαίνει αυτό· δείτε στα [Hopp93, Dey99, Cign00] για λεπτομέρειες.

9. Υλοποιήστε έναν αλγόριθμο για την απλοποίηση ενός τριγωνικού πλέγματος με διαδοχικές καταρρεύσεις ακμών. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το τετραγωνικό μέτρο σφάλματος που περιγράφηκε ή μία απλούστερη στρατηγική τοποθέτησης της ακμής και υπολογισμού του σφάλματος απλοποίησης.

7

Παραμετρικές καμπύλες και επιφάνειες

Οι εξισώσεις είναι απλώς το βαρετό μέρος των μαθηματικών.
Προσπαθώ να δω τα πράγματα με όρους της γεωμετρίας.
—Stephen Hawking

7.1 Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάσαμε αλγόριθμους για τη σχεδίαση βασικών γεωμετρικών σχημάτων, ευθειών και κύκλων. Όμως η σύνθεση ρεαλιστικών σκηνών με γραφικά απαιτεί τη χρήση πιο ευέλικτων, ελεύθερης μορφής καμπυλών και επιφανειών. Η περιοχή των γραφικών που ασχολείται με αυτά τα σχήματα ονομάζεται *γεωμετρική σχεδίαση με υπολογιστή* (computer-aided geometric design — CAGD). Στο παρόν κεφάλαιο θα εξετάσουμε αναπαραστάσεις και ιδιότητες των πιο βασικών μορφών τέτοιων καμπυλών και επιφανειών· ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα [Fari01, Hosc96, Bart87] για πιο προχωρημένα θέματα.

Η ανάγκη για μαθηματική αναπαράσταση σχημάτων ελεύθερης μορφής, κατάλληλης για επεξεργασία στον υπολογιστή, έγινε εμφανής κατά τη δεκαετία του 1960 στη βιομηχανία κατασκευής αυτοκινήτων και αεροπλάνων. Μέχρι τότε, τα σχέδια των μηχανικών για τη μορφή αυτοκινήτων και αεροπλάνων υλοποιούνταν μόνο κατά προσέγγιση, καθώς δεν υπήρχαν ακριβείς αναπαραστάσεις τέτοιων σχημάτων με πρακτική εφαρμογή. Τότε κατασκευάστηκαν μηχανές, οδηγούμενες από υπολογιστές, οι οποίες μπορούσαν να παραγάγουν αντικείμενα πολύπλοκης μορφής· έτσι έγινε απαραίτητη η επινόηση κατάλληλων μαθηματικών αναπαραστάσεων. Ο Paul de Casteljau και ο Pierre Bézier, εργαζόμενοι τότε ανεξάρτητα στη Citroën και στη Renault αντίστοιχα, ανέπτυξαν τη θεωρία των πολυωνυμικών καμπυλών και επιφανειών που τώρα φέρουν το όνομα του δεύτερου —η δουλειά του de Casteljau άργησε να δημοσιευθεί— και αποτελεί το βασικό εργαλείο για την περιγραφή και σχεδίαση σχημάτων ελεύθερης μορφής.

Όλες οι περιγραφές καμπυλών και επιφανειών που θα εξεταστούν στη συνέχεια του κεφαλαίου είναι σε παραμετρική μορφή, και παραπέμπουμε στο Παράρτημα Β (ιδιαίτερα στις Ενότητες Β.1.1 και Β.2.1) για μία επισκόπηση της σχετικής θεωρίας. Υ-

πενθυμίζουμε εδώ ότι μία καμπύλη σε παραμετρική αναπαράσταση δίνεται ως δύο ή τρεις —αν πρόκειται για καμπύλη στο επίπεδο ή στο χώρο, αντίστοιχα— ανεξάρτητες συνιστώσες συναρτήσεις ως προς μία παράμετρο t:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

Χάρη στην ανεξαρτησία των συνιστωσών συναρτήσεων, η περιγραφή μίας καμπύλης στο επίπεδο είναι ουσιαστικά όμοια με αυτή μίας καμπύλης στο χώρο: η $z(t)$ μπορεί να θεωρηθεί παντού μηδενική για μία καμπύλη στο επίπεδο. Ανάλογα, οι επιφάνειες δίνονται ως τρεις ανεξάρτητες συνιστώσες συναρτήσεις ως προς δύο παραμέτρους u και v:

$$\mathbf{X}(u,v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{bmatrix}.$$

Το στοιχειώδες γεωμετρικό σχήμα που χρησιμοποιείται στα επόμενα είναι το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ δύο σημείων $\mathbf{p}_0$ και $\mathbf{p}_1$, το οποίο σε παραμετρική μορφή είναι

$$\mathbf{P}(t) = (1-t)\,\mathbf{p}_0 + t\,\mathbf{p}_1, \quad t \in [0,1] \tag{7.1}$$

και εκφράζει τη *γραμμική παρεμβολή* μεταξύ αυτών των δύο σημείων.

7.2 Καμπύλες Bézier

7.2.1 Τετραγωνικές καμπύλες Bézier

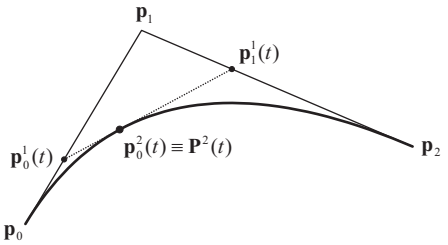
Θεωρούμε τρία σημεία, $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, και $\mathbf{p}_2$, και πραγματοποιούμε γραμμική παρεμβολή αυτών ανά ζεύγη, $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1)$ και $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$, ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0^1(t) &= (1-t)\,\mathbf{p}_0 + t\,\mathbf{p}_1, \\ \mathbf{p}_1^1(t) &= (1-t)\,\mathbf{p}_1 + t\,\mathbf{p}_2, \end{aligned} \quad t \in [0,1].$$

Για κάθε τιμή του t μεταξύ 0 και 1, τα $\mathbf{p}_0^1(t)$ και $\mathbf{p}_1^1(t)$ αντιπροσωπεύουν σημεία πάνω στα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα. Σε ένα δεύτερο βήμα, πραγματοποιούμε γραμμική παρεμβολή αυτών των σημείων για την ίδια τιμή του t ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0^2(t) &= (1-t)\,\mathbf{p}_0^1(t) + t\,\mathbf{p}_1^1(t) \\ &= (1-t)^2\,\mathbf{p}_0 + 2t(1-t)\,\mathbf{p}_1 + t^2\,\mathbf{p}_2. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Στο συμβολισμό $\mathbf{p}_i^r(t)$, ο εκθέτης r αναφέρεται στο βήμα παρεμβολής και ο δείκτης i στον δείκτη του πρώτου από τα δύο σημεία που παρεμβάλλονται. Καθώς το t αυξάνεται από το 0 μέχρι το 1, τα τρία σημεία $\mathbf{p}_0^1(t)$, $\mathbf{p}_1^1(t)$, και $\mathbf{p}_0^2(t)$ κινούνται ταυτόχρονα πάνω στα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα (βλ. Σχήμα 7.1). Η εξίσωση (7.2) δείχνει ότι



Σχήμα 7.1: *Δημιουργία μίας τετραγωνικής καμπύλης Bézier.*

το σημείο $\mathbf{p}_0^2(t)$ διαγράφει μία τετραγωνική (δευτέρου βαθμού) καμπύλη ως προς την παράμετρο t· αυτή η καμπύλη είναι μία *τετραγωνική καμπύλη Bézier* (ή μία *καμπύλη Bézier δευτέρου βαθμού*), και θα συμβολίζεται ως $\mathbf{P}^2(t)$. Τα αρχικά σημεία $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, και $\mathbf{p}_2$ καλούνται *σημεία ελέγχου* της καμπύλης Bézier.

7.2.2 Καμπύλες Bézier βαθμού *n*

Η διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω για τη δημιουργία μία τετραγωνικής καμπύλης Bézier από τα τρία σημεία ελέγχου αυτής μπορεί να γενικευθεί για περισσότερα σημεία ελέγχου με άμεσο τρόπο. Στο Σχήμα 7.2 φαίνεται η καμπύλη που παράγεται από τέσσερα σημεία ελέγχου: σε αυτή την περίπτωση πραγματοποιούμε τρία βήματα γραμμικής παρεμβολής και το αποτέλεσμα είναι μία *κυβική καμπύλη Bézier* (ή μία *καμπύληBézier τρίτου βαθμού*) $\mathbf{P}^3(t)$.

Στη γενική περίπτωση, μία *καμπύλη Bézier βαθμού n*, $\mathbf{P}^n(t)$, παράγεται από $(n+1)$ *σημεία ελέγχου* $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ μετά από n βήματα γραμμικής παρεμβολής. Η καμπύλη δίνεται από τη σχέση[1]

$$\mathbf{P}^n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \mathbf{p}_i\,, \quad t \in [0,1]. \tag{7.3}$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι αυτή η σχέση δίνει ακριβώς την εξίσωση (7.2) για $n = 2$. Το πολύγωνο που σχηματίζεται από τα σημεία $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ καλείται *πολύγωνο ελέγχου* της καμπύλης.

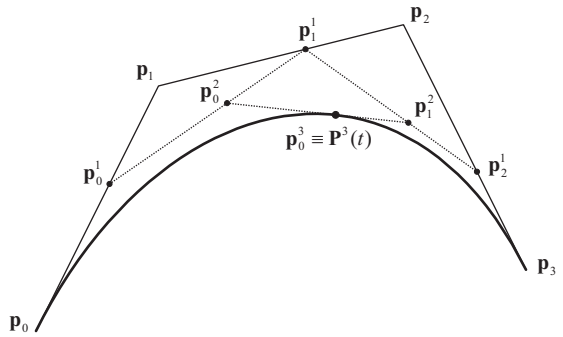
7.2.3 Ο αλγόριθμος του de Casteljau

Η εξίσωση (7.3) παρέχει έναν άμεσο τρόπο υπολογισμού σημείων μίας καμπύλης Bézier. Δυστυχώς, αυτή η σχέση είναι αριθμητικά πολύπλοκη και μη αποδοτική, καθώς απαιτεί τον υπολογισμό των διωνυμικών συντελεστών και δυνάμεων του t και του

[1] Οι *διωνυμικοί συντελεστές* $\binom{n}{i}$ ορίζονται ως

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

αν $0 \le i \le n$ και 0 διαφορετικά.



Σχήμα 7.2: *Δημιουργία μία κυβικής καμπύλης Bézier. Φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα σημεία που χρησιμοποιούνται στα βήματα παρεμβολής για μία συγκεκριμένη τιμή του t.*

$(1-t)$. Αντιθέτως, τα βήματα παρεμβολής που πραγματοποιούνται για τη δημιουργία της καμπύληςBézier είναι απλές γραμμικές σχέσεις ως προς t.

Ο *αλγόριθμος de Casteljau* συνοψίζει αυτά τα βήματα γραμμικής παρεμβολής σε ένα εύχρηστο επαναληπτικό σχήμα για τον υπολογισμό σημείων μίας καμπύλης Bézier:

1. Για την δεδομένη τιμή του t, θέτουμε

$$\mathbf{p}_i^0(t) = \mathbf{p}_i\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{7.4α}$$

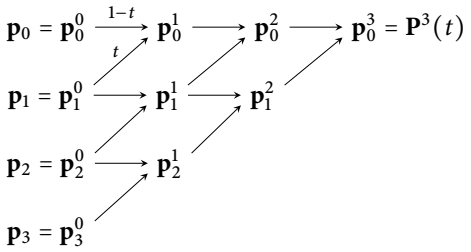
2. Πραγματοποιούμε τα βήματα γραμμικής παρεμβολής

$$\mathbf{p}_i^r(t) = (1-t)\,\mathbf{p}_i^{r-1}(t) + t\,\mathbf{p}_{i+1}^{r-1}(t)\,, \qquad \begin{matrix} r = 1, 2, \ldots, n, \\ i = 0, 1, \ldots, n-r. \end{matrix} \tag{7.4β}$$

3. Τότε το σημείο στην καμπύλη που αντιστοιχεί στην παραμετρική τιμή t είναι

$$\mathbf{P}^n(t) = \mathbf{p}_0^n(t).$$

Όλα τα ενδιάμεσα σημεία που υπολογίζονται με τον αλγόριθμο του de Casteljau μπορούν να γραφούν σε μία τριγωνική διάταξη που καλείται *τρίγωνο του de Casteljau*. Για την περίπτωση μία κυβικής καμπύλης Bézier, το τρίγωνο είναι (παραλείποντας την παράμετρο t από τα $\mathbf{p}_i^r(t)$ για απλότητα):



(7.5)

Όταν αυτός ο αλγόριθμος υλοποιείται σε πρόγραμμα υπολογιστή, η παραπάνω διάταξη υποδεικνύει ότι δεν χρειάζεται να αποθηκεύονται όλα τα ενδιάμεσα σημεία. Αρκεί να χρησιμοποιηθεί ένας μονοδιάστατος πίνακας, αρχικοποιημένος με τα σημεία ελέγχου της καμπύλης, και να αντικαθίστανται τα στοιχεία του από πάνω προς τα κάτω καθώς εξελίσσεται ο αλγόριθμος. Στο τέλος, το πρώτο στοιχείο του πίνακα θα είναι το ζητούμενο σημείο της καμπύλης. Ο ψευδοκώδικας στον Αλγόριθμο 7.1 παρέχει μία υλοποίηση του αλγορίθμου του de Casteljau.

```
point bezierPoint ( int n, point[] controlPt, float t )
{
    point deCasPt[n+1];

    for (i=0; i <= n; i++)
        deCasPt[i] = controlPt[i];

    for (r=1; r <= n; r++)  {
        for (i=0; i <= n-r; i++)  {
            deCasPt[i] = (1-t)*deCasPt[i] + t*deCasPt[i+1];
        }
    }

    return deCasPt[0];
}
```

Αλγόριθμος 7.1: *Ο αλγόριθμος του de Casteljau.*

Παράδειγμα 7.1 (Υπολογισμός σημείου καμπύλης Bézier.) Δίνεται μία καμπύλη Bézier με σημεία ελέγχου

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 6 & 4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \text{ και } \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 8 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Να υπολογιστεί το σημείο της που αντιστοιχεί στην τιμή της παραμέτρου $t = 1/4$.

Το ζητούμενο σημείο υπολογίζεται από το ακόλουθο τρίγωνο de Casteljau:

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\frac{9}{8}\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\frac{29}{16}\\\frac{23}{16}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}3\\\frac{5}{2}\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\frac{31}{8}\\\frac{11}{4}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\frac{13}{2}\\\frac{7}{2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix}$$

Κάθε σημείο είναι συσχετισμένος συνδυασμός των δύο σημείων της στήλης αριστερά του, στην ίδια και στην επόμενη γραμμή του τριγώνου, με συντελεστές $\frac{3}{4}$ και $\frac{1}{4}$ αντίστοιχα. Το ζητούμενο σημείο είναι το

$$\mathbf{P}^3\left(\tfrac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix}\frac{29}{16}\\\frac{23}{16}\end{bmatrix}.$$

7.2.4 Πολυώνυμα Bernstein

Οι συντελεστές των $\mathbf{p}_i$ στον ορισμό (7.3) της καμπύλης Bézier είναι ειδικά πολυώνυμα που καλούνται *πολυώνυμα Bernstein βαθμού n*. Είναι τα

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{7.6}$$

Χρησιμοποιώντας τα πολυώνυμα Bernstein, η καμπύλη Bézier μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{P}^n(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\mathbf{p}_i, \quad t \in [0,1]. \tag{7.7}$$

Για τις πιο κοινές περιπτώσεις $n = 2$ και $n = 3$, τα πολυώνυμα Bernstein είναι, αντίστοιχα,

$$\begin{aligned} B_0^2(t) &= (1-t)^2, \\ B_1^2(t) &= 2t(1-t), \\ B_2^2(t) &= t^2, \end{aligned} \tag{7.8}$$

(πρβλ. τη σχέση (7.2)) και

$$\begin{aligned} B_0^3(t) &= (1-t)^3, \\ B_1^3(t) &= 3t(1-t)^2, \\ B_2^3(t) &= 3t^2(1-t), \\ B_3^3(t) &= t^3. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Τα πολυώνυμα Bernstein διαθέτουν ενδιαφέρουσες ιδιότητες, οι οποίες θα μας βοηθήσουν στην ανάλυση των καμπυλών Bézier. Οι πιο σημαντικές από αυτές είναι οι ακόλουθες:

- Τα πολυώνυμα Bernstein βαθμού n αποτελούν μία βάση του διανυσματικού χώρου των πολυωνύμων βαθμού n. Με άλλα λόγια, οποιοδήποτε πολυώνυμο $f(t)$ βαθμού n μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i B_i^n(t), \tag{7.10}$$

  με c_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ κατάλληλους (βαθμωτούς) συντελεστές.

- Τα πολυώνυμα Bernstein ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1, \quad \text{για κάθε } t \tag{7.11}$$

  και

$$0 \le B_i^n(t) \le 1, \quad \text{φορ } t \in [0,1]. \tag{7.12}$$

- Τα πολυώνυμα Bernstein είναι συμμετρικά ως προς t και $1-t$:

$$B_j^n(t) = B_{n-j}^n(1-t). \tag{7.13}$$

7.2.5 Ιδιότητες καμπυλών Bézier

Ο ορισμός της καμπύλης Bézier που δόθηκε στην εξίσωση (7.3) καθώς και οι ιδιότητες των πολυωνύμων Bernstein φανερώνουν σημαντικές ιδιότητες των καμπυλών Bézier.

- *Κάθε πολυωνυμική καμπύλη βαθμού n μπορεί να γραφεί στη μορφή μίας καμπύλης Bézier.* Αυτό έπεται του γεγονότος ότι κάθε μία από τις x, y (και πιθανώς z) συνιστώσες μίας πολυωνυμικής καμπύλης είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n. Επομένως μπορεί να γραφεί συναρτήσει της βάσης των πολυωνύμων Bernstein όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Τα σημεία ελέγχου της καμπύλης Bézier σχηματίζονται από τους αντίστοιχους συντελεστές κάθε πολυωνύμου Bernstein.

- *Ιδιότητα κυρτού περιβλήματος.* Η καμπύλη Bézier βρίσκεται πάντα μέσα στο κυρτό περίβλημα των σημείων ελέγχου της. Αυτό οφείλεται στις ιδιότητες (7.11)

και (7.12) των πολυωνύμων Bernstein, οι οποίες συνεπάγονται ότι η καμπύλη Bézier είναι ένας κυρτός συνδυασμός των σημείων ελέγχου της.

- *Αναλλοίωτη σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς.* Η ιδιότητα αυτή πηγάζει από τη σχέση (7.11) των πολυωνύμων Bernstein, η οποία συνεπάγεται ότι η καμπύλη Bézier αποτελεί συσχετισμένο συνδυασμό των σημείων ελέγχου της. Ως πρακτική συνέπεια, για να εφαρμοστεί ένας συσχετισμένος μετασχηματισμός σε μία καμπύλη Bézier, αρκεί να εφαρμοστεί στα σημεία ελέγχου της και να υπολογιστεί η μετασχηματισμένη καμπύλη με βάση αυτά.

- *Αναλλοίωτη σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς της παραμέτρου.* Η καμπύλη δεν μεταβάλλεται αν το παραμετρικό διάστημα ορισμού της μεταβληθεί από $t \in [0,1]$ σε $u \in [a,b]$ — με άλλα λόγια, αν γίνει ένας συσχετισμένος μετασχηματισμός της παραμέτου t σε $u = a+(b-a)t$. Σε αυτή την περίπτωση, τα βήματα παρεμβολής (7.4β) γίνονται

$$\mathbf{p}_i^r(t) = \frac{b-u}{b-a}\,\mathbf{p}_i^{r-1}(t) + \frac{u-a}{b-a}\,\mathbf{p}_{i+1}^{r-1}(t). \tag{7.14}$$

- *Συμμετρία ως προς τα σημεία ελέγχου της.* Αν τα σημεία ελέγχου της καμπύλης χρησιμοποιηθούν σε αντίστροφη σειρά, $\mathbf{p}_n, \mathbf{p}_{n-1}, \ldots, \mathbf{p}_0$, το σχήμα της καμπύλης δεν αλλάζει, όμως η καμπύλη διατρέχεται κατά την αντίστροφη φορά. Αυτό προκύπτει από τη συμμετρία των πολυωνύμων Bernstein, σχέση (7.13).

- *Γραμμική ακρίβεια.* Αν όλα τα σημεία ελέγχου βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία, τότε η καμπύλη έχει το σχήμα ευθύγραμμου τμήματος, καθώς το κυρτό περίβλημά της γίνεται επίσης ευθύγραμμο τμήμα.

- *Ιδιότητα φθίνουσας διακύμανσης.* Μία επίπεδη καμπύλη Bézier τέμνεται από μία τυχαία ευθεία το πολύ, τόσες φορές όσες η ευθεία τέμνει το πολύγωνο ελέγχου της καμπύλης. Παρομοίως, μία μη επίπεδη καμπύλη Bézier τέμνεται από μία ευθεία ή ένα επίπεδο το πολύ, τόσες φορές όσες η ευθεία ή το επίπεδο τέμνει το πολύγωνο ελέγχου αυτής. Ως συνέπεια αυτής της ιδιότητας, μία καμπύλη με κυρτό πολύγωνο ελέγχου είναι επίσης κυρτή—όμως το αντίθετο δεν ισχύει: μία κυρτή καμπύλη Bézier μπορεί να έχει μη κυρτό πολύγωνο ελέγχου.

- *Παρεμβολή ακραίων σημείων ελέγχου.* Είναι εύκολο να επιβεβαιωθεί ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^n(0) &= \mathbf{p}_0, \\ \mathbf{P}^n(1) &= \mathbf{p}_n. \end{aligned} \tag{7.15}$$

  Επομένως η καμπύλη ξεκινά από το πρώτο σημείο ελέγχου της και καταλήγει στο τελευταίο.

- *Παράγωγοι.* Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των διωνυμικών συντελεστών, μπορεί

να υπολογιστεί ότι η εφαπτομένη (πρώτη παράγωγος μίας καμπύλης Bézier είναι

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}^n(t) = n\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t)\,(\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i). \tag{7.16}$$

- *Εφαπτόμενες στα άκρα.* Η προηγούμενη σχέση απλοποιείται σημαντικά στα άκρα της καμπύλης. Μπορεί να δειχθεί ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{P}^n(0) &= n(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0), \\ \frac{d}{dt}\mathbf{P}^n(1) &= n(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}). \end{aligned} \tag{7.17}$$

  Επομένως τα εφαπτόμενα διανύσματα στα άκρα της καμπύλης είναι παράλληλα προς την πρώτη και την τελευταία ακμή του πολυγώνου ελέγχου αυτής.

  Αν η καμπύλη ορίζεται σε ένα τυχαίο παραμετρικό διάστημα $u \in [a, b]$, ο κανόνας της αλυσίδας δίνει για τις παραπάνω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}\mathbf{P}^n(a) &= \frac{d}{dt}\frac{dt}{du}\mathbf{P}^n(0) = \frac{1}{b-a}\,n(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0), \\ \frac{d}{du}\mathbf{P}^n(b) &= \frac{d}{dt}\frac{dt}{du}\mathbf{P}^n(1) = \frac{1}{b-a}\,n(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}). \end{aligned} \tag{7.18}$$

- *Δεύτερες παράγωγοι στα άκρα.* Μπορεί να δειχθεί ότι οι ακόλουθες σχέσεις ισχύουν για τις δεύτερες παραγώγους στα άκρα μία καμπύλης Bézier βαθμού n:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{P}^n(0) &= n(n-1)(\mathbf{p}_2 - 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_0), \\ \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{P}^n(1) &= n(n-1)(\mathbf{p}_n - 2\mathbf{p}_{n-1} + \mathbf{p}_{n-2}). \end{aligned} \tag{7.19}$$

  Αν η καμπύλη ορίζεται σε ένα τυχαίο παραμετρικό διάστημα $u \in [a, b]$, ο κανόνας της αλυσίδας δίνει για τις παραπάνω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{du^2}\mathbf{P}^n(a) &= \frac{1}{(b-a)^2}\,n(n-1)(\mathbf{p}_2 - 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_0), \\ \frac{d^2}{du^2}\mathbf{P}^n(b) &= \frac{1}{(b-a)^2}\,n(n-1)(\mathbf{p}_n - 2\mathbf{p}_{n-1} + \mathbf{p}_{n-2}). \end{aligned} \tag{7.20}$$

- *Ψευδο-τοπικός έλεγχος.* Ο τοπικός έλεγχος υποδηλώνει ότι μετακινώντας ένα σημείο ελέγχου μιας καμπύλης, το σχήμα αυτής επηρεάζεται μόνο τοπικά. Οι καμπύλες Bézier *δεν* έχουν τοπικό έλεγχο, καθώς τα πολυώνυμα Bernstein $B_i^n(t)$, τα οποία είναι ουσιαστικά τα βάρη με τα οποία τα σημεία ελέγχου συνεισφέρουν στο σχήμα της καμπύλης, είναι μη μηδενικά σε όλο το παραμετρικό διάστημα $[0, 1]$ της καμπύλης. Επομένως, μετακινώντας οποιοδήποτε σημείο ελέγ-

χου επηρεάζεται το σχήμα ολόκληρης της καμπύλης. Παρόλα αυτά, μπορούμε να πούμε ότι οι καμπύλες Bézier έχουν ψευδο-τοπικό έλεγχο, καθώς το αποτέλεσμα της μετακίνησης ενός σημείου ελέγχου $\mathbf{p}_i$ είναι πιο ισχυρό στο τμήμα της καμπύλης γύρω από την παραμετρική τιμή i/n, όπου το αντίστοιχο πολυώνυμο Bernstein $B_i^n(t)$ έχει το μοναδικό του μέγιστο. Ο ψευδο-τοπικός έλεγχος διευκολύνει την πρόβλεψη της αλλαγής του σχήματος μίας καμπύλης Bézier όταν μετακινούνται τα σημεία ελέγχου της.

Χάρη στις παραπάνω ιδιότητες, οι καμπύλες Bézier είναι ένα σημαντικό εργαλείο για την αναπαράσταση καμπυλών στα γραφικά και στη γεωμετρική σχεδίαση. Οι κυβικές καμπύλες Bézier είναι αυτές που χρησιμοποιούνται περισσότερο στην πράξη, καθώς παρέχουν ικανοποιητική ευελιξία σχήματος, διαισθητική εξάρτηση από τα σημεία ελέγχου τους και αποδοτικότητα κατά τον υπολογισμό τους. Καμπύλες υψηλότερου βαθμού μπορούν να παράξουν πιο πολύπλοκα σχήματα, χρησιμοποιώντας περισσότερα σημεία ελέγχου, ωστόσο το μεγαλύτερο κόστος υπολογισμού τους καθώς και η ολική επίδραση στο σχήμα τους από οποιαδήποτε αλλαγή σημείου ελέγχου, τις καθιστούν λιγότερο ελκυστικές στην πράξη. Στις επόμενες ενότητες, θα συζητήσουμε πρακτικές λύσεις στο πρόβλημα του ορισμού μίας καμπύλης χρησιμοποιώντας περισσότερα σημεία ελέγχου.

7.2.6 Υποδιαίρεση καμπύλης Bézier

Ας θεωρήσουμε την κυβική καμπύλη Bézier $\mathbf{P}^3(t)$ που φαίνεται στο Σχήμα 7.2. Οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου $t_0 \in [0,1]$ χωρίζει την καμπύλη σε δύο τμήματα, το «αριστερό» με άκρα τα σημεία $\mathbf{P}^3(0) = \mathbf{p}_0$ και $\mathbf{P}^3(t_0)$, και το «δεξί» με άκρα $\mathbf{P}^3(t_0)$ και $\mathbf{P}^3(1) = \mathbf{p}_3$. Καθώς είναι τμήματα της αρχικής κυβικής καμπύλης Bézier, αυτά τα τμήματα είναι επίσης κυβικές καμπύλες, και επομένως μπορούν να γραφούν στη μορφή καμπύλης Bézier. Στόχος μας εδώ είναι να προσδιορίσουμε τα σημεία ελέγχου αυτών των δύο τμημάτων· όπως θα δείξουμε παρακάτω, αυτά μπορούν να υπολογιστούν από τα σημεία ελέγχου της αρχικής καμπύλης.

Εργαζόμαστε πρώτα στο αριστερό τμήμα. Το συμβολίζουμε ως $\mathbf{L}$ και τα σημεία ελέγχου του $\mathbf{l}_i$, $i = 0,1,2,3$, ώστε:

$$\mathbf{L}(t') = \sum_{i=0}^{3} B_i^3(t')\mathbf{l}_i\,, \quad t' \in [0,1].$$

(Χρησιμοποιούμε την *τοπική* παράμετρο t' για την $\mathbf{L}$, διαφορετική από την παράμετρο t της αρχικής καμπύλης, έτσι ώστε η $\mathbf{L}(t')$ να διατρέχει όλο το αριστερό τμήμα όταν $t' \in [0,1]$.)

Το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου μπορούν να προσδιοριστούν άμεσα, καθώς η καμπύλη παρεμβάλει τα ακραία σημεία ελέγχου της· επομένως:

$$\mathbf{l}_0 = \mathbf{p}_0 = \mathbf{P}^3(0) = \mathbf{p}_0^0(t_0), \tag{7.21α}$$

$$\mathbf{l}_3 = \mathbf{P}^3(t_0) = \mathbf{p}_0^3(t_0). \tag{7.21β}$$

Για το $\mathbf{l}_1$, παρατηρούμε ότι υπεισέρχεται στην εφαπτομένη της $\mathbf{L}(t')$ για $t' = 0$. Οι $\mathbf{P}$ και $\mathbf{L}$ έχουν την ίδια εφαπτομένη σε αυτό το σημείο, καθώς ταυτίζονται για $t \in [0, t_0]$· επομένως:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\mathbf{P}^3(0) = \frac{d}{dt}\mathbf{L}(0) = \frac{d}{dt'}\frac{dt'}{dt}\mathbf{L}(0) \\ \Leftrightarrow \qquad & 3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) = \frac{1}{t_0}\,3(\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_0) \\ \Leftrightarrow \qquad & \mathbf{l}_1 = (1 - t_0)\mathbf{p}_0 + t_0\mathbf{p}_1, \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του αλγορίθμου του de Casteljau,

$$\mathbf{l}_1 = \mathbf{p}_0^1(t_0). \tag{7.21γ}$$

Παρομοίως, παρατηρούμε ότι το $\mathbf{l}_2$ υπεισέρχεται στην δεύτερη παράγωγο της $\mathbf{L}(t')$ για $t' = 0$· επομένως:

$$\begin{aligned} 6(\mathbf{p}_2 - 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_0) &= \frac{1}{t_0^2}\,6(\mathbf{l}_2 - 2\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_0) \\ \Leftrightarrow \qquad \mathbf{l}_2 &= (1 - t_0)^2\mathbf{p}_0 + 2t_0(1 - t_0)\mathbf{p}_1 + t_0^2\mathbf{p}_2, \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του αλγορίθμου de Casteljau,

$$\mathbf{l}_2 = \mathbf{p}_0^2(t_0). \tag{7.21δ}$$

Οι σχέσεις (7.21) μπορούν να γραφούν συνοπτικά ως

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{p}_0^i(t_0). \tag{7.22}$$

Επομένως, τα σημεία ελέγχου $\mathbf{l}_i$ του αριστερού τμήματος είναι ακριβώς τα σημεία της πρώτης γραμμής του τριγώνου του de Casteljau (7.5). Είναι σημαντικό ότι αυτή η ιδιότητα ισχύει για καμπύλες Bézier οποιουδήποτε βαθμού n, όπως μπορεί να αποδειχθεί υπολογίζοντας υψηλότερου βαθμού παραγώγους της καμπύλης.

Το δεξί τμήμα της καμπύλης είναι το τμήμα της που αντιστοιχεί στο παραμετρικό διάστημα $[t_0, 1]$ της αρχικής καμπύλης. Τα σημεία ελέγχου του $\mathbf{r}_i$ μπορούν να υπολογιστούν με παρόμοιο τρόπο, υπολογίζοντας τις εφαπτόμενες στο άλλο άκρο της καμπύλης. Δίνονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{p}_i^{n-i}(t_0), \tag{7.23}$$

που είναι ακριβώς τα σημεία της «υποτείνουσας» του τριγώνου του de Casteljau (βλ. τη σχέση (7.5) για την κυβική περίπτωση)· αυτό το αποτέλεσμα ισχύει επίσης για καμπύλες Bézier οποιουδήποτε βαθμού.

Επομένως, είναι ενδιαφέρον ότι ο αλγόριθμος του de Casteljau υπολογίζει όχι μόνο το σημείο της καμπύλης που αντιστοιχεί σε μία παραμετρική τιμή t_0, αλλά παρέχει επίσης τα σημεία ελέγχου των δύο τμημάτων στα οποία υποδιαιρείται η καμπύλη από

αυτό το σημείο. Η υλοποίηση που δίνεται στην Ενότητα 7.2.3 παρέχει άμεσα τα σημεία $\mathbf{r}_i$ (είναι τα `deCasPt` που είναι διαθέσιμα στο τέλος του αλγορίθμου), και πρέπει να τροποποιηθεί ελαφρώς ώστε να παρέχει και τα σημεία $\mathbf{l}_i$: μετά από τον υπολογισμό κάθε στήλης του τριγώνου, το πρώτο στοιχείο της είναι ένα από τα σημεία ελέγχου του αριστερού τμήματος.

Εφαρμογές της υποδιαίρεσης καμπύλης Bézier

Η υποδιαίρεση της καμπύλης Bézier που μόλις περιγράψαμε μπορεί να επαναληφθεί αναδρομικά για καθένα από τα δύο τμήματα της καμπύλης. Μπορεί να δειχθεί ότι τα σημεία ελέγχου που παράγονται με αυτή την αναδρομική διαδικασία συγκλίνουν προς την αρχική καμπύλη, και επίσης ότι αυτή η σύγκλιση είναι σχετικά γρήγορη. Αυτό το αποτέλεσμα έχει ενδιαφέρουσες πρακτικές εφαρμογές.

Η πιο σημαντική εφαρμογή είναι μία μέθοδος σχεδίασης της καμπύλης Bézier. Υποδιαιρώντας αναδρομικά την καμπύλη σε δύο τμήματα, μετά από έναν αριθμό βημάτων τα σημεία ελέγχου των τμημάτων θα είναι σχεδόν συγγραμμικά (με απόκλιση που εξαρτάται από τη ζητούμενη ακρίβεια). Τότε η υποδιαίρεση μπορεί να σταματήσει και κάθε τμήμα της καμπύλης να σχεδιαστεί ως το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των δύο άκρων του, χάρη στη γραμμική ακρίβεια των καμπυλών Bézier. Αυτή η μέθοδος σχεδίασης καμπυλών Bézier είναι ασφαλώς *προσαρμοστική*, καθώς θα σχεδιάσει λεία τμήματα της καμπύλης γρήγορα αλλά θα πραγματοποιήσει περισσότερα αναδρομικά βήματα σε περιοχές υψηλής καμπυλότητας.

Κατά τη διάρκεια της αναδρομής, η υποδιαίρεση της καμπύλης μπορεί να πραγματοποιηθεί σε οποιαδήποτε παραμετρική τιμή t_0. Προτιμάται, όμως, η τιμή $t_0 = \frac{1}{2}$ καθώς με αυτήν τα βήματα γραμμικής παρεμβολής περιλαμβάνουν διαιρέσεις μόνο με το 2, οι οποίες μπορούν να υλοποιηθούν αποδοτικά με πράξεις (κύλιση) bit.

Η συγγραμμικότητα των σημείων ελέγχου μπορεί να ελεγχθεί κατασκευάζοντας την ευθεία που ορίζουν τα δύο ακραία σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_0$ και $\mathbf{p}_n$, υπολογίζοντας την απόσταση καθενός από τα υπόλοιπα σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, από αυτή την ευθεία, και ελέγχοντας ότι καθεμία από αυτές τις αποστάσεις είναι μικρότερη από τη ζητούμενη ακρίβεια. Η απόσταση ενός σημείου ελέγχου $\mathbf{p}_i$ από την ευθεία των $\mathbf{p}_0$ και $\mathbf{p}_n$ δίνεται από τη σχέση

$$d = \frac{|(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0) \times (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_i)|}{|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0|}.$$

Αν τα σημεία ελέγχου είναι διδιάστατα, το εξωτερικό γινόμενο στον αριθμητή αυτής της σχέσης μπορεί να υπολογιστεί σχηματίζοντας τριδιάστατα σημεία με μηδενική συντεταγμένη z. Αν ο παρονομαστής είναι μηδενικός, τα $\mathbf{p}_0$ και $\mathbf{p}_n$ ταυτίζονται, και ένα από αυτά πρέπει να αντικατασταθεί στην παραπάνω σχέση.

Μία δεύτερη εφαρμογή της υποδιαίρεσης της καμπύλης Bézier αφορά στην εύρεση της τομής της καμπύλης με μία ευθεία. Ο αλγόριθμος είναι επίσης αναδρομικός. Αρχικά κατασκευάζεται το ευθυγραμμισμένο με τους άξονες περιβάλλον κιβώτιο της αρχικής καμπύλης και ελέγχεται για τομή με την ευθεία. Αν υπάρχει τομή, η καμπύ-

λη υποδιαιρείται στο αριστερό και στο δεξί τμήμα της και η διαδικασία συνεχίζεται αναδρομικά με το κιβώτιο κάθε τμήματος. Η υποδιαίρεση σταματά όταν το κιβώτιο κάποιου τμήματος είναι τόσο μικρό ώστε να θεωρείται ένα μοναδικό σημείο, με κάποια δεδομένη ακρίβεια.

Ο αλγόριθμος δίνει σωστό αποτέλεσμα καθώς το ευθυγραμμισμένο με τους άξονες κιβώτιο περιέχει την καμπύλη· επομένως, αν η ευθεία δεν τέμνει το κιβώτιο, δεν θα τέμνει ούτε την καμπύλη. Όταν το κιβώτιο μειώνεται σε ένα σημείο, το τμήμα της καμπύλης που περιέχεται σε αυτό θα είναι επίσης ένα μοναδικό σημείο. Το ευθυγραμμισμένο με τους άξονες κιβώτιο που περιέχει την καμπύλη μπορεί να υπολογιστεί πολύ αποδοτικά, μιας και στην πραγματικότητα είναι το αντίστοιχο κιβώτιο που περιέχει τα σημεία ελέγχου της καμπύλης, καθώς η καμπύλη περιέχεται στο κυρτό περίβλημα των σημείων ελέγχου της. Επίσης μπορεί να ελεγχθεί αποδοτικά για τομή με την ευθεία, χρησιμοποιώντας έναν από τους αλγορίθμους της Ενότητας 2.9.

7.2.7 Ομαλή συνένωση καμπυλών Bézier

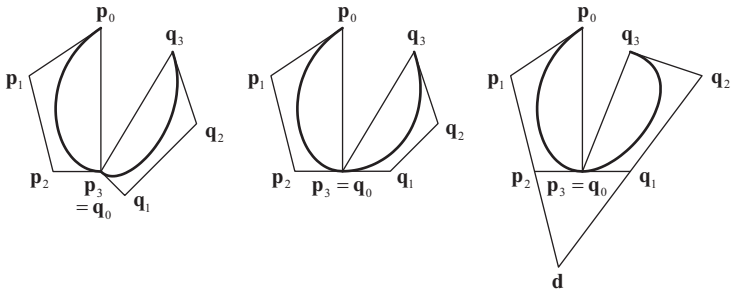
Η πολυπλοκότητα του σχήματος μίας καμπύλης Bézier περιορίζεται από το βαθμό της καμπύλης, ή, ισοδύναμα, από τον αριθμό των σημείων ελέγχου της. Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές υπάρχει η ανάγκη σχεδίασης πολύπλοκων σχημάτων, και σε αυτές τις περιπτώσεις απαιτούνται καμπύλες Bézier υψηλού βαθμού. Δυστυχώς, η χρήση καμπυλών Bézier υψηλού βαθμού δεν προτιμάται για δύο λόγους: πρώτον, όσο υψηλότερος είναι ο βαθμός της καμπύλης τόσο λιγότερο αποδοτικός είναι ο υπολογισμός της καθώς απαιτούνται περισσότερα βήματα γραμμικής παρεμβολής και είναι πιθανότερο να εμφανιστούν προβλήματα αριθμητικής ακρίβειας· και δεύτερον, η έλλειψη τοπικού ελέγχου της καμπύλης δυσχεραίνει την κατασκευή καμπύλης μίας Bézier με το επιθυμητό σχήμα. Γι' αυτούς τους λόγους, καμπύλες Bézier βαθμού υψηλότερου από 5 δεν χρησιμοποιούνται συχνά στην πράξη.

Το πρόβλημα της αναπαράστασης πολύπλοκων σχημάτων επιλύεται χρησιμοποιώντας καμπύλες χαμηλού βαθμού οι οποίες ενώνονται με τέτοιο τρόπο ώστε το τελικό σχήμα να είναι ομαλό στα σημεία ένωσης. Η πιο κοινή μορφή τέτοιων καμπυλών είναι οι καμπύλες B-spline, τις οποίες θα παρουσιάσουμε στην επόμενη ενότητα. Εδώ θα συζητήσουμε τη βασική διαδικασία ομαλής συνένωσης δύο καμπυλών Bézier, ώστε να διαπιστώσουμε τις ιδιότητες και τους περιορισμούς της.

Πριν προχωρήσουμε, πρέπει να ορίσουμε πιο τυπικά το νόημα της «ομαλής συνένωσης». Ας θεωρήσουμε δύο πολυωνυμικές καμπύλες $\mathbf{F}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ και $\mathbf{G}(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Λέμε ότι αυτές οι καμπύλες συνενώνονται με *παραμετρική συνέχεια* C^r στο t_1 αν οι παράγωγοί τους βαθμού r είναι ίσες στο t_1:

$$\mathbf{F}^{(r)}(t_1) = \mathbf{G}^{(r)}(t_1).$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η συνέχεια C^r σε ένα σημείο συνεπάγεται επίσης συνέχεια C^m για όλα τα $0 \leq m < r$. Για παράδειγμα, αν οι $\mathbf{F}(t)$ και $\mathbf{G}(t)$ ενώνονται στο t_1 με συνέχεια C^2, τότε οι τιμές τους (C^0), οι εφαπτόμενές τους (C^1) και οι δεύτερες παράγωγοί τους (C^2) είναι ίσες σ' αυτό το σημείο. Αυτή η συνένωση είναι προφανώς «ομαλή», κα-



Σχήμα 7.3: *Ομαλή συνένωση κυβικών καμπυλών Bézier. (α) συνέχεια C^0, (β) συνέχεια C^1, (γ) συνέχεια C^2.*

θώς η κλίση της καμπύλης δεν μπορεί να μεταβληθεί απότομα. Για πολυωνυμικές καμπύλες βαθμού k έχει νόημα να επιδιώξουμε μέχρι συνέχεια C^{k-1}, καθώς οι παράγωγοί τους βαθμού k είναι σταθερές ενώ οι παράγωγοι υψηλότερου βαθμού είναι μηδενικές.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν δύο καμπύλες Bézier, $\mathbf{P}^n(t)$, $t \in [0,1]$ βαθμού n με σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots \mathbf{p}_n$ και $\mathbf{Q}^m(t)$, $t \in [1,2]$ βαθμού m με σημεία ελέγχου $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \ldots \mathbf{q}_m$. Αναζητούμε συνθήκες ώστε οι καμπύλες να ενώνονται στο $t = 1$ με συνέχεια C^2.

Η συνέχεια C^0 επιβάλλει το τελευταίο σημείο της πρώτης καμπύλης να ταυτίζεται με το πρώτο σημείο της δεύτερης. Καθώς οι καμπύλες παρεμβάλλουν τα ακραία σημεία ελέγχου τους, αρκεί να ισχύει

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{q}_0. \tag{7.24}$$

Παρομοίως, η συνέχεια C^1 επιβάλλει, λόγω των (7.17) και (7.18), να ισχύει

$$n(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}) = m(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_n = \frac{n}{m}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}). \tag{7.25}$$

Επομένως, το $\mathbf{q}_1$ πρέπει να βρίσκεται στην ευθεία που ορίζουν τα $\mathbf{p}_{n-1}$ και $\mathbf{p}_n = \mathbf{q}_0$, και η απόστασή του από το $\mathbf{p}_n$ πρέπει να είναι αυτή που δίνεται από την (7.25).

Λόγω των (7.19) και (7.20), η συνέχεια C^2 επιβάλλει να ισχύει

$$n(n-1)(\mathbf{p}_n - 2\mathbf{p}_{n-1} + \mathbf{p}_{n-2}) = m(m-1)(\mathbf{q}_2 - 2\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_0), \tag{7.26}$$

σχέση από την οποία μπορεί να προσδιοριστεί η θέση του $\mathbf{q}_2$.

Στην ειδική περίπτωση όπου $n = m$, η σχέση (7.25) γίνεται $\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_n = \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}$, επομένως η απόσταση $|\mathbf{q}_1\mathbf{p}_n|$ πρέπει να είναι ίση με την απόσταση $|\mathbf{p}_n\mathbf{p}_{n-1}|$. Επιπλέον, αν $n = m = 3$, η σχέση (7.26) γίνεται $\mathbf{q}_2 - 2\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_1 - 2\mathbf{p}_2$· αν θέσουμε αυτό το σημείο $\mathbf{d} = \mathbf{q}_2 - 2\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_1 - 2\mathbf{p}_2$, τότε το $\mathbf{d}$ πρέπει να τοποθετηθεί ώστε $|\mathbf{d}\mathbf{p}_2| = |\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1|$, και τέλος το $\mathbf{q}_2$ πρέπει να τοποθετηθεί ώστε $|\mathbf{d}\mathbf{q}_1| = |\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2|$ (βλ. Σχήμα 7.3).

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι κάθε πρόσθετος βαθμός συνέχειας περιορίζει τη θέση ενός ακόμη σημείου ελέγχου κάθε καμπύλης· για $n = m = 3$ με συνέχεια C^2,

που είναι αρκετά συνήθης και πρακτική απαίτηση, μόνο οι θέσεις των δύο ακραίων σημείων ελέγχου $\mathbf{p}_0$ και $\mathbf{q}_3$ είναι ελεύθερες.

Για μεγαλύτερη ευελιξία μπορούν να χρησιμοποιηθούν καμπύλες υψηλότερου βαθμού, κάτι που, όπως αναφέρθηκε, δεν είναι ιδιαίτερα αποδοτικό. Εναλλακτικά μπορεί να απαιτηθεί χαμηλότερος βαθμός συνέχειας, κάτι που πιθανώς να μην παράξει μια ικανοποιητικά ομαλή καμπύλη. Υπάρχει ακόμη μία δυνατότητα, που είναι να διαφοροποιηθεί το *είδος* της απαιτούμενης συνέχειας: αντί για την παραμετρική συνέχεια (C^r) που είδαμε, θα μπορούσαμε να απαιτήσουμε την πιο αδύναμη *γεωμετρική συνέχεια* (G^r), η οποία, όπως υπονοεί το όνομά της, βασίζεται σε γεωμετρικά στοιχεία της καμπύλης και όχι σε αλγεβρικά. Απλώς αναφέρουμε εδώ ότι η συνέχεια G^0 είναι ίδια με την C^0· η συνέχεια G^1 απαιτεί τα εφαπτόμενα διανύσματα στο σημείο συνένωσης να είναι συνεχή (αρκεί οι διευθύνσεις του να είναι ίδιες και όχι και τα μέτρα τους όπως στην C^1), και η συνέχεια G^2 απαιτεί επιπλέον να είναι συνεχής η καμπυλότητα στο σημείο συνένωσης. Για λεπτομέρειες σχετικά με τη γεωμετρική συνέχεια και εφαρμογές αυτής, ο αναγνώστης θα πρέπει να ανατρέξει στα εξειδικευμένα συγγράμματα που αναφέρονται στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου.

7.3 Καμπύλες B-spline

Στην τελευταία ενότητα είδαμε πώς μπορούν να συνενωθούν καμπύλες Bézier με τρόπο ώστε η συνολική καμπύλη να είναι ομαλή (συνεχής) στο σημείο συνένωσης. Τέτοιες καμπύλες, οι οποίες παράγονται με τη συνένωση παραμετρικών καμπυλών με περιορισμούς συνέχειας, καλούνται γενικά *καμπύλες spline*. Το όνομά τους προέρχεται από τη μηχανική spline, μία εύκαμπτη λεπτή ράβδο (ξύλινη, μεταλλική ή πλαστική) που χρησιμοποιείται για να σχεδιάζονται ομαλές καμπύλες· οι επιθυμητές καμπυλώσεις της ράβδου δημιουργούνται με τη βοήθεια ειδικών στηριγμάτων που την συγκρατούν στη θέση της.

Συγκεκριμένα, οι *καμπύλες B-spline* είναι καμπύλες spline που αποτελούνται από πολυωνυμικά τμήματα βαθμού k που συνενώνονται με συνέχεια C^{k-1}, την υψηλότερη που μπορεί να επιδιωχθεί. Ο βαθμός k των τμημάτων είναι επίσης ο *βαθμός* της καμπύλης B-spline.

Παρόμοια με τις καμπύλες Bézier, οι καμπύλες B-spline ορίζονται με τη βοήθεια *σημείων ελέγχου*, τα οποία θα συμβολίζουμε $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$. Όμως, σε αντίθεση με τις καμπύλες Bézier, το πλήθος $(n+1)$ των σημείων ελέγχου είναι ανεξάρτητο του βαθμού της καμπύλης και σχετίζεται μόνο με τον αριθμό των πολυωνυμικών τμημάτων που την αποτελούν.

Τα πολυωνυμικά τμήματα που σχηματίζουν μία καμπύλη B-spline ορίζονται σε διαδοχικά παραμετρικά διαστήματα $[t_i, t_{i+1}]$, των οποίων η ένωση είναι ένα διάστημα $[t_{\min}, t_{\max}]$ που καλείται το *πεδίο ορισμού* της καμπύλης. Οι τιμές t_i στα όρια των επιμέρους διαστημάτων καλούνται *κόμβοι* της καμπύλης B-spline. Όπως θα δούμε, ο ορισμός της καμπύλης B-spline απαιτεί κάποιους επιπλέον κόμβους εκτός του πεδίου

ορισμού της· συνολικά, μία καμπύλη B-spline έχει μία ακολουθία κόμβων

$$t_{\text{first}} \le \ldots \le t_{\min} \le \ldots \le t_{\max} \le \ldots \le t_{\text{last}}.$$

Το πλήθος των κόμβων εξαρτάται από τον βαθμό της καμπύλης και από το πλήθος των σημείων ελέγχου της, και θα τον προσδιορίσουμε επακριβώς παρακάτω.

7.3.1 Τετραγωνικές καμπύλες B-spline

Θα ξεκινήσουμε εξετάζοντας τις τετραγωνικές (ή δευτέρου βαθμού) καμπύλες B-spline, έτσι ώστε να διευκολυνθεί η παρουσίαση των γενικών καμπυλών B-spline βαθμού k.

Μία τετραγωνική καμπύλη B-spline $\mathbf{Q}(t)$ θα αποτελείται από τετραγωνικά τμήματα $\mathbf{Q}_i(t)$, ορισμένα σε παραμετρικά διαστήματα $[t_i, t_{i+1}]$. Όπως και για τις τετραγωνικές καμπύλες Bézier θα χρησιμοποιήσουμε τρία σημεία ελέγχου για το κάθε τμήμα· όμως τα δύο βήματα γραμμικής παρεμβολής που απαιτούνται θα είναι διαφορετικά, ώστε να διασφαλίζεται η συνέχεια στα σημεία συνένωσης των γειτονικών τμημάτων. Για το τμήμα $\mathbf{Q}_i(t)$, θα χρησιμοποιήσουμε τα σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_{i-2}$, $\mathbf{p}_{i-1}$, και $\mathbf{p}_i$.

Στο πρώτο βήμα, παρεμβάλλουμε ξεχωριστά τα $(\mathbf{p}_{i-2}, \mathbf{p}_{i-1})$ και $(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i)$ στα παραμετρικά διαστήματα $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ και $[t_i, t_{i+2}]$, αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι δεν χρησιμοποιούμε το κοινό διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$ και για τα δύο τμήματα, όπως στις καμπύλες Bézier, αλλά διαφορετικά διαστήματα που αλληλεπικαλύπτονται. Λαμβάνουμε έτσι τα ενδιάμεσα σημεία

$$\mathbf{q}_{i-1}^1(t) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_{i-1}}\mathbf{p}_{i-2} + \frac{t - t_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}\mathbf{p}_{i-1}, \qquad t \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$$

$$\mathbf{q}_i^1(t) = \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_i}\mathbf{p}_{i-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+2} - t_i}\mathbf{p}_i, \qquad t \in [t_i, t_{i+2}].$$

Στο παραμετρικό διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$ που μας ενδιαφέρει είναι ορισμένα και τα δύο σημεία $\mathbf{q}_{i-1}^1(t)$ και $\mathbf{q}_i^1(t)$, και στο δεύτερο βήμα τα παρεμβάλλουμε σ' αυτό το διάστημα. Λαμβάνουμε έτσι

$$\mathbf{Q}_i(t) = \mathbf{q}_i^2(t) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i}\mathbf{q}_{i-1}^1(t) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\mathbf{q}_i^1(t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}],$$

και αντικαθιστώντας τα $\mathbf{q}_{i-1}^1(t)$ και $\mathbf{q}_i^1(t)$ από τις προηγούμενες σχέσεις, λαμβάνουμε μία έκφραση του $\mathbf{Q}_i(t)$ συναρτήσει των σημείων ελέγχου και των κόμβων της καμπύλης:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_i(t) = {} & \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i}\,\frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_{i-1}}\,\mathbf{p}_{i-2} \\ & + \left(\frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i}\,\frac{t - t_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\,\frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_i}\right)\mathbf{p}_{i-1} \\ & + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\,\frac{t - t_i}{t_{i+2} - t_i}\,\mathbf{p}_i.\end{aligned} \tag{7.27}$$

Επομένως, το τμήμα $\mathbf{Q}_i(t)$ που ορίζεται με αυτό τον τρόπο είναι τετραγωνικό ως προς την παράμετρο t στο παραμετρικό διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (7.27) μπορεί επίσης να δειχθεί ότι διαδοχικά διαστήματα $\mathbf{Q}_i(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ και $\mathbf{Q}_{i+1}(t)$, $t \in [t_{i+1}, t_{i+2}]$ ενώνονται με την επιθυμητή συνέχεια C^1: στην κοινή τιμή t_{i+1} της παραμέτρου ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_i(t_{i+1}) &= \mathbf{Q}_{i+1}(t_{i+1}),\\ \mathbf{Q}_i'(t_{i+1}) &= \mathbf{Q}_{i+1}'(t_{i+1}).\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, ενώνονται στο t_{i+1} (C^0) και οι εφαπτόμενές τους συμπίπτουν (C^1). Συνολικά, το σύνολο των τετραγωνικών τμημάτων που παράγεται όπως περιγράφηκε παραπάνω σχηματίζει μία τετραγωνική καμπύλη B-spline.

Η σχέση (7.27) παρέχει μία έκφραση της καμπύλης B-spline κατά τμήματα, η οποία δεν είναι πολύ εύχρηστη για τη μελέτη της καμπύλης· θα αναζητήσουμε μία ενιαία έκφραση για όλη την καμπύλη, συναρτήσει των σημείων ελέγχου της και των κόμβων της. Εστιάζουμε σε ένα συγκεκριμένο σημείο ελέγχου $\mathbf{p}_i$. Από την προηγούμενη ανάλυση, συμπεραίνουμε ότι αυτό επηρεάζει τρία διαδοχικά τμήματα της καμπύλης, τα $\mathbf{Q}_i(t)$, $\mathbf{Q}_{i+1}(t)$, και $\mathbf{Q}_{i+2}(t)$ (βλ. Σχήμα 7.4). Ξαναγράφουμε τη σχέση (7.27) για αυτά τα διαστήματα, δίνοντας πλήρως μόνο τους συντελεστές του $\mathbf{p}_i$ και γράφοντας συνοπτικά τους υπόλοιπους για απλότητα:

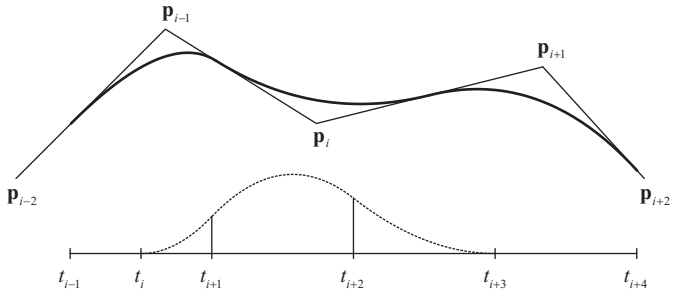
$$\mathbf{Q}_i(t) = a_i\,\mathbf{p}_{i-2} + b_i\,\mathbf{p}_{i-1} + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\,\frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i}\,\mathbf{p}_i\,, \qquad t \in [t_i, t_{i+1}],$$

$$\mathbf{Q}_{i+1}(t) = a_{i+1}\,\mathbf{p}_{i-1} + \left(\frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}}\,\frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i} + \frac{t-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_{i+1}}\,\frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}}\right)\mathbf{p}_i + c_{i+1}\,\mathbf{p}_{i+1}\,, \qquad t \in [t_{i+1}, t_{i+2}],$$

$$\mathbf{Q}_{i+2}(t) = \frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+2}}\,\frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}}\,\mathbf{p}_i + b_{i+2}\,\mathbf{p}_{i+1} + c_{i+2}\,\mathbf{p}_{i+2}\,, \qquad t \in [t_{i+2}, t_{i+3}].$$

Αν θέσουμε

$$N_i^2(t) = \begin{cases} \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\,\frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i}\,, & t \in [t_i, t_{i+1}),\\ \frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}}\,\frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i} + \frac{t-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_{i+1}}\,\frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}}\,, & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}),\\ \frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+2}}\,\frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}}\,, & t \in [t_{i+2}, t_{i+3}),\\ 0\,, & \text{διαφορετικά,}\end{cases} \tag{7.28}$$



Σχήμα 7.4: *Μία τετραγωνική καμπύλη B-spline και η επίδραση του σημείου ελέγχου $\mathbf{p}_i$ στην καμπύλη.*

τότε[2] η επίδραση του σημείου ελέγχου $\mathbf{p}_i$ σε όλη την καμπύλη είναι $N_i^2(t)\mathbf{p}_i$ και, αθροίζοντας τις επιδράσεις όλων των σημείων ελέγχου, η τετραγωνική καμπύλη B-spline μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{Q}(t) = \sum_{i=0}^{n} N_i^2(t)\mathbf{p}_i. \tag{7.29}$$

Πλέον, μπορούμε να προσδιορίσουμε τον αναγκαίο αριθμό κόμβων για την τετραγωνική καμπύλη B-spline. Για σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$, χρησιμοποιώντας τους παραπάνω συμβολισμούς το πρώτο τμήμα της καμπύλης είναι το $\mathbf{Q}_2(t)$ που χρησιμοποιεί τα $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ και απαιτεί κόμβους t_1, t_2, t_3, t_4· το τελευταίο τμήμα της καμπύλης είναι το $\mathbf{Q}_n(t)$ που χρησιμοποιεί τα σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_{n-2}$, $\mathbf{p}_{n-1}$, $\mathbf{p}_n$ και απαιτεί κόμβους t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, t_{n+2}. Επομένως, μία τετραγωνική καμπύλη B-spline με $(n+1)$ σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ χρειάζεται $(n+2)$ κόμβους $t_1, t_2, \ldots, t_{n+2}$· το πεδίο ορισμού της καμπύλης είναι η ένωση των πεδίων ορισμού $[t_i, t_{i+1}]$ των τμημάτων της $\mathbf{Q}_i(t)$, $i = 2, 3, \ldots, n$, δηλαδή το παραμετρικό διάστημα $[t_2, t_{n+1}]$. Σημειώνουμε ότι οι σχέσεις (7.28) και (7.29) υποδεικνύουν ότι δύο επιπλέον κόμβοι, t_0 και t_{n+3}, είναι απαραίτητοι, ώστε οι $N_0^2(t)$ και $N_n^2(t)$ να ορίζονται σωστά. Ωστόσο η παραπάνω ανάλυση δείχνει ότι αυτοί οι κόμβοι δεν επηρεάζουν το σχήμα της καμπύλης: είναι απλώς πλασματικοί κόμβοι, απαραίτητοι για να είναι μαθηματικά πλήρης η σχέση (7.28), και οι τιμές τους είναι απαραίτητες μόνο αν χρησιμοποιείται η σχέση (7.29) για τον υπολογισμό σημείων της καμπύλης B-spline — κάτι που, όπως θα δούμε παρακάτω, δεν γίνεται στην πράξη.

7.3.2 Καμπύλες B-spline βαθμού *k*

Η διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω για την δημιουργία μίας τετραγωνικής καμπύλης B-spline μπορεί να γενικευτεί για καμπύλες υψηλότερου βαθμού με άμεσο τρόπο.

[2]Ενώ οι προηγούμενες σχέσεις χρησιμοποιούσαν κλειστά διαστήματα για τα $\mathbf{Q}_i(t)$, η σχέση (7.28) χρησιμοποιεί ημι-ανοικτά διαστήματα για τους κλάδους της συνάρτησης, ώστε η τιμή της στους κόμβους να υπολογίζεται από ακριβώς ένα κλάδο· αυτό είναι απλώς ένα τυπικό θέμα, καθώς διαδοχικοί κλάδοι της συνάρτησης δίνουν την ίδια τιμή στους κόμβους.

Η δημιουργία ενός τμήματος $\mathbf{Q}_i(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ μίας καμπύλης B-spline βαθμού k [3] απαιτεί k διαδοχικά βήματα γραμμικής παρεμβολής. Στο πρώτο βήμα, $(k+1)$ σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_{i-k}$, $\mathbf{p}_{i-k+1}, \ldots, \mathbf{p}_i$ θα παρεμβληθούν κατά ζεύγη, παράγοντας τα σημεία $\mathbf{q}_j^1(t)$, $j = i-k+1, i-k+2, \ldots, i$ πάνω σε ευθύγραμμα τμήματα ορισμένα στα παραμετρικά διαστήματα $[t_j, t_{j+k}]$, αντίστοιχα. Σε κάθε επόμενο βήμα παρεμβολής $r = 2, 3, \ldots, k$, τα σημεία του προηγούμενου βήματα θα παρεμβληθούν για να παραχθούν σημεία $\mathbf{q}_j^r(t)$, $j = i-k+r, \ldots, i$ πάνω σε τμήματα βαθμού r ορισμένα σε ολοένα και μικρότερα παραμετρικά διαστήματα $[t_j, t_{j+k-r+1}]$. Μετά από k τέτοια βήματα, ένα μοναδικό τμήμα βαθμού k, $\mathbf{q}_i^k(t) = \mathbf{Q}_i(t)$ θα δημιουργηθεί, ορισμένο στο διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι τα διαδοχικά τμήματα $\mathbf{Q}_i(t)$ συνενώνονται με συνέχειαC^{k-1}, επομένως σχηματίζουν μία καμπύλη B-spline βαθμού k.

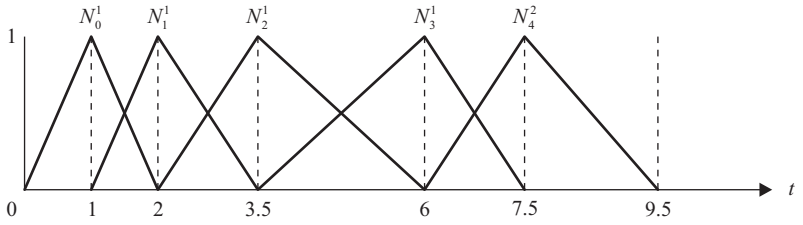
Για να εκφράσουμε συνολικά την καμπύλη συναρτήσει των σημείων ελέγχου της και των κόμβων της, μπορούμε να προχωρήσουμε όπως και στην περίπτωση της τετραγωνικής καμπύλης B-spline παραπάνω. Παρατηρούμε ότι κάθε σημείο ελέγχου $\mathbf{p}_i$ επηρεάζει $(k+1)$ διαδοχικά τμήματα $\mathbf{Q}_j(t)$, $j = i, i+1, \ldots, i+k$, και μπορούμε να κατασκευάσουμε μία συνάρτηση $N_i^k(t)$ που εκφράζει τη συνεισφορά του στην καμπύλη. Αυτές οι συναρτήσεις καλούνται *συναρτήσεις B-spline βαθμού* k και θα τις αναλύσουμε διεξοδικά παρακάτω· χρησιμοποιώντας αυτές, η καμπύλη B-spline μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{Q}(t) = \sum_{i=0}^{n} N_i^k(t)\mathbf{p}_i. \tag{7.30}$$

Η καμπύλη αποτελείται από $(n-k+1)$ πολυωνυμικά τμήματα βαθμού k, το καθένα από τα οποία ορίζεται στο παραμετρικό διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$ για $i = k, k+1, \ldots, n$. Επομένως, το πεδίο ορισμού της καμπύλης είναι η ένωση όλων αυτών των διαστημάτων, δηλαδή το διάστημα $[t_k, t_{n+1}]$. Συνολικά απαιτούνται $(n+k)$ κόμβοι $t_1, t_2, \ldots, t_{n+k}$ (και, όπως και για τις τετραγωνικές καμπύλες B-spline, δύο επιπλέον πλασματικοί κόμβοι t_0 και t_{n+k+1} που είναι απαραίτητοι για να ορισθούν σωστά οι $N_i^k(t)$ αλλά δεν συνεισφέρουν στο σχήμα της καμπύλης).[4] Οι κόμβοι πρέπει να είναι σε αύξουσα σειρά, $t_i \leq t_{i+1}$, καθώς αποτελούν τα άκρα των παραμετρικών διαστημάτων στα οποία ορίζονται τα τμήματα της καμπύλης. Κόμβοι μπορούν να επαναλαμβάνονται, όπως θα δούμε παρακάτω, με ενδιαφέρουσα επίδραση στη μορφή της καμπύλης· όμως το πολύ k διαδοχικοί κόμβοι μπορεί να είναι ίσοι, $t_i < t_{i+k}$. Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με την ακολουθία κόμβων της καμπύλης B-spline δίνονται στην Ενότητα 7.3.5.

[3] Κάποιοι συγγραφείς αναφέρονται στην *τάξη* $(k+1)$ μίας καμπύλης B-spline βαθμού k· εδώ χρησιμοποιούμε παντού τον βαθμό k της καμπύλης, καθώς είναι ο βαθμός των πολυωνυμικών τμημάτων που την αποτελούν.

[4] Αρκετές πηγές περιλαμβάνουν αυτούς τους πλασματικούς κόμβους στην ακολουθία των κόμβων της καμπύλης B-spline. Εδώ δεν θα ακολυθήσουμε αυτή την πρακτική και θα αναφερόμαστε μόνο στους κόμβους $t_1, \ldots, t_{n+k}$.



Σχήμα 7.5: *Γραμμικές συναρτήσεις B-spline ($k = 1$, $n = 4$).*

7.3.3 Συναρτήσεις B-spline

Οι συναρτήσεις $N_i^k(t)$ στις οποίες αναφερθήκαμε κατά τον ορισμό της καμπύλης B-spline ονομάζονται *συναρτήσεις B-spline βαθμού k*. Ορίζονται αναδρομικά θέτοντας

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_i, t_{i+1}), \\ 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases} \tag{7.31α}$$

και κατόπιν για $r = 1, 2, \ldots, k$ και $i = 0, 1, \ldots, n + k - r$,

$$N_i^r(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+r} - t_i} N_i^{r-1}(t) + \frac{t_{i+r+1} - t}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{r-1}(t). \tag{7.31β}$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι αυτές οι σχέσεις δίνουν την (7.28) για $k = 2$.

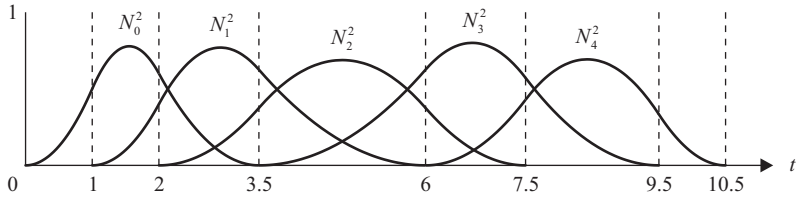
Οι συναρτήσεις B-spline $N_i^r(t)$ είναι πολυώνυμα βαθμού r ως προς t με *τοπική στήριξη* στο διάστημα $[t_i, t_{i+r+1})$, δηλαδή είναι μη μηδενικές μόνο σε αυτό το διάστημα. Επιπλέον, είναι *συναρτήσεις spline*, καθώς αποτελούνται από $(r + 1)$ πολυωνυμικά τμήματα βαθμού r που συνδέονται με συνέχεια C^{r-1} στα σημεία συνένωσης.

Στα Σχήματα 7.5 και 7.6 φαίνονται οι συναρτήσεις B-spline πρώτου και δεύτερου βαθμού για μία ενδεικτική ακολουθία κόμβων. Παρατηρούμε ότι κάθε συνάρτηση B-spline πρώτου βαθμού $N_i^1(t)$ αποτελείται από δύο γραμμικά τμήματα που συνδέονται στα σημεία t_{i+1} (συνέχεια C^0). Παρομοίως, κάθε συνάρτηση B-spline δευτέρου βαθμού $N_i^2(t)$ αποτελείται από τρία τετραγωνικά τμήματα που συνδέονται με συνέχεια C^1 στα t_{i+1} και t_{i+2}.

Δεδομένου ενός βαθμού k και μίας ακολουθίας κόμβων $t_0, t_1, \ldots, t_{n+k}, t_{n+k+1}$, όλες οι συναρτήσεις spline που ορίζονται με αυτή την ακολουθία κόμβων αποτελούν ένα διανυσματικό χώρο. Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι $(n+1)$ συναρτήσεις B-spline βαθμού k οι οποίες ορίζονται με αυτή την ακολουθία κόμβων σχηματίζουν μία βάση αυτού του διανυσματικού χώρου. Από αυτή την ιδιότητα πήραν οι συναρτήσεις (και οι καμπύλες) το όνομά τους: **b**asis spline.

7.3.4 Ο αλγόριθμος του de Boor

Όπως ο αλγόριθμος του de Casteljau για τον υπολογισμό σημείων μίας καμπύλης Bézier, ο *αλγόριθμος του de Boor* [dB72, Cox72] παρέχει ένα επαναληπτικό σχήμα για



Σχήμα 7.6: *Τετραγωνικές συναρτήσεις B-spline ($k = 2$, $n = 4$).*

τον υπολογισμό σημείων μίας καμπύλης B-spline. Ο αλγόριθμος αυτός συνοψίζει τα βήματα γραμμικής παρεμβολής που απαιτούνται για την κατασκευή μία καμπύλης B-spline βαθμού k.

Χάρη στην τοπική στήριξη των συναρτήσεων B-spline, για να υπολογιστεί ένα σημείο $\mathbf{Q}(t)$ μίας καμπύλης B-spline, πρέπει να είναι γνωστό το υποδιάστημα στο οποίο ανήκει η παραμετρική τιμή t. Έτσι τα βήματα του αλγορίθμου είναι τα ακόλουθα:

1. Για την ζητούμενη τιμή του t, βρίσκουμε το παραμετρικό διάστημα $[t_i, t_{i+1})$ στο οποίο ανήκει το t. Σημειώνεται ότι για το i θα ισχύει $k \le i \le n$, καθώς το πεδίο ορισμού της καμπύλης είναι το $[t_k, t_{n+1}]$.

2. Θέτουμε
$$\mathbf{q}_j^0(t) = \mathbf{p}_j\,, \quad j = i-k, i-k+1, \ldots, i. \tag{7.32α}$$

3. Πραγματοποιούμε τα βήματα γραμμικής παρεμβολής
$$\mathbf{q}_j^r(t) = \frac{t_{k-r+1+j} - t}{t_{k-r+1+j} - t_j}\,\mathbf{q}_{j-1}^{r-1}(t) + \frac{t - t_j}{t_{k-r+1+j} - t_j}\,\mathbf{q}_j^{r-1}(t)\,, \quad \begin{matrix} r = 1, 2, \ldots, k \\ i = i-k+r, i-k+r+1, \ldots, i. \end{matrix} \tag{7.32β}$$

4. Τότε το σημείο της καμπύλης που αντιστοιχεί στην παραμετρική τιμή t είναι το
$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{q}_i^k(t).$$

Όλα τα ενδιάμεσα σημεία που υπολογίζονται από τον αλγόριθμο του de Boor μπορούν να γραφούν σε μία τριγωνική διάταξη, παρόμοια με το τρίγωνο του de Casteljau. Για την περίπτωση μίας κυβικής καμπύλης B-spline, το τρίγωνο είναι (παραλείποντας την παράμετρο t)

$$\begin{array}{llll} \mathbf{p}_{i-3} = \mathbf{q}_{i-3}^0 & & & \\ \mathbf{p}_{i-2} = \mathbf{q}_{i-2}^0 & \mathbf{q}_{i-2}^1 & & \\ \mathbf{p}_{i-1} = \mathbf{q}_{i-1}^0 & \mathbf{q}_{i-1}^1 & \mathbf{q}_{i-1}^2 & \\ \mathbf{p}_i = \mathbf{q}_i^0 & \mathbf{q}_i^1 & \mathbf{q}_i^2 & \mathbf{q}_i^3 = \mathbf{Q}(t) \end{array}$$

```
for (j = i-k; j <= i; j++)  {
    m = j-i+k;
    deBoorPt[m] = controlPt[j];
}
for (r = 1; r <= k; r++)  {
    for (j = i; j >= i-k+r; j--)  {
        m = j-i+k;
        coeff = (t-knots[j]) / (knots[k-r+1+j] - knots[j]);
        deBoorPt[m] = (1-coeff)*deBoorPt[m-1]
                                    + coeff*deBoorPt[m];
    }
}
```

Αλγόριθμος 7.2: *Ο αλγόριθμος του de Boor.*

Αυτό το τρίγωνο έχει δύο αξιοσημείωτες διαφορές σε σύγκριση με το τρίγωνο του de Casteljau. Πρώτον, οι συντελεστές που χρησιμοποιούνται στις γραμμικές παρεμβολές δεν είναι σταθεροί ($1 - t$ και t) όπως στο τρίγωνο του de Casteljau αλλά εξαρτώνται από τη συγκεκριμένη γραμμή και στήλη. Δεύτερον, όταν αυτός ο αλγόριθμος υλοποιείται χρησιμοποιώντας έναν μονοδιάστατο πίνακα, τα ενδιάμεσα σημεία πρέπει να υπολογιστούν από κάτω προς τα επάνω ώστε να μην διαγράφονται απαραίτητα σημεία. Σημειώνεται επίσης ότι ο αλγόριθμος του de Boor δεν χρησιμοποιεί ποτέ τους πλασματικούς κόμβους t_0 και t_{n+k+1}, όπως είναι αναμενόμενο.

Ο Αλγόριθμος 7.2 παρουσιάζει μία ενδεικτική υλοποίηση του αλγορίθμου του de Boor. Καθώς οι περισσότερες σύγχρονες γλώσσες προγραμματισμού επιβάλλουν να αριθμούνται οι δείκτες των πινάκων από το 0, κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $m = j - i + k$, έτσι ώστε $m = 0, 1, \ldots, k - r$.

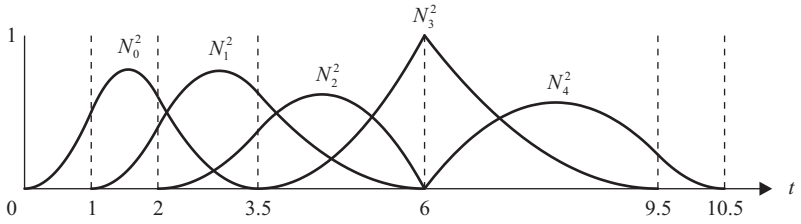
Αυτός ο αλγόριθμος μας επιτρέπει να σχεδιάσουμε μία καμπύλη B-spline υπολογίζοντας διαδοχικά σημεία στην καμπύλη, για t από t_k ως t_{n+1} σε μικρά βήματα Δt, ανάλογα με την επιθυμητή ακρίβεια, και ενώνοντάς τα με ευθύγραμμα τμήματα. Αν διατρέξουμε το πεδίο ορισμού της καμπύλης με αυτό τον τρόπο, είναι εύκολο να γνωρίζουμε σε κάθε βήμα το υποδιάστημα $[t_i, t_{i+1})$ στο οποίο ανήκει η τρέχουσα τιμή της παραμέτρου t.

7.3.5 Κόμβοι και παραμετροποιήσεις

Η ακολουθία κόμβων της καμπύλης B-spline επηρέαζει άμεσα τη μορφή της: χρησιμοποιώντας τα ίδια σημεία ελέγχου και διαφορετικές ακολουθίες κόμβων μπορούν να παραχθούν καμπύλες σημαντικά διαφορετικού σχήματος. Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε πιο αναλυτικά την ακολουθία κόμβων και τις ιδιότητές της.

Ιδιότητες των κόμβων της καμπύλης B-spline

Ας υποθέσουμε ότι σε μία καμπύλη B-spline βαθμού k ο πρώτος κόμβος έχει *πολλαπλότητα* k, δηλαδή επαναλαμβάνεται k φορές ($t_1 = t_2 = \cdots = t_{k-1} = t_k$). Τότε, κά-

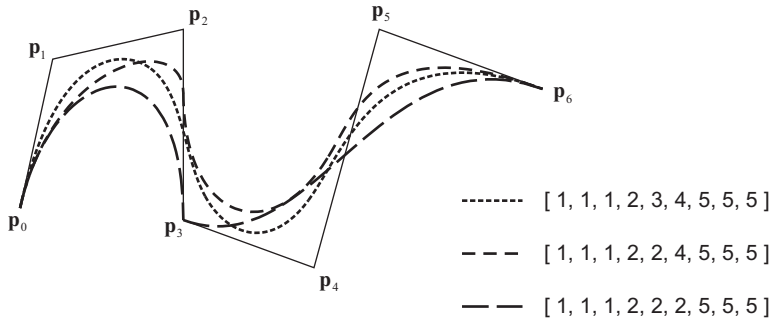


Σχήμα 7.7: *Τετραγωνικές συναρτήσεις B-spline ($k = 2$, $n = 4$) με $t_4 = t_5 = 6$.*

νοντας τους σχετικούς υπολογισμούς, μπορούμε να δείξουμε ότι $\mathbf{Q}(t_1) = \mathbf{Q}(t_k) = \mathbf{p}_0$· επομένως η καμπύλη παρεμβάλλει το πρώτο σημείο ελέγχου της. Παρομοίως, αν ο τελευταίος κόμβος έχει πολλαπλότητα k, η καμπύλη παρεμβάλλει το τελευταίο σημείο ελέγχου της $\mathbf{p}_n$. Μία ακολουθία κόμβων τέτοια ώστε οι k πρώτοι και οι k τελευταίοι κόμβοι να είναι ίσοι ονομάζεται *ανοικτή*. Παρατηρούμε ότι, σε αντίθεση με τις καμπύλες Bézier, οι οποίες παρεμβάλλουν πάντοτε τα ακραία σημεία ελέγχου τους, οι καμπύλες B-spline έχουν αυτή την ιδιότητα μόνο όταν χρησιμοποιείται μία ανοικτή ακολουθία κόμβων.

Γενικότερα, αν ένας κόμβος μίας καμπύλης B-spline επαναλαμβάνεται, $t_i = t_{i+1}$, μπορεί να δειχθεί ότι η καμπύλη χάνει ένα βαθμό συνέχειας στο αντίστοιχο σημείο $\mathbf{Q}(t_i)$. Συνεπώς, αν ένας κόμβος έχει πολλαπλότητα r, η καμπύλη είναι συνεχής C^{k-r} στο αντίστοιχο σημείο. Μία απεικόνιση αυτής της ιδιότητας δίνεται στο Σχήμα 7.7. Εμφανίζονται πάλι οι τετραγωνικές συναρτήσεις B-spline του Σχήματος 7.6, με μόνη διαφορά ότι δύο κόμβοι είναι ίσοι. Φαίνεται ότι οι συναρτήσεις B-spline δεν είναι πλέον συνεχείς C^1 παντού, αλλά απλώς συνεχείς C^0 στον διπλό κόμβο. Μία τετραγωνική καμπύλη B-spline που θα χρησιμοποιούσε αυτή την ακολουθία κόμβων θα ήταν επομένως μόνο συνεχής C^0 στο σημείο αυτό, καθώς είναι άθροισμα όρων $N_i^k(t)\mathbf{p}_i$.

Το Σχήμα 7.8 δείχνει μία κυβική καμπύλη B-spline της οποίας ένας κόμβος έχει πολλαπλότητα ένα, δύο και τρία. Μπορεί να φανεί ότι καθώς η πολλαπλότητα ενός κόμβου αυξάνεται, η καμπύλη πλησιάζει το πολύγωνο ελέγχου στην περιοχή του αντίστοιχου σημείου. Όταν η πολλαπλότητα του κόμβου γίνει ίση με το βαθμό της καμπύλης,



Σχήμα 7.8: *Επίδραση πολλαπλών κόμβων στο σχήμα μίας καμπύλης B-spline.*

σχηματίζεται μία γωνία στο σημείο ελέγχου που αντιστοιχεί σε αυτό τον κόμβο καθώς η καμπύλη είναι μόνο συνεχής C^0 σε αυτό το σημείο. Αυτή η ιδιότητα μπορεί να φανεί χρήσιμη κατά την πρακτική χρήση των καμπυλών B-spline για καλύτερο έλεγχο του σχήματός τους.

Τέλος, μπορούμε πλέον να αιτιολογήσουμε τον περιορισμό που αναφέρθηκε στην Ενότητα 7.3.2, ότι δηλαδή κανένας κόμβος δεν μπορεί να επαναλαμβάνεται περισσότερες από k φορές: αυτό θα οδηγούσε σε συνέχεια μικρότερη της C^0 και θα δημιουργούσε ασυνέχεια (διακοπή) στην καμπύλη.

Παραμετροποιήσεις

Στην παραπάνω παρουσίαση των καμπυλών B-spline φάνηκε ότι η ακολουθία των κόμβων παρέχεται από τον χρήστη, μαζί με τα σημεία ελέγχου της καμπύλης. Στην πράξη όμως, ο χρήστης θα έπρεπε να ενδιαφέρεται κυρίως για τα σημεία ελέγχου της καμπύλης, τα οποία παρέχουν μία προσέγγιση του σχήματός της. Η ακολουθία των κόμβων μπορεί να παραχθεί αυτόματα, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένους αλγορίθμους (*παραμετροποιήσεις*) οι οποίοι προσπαθούν να παράξουν μία καλοσχηματισμένη καμπύλη.

Η πιο απλή παραμετροποίηση είναι η *ομοιόμορφη*, στην οποία οι κόμβοι ισαπέχουν. Αυτή δημιουργείται αν θέσουμε

$$t_i = i - 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n + k. \tag{7.33}$$

Αν η καμπύλη πρέπει να παρεμβάλλει το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου της, πρέπει να χρησιμοποιηθεί μία ανοικτή ομοιόμορφη παραμετροποίηση, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$t_i = \begin{cases} 0, & i = 1, \ldots, k, \\ i - k, & i = k + 1, \ldots, n, \\ n - k + 1, & i = n + 1, \ldots, n + k. \end{cases} \tag{7.34}$$

Οι ομοιόμορφες παραμετροποιήσεις παράγουν οπτικά ικανοποιητικές καμπύλες στις περισσότερες περιπτώσεις. Το μειονέκτημά τους είναι, όμως, ότι δεν λαμβάνουν υπ' όψιν το σχήμα της καμπύλης με κανέναν τρόπο. Συνεπώς, σε κάποιες περιπτώσεις δεν παράγουν «ομαλές» καμπύλες, όπως για παράδειγμα σε περιπτώσεις όπου η καμπυλότητα της καμπύλης μεταβάλλεται απότομα. Τέτοιες περιπτώσεις αντιμετωπίζονται καλύτερα από παραμετροποιήσεις που λαμβάνουν υπ' όψιν τη γεωμετρία του πολυγώνου ελέγχου της καμπύλης.

Μία τέτοια παραμετροποίηση που χρησιμοποιείται συχνά στην πράξη είναι η παραμετροποίηση *μήκους χορδής*, στην οποία οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων είναι ανάλογες με τις αποστάσεις μεταξύ των αντίστοιχων σημείων ελέγχου. Μία ανοικτή

παραμετροποίηση μήκους χορδής είναι η εξής:

$$t_i = \begin{cases} 0\,, & i = 1, \ldots, k, \\ t_{i-1} + |\mathbf{p}_{i-k} - \mathbf{p}_{i-k-1}|\,, & i = k+1, \ldots, n, \\ \sum_{j=0}^{n-k} |\mathbf{p}_{j+1} - \mathbf{p}_j|\,, & i = n+1, \ldots, n+k. \end{cases} \tag{7.35}$$

Διαφορετικές παραμετροποιήσεις μήκους χορδής μπορούν να προκύψουν αλλάζοντας τους ακραίους κόμβους ή/και αν δεν απαιτείται η καμπύλη να παρεμβάλλει τα ακραία σημεία ελέγχου.

Μία παρόμοια παραμετροποίηση είναι η *κεντρομόλος*, στην οποία οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων είναι ανάλογες της τετραγωνικής ρίζας των αποστάσεων μεταξύ των αντίστοιχων σημείων ελέγχου. Μία ανοικτή κεντρομόλος παραμετροποίηση είναι η εξής:

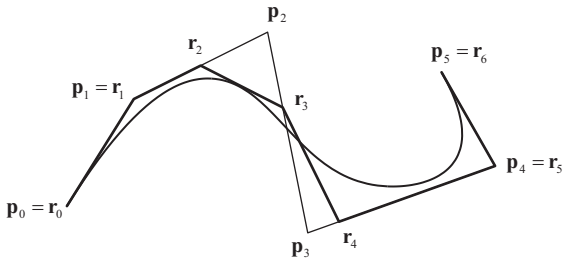
$$t_i = \begin{cases} 0\,, & i = 1, \ldots, k, \\ t_{i-1} + \sqrt{|\mathbf{p}_{i-k} - \mathbf{p}_{i-k-1}|}\,, & i = k+1, \ldots, n, \\ \sum_{j=0}^{n-k} \sqrt{|\mathbf{p}_{j+1} - \mathbf{p}_j|}\,, & i = n+1, \ldots, n+k. \end{cases} \tag{7.36}$$

Και στην περίπτωση αυτή, διαφορετικές τελικές συνθήκες μπορούν να οδηγήσουν σε διαφορετικές ακολουθίες κόμβων. Το όνομα αυτής της παραμετροποίησης προέρχεται από το γεγονός ότι αν ένα σωματίδιο κινείται στην καμπύλη με σταθερή ταχύτητα μεταξύ διαδοχικών κόμβων, τότε η κίνησή του θα είναι τέτοια ώστε να εξισορροπείται η κεντρομόλος δύναμη που του ασκείται.

Στη βιβλιογραφία έχουν εμφανιστεί διάφορες άλλες παραμετροποιήσεις, συνήθως κατάλληλες για ειδικές εφαρμογές. Αυτές προσαρμόζονται ακόμη καλύτερα στη γεωμετρία του πολυγώνου ελέγχου της καμπύλης, όμως η πολυπλοκότητά τους τις κάνει ακατάλληλες για γενική χρήση. Οι εφαρμογές σχεδίασης που απαιτούν ακρίβεια στο σχήμα της καμπύλης μπορούν να χρησιμοποιούν μία απλή αρχική παραμετροποίηση όπως αυτές που περιγράφηκαν παραπάνω, και κατόπιν να επιτρέπουν στο χρήστη την αλληλεπιδραστική τροποποίησή της ώστε να καταλήξει στο επιθυμητό σχήμα.

Εισαγωγή κόμβου

Μία σημαντική πράξη στις καμπύλες B-spline είναι η *εισαγωγή κόμβου*, η προσθήκη ενός κόμβου στην ακολουθία κόμβων της καμπύλης διατηρώντας αμετάβλητο το σχήμα της. Με την εισαγωγή ενός κόμβου θα πρέπει είτε να αυξηθεί ο βαθμός της καμπύλης είτε να προστεθεί ένα ακόμη σημείο ελέγχου, έτσι ώστε να διατηρηθεί η αναλογία μεταξύ του βαθμού της καμπύλης, του αριθμού των σημείων ελέγχου και του αριθμού των κόμβων της. Στις περισσότερες περιπτώσεις δεν είναι επιθυμητή η αύξηση του βαθμού της καμπύλης, καθώς ο υπολογισμός και ο χειρισμός καμπυλών υψηλότερου βαθμού είναι δυσκολότεροι. Επομένως, κατά την εισαγωγή κόμβου προστίθεται ένα νέο σημείο ελέγχου, και κάποια άλλα μετακινούνται ώστε να διατηρηθεί το σχήμα της καμπύλης.



Σχήμα 7.9: *Εισαγωγή κόμβου σε κυβική καμπύλη B-spline.*

Ο νέος κόμβος και το επιπλέον σημείο ελέγχου παρέχουν μεγαλύτερη ευελιξία στο σχήμα της καμπύλης. Επιπλέον, μπορεί να αποδειχθεί ότι καθώς εισάγονται κόμβοι στην ακολουθία κόμβων μίας καμπύλης B-spline, το πολύγωνο ελέγχου της πλησιάζει περισσότερο προς την καμπύλη. Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη σχεδίαση της καμπύλης B-spline, καθώς μετά από αρκετά βήματα εισαγωγής κόμβων το πολύγωνο ελέγχου θα αποτελεί μία αρκετά καλή προσέγγιση της ίδιας της καμπύλης.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι επιθυμούμε να εισαγάγουμε ένα νέο κόμβο s μεταξύ των κόμβων t_i και t_{i+1}. Η νέα ακολουθία κόμβων θα είναι $t_1, \ldots, t_i, s, t_{i+1}, \ldots, t_{n+k}$. Έστω $\mathbf{r}_j$, $j = 0, 1, \ldots, n+1$ τα νέα σημεία ελέγχου της καμπύλης. Καθώς ένα σημείο ελέγχου $\mathbf{p}_i$ επηρεάζει την καμπύλη μόνο στο διάστημα $[t_i, t_{i+k+1}]$ στο οποίο η αντίστοιχη συνάρτηση B-spline $N_i^k(t)$ είναι μη μηδενική, μόνο k από τα νέα σημεία ελέγχου θα διαφέρουν από τα αρχικά. Τα σημεία ελέγχου που δεν επηρεάζονται είναι τα

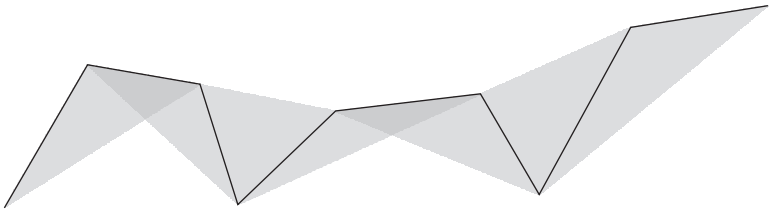
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_j &= \mathbf{p}_j\,, \qquad j = 0, \ldots, i-k, \\ \mathbf{r}_j &= \mathbf{p}_{j-1}\,, \quad j = i+1, \ldots, n+1, \end{aligned} \tag{7.37α}$$

και χρειάζεται να προσδιορίσουμε μόνο τα $\mathbf{r}_j$ για $j = i-k+1, \ldots, i$. Μπορεί να δειχθεί ότι αυτά δίνονται από τη σχέση

$$\mathbf{r}_j = \frac{t_{j+k} - s}{t_{j+k} - t_j}\mathbf{p}_{j-1} + \frac{s - t_j}{t_{j+k} - t_j}\mathbf{p}_j\,, \quad j = i-k+1, \ldots, i, \tag{7.37β}$$

και επομένως αποτελούν γραμμικές παρεμβολές των αρχικών σημείων ελέγχου σε κατάλληλα παραμετρικά διαστήματα. Αυτή η σχέση καλείται *τύπος εισαγωγής κόμβου του Boehm* [Boeh80]. Οι δείκτες που εμφανίζονται στις παραπάνω σχέσεις επιβάλλουν κάποιους περιορισμούς στο διάστημα που μπορεί να πραγματοποιηθεί εισαγωγή κόμβου. Συγκεκριμένα, ο δείκτης i πρέπει να είναι μεταξύ των k και n (συμπεριλαμβανομένων), με άλλα λόγια ένας νέος κόμβος μπορεί να εισαχθεί μόνο στο πεδίο ορισμού $[t_k, t_{n+1}]$ της καμπύλης.

Στο Σχήμα 7.9 παρουσιάζεται η εισαγωγή ενός κόμβου σε μία κυβική καμπύλη B-spline. Είναι εμφανές ότι το πολύγωνο ελέγχου πλησιάζει προς την καμπύλη, όπως ήδη αναφέρθηκε.



Σχήμα 7.10: *Ισχυρή ιδιότητα κυρτού περιβλήματος για μία τετραγωνική καμπύλη B-spline.*

7.3.6 Ιδιότητες καμπυλών B-spline

Η παραπάνω παρουσίαση των καμπυλών B-spline φανερώνει ότι αποτελούν ένα πολύ ευέλικτο εργαλείο σχεδίασης, καθώς σχηματίζονται από τμήματα χαμηλού βαθμού που συνενώνονται με εγγυημένη συνέχεια. Εδώ παρουσιάζουμε σύντομα τις πιο σημαντικές ιδιότητές τους.

- *Τοπικός έλεγχος.* Αντίθετα από τις καμπύλες Bézier, οι οποίες εμφανίζουν μόνο ψευδο-τοπικό έλεγχο (βλ. Ενότητα 7.2.5), οι καμπύλες B-spline παρουσιάζουν πλήρως τοπικό έλεγχο, έτσι ώστε αλλάζοντας τη θέση ενός σημείου ελέγχου να επηρεάζεται το σχήμα της καμπύλης μόνο σε ένα περιορισμένο τμήμα της. Συγκεκριμένα, το σημείο ελέγχου $\mathbf{p}_i$ επηρεάζει μόνο το τμήμα της καμπύλης που αντιστοιχεί στο παραμετρικό διάστημα $[t_i, t_{i+k+1})$ στο οποίο η αντίστοιχη συνάρτηση B-spline $N_i^k(t)$ έχει τοπική στήριξη (είναι μη μηδενική).

- *Ισχυρή ιδιότητα κυρτού περιβλήματος.* Όλα τα βήματα γραμμικής παρεμβολής που πραγματοποιούνται για τη δημιουργία μίας καμπύλης B-spline είναι κυρτοί συνδυασμοί των σημείων ελέγχου της (με την προϋπόθεση η ακολουθία των κόμβων να μην είναι φθίνουσα). Είναι προφανές, επομένως, ότι η καμπύλη B-spline περιέχεται μέσα στο κυρτό περίβλημα των σημείων ελέγχου της.

  Επιπλέον, κάθε καμπύλη B-spline ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα σε μία ακόμη πιο ισχυρή μορφή: κάθε σημείο της καμπύλης βρίσκεται μέσα στο κυρτό περίβλημα των $(k+1)$ σημείων ελέγχου που συνεισφέρουν στον υπολογισμό του (βλ. τη σχέση (7.32α) του αλγορίθμου de Boor), και, επομένως, η καμπύλη συνολικά βρίσκεται μέσα στην ένωση αυτών των κυρτών περιβλημάτων. Το Σχήμα 7.10 δείχνει αυτή την ιδιότητα για μία τετραγωνική καμπύλη.

- *Αναλλοίωτη σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς.* Η καμπύλη B-spline αποτελεί συσχετισμένο συνδυασμό των σημείων ελέγχου της, και, επομένως, παραμένει αναλλοίωτη σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς. Ως πρακτική συνέπεια, για να εφαρμοστεί ένας συσχετισμένος μετασχηματισμός σε μία καμπύλη B-spline, αρκεί να εφαρμοστεί στα σημεία ελέγχου της.

  Σημειώνουμε ότι, γενικά, οι παραμετροποιήσεις δεν διατηρούνται σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς. Για παράδειγμα, αν μία καμπύλη που είχε παραμετροποιηθεί με μία παραμετροποίηση μήκους χορδής μετασχηματισθεί, τότε οι

αποστάσεις μεταξύ των κόμβων δεν θα είναι πλέον ανάλογες με τις αποστάσεις των σημείων ελέγχου. Η μόνη παραμετροποίηση από αυτές που αναφέρθηκαν στην Ενότητα 7.3.5 που διατηρείται είναι η ομοιόμορφη.

- *Αναλλοίωτη σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς της παραμέτρου.* Η καμπύλη B-spline παραμένει αναλλοίωτη αν εφαρμοστεί ένας συσχετισμένος μετασχηματισμός στην παράμετρό της σε $u = a + (b-a)t$. Όπως και στην προηγούμενη ιδιότητα, η παραμετροποίηση μήκους χορδής και η κεντρομόλος δεν διατηρούνται σε τέτοιους μετασχηματισμούς.

- *Ισχυρή γραμμική ακρίβεια.* Αν τα σημεία ελέγχου μίας καμπύλης B-spline βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία, τότε η καμπύλη εκφυλίζεται σε ένα ευθύγραμμο τμήμα.

  Επιπλέον, αν $(k+1)$ συνεχόμενα σημεία ελέγχου της καμπύλης είναι συνευθειακά, το αντίστοιχο τμήμα της καμπύλης είναι ευθύγραμμο τμήμα λόγω της ισχυρής ιδιότητας κυρτού περιβλήματος.

- *Ισχυρή ιδιότητα φθίνουσας διακύμανσης.* Οι καμπύλες B-spline ικανοποιούν την ιδιότητα φθίνουσας διακύμανσης, και έτσι μία επίπεδη καμπύλη B-spline δεν μπορεί να τέμνεται από μία τυχαία ευθεία περισσότερες φορές από όσες η ευθεία τέμνει το πολύγωνο ελέγχου της, και μία μη επίπεδη καμπύλη B-spline δεν μπορεί να τέμνεται από μία ευθεία ή ένα επίπεδο περισσότερες φορές από όσες τέμνεται το πολύγωνο ελέγχου της.

  Οι καμπύλες B-spline ικανοποιούν αυτή την ιδιότητα σε μία ακόμη πιο ισχυρή μορφή: ισχύει για το πολύγωνο που σχηματίζεται από τα $(k+1)$ σημεία ελέγχου που συνεισφέρουν σε ένα οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης.

- *Παρεμβολή ακραίων σημείων ελέγχου.* Όπως έχουμε δείξει, μία καμπύλη B-spline παρεμβάλλει τα ακραία σημεία ελέγχου της μόνο αν χρησιμοποιείται μία ανοικτή ακολουθία κόμβων, στην οποία ο πρώτος και ο τελευταίος κόμβος επαναλαμβάνονται k φορές. Τέτοιες ακολουθίες κόμβων χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στην πράξη, για προφανείς λόγους ευκολίας.

- *Παράγωγος.* Μπορεί να δειχθεί ότι η εφαπτομένη (πρώτη παράγωγος) μίας καμπύλης B-spline βαθμού k είναι

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Q}(t) = k \sum_{i=0}^{n-1} N_i^{k-1}(t) \, \frac{1}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i). \tag{7.38}$$

- *Γενίκευση των καμπυλών Bézier.* Μία καμπύλη B-spline βαθμού k με $(k+1)$ σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ και ακολουθία κόμβων $(0^{<k>}, 1^{<k>})$, όπου με $x^{<k>}$ σημειώνεται ένας κόμβος x με πολλαπλότητα k, είναι μία καμπύλη Bézier βαθμού k με σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$. Αυτό μπορεί να επαληθευτεί υπολογίζοντας τις συναρτήσεις B-spline $N_i^k(t)$ για αυτή την ειδική ακολουθία κόμβων και παρατηρώντας ότι είναι ισοδύναμες με τα πολυώνυμα Bernstein $B_i^k(t)$.

Οι παραπάνω ιδιότητες υποδεικνύουν ότι οι καμπύλες B-spline χαμηλού βαθμού είναι ευκολότερες στο χειρισμό: το κυρτό περίβλημα των τμημάτων της καμπύλης είναι πιο κοντά σε αυτές, ο τοπικός έλεγχος είναι καλύτερος καθώς το τμήμα της καμπύλης που επηρεάζεται απο τη μετακίνηση ενός σημείου ελέγχου είναι μικρότερο, και οι υπολογισμοί που απαιτούνται είναι πιο αποδοτικοί. Στην πράξη, οι κυβικές καμπύλες B-spline χρησιμοποιούνται συχνότερα, καθώς παρέχουν ικανοποιητική ευελιξία με αρκετά χαμηλή πολυπλοκότητα.

7.3.7 Καμπύλες B-spline σε μορφή καμπύλης Bézier

Όπως είδαμε, μία καμπύλη B-spline βαθμού k αποτελείται από πολυωνυμικά τμήματα βαθμού k ορισμένα σε παραμετρικά διαστήματα $[t_i, t_{i+1}]$. Καθένα από αυτά τα τμήματα μπορεί να γραφεί στη μορφή καμπύλης Bézier βαθμού k για κατάλληλα σημεία ελέγχου. Με αυτό τον τρόπο λαμβάνουμε μία μορφή της καμπύλης B-spline ως κατά τμήματα καμπύλη Bézier. Αυτή η μορφή της καμπύλης είναι χρήσιμη τόσο θεωρητικά, καθώς οι καμπύλες Bézier είναι σημαντικά απλούστερες και μελετημένες λεπτομερώς, όσο και πρακτικά, για παράδειγμα χρησιμοποιώντας μία αποδοτική μέθοδο σχεδιασμού καμπυλών Bézier για τα επιμέρους τμήματα ώστε να σχεδιαστεί η καμπύλη B-spline.

Θα παρουσιάσουμε τη μορφή Bézier των τετραγωνικών ($k = 2$) και κυβικών ($k = 3$) καμπυλών B-spline, οι οποίες, όπως έχει ήδη αναφερθεί, είναι οι πιο εύχρηστες στην πράξη. Οι αντίστοιχες σχέσεις για τις καμπύλες υψηλότερου βαθμού είναι σημαντικά πιο πολύπλοκες.

Ας θεωρήσουμε αρχικά μία τετραγωνική καμπύλη B-spline $\mathbf{Q}(t)$ και ένα συγκεκριμένο τμήμα της $\mathbf{Q}_i(t)$ που ορίζεται από σημεία ελέγχου (B-spline) $\mathbf{p}_{i-2}$, $\mathbf{p}_{i-1}$ και $\mathbf{p}_i$ στο παραμετρικό διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$. Σε μορφή καμπύλης Bézier, αυτό το τμήμα ορίζεται από τρία σημεία ελέγχου (Bézier) τα οποία θα συμβολίσουμε $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_1$, και $\mathbf{r}_2$. Καθώς η καμπύλη Bézier παρεμβάλλει το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου, τα $\mathbf{r}_0$ και $\mathbf{r}_2$ είναι ακριβώς τα άκρα αυτού του τμήματος της καμπύλης, $\mathbf{Q}_i(t_i)$ και $\mathbf{Q}_i(t_{i+1})$, αντίστοιχα. Για να προσδιορίσουμε το $\mathbf{r}_1$, μπορούμε να συγκρίνουμε τις μορφές B-spline και Bézier αυτού του τμήματος, και να συμπεράνουμε έτσι ότι συμπίπτει με το σημείο ελέγχου B-spline $\mathbf{p}_{i-1}$. Συνολικά, χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του αλγορίθμου de Boor, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_0 &= \mathbf{Q}_i(t_i) = \frac{t_{i+1} - t_i}{t_{i+1} - t_{i-1}}\mathbf{p}_{i-2} + \frac{t_i - t_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}\mathbf{p}_{i-1} = \mathbf{q}_{i-1}^1(t_i), \\
\mathbf{r}_1 &= \mathbf{p}_{i-1}, \\
\mathbf{r}_2 &= \mathbf{Q}_i(t_{i+1}) = \frac{t_{i+2} - t_{i+1}}{t_{i+2} - t_i}\mathbf{p}_{i-1} + \frac{t_{i+1} - t_i}{t_{i+2} - t_i}\mathbf{p}_i = \mathbf{q}_i^1(t_{i+1}).
\end{aligned} \tag{7.39}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα μία κυβική καμπύλη B-spline $\mathbf{Q}(t)$ και ένα συγκεκριμένο τμήμα της $\mathbf{Q}_i(t)$ ορισμένο από σημεία ελέγχου (B-spline) $\mathbf{p}_{i-3}$, $\mathbf{p}_{i-2}$, $\mathbf{p}_{i-1}$ και $\mathbf{p}_i$ στο παραμετρικό διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$. Σε μορφή καμπύλης Bézier, αυτό το τμήμα ορίζεται από τέσσερα σημεία ελέγχου (Bézier) τα οποία θα συμβολίσουμε $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, και $\mathbf{r}_3$. Και

πάλι, το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου $\mathbf{r}_0$ και $\mathbf{r}_3$ είναι ακριβώς τα άκρα αυτού του τμήματος, $\mathbf{Q}_i(t_i)$ και $\mathbf{Q}_i(t_{i+1})$, αντίστοιχα. Τα υπόλοιπα σημεία ελέγχου είναι τώρα κάποια από τα ενδιάμεσα σημεία που παράγονται κατά τα βήματα γραμμικής παρεμβολής της καμπύλης B-spline. Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του αλγορίθμου de Boor, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_0 &= \frac{t_{i+1}-t_i}{t_{i+1}-t_{i-1}}\left(\frac{t_{i+1}-t_i}{t_{i+1}-t_{i-2}}\mathbf{p}_{i-3}+\frac{t_i-t_{i-2}}{t_{i+1}-t_{i-2}}\mathbf{p}_{i-2}\right)+\frac{t_i-t_{i-1}}{t_{i+1}-t_{i-1}}\mathbf{r}_1,\\
\mathbf{r}_1 &= \mathbf{q}^1_{i-1}(t_i) = \frac{t_{i+2}-t_i}{t_{i+2}-t_{i-1}}\mathbf{p}_{i-2}+\frac{t_i-t_{i-1}}{t_{i+2}-t_{i-1}}\mathbf{p}_{i-1},\\
\mathbf{r}_2 &= \mathbf{q}^1_{i-1}(t_{i+1}) = \frac{t_{i+2}-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_{i-1}}\mathbf{p}_{i-2}+\frac{t_{i+1}-t_{i-1}}{t_{i+2}-t_{i-1}}\mathbf{p}_{i-1},\\
\mathbf{r}_3 &= \frac{t_{i+2}-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_i}\mathbf{r}_2+\frac{t_{i+1}-t_i}{t_{i+2}-t_i}\left(\frac{t_{i+3}-t_{i+1}}{t_{i+3}-t_i}\mathbf{p}_{i-1}+\frac{t_{i+1}-t_i}{t_{i+3}-t_i}\mathbf{p}_i\right).
\end{aligned} \tag{7.40}$$

7.4 Ρητές καμπύλες Bézier και B-spline

Οι καμπύλες Bézier και B-spline που παρουσιάστηκαν παραπάνω είναι οι πιο βασικές παραμετρικές καμπύλες ελεύθερης μορφής που χρησιμοποιούνται στην γεωμετρική σχεδίαση με υπολογιστή. Οι καμπύλες Bézier παρέχουν μία χρήσιμη έκφραση ενιαίων καμπυλών οποιουδήποτε βαθμού, και οι καμπύλες B-spline τις γενικεύουν για την έκφραση ομαλών, ευέλικτων καμπυλών αποτελούμενων από περισσότερα τμήματα.

Δυστυχώς, αυτές οι δύο αναπαραστάσεις καμπυλών έχουν δύο μειονεκτήματα που μπορούν να περιορίσουν την χρησιμότητά τους σε πρακτικές εφαρμογές. Πρώτον, δεν είναι αναλλοίωτες σε προβολές, οι οποίες δεν αποτελούν συσχετισμένους μετασχηματισμούς· επομένως, δεν μπορούν να ενταχθούν εύκολα (ούτε σωστά) σε μία τριδιάστατη σκηνή. Δεύτερον, δεν μπορούν να αναπαραστήσουν κωνικές τομές (κύκλους, ελλείψεις, παραβολές, και υπερβολές) ακριβώς, εκτός από παραβολές· όμως οι κωνικές τομές είναι πολύ συνήθη αντικείμενα, και σε ένα πρόγραμμα σχεδίασης θα είναι ασφαλώς βολική μία κοινή αναπαράσταση για όλα τα χρησιμοποιούμενα αντικείμενα.

Αυτά τα δύο προβλήματα αντιμετωπίζονται από τις *ρητές* καμπύλες Bézier και B-spline. Οι ρητές καμπύλες, γενικά, είναι πολυωνυμικές καμπύλες που χρησιμοποιούν ομογενείς συντεταγμένες (βλ. Ενότητα 3.4.1). Αν δίνεται μία (συνήθης) πολυωνυμική καμπύλη

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

(η συνιστώσα $z(t)$ θα ήταν παντού μηδενική σε μία επίπεδη καμπύλη), μπορούμε να

κατασκευάσουμε μία οικογένεια ρητών καμπυλών

$$\mathbf{X}^h(t) = \begin{bmatrix} w(t)x(t) \\ w(t)y(t) \\ w(t)z(t) \\ w(t) \end{bmatrix}.$$

Αν η $w(t)$ είναι σταθερή για όλες τις τιμές του t στο πεδίο ορισμού της καμπύλης, λαμβάνουμε την αρχική καμπύλη $\mathbf{X}(t)$.

Ο ορισμός των ρητών καμπυλών Bézier και B-spline είναι άμεσος, καθώς στην παραμετρική μορφή οι συνιστώσες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους· έτσι, η προσθήκη της ομογενούς συντεταγμένης απαιτεί απλώς την επέκταση των σχέσεων με μία ακόμη συνιστώσα. Αυτή η προσθήκη, όμως, προσδίδει στις καμπύλες ενδιαφέρουσες ιδιότητες, τις οποίες θα εξετάσουμε παρακάτω.

7.4.1 Ρητές καμπύλες Bézier

Ας θεωρήσουμε μία ακολουθία ομογενών σημείων ελέγχου

$$\mathbf{p}_i^h = [w_i\mathbf{p}_i, w_i]^{\mathrm{T}} = [w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i]^{\mathrm{T}},$$

$i = 0, 1, \ldots, n$. Μία ομογενής καμπύλη Bézier μπορεί να ορισθεί ως

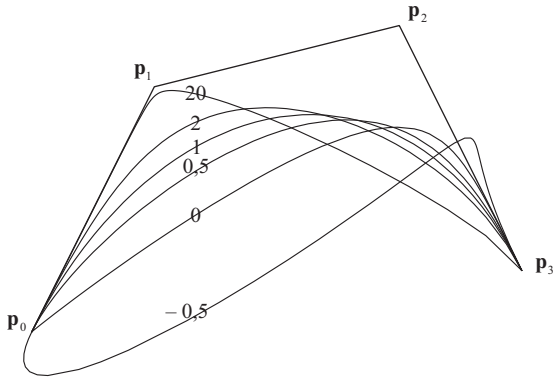
$$\mathbf{P}^h(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\mathbf{p}_i^h = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n B_i^n(t) w_i \mathbf{p}_i \\ \sum_{i=0}^n B_i^n(t) w_i \end{bmatrix}.$$

Για να λάβουμε τη συνήθη καρτεσιανή μορφή της καμπύλης, διαιρούμε όλες τις συνιστώσες με την ομογενή συντεταγμένη και λαμβάνουμε (παραλείποντας την ομογενή συντεταγμένη που γίνεται ίση με 1),

$$\mathbf{P}^r(t) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n B_i^n(t) w_i} \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) w_i \mathbf{p}_i. \tag{7.41}$$

Αυτή είναι μία *ρητή καμπύλη Bézier* βαθμού n. Τα (καρτεσιανά) σημεία $\mathbf{p}_i$ είναι τα *σημεία ελέγχου* της καμπύλης και τα w_i είναι τα αντίστοιχα *βάρη*.

Τα βάρη ονομάζονται έτσι επειδή η τιμή του κάθε w_i επηρεάζει τη συνεισφορά του αντίστοιχου σημείου ελέγχου στην καμπύλη. Αν κάποιο βάρος w_i είναι μηδενικό, τότε το σημείο ελέγχου $\mathbf{p}_i$ δεν επηρεάζει την καμπύλη καθόλου. Καθώς το w_i αυξάνεται, η καμπύλη έλκεται προς το $\mathbf{p}_i$· όμως έχουν σημασία μόνο οι λόγοι των διάφορων w_i και όχι οι απόλυτες τιμές τους, καθώς κοινοί παράγοντες εξαλείφονται λόγω της διαίρεσης που πραγματοποιείται. Όπως αναμένεται, αν όλα τα βάρη είναι ίσα, η ρητή καμπύλη Bézier περιορίζεται σε μία συνήθη καμπύλη Bézier. Τα βάρη επιλέγονται θετικά, καθώς αρνητικές τιμές έχουν απρόβλεπτη και ανεπιθύμητη επίδραση στο σχήμα της καμπύλης· Πρώτον, η ιδιότητα κυρτού περιβλήματος δεν διατηρείται, καθώς η καμπύλη παύει να αποτελεί κυρτό συνδυασμό των σημείων ελέγχου της, και δεύτερον,



Σχήμα 7.11: *Αποτελέσματα διαφορετικών τιμών βάρους στο σχήμα μίας ρητής καμπύλης Bézier. Το πολύγωνο ελέγχου είναι το ίδιο με το Σχήμα 7.2. Τα χρησιμοποιούμενα βάρη είναι* $[1, w_1, 1, 1]$ *όπου το* w_1 *εμφανίζεται σε κάθε καμπύλη.*

μπορεί να δημιουργηθούν πόλοι που οδηγήσουν σε άπειρες καμπύλες. Συνολικά, τα βάρη μίας ρητής καμπύλης Bézier προσφέρουν ένα επιπλέον επίπεδο τοπικού ελέγχου στο σχήμα της καμπύλης.

Αυτές οι ιδιότητες επιδεικνύονται στο Σχήμα 7.11, στο οποίο φαίνεται η επίδραση του βάρους w_1 σε μία κυβική ρητή καμπύλη Bézier. Για $w_1 > 0$, καθώς το w_1 αυξάνεται, η καμπύλη πλησιάζει προς το $\mathbf{p}_1$. Για $w_1 = 1$, όλα τα βάρη είναι ίδια και η καμπύλη είναι μία απλή καμπύλη Bézier (συγκρίνετέ την με το Σχήμα 7.2). Για $w_1 = 0$, το σημείο ελέγχου $\mathbf{p}_1$ δεν επηρεάζει την καμπύλη. Τέλος, για $w_1 < 0$, η καμπύλη απομακρύνεται από το $\mathbf{p}_1$ κατά τρόπο μάλλον απρόβλεπτο.

Η διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω υποδεικνύει ότι μία ρητή καμπύλη Bézier $\mathbf{P}^r(t)$ είναι, στην πραγματικότητα, η προοπτική προβολή μίας συνήθους καμπύλης Bézier υψηλότερης διάστασης, της ομογενούς $\mathbf{P}^h(t)$, στο επίπεδο $w = 1$ (ανατρέξτε στο Σχήμα 3.6 για μία οπτικοποίηση των ομογενών συντεταγμένων).

Οι ρητές καμπύλες Bézier διατηρούν τις περισσότερες από τις ιδιότητες των συνήθως καμπυλών Bézier. Μία αξιοσημείωτη διαφορά αφορά στις ιδιότητες του κυρτού περιβλήματος και της φθίνουσας διακύμανσης, οι οποίες ισχύουν μόνο αν τα βάρη είναι μη αρνητικά. Επιπλέον, οι ρητές καμπύλες Bézier είναι αναλλοίωτες όχι μόνο σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς αλλά και σε μετασχηματισμούς προβολής· αυτή η ιδιότητα προέρχεται από το γεγονός ότι οι ίδιες αποτελούν προβολές των αντίστοιχων ομογενών καμπυλών. Συνεπώς, για να εφαρμοστεί προβολή σε μία ρητή καμπύλη Bézier αρκεί να εφαρμοστεί στα σημεία ελέγχου της.

Οι ρητές καμπύλες Bézier μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας τον γνωστό αλγόριθμο του de Casteljau για τα ομογενή σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_i^h$ και πραγματοποιώντας τη διαίρεση με την ομογενή συντεταγμένη στο τέλος. Μία εναλλακτική μέθοδος, η οποία μπορεί να προσφέρει υψηλότερη αριθμητική ακρίβεια αλλά με μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος, είναι να πραγματοποιείται η διαίρεση σε κάθε βήμα, ώστε να χρησιμοποιείται η βασική ομογενής αναπαράσταση των ενδιάμεσων σημείων σε κάθε βήμα του αλγορίθμου.

Κωνικές τομές ως ρητές καμπύλες Bézier

Κωνικές τομές (κύκλοι, ελλείψεις, παραβολές και υπερβολές) είναι οι διάφορες καμπύλες που προκύπτουν από την τομή ενός επιπέδου και ενός κώνου σε διαφορετικές γωνίες [Weis04]. Οι αλγεβρικές εξισώσεις του έχουν κοινή μορφή,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{7.42}$$

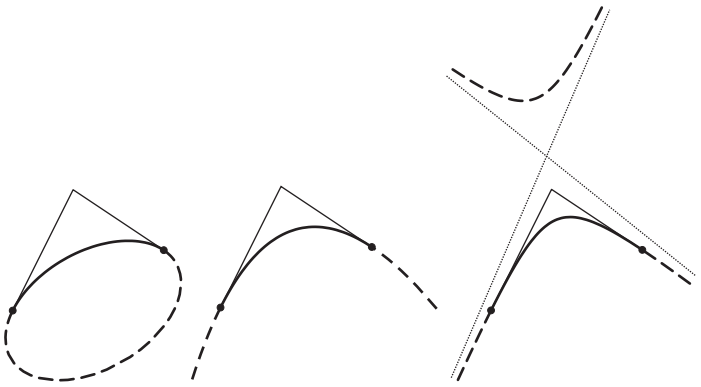
με τους ακόλουθους περιορισμούς για κάθε είδος καμπύλης:

- Αν $B^2 - 4AC < 0$, η καμπύλη είναι μία έλλειψη. Αν, επιπλέον, $B = 0$ και $A = C$, η καμπύλη είναι ένας κύκλος.
- Αν $B^2 - 4AC = 0$, η καμπύλη είναι μία παραβολή.
- Αν $B^2 - 4AC > 0$, η καμπύλη είναι μία υπερβολή.

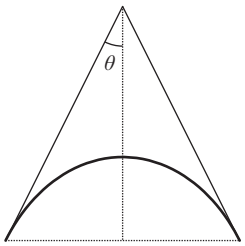
Η μόνη καμπύλη που μπορεί να αναπαρασταθεί από μη ρητή πολυωνυμική καμπύλη είναι η παραβολή· στην πραγματικότητα, οποιαδήποτε τετραγωνική καμπύλη Bézier είναι τμήμα παραβολής. Οι υπόλοιπες κωνικές τομές μπορούν να αναπαρασταθούν μόνο από ρητές καμπύλες, και ειδικότερα από ρητές τετραγωνικές καμπύλες Bézier. Μπορεί να δειχθεί ότι (βλ. επίσης την Άσκηση 8) ότι μία ρητή τετραγωνική καμπύλη Bézier με (μη συγγραμμικά) σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ και αντίστοιχα βάρη 1, w_1, 1, είναι

- τμήμα έλλειψης, αν $|w_1| < 1$,
- τμήμα παραβολής, αν $|w_1| = 1$ (τότε η καμπύλη είναι μία συνήθης καμπύλη Bézier),
- τμήμα υπερβολής, αν $|w_1| > 1$.

Το Σχήμα 7.12 παρουσιάζει όλες τις πιθανότητες.



Σχήμα 7.12: *Οι κωνικές τομές ως ρητές καμπύλες Bézier: έλλειψη ($|w_1| < 1$), παραβολή ($|w_1| = 1$), υπερβολή ($|w_1| > 1$). Το τμήμα των καμπυλών με συνεχή γραμμή αντιστοιχεί σε $w_1 > 0$ και αυτό με διακεκομμένη γραμμή («συμπληρωματικό») αντιστοιχεί σε $w_1 < 0$. Φαίνεται ότι τα «άπειρα» τμήματα της παραβολής και της υπερβολής αντιστοιχούν σε $w_1 < 0$.*



Σχήμα 7.13: *Ένα κυκλικό τόξο κατασκευασμένο ως ρητή τετραγωνική καμπύλη Bézier. Το βάρος του μεσαίου σημείου ελέγχου είναι* $w_1 = \sin\theta$.

Ιδιαίτερη προσοχή αξίζει να δοθεί στα κυκλικά τόξα. Στο Σχήμα 7.13 παρουσίαζεται το πολύγωνο ελέγχου μίας ρητής καμπύλης Bézier που αντιπροσωπεύει ένα κυκλικό τόξο. Μπορεί να δειχθεί ότι σε αυτή την περίπτωση το πολύγωνο ελέγχου πρέπει να είναι ισοσκελές τρίγωνο, $|\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|$, και το βάρος του $\mathbf{p}_1$ είναι $w_1 = \sin\theta$, όπου θ είναι η ημίσεια γωνία μεταξύ των $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ και $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$.

7.4.2 Ρητές καμπύλες B-spline — NURBS

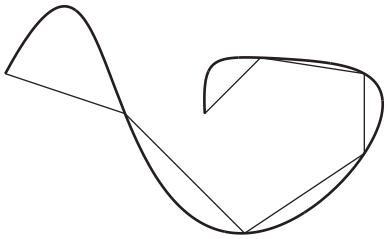
Έχοντας παρουσιάσει τις ρητές καμπύλες Bézier, η κατασκευή των ρητών καμπυλών B-spline δεν παρουσιάζει δυσκολίες. Δεδομένης μίας ακολουθίας σημείων ελέγχου $\mathbf{p}_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, μία ακολουθία αντίστοιχων βαρών w_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, και μίας ακολουθίας κόμβων t_i, $i = 1, 2, \ldots, n + k$, μία *ρητή καμπύλη B-spline* βαθμού k δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{Q}^r(t) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} N_i^n(t) w_i} \sum_{i=0}^{n} N_i^n(t) w_i \mathbf{p}_i. \tag{7.43}$$

Οι ρητές καμπύλες B-spline με τυχαίες (όχι ομοιόμορφες) ακολουθίες κόμβων αναφέρονται συχνά ως *NURBS*, (non-uniform rational B-splines).

Οι NURBS διατηρούν τις περισσότερες ιδιότητες των καμπυλών B-spline, με την εξαίρεση των ισχυρών ιδιοτήτων του κυρτού περιβλήματος και της φθίνουσας διακύμανσης οι οποίες ισχύουν μόνο αν τα βάρη είναι μη αρνητικά· επιπλέον οι NURBS είναι αναλλοίωτες σε μετασχηματισμούς προβολής. Τα βάρη έχουν τις ίδιες ιδιότητες που αναφέρθηκαν για τις ρητές καμπύλες Bézier, προσφέροντας έτσι πρόσθετη ευελιξία στο σχεδιαστή.

Οι NURBS είναι η πιο γενική αναπαράσταση καμπυλών από όσες εξετάστηκαν μέχρι αυτό το σημείο: με κατάλληλες συνθήκες μπορούν να αναπαραστήσουν συνήθεις καμπύλες B-spline (αν όλα τα βάρη είναι ίσα), συνήθεις και ρητές καμπύλες Bézier (βλ. την τελευταία ιδιότητα των καμπυλών B-spline στην Ενότητα 7.3.6), και κωνικές τομές (βλ. επίσης την Άσκηση 9). Επιπλέον, διαθέτουν όλες τις επιθυμητές ιδιότητες των άλλων τύπων καμπυλών, και ιδιαίτερα τοπικό έλεγχο, και είναι αναλλοίωτες τόσο σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς όσο και σε μετασχηματισμούς προβολής. Για όλους αυτούς τους λόγους, οι NURBS είναι το καθιερωμένο εργαλείο για την αναπαράσταση καμπυλών ελεύθερης μορφής σε εφαρμογές γεωμετρικής σχεδίασης με υπολογιστή.



Σχήμα 7.14: *Ταλαντώσεις μίας καμπύλης παρεμβολής υψηλού βαθμού.*

7.5 Καμπύλες παρεμβολής

Οι καμπύλες Bézier και B-spline που αναλύσαμε στις προηγούμενες ενότητες είναι καμπύλες *προσέγγισης*, καθώς —γενικά— δεν διέρχονται από τα σημεία ελέγχου τους, τα οποία απλώς παρέχουν μία καλή ένδειξη του σχήματός τους. Συχνά, όμως, υπάρχει η ανάγκη κατασκευής καμπυλών *παρεμβολής* οι οποίες διέρχονται από δεδομένα σημεία.

Αυτό το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: αν δίνεται ένα σύνολο σημείων $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ και αντίστοιχες τιμές της παραμέτρου (κόμβοι) $t_0, t_1, \ldots, t_n$, να βρεθεί μία παραμετρική καμπύλη $\mathbf{P}(t)$ που να ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\mathbf{P}(t_i) = \mathbf{p}_i\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{7.44}$$

Απλές μέθοδοι παρεμβολής κατασκευάζουν την $\mathbf{P}(t)$ ως μία ενιαία πολυωνυμική καμπύλη βαθμού n. Σημειώνουμε ότι αυτή η καμπύλη είναι μοναδική: καθορίζεται πλήρως από τους $(n+1)$ συντελεστές του αντίστοιχου πολυωνύμου, οι οποίοι μπορούν να υπολογιστούν ως η μοναδική λύση ενός γραμμικού συστήματος $(n+1)$ εξισώσεων που σχηματίζονται από τις σχέσεις (7.44). Αυτός ο τρόπος υπολογισμού της καμπύλης, επιλύοντας το γραμμικό σύστημα, δεν είναι καθόλου πρακτικός. Παρακάτω παρουσιάζουμε δύο άλλες μεθόδους κατασκευής αυτής της καμπύλης, άμεσα χρησιμοποιώντας τα πολυώνυμα Lagrange και αναδρομικά χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Aitken.

Παρά τα πλεονεκτήματα αυτών των τελευταίων μεθόδων, η χρήση μίας ενιαίας πολυωνυμικής καμπύλης για την παρεμβολή ενός συνόλου σημείων παρουσιάζει κάποια μειονεκτήματα. Πρώτον, η παρεμβολή αρκετών σημείων απαιτεί πολυώνυμο υψηλού βαθμού και, συνεπακόλουθα, οι απαιτούμενοι υπολογισμοί είναι πολύπλοκοι και αριθμητικά ασταθείς. Δεύτερον, η παραγόμενη καμπύλη παρουσιάζει *ταλαντώσεις* (Σχήμα 7.14) και δεν ακολουθεί το πολύγωνο ελέγχου με προβλέψιμο τρόπο· το συγκεκριμένο πρόβλημα μετριάζει σημαντικά τη χρησιμότητα αυτών των μεθόδων.

Για να αντιμετωπισθούν αυτά τα ζητήματα, η παρεμβολή συνήθως πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας καμπύλες που σχηματίζονται από επιμέρους τμήματα χαμηλού βαθμού, τα οποία συνενώνονται με κατάλληλους περιορισμούς συνέχειας. Παρακάτω θα εξετάσουμε την παρεμβολή με κυβικές καμπύλες Hermite καθώς και με κυβικές καμπύλες B-spline.

7.5.1 Απλή πολυωνυμική παρεμβολή

Ένας απλός τρόπος κατασκευής της καμπύλης παρεμβολής ώστε να ικανοποιεί τους περιορισμούς που τέθηκαν παραπάνω είναι χρησιμοποιώντας τα πολυώνυμα Lagrange βαθμού n,

$$L_i^n(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{7.45}$$

Τότε, η καμπύλη παρεμβολής είναι

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^{n} L_i^n(t)\mathbf{p}_i(t). \tag{7.46}$$

Σχετικά με τα πολυώνυμα Lagrange, παρατηρούμε ότι το i-οστό πολυώνυμο $L_i^n(t)$ είναι μηδέν σε όλους τους κόμβους t_j, εκτός από τον αντίστοιχο κόμβο t_i στον οποίο η τιμή του είναι 1· συνεπώς, η καμπύλη ικανοποιεί τη συνθήκη (7.44). Άλλα χαρακτηριστικά των πολυωνύμων Lagrange φανερώνουν ιδιότητες της καμπύλης παρεμβολής:

- *Αναλλοίωτη σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς.* Αυτό ισχύει καθώς τα πολυώνυμα Lagrange αθροίζουν στη μονάδα· συνεπώς, η καμπύλη παρεμβολής είναι βαρυκεντρικός συνδυασμός των σημείων ελέγχου της.

- *Απουσία ιδιότητας κυρτού περιβλήματος.* Τα πολυώνυμα Lagrange δεν είναι παντού θετικά ούτε μικρότερα της μονάδας· έτσι η καμπύλη δεν περιέχεται στο κυρτό περίβλημα των σημείων ελέγχου της.

- *Γραμμική ακρίβεια.* Αν όλα τα σημεία ελέγχου βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία, τότε η καμπύλη έχει το σχήμα ευθύγραμμου τμήματος.

- *Απουσία ιδιότητας φθίνουσας διακύμανσης.* Η αιτιολογία της απουσίας της ιδιότητας κυρτού περιβλήματος υποδεικνύει ότι η καμπύλη παρεμβολής δεν ικανοποιεί ούτε την ιδιότητα φθίνουσας διακύμανσης· με άλλα λόγια, όπως ήδη αναφέρθηκε, η καμπύλη μπορεί να παρουσιάζει ταλαντώσεις.

Ο αλγόριθμος του Aitken παρέχει έναν αναδρομικό υπολογισμό της καμπύλης παρεμβολής, ανάλογο των αλγορίθμων de Casteljau και de Boor:

1. Για τη ζητούμενη τιμή του t, θέτουμε

$$\mathbf{p}_i^0(t) = \mathbf{p}_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{7.47α}$$

2. Πραγματοποιούμε τα βήματα γραμμικής παρεμβολής

$$\mathbf{p}_i^r(t) = \frac{t_{i+r} - t}{t_{i+r} - t_i}\,\mathbf{p}_i^{r-1}(t) + \frac{t - t_i}{t_{i+r} - t_i}\,\mathbf{p}_{i+1}^{r-1}(t), \quad \begin{matrix} r = 1, 2, \ldots, n, \\ i = 0, 1, \ldots, n - r. \end{matrix} \tag{7.47β}$$

3. Τότε, το σημείο της καμπύλης που αντιστοιχεί στην παραμετρική τιμή t είναι

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{p}_0^n(t).$$

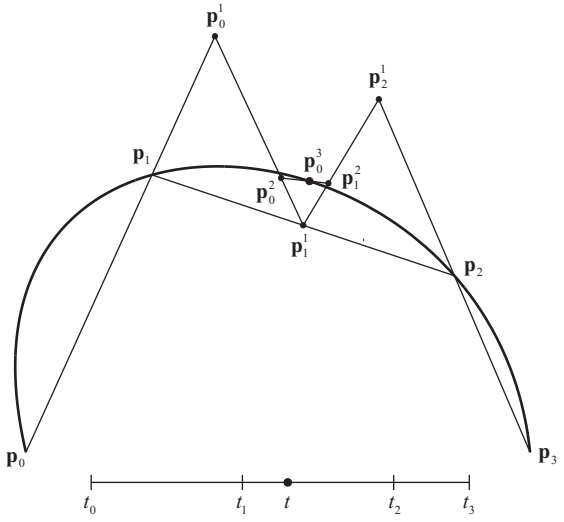
Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι στα βήματα γραμμικής παρεμβολής που πραγματοποιούνται, η παράμετρος t δεν βρίσκεται πάντα μεταξύ των t_i και t_{i+r}, και, συνεπώς, τα ενδιάμεσα σημεία που παράγονται δεν είναι κυρτοί συνδυασμοί των σημείων του προηγουμένου βήματος (Σχήμα 7.15).

7.5.2 Καμπύλες Hermite

Το πρόβλημα της παρεμβολής, όπως τέθηκε παραπάνω, αναφέρεται στην εύρεση μίας καμπύλης που διέρχεται από συγκεκριμένα σημεία. Είναι όμως επίσης ενδιαφέρον να αναζητήσουμε μία καμπύλη που να παρεμβάλλει και άλλα στοιχεία, όπως εφαπτόμενα διανύσματα. Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε την παρεμβολή με (κυβικές) καμπύλες Hermite, οι οποίες παρεμβάλλουν δεδομένα σημεία και έχουν δεδομένα εφαπτόμενα διανύσματα στα σημεία αυτά.

Κυβική παρεμβολή Hermite

Ας υποθέσουμε, αρχικά, ότι δίνονται δύο σημεία $\mathbf{p}_0$ και $\mathbf{p}_1$ και αντίστοιχα εφαπτόμενα διανύσματα $\vec{\mathbf{m}}_0$ και $\vec{\mathbf{m}}_1$. Στην απλούστερη περίπτωση, αναζητούμε μία κυβική καμπύλη $\mathbf{H}(t)$, $t \in [0,1]$ (την *κυβική καμπύλη Hermite*), η οποία να ικανοποιεί τις



Σχήμα 7.15: *Ο αλγόριθμος του Aitken για την κατασκευή της καμπύλης παρεμβολής (προσαρμοσμένο από τον [Fari01]).*

ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(0) &= \mathbf{p}_0, \qquad \mathbf{H}'(0) = \vec{\mathbf{m}}_0, \\ \mathbf{H}(1) &= \mathbf{p}_1, \qquad \mathbf{H}'(1) = \vec{\mathbf{m}}_1. \end{aligned} \tag{7.48}$$

Σημειώνουμε ότι τα τέσσερα στοιχεία που παρέχονται είναι αρκετά για τον προσδιορισμό μίας κυβικής καμπύλης.

Στην ανάλυση των καμπυλών Bézier δείξαμε ότι κάθε κυβική πολυωνυμική καμπύλη μπορεί να γραφεί στη μορφή μίας καμπύλης Bézier. Έτσι εκφράζουμε την καμπύλη Hermite ως

$$\mathbf{H}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\mathbf{q}_i\,, \quad t \in [0,1] \tag{7.49}$$

για κάποια άγνωστα σημεία ελέγχου Bézier $\mathbf{q}_i$. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των καμπυλών Bézier έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= \mathbf{H}(0) = \mathbf{q}_0, \\ \mathbf{p}_1 &= \mathbf{H}(1) = \mathbf{q}_3, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{m}}_0 = \mathbf{H}'(0) = 3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_0 + \tfrac{1}{3}\,\vec{\mathbf{m}}_0, \\ \vec{\mathbf{m}}_1 = \mathbf{H}'(1) = 3(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{p}_1 - \tfrac{1}{3}\,\vec{\mathbf{m}}_1. \end{aligned}$$

Επομένως η καμπύλη είναι:

$$\mathbf{H}(t) = (1-t)^3\mathbf{p}_0 + 3t(1-t)^2\left(\mathbf{p}_0 + \tfrac{1}{3}\,\vec{\mathbf{m}}_0\right) + 3t^2(1-t)\left(\mathbf{p}_1 - \tfrac{1}{3}\,\vec{\mathbf{m}}_1\right) + t^3\mathbf{p}_1$$

ή, εκφράζοντάς την συναρτήσει των στοιχείων ορισμού της,

$$\mathbf{H}(t) = H_0^3(t)\mathbf{p}_0 + H_1^3(t)\mathbf{p}_1 + H_2^3(t)\vec{\mathbf{m}}_0 + H_3^3(t)\vec{\mathbf{m}}_1\,, \quad t \in [0,1], \tag{7.50}$$

όπου $H_i^3(t)$ είναι τα *κυβικά πολυώνυμα Hermite*

$$\begin{aligned} H_0^3(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1, \\ H_1^3(t) &= -2t^3 + 3t^2, \\ H_2^3(t) &= t^3 - 2t^2 + t, \\ H_3^3(t) &= t^3 - t^2. \end{aligned} \tag{7.51}$$

Στην περίπτωση που η καμπύλη ορίζεται σε ένα τυχαίο παραμετρικό διάστημα $[a, b]$, αυτές οι σχέσεις πρέπει να μεταβληθούν. Αντίθετα από τις καμπύλες Bézier, οι καμπύλες Hermite *δεν* είναι αναλλοίωτες σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς της παραμέτρου τους. Με άλλα λόγια, τα στοιχεία ορισμού τους (συγκεκριμένα τα εφαπτόμενα διανύσματα $\vec{\mathbf{m}}_0$ και $\vec{\mathbf{m}}_1$) πρέπει να μεταβληθούν για να παραμείνει η καμπύλη αμετάβλητη αν η παράμετρος αλλάξει από $t \in [0,1]$ σε $u \in [a, b]$ θέτοντας $u = (1-t)a + tb$.

Από τις σχέσεις (7.18), οι εφαπτόμενες στα άκρα είναι μετά την αλλαγή παραμέτρου

$$\vec{\mathbf{m}}_0 = \mathbf{H}'(a) = \frac{1}{b-a}3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0),$$
$$\vec{\mathbf{m}}_1 = \mathbf{H}'(b) = \frac{1}{b-a}3(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2),$$

και εργαζόμενοι όπως προηγουμένως λαμβάνουμε

$$\mathbf{H}(u) = H_0^3(u)\mathbf{p}_0 + H_1^3(u)\mathbf{p}_1 + H_2^3(u)(b-a)\vec{\mathbf{m}}_0 + H_3^3(u)(b-a)\vec{\mathbf{m}}_1\,, \quad u \in [a,b]. \quad (7.52)$$

Επομένως τα εφαπτόμενα διανύσματα πρέπει να διαιρεθούν με $(b-a)$ ώστε η καμπύλη να είναι στη μορφή της (7.50). Η φυσική εξήγηση αυτού του γεγονότος είναι σχετικά απλή: χρησιμοποιώντας την $\mathbf{H}(t)$ διατρέχουμε την καμπύλη σε μία χρονική μονάδα (όσο το μήκος του διαστήματος $[0,1]$)· αν θέλουμε να την διατρέξουμε σε $(b-a)$ χρονικές μονάδες (το μήκος του νέου διαστήματος $[a,b]$), η ταχύτητά μας, που αντιπροσωπεύεται από τα εφαπτόμενα διανύσματα, πρέπει να διαιρεθεί με έναν παράγοντα $(b-a)$.

Κυβική παρεμβολή Hermite κατά τμήματα

Το πρακτικό ενδιαφέρον της παρεμβολής μόνο δύο σημείων και των αντίστοιχων εφαπτομένων διανυσμάτων είναι ασφαλώς περιορισμένο. Θα ήταν πιο ενδιαφέρουσα η κατασκευή μίας ομαλής καμπύλης που να παρεμβάλλει μία ακολουθία σημείων $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ και αντίστοιχα εφαπτόμενα διανύσματα $\vec{\mathbf{m}}_0$, $\vec{\mathbf{m}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{m}}_n$ σε παραμετρικές τιμές $t_0, t_1, \ldots, t_n$.

Μία τέτοια καμπύλη είναι δυνατόν να κατασκευαστεί ως μία κατά τμήματα κυβική καμπύλη Hermite. Στην πραγματικότητα κατασκευάζονται ανεξάρτητα τμήματα Hermite, ένα για κάθε παραμετρικό διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$, και θα σχηματίσουν μία συνεχή C^1 καμπύλη καθώς τα εφαπτόμενα διανύσματα $\vec{\mathbf{m}}_i$ στα άκρα τους θα ταυτίζονται. Κάθε τμήμα θα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{H}_i(u) = H_0^3(u)\mathbf{p}_i + H_1^3(u)\mathbf{p}_{i+1} + H_2^3(u)(t_{i+1}-t_i)\vec{\mathbf{m}}_i + H_3^3(u)(t_{i+1}-t_i)\vec{\mathbf{m}}_{i+1}\,, \quad u \in [t_i, t_{i+1}].$$

Αυτός ο τρόπος κατασκευής μίας καμπύλης παρεμβολής παρέχει μεγάλη ευελιξία στο σχεδιαστή, καθώς επιτρέπει τη μεταβολή του σχήματος της καμπύλης μέσω των εφαπτομένων διανυσμάτων στα σημεία παρεμβολής. Ακόμη μεταλύτερη ευελιξία επιτυγχάνεται αν απαιτηθεί μόνο γεωμετρική συνέχεια G^1 στα σημεία παρεμβολής, επιτρέποντας στα εφαπτόμενα διανύσματα στο άκρο ενός διαστήματος και στην αρχή του επόμενου να έχουν απλώς ίδια διεύθυνση και όχι απαραίτητα και ίδιο μέτρο.

Αυτόματη παραγωγή εφαπτομένων

Παρ' όλα αυτά, σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να μην είναι επιθυμητός ο προσδιορισμός από τον χρήστη των εφαπτομένων διανυσμάτων στους κόμβους, ή μπορεί να μην είναι εύκολη η εύρεση εφαπτομένων διανυσμάτων που να παράγουν μία καμπύλη καλού σχήματος. Σε τέτοιες περιπτώσεις απαιτείται μία αυτόματη μέθοδος υπολογισμού κατάλληλων εφαπτομένων διανυσμάτων. Οι απλούστερες μέθοδοι αναζητούν μία καμπύλη συνεχή C^1 στα σημεία ένωσης των τμημάτων, ενώ πιο πολύπλοκες μέθοδοι παράγουν μία καμπύλη συνεχή C^2.

Μία απλή προσέγγιση για τον υπολογισμό των εφαπτομένων διανυσμάτων είναι να θέσουμε κάθε $\vec{\mathbf{m}}_i$ παράλληλο προς την ευθεία που ορίζεται από τα δύο γειτονικά σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_{i-1}$ και $\mathbf{p}_{i+1}$:

$$\vec{\mathbf{m}}_i = \tfrac{1}{2}(1-c)(\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{7.53}$$

Η σταθερά c είναι μία *σταθερά τάσης* η οποία επηρεάζει το μέτρο των εφαπτόμενων διανυσμάτων. Οι καμπύλες που παράγονται χρησιμοποιώντας αυτά τα εφαπτόμενα διανύσματα καλούνται *θεμελιώδεις splines* (cardinal splines). Αν $c = 0$ τότε $\vec{\mathbf{m}}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i-1})$, και οι καμπύλες καλούνται *Catmull–Rom splines*. Αυτή η διαδικασία δεν μπορεί να προσδιορίσει τις εφαπτόμενες $\vec{\mathbf{m}}_0$ και $\vec{\mathbf{m}}_n$ στο πρώτο και στο τελευταίο σημείο ελέγχου.

Μία δεύτερη προσέγγιση είναι να χρησιμοποιηθούν οι *εφαπτόμενες Bessel*: το εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{\mathbf{m}}_i$ τίθεται ίσο προς την εφαπτομένη της παραβολής που παρεμβάλλει τα τρία γειτονικά σημεία $\mathbf{p}_{i-1}$, $\mathbf{p}_i$, και $\mathbf{p}_{i+1}$. Αν $\mathbf{Q}_i(u)$, $u \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$ είναι αυτή η παραβολή, η οποία μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τα πολυώνυμα Lagrange ή τον αλγόριθμο του Aitken, τότε

$$\vec{\mathbf{m}}_i = \frac{d}{du}\mathbf{Q}_i(t_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{7.54α}$$

Για το πρώτο και το τελευταίο εφαπτόμενο διάστημα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι εφαπτόμενες της πρώτης και της τελευταίας παραβολής αντίστοιχα,

$$\vec{\mathbf{m}}_0 = \frac{d}{du}\mathbf{Q}_1(t_0) \quad \text{και} \quad \vec{\mathbf{m}}_n = \frac{d}{du}\mathbf{Q}_{n-1}(t_n). \tag{7.54β}$$

Κάνοντας τους απαραίτητους υπολογισμούς, καταλήγουμε στις ακόλουθες σχέσεις για τα εφαπτόμενα διανύσματα, εκφρασμένα ως προς τα στοιχεία της καμπύλης:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{m}}_0 = {} & \frac{-t_2 - t_1 + 2t_0}{(t_2 - t_0)(t_1 - t_0)}\mathbf{p}_0 + \frac{t_2 - t_0}{(t_2 - t_1)(t_1 - t_0)}\mathbf{p}_1 \\ & + \frac{t_1 - t_0}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_0)}\mathbf{p}_2,\end{aligned} \tag{7.55α}$$

$$\vec{\mathbf{m}}_i = -\frac{t_{i+1}-t_i}{(t_{i+1}-t_{i-1})(t_i-t_{i-1})}\mathbf{p}_{i-1} + \frac{t_{i+1}-2t_i+t_{i-1}}{(t_{i+1}-t_i)(t_i-t_{i-1})}\mathbf{p}_i + \frac{t_i-t_{i-1}}{(t_{i+1}-t_i)(t_{i+1}-t_{i-1})}\mathbf{p}_{i+1}, \tag{7.55β}$$

$$\vec{\mathbf{m}}_n = \frac{t_n-t_{n-1}}{(t_n-t_{n-2})(t_{n-1}-t_{n-2})}\mathbf{p}_{n-2} - \frac{t_n-t_{n-2}}{(t_n-t_{n-1})(t_{n-1}-t_{n-2})}\mathbf{p}_{n-1} + \frac{2t_n-t_{n-1}-t_{n-2}}{(t_n-t_{n-1})(t_n-t_{n-2})}\mathbf{p}_n. \tag{7.55γ}$$

Σημειώνουμε ότι οι εφαπτόμενες Bessel $\vec{\mathbf{m}}_0$ και $\vec{\mathbf{m}}_n$ στα άκρα της καμπύλης μπορούν να χρησιμοποιηθούν ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες, ώστε να συμπληρωθούν οι εφαπτόμενες των θεμελιωδών splines που αναφέρθηκαν προηγουμένως.

Οι δύο προηγούμενες μέθοδοι για τον υπολογισμό των εφαπτομένων διανυσμάτων παράγουν καμπύλες C^1 συνεχείς. Για να κατασκευαστεί μία καμπύλη που να έχει συνέχεια C^2 στα σημεία συνένωσης των κυβικών τμημάτων που την αποτελούν, πρέπει να απαιτήσουμε να είναι ίσες οι δεύτερες παράγωγοι κάθε ζεύγους διαδοχικών τμημάτων στα σημεία συνένωσης. Αν $\mathbf{H}_i(u)$, $u \in [t_i, t_{i+1}]$ είναι το τμήμα που παρεμβάλλει τα $\mathbf{p}_i$ και $\mathbf{p}_{i+1}$, πρέπει να ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\frac{d^2}{du^2}\mathbf{H}_{i-1}(t_i) = \frac{d^2}{du^2}\mathbf{H}_i(t_i).$$

Χρησιμοποιώντας την (7.52), παραγωγίζουμε τα τμήματα καμπύλης Hermite και λαμβάνουμε

$$(t_{i+1}-t_i)\vec{\mathbf{m}}_{i-1} + 2(t_{i+1}-t_{i-1})\vec{\mathbf{m}}_i + (t_i-t_{i-1})\vec{\mathbf{m}}_{i+1} = 3\,\frac{t_{i+1}-t_i}{t_i-t_{i-1}}(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_{i-1}) + 3\,\frac{t_i-t_{i-1}}{t_{i+1}-t_i}(\mathbf{p}_{i+1}-\mathbf{p}_i). \tag{7.56}$$

Αυτή η σχέση ισχύει για $i = 1, 2, \ldots, n-1$, παρέχοντας έτσι $(n-1)$ εξισώσεις για τον υπολογισμό των $(n+1)$ εφαπτόμενων διανυσμάτων m_i, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Καθώς έχουμε χρησιμοποιήσει όλα τα διαθέσιμα στοιχεία της καμπύλης, πρέπει να επιβάλουμε στην καμπύλη παρεμβολής δύο επιπρόσθετες συνθήκες, ώστε να δημιουργηθούν δύο ακόμη σχέσεις που θα επιτρέψουν τον υπολογισμό των εφαπτομένων διανυσμάτων. Το γεγονός αυτό καταρχήν προσθέτει πολυπλοκότητα στον προσδιορισμό της καμπύλης παρεμβολής, όμως παράλληλα προσφέρει κάποια ευελιξία στο σχήμα της καμπύλης. Συνήθως επιβάλλονται συνθήκες που αναφέρονται στα άκρα της καμπύλης, από τις οποίες υπολογίζονται οι τιμές των $\vec{\mathbf{m}}_0$ και $\vec{\mathbf{m}}_n$. Η πιο εύκολη προσέγγιση θα ήταν να προσδιοριστούν αυτά τα εφαπτόμενα διανύσματα απευθείας από τον χρήστη· εναλλακτικά, εφαρμόζονται γεωμετρικές συνθήκες που λαμβάνουν υπ' όψιν το σχήμα της καμπύλης κοντά στα άκρα της. Θα παρουσιάσουμε τέτοιες συνθήκες παρακάτω· για την ώρα υποθέτουμε ότι τα $\vec{\mathbf{m}}_0$ και $\vec{\mathbf{m}}_n$ είναι γνωστά. Συνδυάζοντας

τις εξισώσεις (7.56) για όλα τα i, κατασκευάζουμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{m}}_0 \\ \vec{\mathbf{m}}_1 \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{m}}_{n-1} \\ \vec{\mathbf{m}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{c}}_0 \\ \vec{\mathbf{c}}_1 \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{c}}_{n-1} \\ \vec{\mathbf{c}}_n \end{bmatrix}, \tag{7.57}$$

όπου θέσαμε

$$\begin{aligned} &\alpha_i = (t_{i+1} - t_i), && \vec{\mathbf{c}}_0 = \vec{\mathbf{m}}_0, \\ &\beta_i = 2(t_{i+1} - t_{i-1}), && \vec{\mathbf{c}}_i = 3\,\frac{t_{i+1} - t_i}{t_i - t_{i-1}}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}) + 3\,\frac{t_i - t_{i-1}}{t_{i+1} - t_i}(\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i), \\ &\gamma_i = (t_i - t_{i-1}), && \vec{\mathbf{c}}_n = \vec{\mathbf{m}}_n. \end{aligned}$$

Λύνοντας αυτό το σύστημα, λαμβάνουμε εφαπτόμενα διανύσματα $\vec{\mathbf{m}}_i$ έτσι ώστε η καμπύλη παρεμβολής να είναι συνεχής C^2. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτό το σύστημα έχει πάντα μοναδική λύση· επιπλέον πρόκειται για τριδιαγώνιο σύστημα και μπορεί να επιλυθεί αποδοτικά χρησιμοποιώντας μία απευθείας μέθοδο, όπως η ανάλυση LU.

Συνοριακές συνθήκες για κατά τμήματα C^2 παρεμβολή Hermite

Οι επιπρόσθετες συνθήκες που απαιτούνται για τον καθορισμό των εφαπτομένων διανυσμάτων για μία κατά τμήματα καμπύλη Hermite που να είναι συνεχής C^2, καλούνται *τελικές* ή *συνοριακές συνθήκες*, καθώς αφορούν τα εφαπτόμενα διανύσματα $\vec{\mathbf{m}}_0$ και $\vec{\mathbf{m}}_n$ στα άκρα της καμπύλης.

Μία τέτοια συνθήκη είναι η *συνοριακή συνθήκη Bessel*. Χρησιμοποιούνται οι εφαπτόμενες Bessel που υπολογίστηκαν στη σχέση (7.55) για τα $\vec{\mathbf{m}}_0$ και $\vec{\mathbf{m}}_n$, ώστε οι εφαπτόμενες στα άκρα να συμπίπτουν με αυτές των παραβολών που διέρχονται από τα πρώτα και τα τελευταία τρία σημεία ελέγχου. Στην περίπτωση αυτή, αρκεί να αντικατασταθούν τα $\vec{\mathbf{c}}_0$ και $\vec{\mathbf{c}}_n$ στο σύστημα (7.57) με τις παραπάνω εκφράσεις.

Μία άλλη συνθήκη είναι η *τετραγωνική συνοριακή συνθήκη*, η οποία επιβάλλει να είναι ίσες οι δεύτερες παράγωγοι της καμπύλης παρεμβολής στους δύο πρώτους κόμβους (και αντίστοιχα στους δύο τελευταίους). Χρησιμοποιώντας τους προηγούμενους συμβολισμούς, πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\frac{d^2}{du^2}\mathbf{H}_0(t_0) = \frac{d^2}{du^2}\mathbf{H}_0(t_1) \quad \text{και} \quad \frac{d^2}{du^2}\mathbf{H}_{n-1}(t_{n-1}) = \frac{d^2}{du^2}\mathbf{H}_{n-1}(t_n).$$

Παραγωγίζοντας δύο φορές την καμπύλη Hermite μπορούμε να συμπεράνουμε ότι με αυτή την προϋπόθεση

$$\vec{\mathbf{m}}_0 + \vec{\mathbf{m}}_1 = 2\,\frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0}{t_1 - t_0} \quad \text{και} \quad \vec{\mathbf{m}}_{n-1} + \vec{\mathbf{m}}_n = 2\,\frac{\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}.$$

Αυτές οι σχέσεις πρέπει να ενταχθούν στο σύστημα (7.57), αντικαθιστώντας την πρώ-

τη και την τελευταία γραμμή του. Ευτυχώς, παρά την αλλαγή αυτή το σύστημα παραμένει τριδιαγώνιο και μπορεί να επιλυθεί αποδοτικά.

Η τελευταία συνθήκη που θα αναλύσουμε είναι η *φυσική συνοριακή συνθήκη*, η οποία επιβάλλει να μηδενίζονται οι δεύτερες παράγωγοι στα άκρα της καμπύλης. Αν εφαρμοστεί αυτή η συνθήκη, η καμπύλη παρεμβολής γίνεται ευθεία κοντά στα άκρα της· ένα αποτέλεσμα που μπορεί να είναι επιθυμητό, ή να μην είναι, ανάλογα με την εφαρμογή. Το όνομα αυτής της συνθήκης προέρχεται από το γεγονός ότι η καμπύλη που παράγεται προσομοιάζει με την μηχανική (ή *φυσική*) spline, η οποία στερεώνεται στα άκρα της και έτσι μηδενίζεται η καμπυλότητά της. Εργαζόμενοι όπως και στην τετραγωνική συνοριακή συνθήκη, λαμβάνουμε τις σχέσεις:

$$2\vec{\mathbf{m}}_0 + \vec{\mathbf{m}}_1 = 3\,\frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0}{t_1 - t_0} \quad \text{και} \quad \vec{\mathbf{m}}_{n-1} + 2\vec{\mathbf{m}}_n = 3\,\frac{\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}.$$

Επισημαίνεται ότι θα πρέπει και πάλι να αντικαταστήσουμε την πρώτη και την τελευταία εξίσωση του συστήματος (7.57) με αυτές.

7.5.3 Παρεμβολή με κυβικές καμπύλες B-spline⊛

Οι καμπύλες B-spline, όπως μελετήθηκαν παραπάνω, προσεγγίζουν ένα δεδομένο σύνολο σημείων ελέγχου. Σε αυτή την ενότητα δείχνουμε πώς μπορεί να κατασκευαστεί μία κυβική καμπύλη B-spline που να παρεμβάλλει ένα σύνολο σημείων.

Θα συμβολίζουμε την καμπύλη παρεμβολής B-spline ως $\mathbf{Q}(t)$. Οι τιμές της παραμέτρου t_i στις οποίες η καμπύλη παρεμβάλλει τα σημεία $\mathbf{p}_i$,

$$\mathbf{Q}(t_i) = \mathbf{p}_i\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{7.58}$$

χρησιμοποιούνται επίσης ως οι κόμβοι της καμπύλης B-spline. Στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε τα σημεία ελέγχου $\mathbf{q}_i$ αυτής της κυβικής καμπύλης B-spline.

Υποθέτοντας ότι τα δεδομένα σημεία $\mathbf{p}_i$ διαφέρουν μεταξύ τους, οι τιμές των t_i πρέπει επίσης να διαφέρουν μεταξύ τους. Το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου μπορούν να παρεμβληθούν εύκολα, αν χρησιμοποιηθεί μία ανοικτή ακολουθία κόμβων. Επομένως, προσθέτουμε κόμβους t_{-2}, t_{-1} και t_{n+1}, t_{n+2} τέτοιους ώστε

$$\begin{aligned} t_{-2} &= t_{-1} = t_0, \\ t_n &= t_{n+1} = t_{n+2}. \end{aligned}$$

Με αυτή την ακολουθία κόμβων, τα σημεία ελέγχου είναι $\mathbf{q}_i$, $i = -3, -2, \ldots, n-1$ (το εύρος δεικτών για τα σημεία ελέγχου επιβάλλεται από το εύρος δεικτών των κόμβων). Το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου είναι ήδη γνωστά,

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{-3} &= \mathbf{p}_0, \\ \mathbf{q}_{n-1} &= \mathbf{p}_n. \end{aligned} \tag{7.59}$$

Για τα υπόλοιπα σημεία ελέγχου, ο ορισμός της κυβικής καμπύλης B-spline και η (7.58)

δίνουν

$$\mathbf{p}_j = \mathbf{Q}(t_j) = \sum_{i=-3}^{n-1} N_i^3(t_j)\mathbf{q}_i\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{7.60}$$

Η τιμή της κυβικής συνάρτησης B-spline $N_i^3(t)$ στους κόμβους t_j μπορεί να υπολογιστεί ως εξής: Ξεκινούμε υπολογίζοντας τις τετραγωνικές συναρτήσεις B-spline (7.28) στους κόμβους, λαμβάνοντας την απλοποιημένη μορφή

$$N_i^2(t_j) = \begin{cases} 0\,, & j = i, \\ \frac{t_{i+1}-t_i}{t_{i+2}-t_i}\,, & j = i+1, \\ \frac{t_{i+3}-t_{i+2}}{t_{i+3}-t_{i+1}}\,, & j = i+2, \\ 0\,, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Κατόπιν εφαρμόζουμε τον ορισμό (7.31β) των συναρτήσεων B-spline και λαμβάνουμε

$$N_i^3(t_j) = \begin{cases} \frac{t_{i+1}-t_i}{t_{i+3}-t_i}\,\frac{t_{i+1}-t_i}{t_{i+2}-t_i}\,, & j = i+1, \\ \frac{t_{i+2}-t_i}{t_{i+3}-t_i}\,\frac{t_{i+3}-t_{i+2}}{t_{i+3}-t_{i+1}} + \frac{t_{i+4}-t_{i+2}}{t_{i+4}-t_{i+1}}\,\frac{t_{i+2}-t_{i+1}}{t_{i+3}-t_{i+1}}\,, & j = i+2, \\ \frac{t_{i+4}-t_{i+3}}{t_{i+4}-t_{i+1}}\,\frac{t_{i+4}-t_{i+3}}{t_{i+4}-t_{i+2}}\,, & j = i+3, \\ 0\,, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τέλος, αλλάζουμε τους δείκτες ώστε να σχηματίσουμε τις $N_i^3(t_j)$ για ένα σταθερό j και για όλα τα κατάλληλα i,

$$\begin{aligned} N_{j-1}^3(t_j) &= \frac{t_j - t_{j-1}}{t_{j+2} - t_{j-1}}\,\frac{t_j - t_{j-1}}{t_{j+1} - t_{j-1}}, \\ N_{j-2}^3(t_j) &= \frac{t_j - t_{j-2}}{t_{j+1} - t_{j-2}}\,\frac{t_{j+1} - t_j}{t_{j+1} - t_{j-1}} + \frac{t_{j+2} - t_j}{t_{j+2} - t_{j-1}}\,\frac{t_j - t_{j-1}}{t_{j+1} - t_{j-1}}, \\ N_{j-3}^3(t_j) &= \frac{t_{j+1} - t_j}{t_{j+1} - t_{j-2}}\,\frac{t_{j+1} - t_j}{t_{j+1} - t_{j-1}}. \end{aligned} \tag{7.61}$$

Επομένως η σχέση (7.60) γίνεται

$$\mathbf{p}_j = N_{j-3}^3(t_j)\mathbf{q}_{j-3} + N_{j-2}^3(t_j)\mathbf{q}_{j-2} + N_{j-1}^3(t_j)\mathbf{q}_{j-1}.$$

Αντικαθιστώντας τις $N_i^3(t_j)$ από την (7.61), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} &\frac{(t_{j+1}-t_j)^2}{t_{j+1}-t_{j-2}}\,\mathbf{q}_{j-3} \\ &+\left[\frac{(t_j-t_{j-2})(t_{j+1}-t_j)}{t_{j+1}-t_{j-2}}+\frac{(t_{j+2}-t_j)(t_j-t_{j-1})}{t_{j+2}-t_{j-1}}\right]\mathbf{q}_{j-2} \\ &+\frac{(t_j-t_{j-1})^2}{t_{j+2}-t_{j-1}}\,\mathbf{q}_{j-1}=(t_{j+1}-t_{j-1})\mathbf{p}_j. \end{aligned} \tag{7.62}$$

Οι σχέσεις (7.59) και (7.62) παρέχουν $(n+1)$ γραμμικές εξισώσεις για τον προσδιορισμό των $(n+3)$ άγνωστων σημείων ελέγχου $\mathbf{q}_i$, και επομένως χρειάζονται ακόμη δύο εξισώσεις ώστε να σχηματιστεί ένα επιλύσιμο σύστημα. Η κατάσταση αυτή είναι παρόμοια με αυτή που συναντήσαμε όταν κατασκευάσαμε μία κατά τμήματα καμπύλη παρεμβολής Hermite με συνέχεια C^2 στα σημεία συνένωσης των τμημάτων της. Η σύμπτωση δεν είναι τυχαία, καθώς και στις δύο περιπτώσεις αναζητούμε μία κατά τμήματα κυβική καμπύλη που είναι συνεχής C^2 και παρεμβάλλει $(n+1)$ δεδομένα σημεία· η μόνη διαφορά είναι ότι στην πρώτη περίπτωση η καμπύλη εκφράζεται ως κατά τμήματα καμπύλη Hermite, ενώ στη δεύτερη ως καμπύλη B-spline. Μπορεί μάλιστα να αποδειχθεί ότι οποιαδήποτε έκφραση μίας τέτοιας καμπύλης θα χρειαστεί δύο επιπλέον συνθήκες εκτός από τα δεδομένα σημεία που παρεμβάλλονται.

Για την καμπύλη B-spline που εξετάζουμε, συνηθίζεται να καθορίζονται συνθήκες για τα δύο ακραία άγνωστα σημεία ελέγχου $\mathbf{q}_{-2}$ και $\mathbf{q}_{-1}$. Παρουσιάζουμε τέτοιες συνθήκες παρακάτω· για την ώρα υποθέτουμε ότι τα $\mathbf{q}_{-2}$ και $\mathbf{q}_{-1}$ είναι γνωστά.

Το γραμμικό σύστημα των (7.59) και (7.62) μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & \gamma_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{-3} \\ \mathbf{q}_{-2} \\ \mathbf{q}_{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{n-3} \\ \mathbf{q}_{n-2} \\ \mathbf{q}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{r}_1 \\ (t_2-t_0)\mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ (t_n-t_{n-2})\mathbf{p}_{n-1} \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix}, \tag{7.63}$$

όπου θέσαμε α_j, β_j, γ_j τους συντελεστές των $\mathbf{q}_{j-3}$, $\mathbf{q}_{j-2}$, $\mathbf{q}_{j-1}$ από την (7.62), αντίστοιχα, και ακόμη $\mathbf{r}_1 = \mathbf{q}_{-2}$ και $\mathbf{r}_2 = \mathbf{q}_{n-2}$. Αυτό είναι ένα τριδιαγώνιο σύστημα που μπορεί να επιλυθεί αποδοτικά χρησιμοποιώντας μία απευθείας μέθοδο όπως η ανάλυση LU.

Συνοριακές συνθήκες

Στην περίπτωση της παρεμβολής με κυβική καμπύλη B-spline, οι συνοριακές συνθήκες που απαιτούνται για να συμπληρωθεί το σύστημα (7.63) αναφέρονται στο δεύτερο και στο προτελευταίο σημείο ελέγχου, $\mathbf{q}_{-2}$ και $\mathbf{q}_{n-2}$. Θα εξετάσουμε τις ίδιες συνοριακές συνθήκες όπως και για την παρεμβολή με κυβική καμπύλη Hermite, με μόνη

διαφορά ότι τώρα οι εξισώσεις θα εκφραστούν συναρτήσει των δεδομένων σημείων $\mathbf{p}_i$ αντί για τα εφαπτόμενα διανύσματα.

Για την *συνοριακή συνθήκη Bessel* οι εξισώσεις μπορούν να υπολογιστούν ως εξής. Στην αρχή της καμπύλης, η εφαπτομένη είναι

$$\mathbf{Q}'(t_0) = \frac{3}{t_1 - t_0}(\mathbf{q}_{-2} - \mathbf{q}_{-3}) = \frac{3}{t_1 - t_0}(\mathbf{q}_{-2} - \mathbf{p}_0),$$

και εξισώνοντας αυτή με την έκφραση της $\vec{\mathbf{m}}_0$, που είναι η ζητούμενη εφαπτομένη όπως υπολογίστηκε στην (7.55), έχουμε

$$\mathbf{q}_{-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{2t_2 - t_1 - t_0}{t_2 - t_0}\mathbf{p}_0 - \frac{t_2 - t_0}{t_2 - t_1}\mathbf{p}_1 - \frac{(t_1 - t_0)^2}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_0)}\mathbf{p}_2\right).$$

Με παρόμοιο τρόπο έχουμε για το τέλος της καμπύλης

$$\mathbf{q}_{n-2} = \frac{1}{3}\left(-\frac{(t_{n-1} - t_n)^2}{(t_{n-2} - t_{n-1})(t_{n-2} - t_n)}\mathbf{p}_{n-2} + \frac{t_{n-2} - t_n}{t_{n-2} - t_{n-1}}\mathbf{p}_{n-1} + \frac{2t_{n-2} - t_{n-1} - t_n}{t_{n-2} - t_n)}\mathbf{p}_n\right).$$

Αυτές οι δύο εκφράσεις για τα $\mathbf{q}_{-2}$ και $\mathbf{q}_{n-2}$ πρέπει να αντικαταστήσουν τα $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ στο σύστημα (7.63).

Για να εφαρμόσουμε την *τετραγωνική συνοριακή συνθήκη*, θα πρέπει να γράψουμε το πρώτο (και αντίστοιχα το τελευταίο) τμήμα της καμπύλης B-spline, που είναι ορισμένο στο παραμετρικό διάστημα $[t_0, t_1]$ ως κυβική καμπύλη Bézier (βλ. Ενότητα 7.3.7) και να παραγωγίσουμε αυτή τη μορφή της καμπύλης δύο φορές. Καταλήγουμε έτσι στις σχέσεις

$$\mathbf{q}_{-2} - \mathbf{q}_{-1} = \frac{t_2 - t_0}{3(t_1 - t_0)?}(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1),$$
$$\mathbf{q}_{n-3} - \mathbf{q}_{n-2} = \frac{t_n - t_{n-2}}{3(t_n - t_{n-1})}(\mathbf{p}_{n-1} - \mathbf{p}_n),$$

οι οποίες πρέπει να αντικαταστήσουν την δεύτερη και την προτελευταία εξίσωση του συστήματος (7.63)· το σύστημα παραμένει τριδιαγώνιο με αυτή την αλλαγή.

Τέλος, η *φυσική συνοριακή συνθήκη* μπορεί να εφαρμοστεί με παρόμοιο τρόπο. Οι αντίστοιχες εξισώσεις είναι

$$(t_2 + t_1 - 2t_0)\mathbf{q}_{-2} - (t_1 - t_0)\mathbf{q}_{-1} = (t_2 - t_0)\mathbf{p}_0,$$
$$(t_n - t_{n-1})\mathbf{q}_{n-3} - (2t_n - t_{n-1} - t_{n-2})\mathbf{q}_{n-2} = -(t_n - t_{n-2})\mathbf{p}_n.$$

7.5.4 Παραμετροποιήσεις καμπυλών παρεμβολής κατά τμήματα

Σε όλη την παρουσίαση των κατά τμήματα καμπυλών παρεμβολής υποθέσαμε ότι οι κόμβοι της καμπύλης (οι παραμετρικές τιμές στις οποίες η καμπύλη παρεμβάλλει τα δεδομένα σημεία) δίνονται από τον χρήστη. Όμως αυτό συμβαίνει σπάνια, καθώς ο χρήστης ενδιαφέρεται απλώς να παρέχει τα σημεία που θα παρεμβάλει η καμπύλη. Σε τέτοιες περιπτώσεις, οι απαιτούμενοι κόμβοι μπορούν να υπολογιστούν αλγοριθμικά, πιθανώς χρησιμοποιώντας τα δεδομένα σημεία, ώστε να παραχθούν καμπύλες καλύτερου σχήματος. Οι μέθοδοι παραμετροποίησης που έχουμε παρουσιάσει για τις καμπύλες B-spline (βλ. την Ενότητα 7.3.5) μπορούν να εφαρμοστούν και εδώ.

Η πιο απλή παραμετροποίηση είναι η ομοιόμορφη, στην οποία οι κόμβοι ισαπέχουν. Αυτή η παραμετροποίηση χρησιμοποιείται στην πράξη, παρά το γεγονός ότι άλλες μέθοδοι μπορεί να παράγουν καλύτερες καμπύλες, καθώς απλοποιεί σημαντικά τα γραμμικά συστήματα (7.57) και (7.63) που πρέπει να επιλυθούν ώστε να παραχθούν καμπύλες παρεμβολής συνεχείς C^2.

Πιο πολύπλοκες παραμετροποιήσεις, οι οποίες συνήθως παράγουν πιο ομαλές καμπύλες, μπορούν να κατασκευαστούν λαμβάνοντας υπ' όψιν τα σημεία $\mathbf{p}_i$ που παρεμβάλλονται. Μία παραμετροποίηση μήκους χορδής μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

$$\frac{t_{i+2} - t_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} = \frac{|\mathbf{p}_{i+2} - \mathbf{p}_{i+1}|}{|\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i|}$$

και μία κεντρομόλος παραμετροποίηση μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

$$\frac{t_{i+2} - t_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} = \sqrt{\frac{|\mathbf{p}_{i+2} - \mathbf{p}_{i+1}|}{|\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i|}}.$$

Και στις δύο αυτές περιπτώσεις, η τιμή του αρχικού κόμβου t_0 μπορεί να προσδιοριστεί αυθαίρετα. Σημειώνουμε ότι σε αντίθεση με τις παραμετροποιήσεις των καμπυλών B-spline, οι οποίες χρησιμοποιούν τα σημεία ελέγχου της καμπύλης, οι παραμετροποιήσεις των καμπυλών παρεμβολής χρησιμοποιούν τα σημεία που παρεμβάλλονται, καθώς το σχήμα της καμπύλης θα πρέπει να προσαρμοστεί σε αυτά.

7.6 Επιφάνειες

Οι καμπύλες Bézier και B-spline μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή παραμετρικών επιφανειών με διάφορους τρόπους. Ο πιο απλός και διαισθητικός τύπος επιφανειών είναι οι επιφάνειες Bézier και B-spline *τανυστικό γινόμενο*. Θα φανεί αμέσως παρακάτω ότι αυτές οι μορφές παραμετρικών επιφανειών είναι απλές γενικεύσεις των αντίστοιχων καμπυλών, και επομένως κληρονομούν τις περισσότερες από τις ιδιότητές τους.

7.6.1 Επιφάνειες Bézier τανυστικό γινόμενο

Ας θεωρήσουμε μία καμπύλη Bézier βαθμού m με σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_i$, $i = 0, 1, \ldots, m$, εκφρασμένη ως προς μία παράμετρο u,

$$\mathbf{P}^m(u) = \sum_{i=0}^{m} B_i^m(u)\mathbf{p}_i\,, \quad u \in [0,1].$$

Ας θεωρήσουμε επίσης ότι κάθε σημείο ελέγχου $\mathbf{p}_i$ διαγράφει μία καμπύλη Bézier βαθμού n (κοινή για όλα τα σημεία ελέγχου) με σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_{i,j}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, ως προς μία παράμετρο v,

$$\mathbf{P}_i^n(v) = \sum_{j=0}^{n} B_j^n(v)\mathbf{p}_{i,j}\,, \quad v \in [0,1].$$

Τότε *κάθε* σημείο της αρχικής καμπύλης θα διατρέχει μία καμπύλη Bézier βαθμού n, και όλες αυτές οι καμπύλες θα αποτελούν μία *καμπύλη Bézier τανυστικό γινόμενο*. Η εξίσωση αυτής της επιφάνειας μπορεί να σχηματιστεί αν αντικαταστήσουμε τα σημεία $\mathbf{p}_i$ στη πρώτη από τις παραπάνω σχέσεις με την καμπύλη $\mathbf{P}_i^n(v)$ που αυτό διαγράφει. Έτσι, η εξίσωση μίας επιφάνειας Bézier τανυστικό γινόμενο $\mathbf{P}^{m,n}(u,v)$ βαθμού m ως προς u και n ως προς v είναι

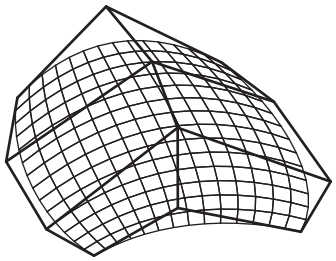
$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{m,n}(u,v) &= \sum_{i=0}^{m} B_i^m(u)\left(\sum_{j=0}^{n} B_j^n(v)\mathbf{p}_{i,j}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} B_i^m(u)B_j^n(v)\mathbf{p}_{i,j}\,, \quad u \in [0,1],\ v \in [0,1].\end{aligned} \tag{7.64}$$

Οι καμπύλες Bézier που χρησιμοποιήθηκαν για τον ορισμό της επιφάνειας έχουν $(m+1)\times(n+1)$ σημεία ελέγχου, τα οποία είναι τα *σημεία ελέγχου* (ή *πλέγμα ελέγχου*) της επιφάνειας Bézier τανυστικό γινόμενο. Αυτά τα σημεία μπορούν να γραφούν σε μία ορθογώνια διάταξη:

$$\begin{array}{c|cccc} & v \rightarrow & & & \\ \hline u & \mathbf{p}_{0,0} & \mathbf{p}_{0,1} & \cdots & \mathbf{p}_{0,n} \\ \downarrow & \mathbf{p}_{1,0} & \mathbf{p}_{1,1} & \cdots & \mathbf{p}_{1,n} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & \mathbf{p}_{m,0} & \mathbf{p}_{m,1} & \cdots & \mathbf{p}_{m,n} \end{array} \tag{7.65}$$

Οι ισοπαραμετρικές καμπύλες που αντιστοιχούν σε $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$, και $v = 1$ καλούνται *συνοριακές καμπύλες* της επιφάνειας Bézier. Σημειώνεται ότι τα σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_i$ της συνοριακής καμπύλης $\mathbf{P}^m(u)$ που αντιστοιχεί σε $v = 0$, που χρησιμοποιήσαμε αρχικά, είναι τα $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i,0}$ με τον τρέχοντα συμβολισμό.

Η κατασκευή μίας επιφάνειας Bézier τανυστικό γινόμενο είναι συμμετρική. Μπορούμε να ξεκινήσουμε από την συνοριακή καμπύλη $u = 0$ και να διατρέξουμε μία καμπύλη με καθένα από τα σημεία ελέγχου της, κατασκευάζοντας την ίδια επιφάνεια όπως προηγουμένως· αυτό μπορεί να επαληθευτεί εναλλάσσοντας τα δύο αθροίσματα στην



Σχήμα 7.16: *Μία επιφάνεια Bézier τανυστικό γινόμενο βαθμών 2 και 3.*

εξίσωση (7.64). Γενικότερα, η ίδια επιφάνεια κατασκευάζεται ξεκινώντας από οποιαδήποτε από τις συνοριακές καμπύλες.

Ο αλγόριθμος του de Casteljau για επιφάνειες Bézier τανυστικό γινόμενο

Ο αλγόριθμος του de Casteljau είναι πολύ σημαντικός για την επεξεργασία των καμπυλών Bézier, καθώς εφαρμόζεται στον αποδοτικό υπολογισμό σημείων της καμπύλης καθώς και στην υποδιαίρεση της καμπύλης σε δύο τμήματα του ίδιου τύπου· η υποδιαίρεση έχει επίσης ενδιαφέρουσες εφαρμογές, από τις οποίες σημαντική είναι η σχεδίαση της καμπύλης Bézier. Ο ίδιος αλγόριθμος μπορεί να εφαρμοστεί σε επιφάνειες Bézier τανυστικό γινόμενο, με ανάλογες εφαρμογές· αυτό θα πρέπει να είναι αναμενόμενο, καθώς οι επιφάνειες ορίστηκαν αποκλειστικά συναρτήσει καμπυλών Bézier.

Συγκεκριμένα, για να υπολογίσουμε ένα σημείο $\mathbf{P}^{m,n}(u,v)$ μίας επιφάνειας Bézier, εφαρμόζουμε πρώτα τον αλγόριθμο του de Casteljau σε καθεμία από τις γραμμές του πίνακα (7.65) (δηλαδή σε καθεμία από τις καμπύλες που διαγράφονται από τα $\mathbf{p}_{i,0}$)· με αυτό τον τρόπο υπολογίζονται $m+1$ σημεία, που αντιστοιχούν στη δεδομένη τιμή της παραμέτρου v πάνω σε αυτές τις καμπύλες. Αυτά είναι τα σημεία ελέγχου της ισοπαραμετρικής καμπύλης που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη τιμή του v. Το ζητούμενο σημείο $\mathbf{P}^{m,n}(u,v)$ της επιφάνειας είναι το σημείο αυτής της καμπύλης που αντιστοιχεί στην τιμή του u, και μπορεί να υπολογιστεί με μία ακόμη εφαρμογή του αλγορίθμου του de Casteljau.

Ο ψευδοκώδικας στον Αλγόριθμο 7.3 υλοποιεί τον αλγόριθμο του de Casteljau για μία επιφάνεια Bézier τανυστικό γινόμενο. Χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο του de Casteljau για καμπύλες, ο οποίος παρουσιάστηκε στην Ενότητα 7.2.3.

Ιδιότητες επιφανειών Bézier τανυστικό γινόμενο

Οι ιδιότητες των επιφανειών Bézier τανυστικό γινόμενο είναι γενικεύσεις των αντίστοιχων ιδιοτήτων των καμπυλών Bézier. Οι επιφάνειες Bézier διαθέτουν την ιδιότητα κυρτού περιβλήματος, είναι αναλλοίωτες σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς καθώς και σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς των παραμέτρων τους, είναι συμμετρικές ως προς τα σημεία ελέγχου τους, διαθέτουν γραμμική ακρίβεια, παρεμβάλλουν τα ακραία σημεία ελέγχου τους και διαθέτουν ψευδο-τοπικό έλεγχο. Η μόνη ιδιότητα που δεν γενικεύεται στις επιφάνειες είναι αυτή της φθίνουσας διακύμανσης.

```
point bezierSurfacePoint ( int m, int n,
                           point[][] controlPt,
                           float u, float v )
{
    point tmpPt[n+1];
    point curvePt[n+1];

    for (i=0; i <= m; i++)  {
        for (j=0; j <= n; j++)  {
            tempPt[j] = controlPt[i][j];
        }
        curvePt[i] = bezierPoint(n, tempPt, v);
    }

    return bezierPoint(m, curvePt, u);
}
```

Αλγόριθμος 7.3: *Ο αλγόριθμος του de Casteljau για επιφάνειες τανυστικό γινόμενο.*

Σχετικά με τις παραγώγους μίας επιφάνειας Bézier τανυστικό γινόμενο, σημειώνουμε ότι οι πιο ενδιαφέρουσες είναι οι μερικές παράγωγοι ως προς κάθε μία από τις παραμέτρους. Αυτές αποτελούν τις εφαπτόμενες των ισοπαραμετρικών καμπυλών της επιφάνειας. Στην περίπτωση μίας επιφάνειας Bézier τανυστικό γινόμενο, αυτές οι παράγωγοι μπορούν να υπολογιστούν εύκολα, καθώς οι παράμετροι u και v είναι ανεξάρτητες. Η μερική παράγωγος ως προς u είναι

$$\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{P}^{m,n}(u,v) = \sum_{j=0}^{n} B_j^n(v)\left(\frac{\partial}{\partial u}\sum_{i=0}^{m} B_i^m(u)\mathbf{p}_{i,j}\right),$$

όπου ο όρος μέσα στις παρενθέσεις εξαρτάται μόνο από το u· επομένως, μπορεί να υπολογιστεί ως η παράγωγος μία καμπύλης Bézier, βλ. τη σχέση (7.16). Για να εφαρμοστεί αυτή η σχέση, πρέπει να υπολογιστούν όλες οι παράγωγοι των καμπυλών Bézier βαθμού m που σχηματίζονται από τις στήλες του πλέγματος ελέγχου για τη ζητούμενη τιμή του u. Στη συνέχεια αυτές οι παράγωγοι χρησιμοποιούνται ως σημεία ελέγχου μίας καμπύλης Bézier, της οποίας το σημείο στη ζητούμενη τιμή του v αποτελεί την τιμή της παραγώγου της επιφάνειας.

Υποδιαίρεση επιφανειών Bézier

Η υποδιαίρεση μίας επιφάνειας Bézier τανυστικό γινόμενο είναι απλή γενίκευση της υποδιαίρεσης της καμπύλης Bézier. Στην περίπτωση της επιφάνειας, επιλέγεται ένα ζεύγος παραμετρικών τιμών (u_0, v_0), και η επιφάνεια υποδιαιρείται σε *τέσσερις* υπο-επιφάνειες του ίδιου τύπου, των οποίων τα σημεία ελέγχου παράγονται κατά τον υπολογισμό του σημείου $\mathbf{P}^{m,n}(u_0, v_0)$ της επιφάνειας χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του de Casteljau.

Η διαδικασία έχει ως εξής: Ο αλγόριθμος του de Casteljau εφαρμόζεται σε κάθε

γραμμή του πλέγματος των σημείων ελέγχου (7.65), υποδιαιρώντας έτσι τις αντίστοιχες καμπύλες σε ένα «δεξί» και ένα «αριστερό» τμήμα, και παράγοντας δύο σύνολα $(m+1) \times (n+1)$ σημείων ελέγχου. Κατόπιν ο αλγόριθμος του de Casteljau εφαρμόζεται σε όλες τις $2 \times (m+1) \times (n+1)$ στήλες σημείων ελέγχου, υποδιαιρώντας κάθε μία σε ένα «άνω» και ένα «κάτω» τμήμα και παράγοντας συνολικά τέσσερα σύνολα $(m+1) \times (n+1)$ σημείων ελέγχου που ορίζουν αντίστοιχες επιφάνειες Bézier.

Αυτή η διαδικασία υποδιαίρεσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε διάφορες εφαρμογές που αφορούν τις επιφάνειες Bézier τανυστικό γινόμενο, όπως η σχεδίαση της επιφάνειας και η εύρεση τομών μεταξύ μίας επιφάνειας Bézier και μίας ευθείας ή ενός επιπέδου.

Για να σχεδιάσουμε μία επιφάνεια Bézier τανυστικό γινόμενο, λαμβάνουμε υπ' όψιν ότι αν τα σημεία ελέγχου αυτής είναι συνεπίπεδα, τότε η επιφάνεια εκφυλίζεται σε ένα επίπεδο πολύγωνο το οποίο ορίζεται από τα τέσσερα ακραία σημεία ελέγχου της. Επομένως, για να σχεδιάσουμε μία επιφάνεια Bézier ελέγχουμε αν τα σημεία ελέγχου αυτής είναι συνεπίπεδα (μέχρι μία ορισμένη ακρίβεια)· αν αυτό ισχύει, σχεδιάζουμε απλώς το πολύγωνο που αναφέρθηκε· διαφορετικά υποδιαιρούμε την επιφάνεια σε τέσσερις υπο-επιφάνειες, για ένα τυχαίο ζεύγος παραμετρικών τιμών (u_0, v_0), και επαναλαμβάνουμε αναδρομικά τη διαδικασία για κάθε μία από τις υπο-επιφάνειες.

Οι υπόλοιπες εφαρμογές της υποδιαίρεσης της επιφάνειας Bézier μπορούν να προσαρμοστούν ανάλογα με τις αντίστοιχές τους που αφορούν καμπύλες Bézier.

7.6.2 Επιφάνειες B-spline τανυστικό γινόμενο

Οι επιφάνειες Bézier τανυστικό γινόμενο έχουν, όπως είδαμε, κοινές ιδιότητες με τις καμπύλες Bézier. Αναπόφευκτα, έχουν και κοινά μειονεκτήματα, με κυριότερο την ανάγκη χρήσης επιφανειών υψηλού βαθμού για την περιγραφή πολύπλοκων σχημάτων. Για τέτοιες περιπτώσεις είναι προτιμότερη η κατασκευή λείων επιφανειών με τη συνένωση επιφανειών χαμηλού βαθμού με κατάλληλες συνθήκες συνέχειας, χρησιμοποιώντας τεχνικές παρόμοιες προς αυτές που αναπτύξαμε για τις καμπύλες.

Οι *επιφάνειες B-spline τανυστικό γινόμενο* είναι μία κατηγορία τέτοιων επιφανειών. Κατασκευάζονται από παραμετρικές επιφάνειες βαθμού k ως προς u και βαθμού ℓ ως προς v, που συνενώνονται με συνέχεια C^{k-1} ως προς u και $C^{\ell-1}$ ως προς v. Παράγονται από καμπύλες B-spline με τρόπο παρόμοιο με την παραγωγή επιφανειών Bézier τανυστικό γινόμενο από καμπύλες Bézier: ξεκινούμε με μία καμπύλη B-spline βαθμού k που εκφράζεται συναρτήσει της παραμέτρου u και θεωρούμε ότι τα σημεία της διαγράφουν καμπύλες B-spline βαθμού ℓ συναρτήσεις της παραμέτρου v. Η επιφάνεια που παράγεται με τον τρόπο αυτό είναι μία επιφάνεια B-spline τανυστικό γινόμενο.

Μία επιφάνεια B-spline τανυστικό γινόμενο έχει ένα σύνολο $(m+1) \times (n+1)$ σημείων ελέγχου $\mathbf{p}_{i,j}$, όπου τα m και n είναι ανεξάρτητα των βαθμών k και ℓ της καμπύλης· έχει επίσης δύο σύνολα κόμβων, $u_1, u_2, \ldots, u_{m+k}$ για την παράμετρο u, και v_1,

$v_2, \ldots, v_{n+\ell}$ για την παράμετρο v. Η επιφάνεια δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{Q}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} N_i^k(u) N_j^\ell(v) \mathbf{p}_{i,j}. \tag{7.66}$$

Σημειώνεται ότι τέσσερις επιπλέον «πλασματικοί» κόμβοι u_0, u_{m+k+1}, v_0, και $v_{n+\ell+1}$ χρειάζονται για τον πλήρη ορισμό των συναρτήσεων βάσης B-spline $N_i^k(u)$ και $N_j^\ell(v)$, αλλά αυτοί δεν επηρεάζουν το σχήμα της επιφάνειας. Οι δύο ακολουθίες κόμβων, για τις παραμέτρους u και v, είναι τελείως ανεξάρτητες μεταξύ τους. Το πεδίο ορισμού της καμπύλης είναι το παραμετρικό διάστημα $[u_k, u_{m+1}] \times [v_\ell, v_{n+1}]$. Η ακόλουθη διάταξη παρουσιάζει τα στοιχεία ελέγχου μίας επιφάνειας B-spline:

		v_1	$\cdots$	v_n	$\cdots$	$v_{n+\ell}$
	$\mathbf{p}_{0,0}$	$\mathbf{p}_{0,1}$	$\cdots$	$\mathbf{p}_{0,n}$		
u_1	$\mathbf{p}_{1,0}$	$\mathbf{p}_{1,1}$	$\cdots$	$\mathbf{p}_{1,n}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		
u_m	$\mathbf{p}_{m,0}$	$\mathbf{p}_{m,1}$	$\cdots$	$\mathbf{p}_{m,n}$		
$\vdots$						
u_{m+k}						

Ο αλγόριθμος του de Boor για επιφάνειες B-spline τανυστικό γινόμενο

Ο αλγόριθμος του de Boor που παρουσιάσαμε για τον υπολογισμό σημείων μίας καμπύλης B-spline, μπορεί εύκολα να προσαρμοστεί σε επιφάνειες τανυστικό γινόμενο. Η προσαρμογή αυτή είναι παρόμοια με αυτή του αλγορίθμου του de Casteljau για επιφάνειες Bézier.

Για να υπολογίσουμε ένα σημείο $\mathbf{Q}(u,v)$ μίας επιφάνειας B-spline τανυστικό γινόμενο, πρέπει πρώτα να βρούμε το παραμετρικό διάστημα $[u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$ στο οποίο ανήκει η παραμετρική τιμή (u,v). Κατόπιν εφαρμόζουμε τον γνωστό αλγόριθμο του de Boor για καμπύλες B-spline σε καθεμία από τις γραμμές του πλέγματος ελέγχου, για την παραμετρική τιμή $v \in [v_j, v_{j+1}]$· έτσι παράγονται $(m+1)$ σημεία, στα οποία εφαρμόζουμε ακόμη μία φορά τον αλγόριθμο του de Boor, για την παραμετρική τιμή $u \in [u_i, u_{i+1}]$. Το υπολογιζόμενο σημείο στην τελευταία καμπύλη είναι το ζητούμενο σημείο στην επιφάνεια B-spline. Όπως και στις επιφάνειες Bézier, αυτή η διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί πρώτα ως προς u (στις στήλες του πλέγματος ελέγχου) και κατόπιν ως προς v.

Κόμβοι και παραμετροποιήσεις

Οι δύο ακολουθίες κόμβων, για την παράμετρο u και την παράμετρο v, μίας επιφάνειας B-spline τανυστικό γινόμενο, διατηρούν όλες τις ιδιότητες της ακολουθίας κόμβων μίας καμπύλης B-spline (βλ. την Ενότητα 7.3.5). Έτσι, για παράδειγμα, όταν οι πρώτοι k κόμβοι ως προς u είναι ίσοι, η επιφάνεια παρεμβάλλει την ισοπαραμετρική της καμπύλη που αντιστοιχεί σε $u = u_1 = u_k$· παρόμοιες ιδιότητες ισχύουν όταν οι

πρώτοι ή οι τελευταίοι κόμβοι των ακολουθιών ως προς u ή ως προς v είναι ίσοι. Επιπλέον, όταν οποιοσδήποτε ενδιάμεσος κόμβος επαναλαμβάνεται, η επιφάνεια χάνει βαθμούς συνέχειας κατά μήκος των αντίστοιχων ισοπαραμετρικών καμπυλών.

Όπως και για τις καμπύλες B-spline, θα ήταν επωφελής ο αυτόματος προσδιορισμός «καλών» *παραμετροποιήσεων*, έτσι ώστε να μην χρειάζεται ο χρήστης να παρέχει τις ακολουθίες κόμβων. Δυστυχώς, είναι πολύ πιο δύσκολο να βρεθούν τέτοιες ακολουθίες κόμβων στην περίπτωση των επιφανειών τανυστικό γινόμενο απ' ότι στην περίπτωση των καμπυλών. Αντίθετα από όλες τις άλλες επεξεργασίες επιφανειών τανυστικό γινόμενο που έχουμε εξετάσει, είναι αδύνατο να εφαρμόσουμε τις μεθόδους που παρουσιάστηκαν στην Ενότητα 7.3.5 στις γραμμές και στήλες του πλέγματος ελέγχου μίας επιφάνειας B-spline, ώστε να κατασκευάσουμε μία παραμετροποίηση που να ικανοποιεί μία από τις ιδιότητες που αναφέρθηκαν (μήκος χορδής, κεντρομόλος). Η αιτία είναι ότι όλες οι ισοπαραμετρικές καμπύλες της επιφάνειας χρησιμοποιούν την ίδια ακολουθία κόμβων για το u (και, αντίστοιχα, για το v). Επομένως, δεν είναι δυνατό να κατασκευαστεί μία ακολουθία κόμβων που να ικανοποιεί, για παράδειγμα, την ιδιότητα μήκους χορδής για όλες τις γραμμές του πλέγματος ελέγχου ταυτόχρονα. Αν μία παραμετροποίηση μήκους χορδής κατασκευαστεί με βάση τα σημεία ελέγχου μίας συγκεκριμένης γραμμής, είναι πιθανό να μην δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα όταν θα χρησιμοποιηθεί στις υπόλοιπες γραμμές. Μία λύση θα ήταν πιθανώς να συνδυαστούν ακολουθίες κόμβων που κατασκευάζονται για όλες τις γραμμές, για παράδειγμα λαμβάνοντας τους μέσους όρους των τιμών αντίστοιχων κόμβων. Μία τέτοια προσέγγιση, όμως, είναι πιθανό να μην παράξει καλά αποτελέσματα για καμία από τις γραμμές, εκτός και αν η γεωμετρία των σημείων ελέγχου είναι αρκετά ομοιογενής μεταξύ των γραμμών του πλέγματος ελέγχου.

Μέθοδοι για την κατασκευή παραμετροποιήσεων που βασίζονται σε όλα τα σημεία ελέγχου της επιφάνειας έχουν παρουσιαστεί μόνο για επιφάνειες τετάρτου ή υψηλότερου βαθμού που εμφανίζουν γεωμετρική και όχι παραμετρική συνέχεια. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις, η χρήση μίας ομοιόμορφης παραμετροποίησης, η οποία δεν λαμβάνει υπ' όψιν τη γεωμετρία του πλέγματος ελέγχου, είναι η ασφαλέστερη επιλογή.

Η *εισαγωγή κόμβου* για επιφάνειες B-spline τανυστικό γινόμενο γίνεται με τρόπο ανάλογο προς την εισαγωγή κόμβου σε μία καμπύλη, χρησιμοποιώντας κατάλληλα τον αλγόριθμο του Boehm. Στην περίπτωση της επιφάνειας, ένας κόμβος μπορεί να εισαχθεί ανεξάρτητα σε καθεμία από τις δύο ακολουθίες κόμβων, ως προς u και ως προς v. Αν ένας κόμβος εισαχθεί στην ακολουθία $u_1, u_2, \ldots, u_{m+k}$ (σε μία επιτρεπτή θέση, σύμφωνα με τους περιορισμούς που έχουν αναφερθεί για τις καμπύλες) μία πλήρης γραμμή σημείων ελέγχου πρέπει να προστεθεί στο πλέγμα ελέγχου της επιφάνειας, ώστε να διατηρηθεί η σχέση μεταξύ του πλήθους των σημείων ελέγχου, του βαθμού της επιφάνειας, και του πλήθους των κόμβων. Κκαθένα από αυτά τα σημεία μπορεί να υπολογιστεί εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Boehm για τις καμπύλες στην αντίστοιχη στήλη του πλέγματος ελέγχου. Η διαδικασία είναι παρόμοια για την εισαγωγή κόμβου στην ακολουθία $v_1, v_2, \ldots, v_{n+\ell}$, εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Boehm στις γραμμές του πλέγματος ελέγχου της επιφάνειας.

Ιδιότητες επιφανειών B-spline τανυστικό γινόμενο

Οι περισσότερες από τις ιδιότητες των καμπυλών B-spline γενικεύονται για τις αντίστοιχες επιφάνειες. Οι επιφάνειες B-spline τανυστικό γινόμενο εμφανίζουν τοπικό έλεγχο, διαθέτουν την ισχυρή ιδιότητα κυρτού περιβλήματος, είναι αναλλοίωτες σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς καθώς και σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς των παραμέτρων τους, διαθέτουν ισχυρή γραμμική ακρίβεια, παρεμβάλλουν τα σημεία ελέγχου του συνόρου τους αν οι ακραίοι κόμβοι έχουν κατάλληλη πολλαπλότητα, και αποτελούν γενίκευση των επιφανειών Bézier τανυστικό γινόμενο υπό κατάλληλες συνθήκες. Η μόνη ιδιότητα που δεν μεταφέρεται από τις καμπύλες είναι αυτή της φθίνουσας διακύμανσης.

Παρεμβολή με επιφάνειες B-spline τανυστικό γινόμενο

Οι επιφάνειες B-spline τανυστικό γινόμενο, στη γενική περίπτωση, προσεγγίζουν τα σημεία ελέγχου τους. Ανάλογα με τις καμπύλες B-spline, μπορούν να προσαρμοστούν ώστε να παρεμβάλλουν ένα δεδομένο σύνολο σημείων. Η πιο ενδιαφέρουσα και πρακτική περίπτωση είναι αυτή των *δι-κυβικών* επιφανειών B-spline τανυστικό γινόμενο, δηλαδή των επιφανειών τρίτου βαθμού και ως προς τις δύο παραμέτρους u και v.

Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: αν δίνονται $(m+1)\times(n+1)$ σημεία $\mathbf{p}_{i,j}$, $i=0,1,\ldots,m$, $j=0,1,\ldots,n$ και δύο ακολουθίες κόμβων u_i, $i=0,1,\ldots,m$ και v_j, $j=0,1,\ldots,n$, να καθοριστούν τα $(m+3)\times(n+3)$ σημεία ελέγχου $\mathbf{q}_{i,j}$ μίας δι-κυβικής επιφάνειας B-spline τανυστικό γινόμενο $\mathbf{Q}(u,v)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$\mathbf{Q}(u_i,v_j)=\mathbf{p}_{i,j}\,,\qquad \begin{matrix} i=0,1,\ldots,m,\\ j=0,1,\ldots,n.\end{matrix}$$

Ο υπολογισμός μπορεί να πραγματοποιηθεί ως εξής: Αρχικά παρεμβάλλουμε κάθε στήλη του πίνακα των δεδομένων σημείων $\mathbf{p}_{i,j}$ ως προς u, υπολογίζοντας τα σημεία ελέγχου $\mathbf{s}_{i,j}$ των αντίστοιχων καμπυλών παρεμβολής. Θυμίζουμε ότι καθεμία από αυτές τις καμπύλες έχει $(m+3)$ σημεία ελέγχου και απαιτεί τον ορισμό δύο επιπλέον σημείων, τα οποία καλούμε $\mathbf{r}_{0,j}$ και $\mathbf{r}_{1,j}$, $j=0,1,\ldots,n$. Κατόπιν παρεμβάλλουμε κάθε γραμμή αυτών των σημείων ελέγχου $\mathbf{s}_{i,j}$ ως προς v, υπολογίζοντας τα σημεία ελέγχου $\mathbf{q}_{i,j}$ των αντίστοιχων καμπυλών παρεμβολής. Κάθε μία από αυτές τις $(m+3)$ καμπύλες έχει $(n+3)$ σημεία ελέγχου και απαιτεί τον ορισμό δύο επιπλέον σημείων, τα οποία καλούμε $\mathbf{c}_{i,0}$ και $\mathbf{c}_{i,1}$, $i=0,1,\ldots,m+2$. Τα σημεία ελέγχου $\mathbf{q}_{i,j}$ αποτελούν τα σημεία ελέγχου της παρεμβάλλουσας επιφάνειας B-spline.

Συνοψίζοντας, οι επιφάνειες τανυστικό γινόμενο έχουν μία σχετικά απλή μαθηματικά μορφή και ενδιαφέρουσες ιδιότητες, οι οποίες τις καθιστούν χρήσιμα πρακτικά εργαλεία για την αναπαράσταση επιφανειών. Το κυριότερο μειονέκτημά τους είναι ότι το σύνολο των σημείων που χρησιμοποιούνται ως σημεία ελέγχου ή ως σημεία παρεμβολής πρέπει υποχρεωτικά να σχηματίζει μία ορθογώνια διάταξη, διαφορετικά αυτός ο τύπος επιφανειών δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Ειδικότερα για τις επιφάνειες B-spline,

επιπλέον προβλήματα μπορεί να εμφανιστούν αν τα σημεία δεν είναι σχετικά «ομοιόμορφα» κατανεμημένα στο χώρο, καθώς μία ενιαία παραμετροποίηση εφαρμόζεται σε όλες τις γραμμές ή στήλες του πλέγματος ελέγχου.

Αν το σύνολο των σημείων δεν σχηματίζει ορθογώνια διάταξη, τότε μπορεί να *τριγωνοποιηθεί* και με βάση το τριγωνικό πλέγμα που προκύπτει να κατασκευαστεί μία επιφάνεια αποτελούμενη από τρίγωνα· στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούνται οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες για να κατασκευαστεί η επιφάνεια με τρόπο παρόμοιο με τις επιφάνειες τανυστικό γινόμενο.

Οι επιφάνειες υποδιαίρεσης, οι οποίες εξετάζονται στο Κεφάλαιο 8, προσφέρουν μία πιο γενική περιγραφή επιφανειών, απαλλαγμένων από τους παραπάνω περιορισμούς.

7.7 Ασκήσεις

1. Κατασκευάστε τα πολυώνυμα Bernstein για $n = 4$ και $n = 5$. Επιβεβαιώστε τις ιδιότητες που αναφέρονται στην Ενότητα 7.2.4.

2. Κατασκευάστε ένα πρόγραμμα για τη σχεδίαση καμπυλών Bézier. Υλοποιήστε δύο μεθόδους για τη σχεδίασή τους:

   (α) Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του de Casteljau, υπολογίστε σημεία της καμπύλης για ισαπέχουσες τιμές της παραμέτου και ενώστε τα με ευθύγραμμα τμήματα.

   (β) Χρησιμοποιώντας την υποδιαίρεση της καμπύλης Bézier, όπως περιγράφεται στην Ενότητα 7.2.6.

   Συγκρίνετε τις δύο υλοποιήσεις ως προς την ταχύτητα και την ποιότητα σχεδίασης, καθώς και ως προς την ευκολία χρήσης (επιπλέον παράμετροι που χρειάζονται σε κάθε περίπτωση).

3. Αύξηση βαθμού: Αν δίνεται μία καμπύλη Bézier $\mathbf{P}^n(t)$ βαθμού n με σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots \mathbf{p}_n$, προσδιορίστε τα σημεία ελέγχου $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \ldots \mathbf{q}_{n+1}$ μίας νέας καμπύλης $\mathbf{Q}^{n+1}(t)$ βαθμού $n+1$ που έχει το ίδιο σχήμα με την $\mathbf{P}^n(t)$.

4. Πολλαπλή εισαγωγή κόμβου: Κατασκευάστε έναν αλγόριθμο για την εισαγωγή ενός κόμβου s πολλαπλές φορές στην ακολουθία κόμβων μίας καμπύλης B-spline. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη σχέση (7.37) για κάθε βήμα, αριθμώντας σωστά τα στοιχεία της καμπύλης πριν προχωρήσετε στην επόμενη επανάληψη. Η τελική σχέση θα πρέπει να είναι παρόμοια με αυτή του αλγορίθμου του de Boor. Εξηγήστε γιατί συμβαίνει αυτό.

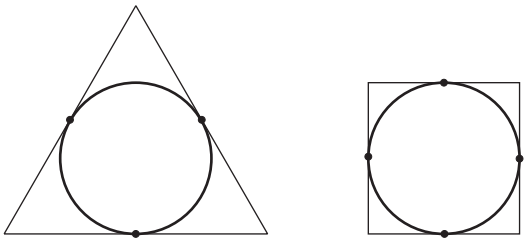
5. Κλειστές καμπύλες B-spline: Διερευνήστε τις κλειστές καμπύλες B-spline, δηλαδή αυτές στις οποίες τα δύο άκρα συμπίπτουν. Βρείτε συνθήκες κάτω από τις οποίες μία κλειστή καμπύλη είναι ομαλή στο σημείο που κλείνει.

6. Αποδείξτε ότι οι πρώτες παράγωγοι των καμπυλών Bézier και B-spline δίνονται από τις σχέσεις (7.16) και (7.38), αντίστοιχα.

7. Κατασκευάστε ένα πρόγραμμα για την απεικόνιση ρητών καμπυλών Bézier και B-spline. Ο χρήστης θα πρέπει να έχει διαδραστικό έλεγχο όλων των παραμέτρων των καμπυλών (σημεία ελέγχου, ακολουθία κόμβων, βάρη). Επίσης εξετάστε τις παραμετροποιήσεις που παρουσιάστηκαν στην Ενότητα 7.3.5.

8. Επιβεβαιώστε ότι μία επίπεδη ρητή τετραγωνική καμπύλη Bézier αναπαριστά μία κωνική τομή με τις προϋποθέσεις της Ενότητας 7.4.1. Μπορείτε να απαλείψετε την παράμετρο t από τις δύο συνιστώσες συναρτήσεις της παραμετρικής παράστασης ώστε να κατασκευάσετε την αλγεβρική παράσταση και να επιβεβαιώσετε ότι ισχύουν οι περιορισμοί της σχέσης (7.42).

9. Εφόσον ένα τόξο κύκλου μπορεί να αναπαρασταθεί με μία ρητή καμπύλη Bézier, ένας πλήρης κύκλος μπορεί να αναπαρασταθεί χρησιμοποιώντας συνεχόμενες ρητές καμπύλες Bézier (με θετικά βάρη), όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.17.



Σχήμα 7.17: *Ένας κύκλος σχηματιζόμενος ως τρεις ή τέσσερις συνεχόμενες καμπύλες Bézier. Φαίνονται επίσης τα αντίστοιχα πολύγωνα ελέγχου.*

Ισοδύναμα, ο κύκλος μπορεί να αναπαρασταθεί με μία ρητή καμπύλη B-spline με τα ίδια σημεία $\mathbf{p}_i$ ως σημεία ελέγχου. Βρείτε τα υπόλοιπα στοιχεία αυτής της καμπύλης NURBS (βάρη και ακολουθία κόμβων) για τις δύο περιπτώσεις που απεικονίζονται. Μπορείτε να διακρίνετε ένα μοτίβο;

10. Κατασκευάστε ένα πρόγραμμα για τη σχεδίαση κατά τμήματα κυβικών καμπυλών παρεμβολής. Επιβεβαιώστε ότι οι κυβικές καμπύλες παρεμβολής Hermite με συνέχεια C^2 είναι οι ίδιες με τις κυβικές καμπύλες παρεμβολής B-spline. Πειραματιστείτε με διάφορες τελικές συνθήκες.

11. Κατασκευάστε ένα πρόγραμμα για την απεικόνιση των διαφόρων τύπων επιφανειών τανυστικό γινόμενο που παρουσιάστηκαν. Ενσωματώστε αλγορίθμους φωτισμού και απόδοσης υφής (Κεφάλαια 12 και 14).

8

Υποδιαίρεση για τα γραφικά και την οπτικοποίηση

A. Nasri, F. A. Salem και G. Turkiyyah

Ένας λόγος για τον οποίο οι πίνακές μου έχουν γίνει ρεαλιστικοί έχει να κάνει με το ενδιαφέρον μου για το πώς αληθινά μοιάζουν τα πράγματα.
—Robert Bechtle

8.1 Εισαγωγή

Οι επιφάνειες υποδιαίρεσης αποτελούν πλέον καθιερωμένο εργαλείο στα γραφικά, παρέχοντας απλές μεθόδους για τη δημιουργία λείων επιφανειών από πολυγωνικά πλέγματα (*πολύεδρα*). Ένα από τα σημαντικά πλεονεκτήματά τους έναντι των παραδοσιακών επιφανειών B-spline και NURBS είναι η ικανότητά τους να αντιμετωπίζουν πλέγματα οποιασδήποτε τοπολογίας. Έτσι πολύπλοκα σχήματα μπορούν να δημιουργηθούν, να απεικονιστούν, και να υποστούν επεξεργασία, σε διάφορα επίπεδα εκλέπτυνσης. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε τις βασικές έννοιες αυτών των επιφανειών και εξετάζουμε ορισμένους από τους βασικούς αλγορίθμους υποδιαίρεσης. Επίσης περιγράφουμε την επεξεργασία των επιφανειών υποδιαίρεσης, και στη συνέχεια προβαίνουμε σε μία μελέτη της συνέχειάς τους σε ιδιάζοντα σημεία. Τέλος, περιγράφουμε την εφαρμογή των επιφανειών υποδιαίρεσης στα πεπερασμένα στοιχεία. Περισσότερες πληροφορίες σχετικές με τις επιφάνειες υποδιαίρεσης περιλαμβάνονται στις βιβλιογραφικές αναφορές [Zori00, Warr01, Sabi04, Velh01a, Nasr02c, Nasr02b, Sede98, Stam03, Stam98, Zhan02, Pakd05, Ivri03].

Στις επιφάνειες B-spline τανυστικό γινόμενο η τοπολογία των πλεγμάτων ελέγχου είναι υποχρεωτικά ορθογώνια. Ο περιορισμός αυτός μειώνει εξαιρετικά την πολυπλοκότητα των σχημάτων που μπορούν να παρασταθούν με τέτοιες επιφάνειες. Για το λόγο αυτό αναζητήθηκε μία γενική λύση η οποία να υποστηρίζει αυθαίρετες τοπολογίες, συγχρόνως όμως να εξακολουθεί να παράγει κανονικές επιφάνειες B-spline κατά τον συνήθη τρόπο. Δύο άρθρα τα οποία δημοσιεύθηκαν στο ίδιο περιοδικό το 1978 θεμελίωσαν τις επιφάνειες υποδιαίρεσης. Τα άρθρα αυτά περιέγραψαν επεκτάσεις των επιφανειών B-spline πάνω σε τέτοιες τοπολογίες. Ο πρώτος αλγόριθμος, των Doo–Sabin

[Doo78], ήταν ένας αλγόριθμος υποδιαίρεσης που παράγει δευτεροβάθμιες επιφάνειες B-spline, ενώ ο δεύτερος αλγόριθμος, των Catmull–Clark [Catm78], παράγει κυβικές επιφάνειες B-spline. Με την έκδοση των άρθρων αυτών, οι επιφάνειες υποδιαίρεσης έγιναν ένα κεντρικό εργαλείο στα γραφικά και στη γεωμετρική μοντελοποίηση.

Καθώς οι επιφάνειες υποδιαίρεσης βασίστηκαν στην εισαγωγή κόμβων [Boeh80, Cohe80, Fari01], ο αναγνώστης πρέπει να κατέχει το ζήτημα αυτό στα πλαίσια των καμπυλών και των επιφανειών (βλ. Κεφάλαιο 7).

8.2 Συμβολισμοί

Σε αυτή την ενότητα εισάγουμε την βασική ορολογία που χρησιμοποιείται σε αυτό το κεφάλαιο.

Μάσκα. Μία *μάσκα* ορίζεται από ένα σύνολο βαθμωτών τιμών $(m_i)_{1\le i\le n}$ το οποίο εφαρμόζεται σε ένα σύνολο n κορυφών $\mathbf{v}_i$ και παράγει μία νέα κορυφή $\mathbf{w}$ ως εξής:

$$\mathbf{w} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Εσωτερική/συνοριακή κορυφή. Όλες οι κορυφές στα κλειστά πολύεδρα ονομάζονται *εσωτερικές*. Μία εσωτερική κορυφή αντιστοιχεί σε ένα σημείο στην οριακή επιφάνεια το οποίο έχει μία γειτονιά που είναι τοπολογικά ομοιομορφική με έναν κλειστό δίσκο ακτίνας ϵ. Στα ανοικτά πολύεδρα, κάποιες από τις κορυφές βρίσκονται στο σύνορό τους. Οι κορυφές οι οποίες σχηματίζουν την *περίμετρο* του πολυέδρου ονομάζονται *συνοριακές* κορυφές. Μία ακμή μεταξύ δύο συνοριακών κορυφών ανήκει σε μία μόνο έδρα ενός πολυέδρου.

Σθένος κορυφής. Το *σθένος* μίας κορυφής είναι ο αριθμός των ακμών που εγγίζουν την κορυφή αυτή. Κατά συνέπεια, μία εσωτερική κορυφή έχει σθένος τουλάχιστον τρία, ενώ μία συνοριακή κορυφή μπορεί να έχει σθένος δύο.

Συνήθης κορυφή/έδρα. Ο ορισμός της *συνήθους* κορυφής εξαρτάται απο τον τρόπο υποδιαίρεσης που έχει επιλεγεί. Στις επιφάνειες τανυστικό γινόμενο, μία εσωτερική (αντίστοιχα, συνοριακή) κορυφή που έχει σθένος τέσσερα (αντίστοιχα, τρία) καλείται *συνήθης*. Μία *συνήθης έδρα* είναι αυτή που αποτελείται από τέσσερις συνήθεις κορυφές. Στα τριγωνικά πλέγματα, μία συνήθης κορυφή έχει συνήθως σθένος 6.

Ιδιάζουσα κορυφή/έδρα. Μία μη συνήθης κορυφή αποκαλείται και ιδιάζουσα. Ομοίως, όταν μία έδρα δεν έχει τέσσερις κορυφές, ονομάζεται ιδιάζουσα.

1-δακτύλιος. Ο *1-δακτύλιος* (ή απλώς *δακτύλιος*) μίας κορυφής $\mathbf{v}_i$ είναι το σύνολο των κορυφών $(\mathbf{v}_j)$, για τις οποίες οι ακμές $\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j$ είναι συνδεδεμένες με την $\mathbf{v}_i$.

Συνήθης/ιδιάζουσα διαμόρφωση Όταν όλες οι κορυφές είναι συνήθεις, τότε η διαμόρφωση καλείται *συνήθης*. Οι ιδιάζουσες διαμορφώσεις περιέχουν τουλάχιστον μία ιδιάζουσα κορυφή ή έδρα.

Τανυστικό γινόμενο Το *τανυστικό γινόμενο* δύο μασκών $(m_i)_{1\le i\le r}$ και $(n_i)_{1\le i\le p}$, αποτελεί μία άλλη μάσκα αποτελούμενη από $r \times p$ στοιχεία $(m_i \cdot n_j)_{1\le i\le r, 1\le j\le p}$.

8.3 Καμπύλες υποδιαίρεσης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε τρεις γνωστές καμπύλες υποδιαίρεσης: την τετραγωνική υποδιαίρεση του Chaikin, την κυβική υποδιαίρεση, και την υποδιαίρεση τεσσάρων σημείων. Παρακάτω υποθέτουμε ότι οι κορυφές του αρχικού πολυγώνου ελέγχου είναι οι $\mathbf{v}_i$, και ότι οι κορυφές του εκλεπτυσμένου πολύγωνου είναι οι $\mathbf{v}_i^j$ όπου ο εκθέτης j δηλώνει το επίπεδο εκλέπτυνσης (άρα $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^0$).

8.3.1 Τετραγωνική υποδιαίρεση καμπύλης

Ο πρώτος αλγόριθμος υποδιαίρεσης καμπύλης δημοσιεύθηκε το 1974 από τον Chaikin [Chai74]. Ο αλγόριθμος προοριζόταν κυρίως για επιτάχυνση από κάρτες γραφικών. Αποτελείται από τα ακόλουθα στάδια:

1. Για κάθε ακμή e_i^j που συνδέει τις κορυφές $\mathbf{v}_{i-1}^j$ και $\mathbf{v}_i^j$, υπολογίζουμε δύο νέες κορυφές χρησιμοποιώντας τις μάσκες $(1,3)$ και $(3,1)$ ως εξής:

$$\mathbf{v}_{2i-1}^{j+1} = \frac{3}{4}\mathbf{v}_i^j + \frac{1}{4}\mathbf{v}_{i-1}^j \tag{8.1}$$

$$\mathbf{v}_{2i}^{j+1} = \frac{3}{4}\mathbf{v}_i^j + \frac{1}{4}\mathbf{v}_{i+1}^j \tag{8.2}$$

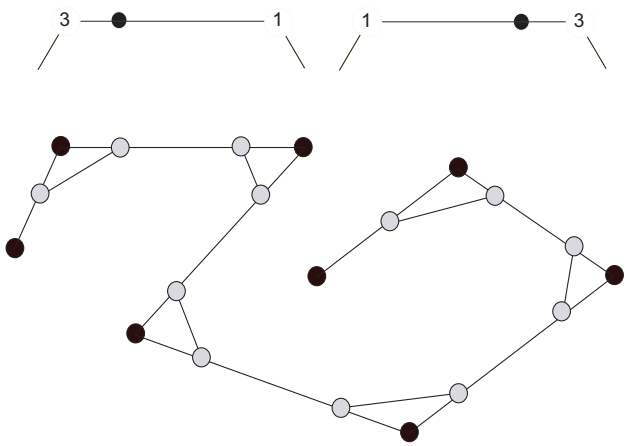
2. Κατασκευάζουμε ένα νέο πολύγωνο ως εξής:

   (α) Για κάθε κορυφή $\mathbf{v}_i^j$, συνδέουμε τις νέες κορυφές $\mathbf{v}_{2i-2}^{j+1}$ και $\mathbf{v}_{2i-1}^{j+1}$ αυτής, σχηματίζοντας μία V-ακμή (που αντιστοιχεί σε μία κορυφή (vertex)) του νέου πολυγώνου ελέγχου.

   (β) Για κάθε ακμή $\mathbf{e}_i^j$, συνδέουμε τις νέες κορυφές $\mathbf{v}_{2i-1}^{j+1}$ και $\mathbf{v}_{2i}^{j+1}$ αυτής, σχηματίζοντας μία E-ακμή (που αντιστοιχεί σε μία ακμή (edge)) του νέου πολυγώνου ελέγχου.

Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται κάποιες φορές, μέχρι να συγκλίσει το εκλεπτυνόμενο πολύγωνο ελέγχου σε μία λεία οριακή καμπύλη. Στο Σχήμα 8.1 φαίνονται οι αντίστοιχες μάσκες και ένα βήμα εκλέπτυνσης.

Αφού παρουσιάστηκε ο αλγόριθμος αυτός σε ένα συνέδριο, αποδείχθηκε ότι η καμπύλη που προκύπτει είναι απλώς μία ομοιόμορφη τετραγωνική καμπύλη B-spline [Ries75]



Σχήμα 8.1: *Οι μάσκες της τετραγωνικής υποδιαίρεσης καμπύλης και ένα παράδειγμα της υποδιαίρεσης του Chaikin. Οι αρχικές κορυφές εμφανίζονται ως μαύροι δίσκοι, ενώ οι εκλεπτυσμένες κορυφές ως κενοί δίσκοι.*

και ότι η παραπάνω κατασκευή μπορεί να γίνει με την εισαγωγή ενός κόμβου στο μέσο κάθε διαστήματος, λαμβάνοντας την τετραγωνική καμπύλη B-spline του αρχικού πολύγωνου ελέγχου.

8.3.2 Κυβική υποδιαίρεση καμπύλης

Παρόμοια με την περίπτωση της τετραγωνικής υποδιαίρεσης, ένας αλγόριθμος κυβικής υποδιαίρεσης καμπύλης μπορεί να υλοποιηθεί εισάγοντας έναν κόμβο στο μέσο κάθε διαστήματος. Ο αλγόριθμος αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

1. Για κάθε κορυφή $\mathbf{v}_i^j$, υπολογίζουμε μία νέα κορυφή $\mathbf{v}_{2i}^{j+1}$, η οποία καλείται V-κορυφή, χρησιμοποιώντας την μάσκα $(1, 6, 1)$ ως εξής:

$$\mathbf{v}_{2i}^{j+1} = \frac{\mathbf{v}_{i-1}^j + 6\mathbf{v}_i^j + \mathbf{v}_{i+1}^j}{8} \tag{8.3}$$

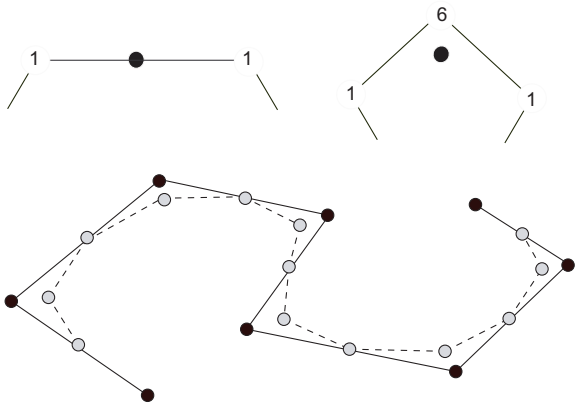
2. Για κάθε ακμή $\mathbf{v}_{i-1}^j \mathbf{v}_i^j$, υπολογίζουμε μία νέα κορυφή, η οποία καλείται E-κορυφή, χρησιμοποιώντας την μάσκα $(1, 1)$ ως εξής:

$$\mathbf{v}_{2i-1}^{j+1} = \frac{\mathbf{v}_{i-1}^j + \mathbf{v}_i^j}{2} \tag{8.4}$$

3. Δημιουργούμε ένα νέο εκλεπτυσμένο πολύγωνο συνδέοντας τις V- και τις E-κορυφές που ορίσαμε στα προηγούμενα δύο βήματα.

Εάν ο παραπάνω αλγόριθμος επαναληφθεί, το συνεχώς εκλεπτυνόμενο πολύγωνο ελέγχου συγκλίνει στην ομοιόμορφη κυβική καμπύλη B-spline που ορίζεται από το

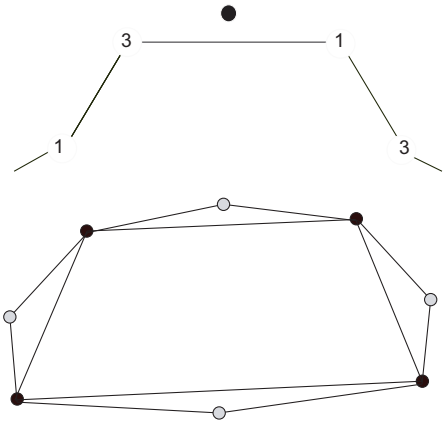
αρχικό πολύγωνο ελέγχου. Στο Σχήμα 8.2 φαίνονται οι αντίστοιχες μάσκες και ένα βήμα εκλέπτυνσης.



Σχήμα 8.2: *Οι μάσκες της κυβικής υποδιαίρεσης καμπύλης (πάνω) και ένα βήμα εκλέπτυνσης (κάτω). Οι αρχικές κορυφές εμφανίζονται ως μαύροι δίσκοι, ενώ οι εκλεπτυσμένες κορυφές ως κενοί δίσκοι.*

8.3.3 Υποδιαίρεση τεσσάρων σημείων

Σε αντίθεση με τους προηγούμενους δύο αλγορίθμους, ο αλγόριθμος της υποδιαίρεσης τεσσάρων σημείων είναι μία διάταξη παρεμβολής, στην οποία η οριακή καμπύλη παρεμβάλλει τις αρχικές κορυφές ελέγχου.



Σχήμα 8.3: *Οι μάσκες της υποδιαίρεσης τεσσάρων σημείων (πάνω) και ένα βήμα εκλέπτυνσης (κάτω). Οι αρχικές κορυφές εμφανίζονται ως μαύροι δίσκοι, ενώ οι εκλεπτυσμένες κορυφές ως κενοί δίσκοι.*

Ο αλγόριθμος αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

1. Για κάθε κορυφή $\mathbf{v}_i$, υπολογίζουμε μία νέα αντίστοιχη κορυφή, $\mathbf{v}_{2i}^{j+1} = \mathbf{v}_i^j$, η οποία καλείται V-κορυφή.

2. Για κάθε ακμή $\mathbf{v}_{i-1}^j \mathbf{v}_i^j$, υπολογίζουμε μία νέα E-κορυφή χρησιμοποιώντας την μάσκα $(-1, 9, 9, -1)$ ως εξής:

$$\mathbf{v}_{2i-1}^{j+1} = \frac{-\mathbf{v}_{i-2}^j + 9\mathbf{v}_{i-1}^j + 9\mathbf{v}_i^j - \mathbf{v}_{i+1}^j}{16} \tag{8.5}$$

3. Δημιουργούμε ένα εκλεπτυσμένο πολύγωνο ελέγχου συνδέοντας κάθε V-κορυφή με τις γειτονικές της E-κορυφές.

Επαναλαμβάνοντας αυτόν τον αλγόριθμο, καταλήγουμε σε μία οριακή καμπύλη η οποία παρεμβάλλει τις κορυφές του αρχικού πολυγώνου ελέγχου. Στο Σχήμα 8.3 φαίνονται οι αντίστοιχες μάσκες και ένα βήμα εκλέπτυνσης.

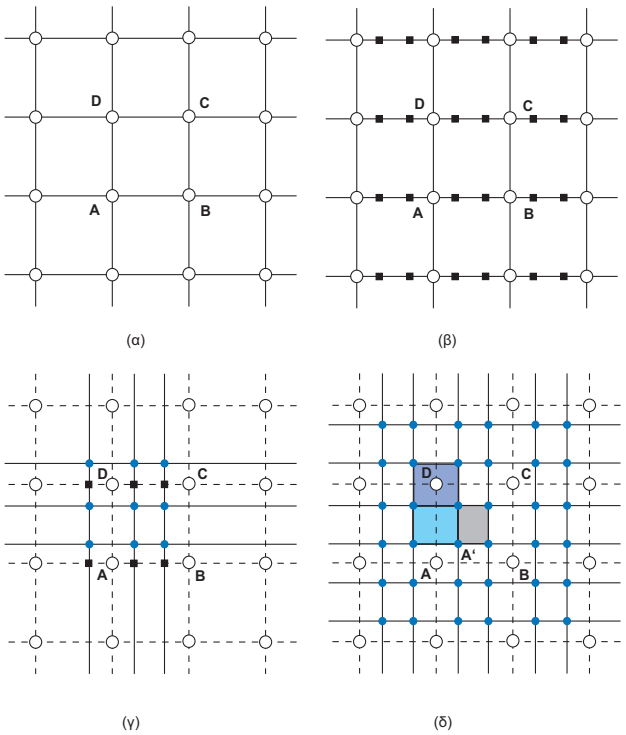
8.4 Επιφάνειες υποδιαίρεσης

Η επέκταση των τετραγωνικών και κυβικών αλγορίθμων υποδιαίρεσης καμπυλών σε επιφάνειες τανυστικό γινόμενο είναι απλή, καθώς αυτές οι επιφάνειες έχουν ορθογώνια τοπολογία. Ωστόσο, η επέκταση των ορισμών τέτοιων επιφανειών σε πλέγματα με αυθαίρετη τοπολογία δεν είναι άμεση. Θα εξετάσουμε πρώτα την επέκταση σε συνήθεις διαμορφώσεις, και μετά θα συζητήσουμε τις εφαρμογές της σε ιδιάζουσες διαμορφώσεις. Στις συνήθεις διαμορφώσεις, οι συντελεστές υποδιαίρεσης (οι μάσκες) υπολογίζονται εισάγοντας κόμβους στο ενδιάμεσο κάθε διαστήματος και στις δύο παραμετρικές κατευθύνσεις. Ως εκ τούτου, οι συντελεστές υπολογίζονται εύκολα χρησιμοποιώντας τανυστικά γινόμενα.

8.4.1 Τετραγωνική υποδιαίρεση με τανυστικά γινόμενα

Εξετάζουμε πρώτα το ορθογώνιο πλέγμα του Σχήματος 8.4, το οποίο απεικονίζει τους κανόνες εκλέπτυνσης κατά την τετραγωνική υποδιαίρεση με τανυστικά γινόμενα. Υποθέτουμε ότι η επιφάνεια είναι παραμετροποιημένη με δύο παραμέτρους s και t. Στην κατεύθυνση του s, η τετραγωνική υποδιαίρεση καμπύλης παράγει δύο κορυφές σε κάθε ακμή χρησιμοποιώντας τις μάσκες $(1, 3)$ και $(3, 1)$ αντίστοιχα. Οι κορυφές αυτές επισημαίνονται με μαύρα τετράγωνα στο Σχήμα 8.4. Χρησιμοποιώντας τις ίδιες μάσκες, εφαρμόζουμε κατόπιν την εκλέπτυνση στην κατεύθυνση του t, δημιουργώντας δύο κορυφές (οι οποίες επισημαίνονται με γκρι δίσκους) σε κάθε ακμή που ενώνει δύο «τετράγωνες» κορυφές. Συγκρίνοντας το αρχικό και το εκλεπτυσμένο πλέγμα στο Σχήμα 8.4 παρατηρούμε τα εξής:

1. Για κάθε έδρα $\mathbf{f}$ του αρχικού πλέγματος, σχηματίζουμε μία νέα έδρα (F-έδρα) από τις εκλεπτυσμένες κορυφές της αρχικής έδρας $\mathbf{f}$.



Σχήμα 8.4: *Τετραγωνική υποδιαίρεση με τανυστικά γινόμενα. (α) Το αρχικό πλέγμα. (β) Υποδιαίρεση κατά την κατεύθυνση του s. (γ) Υποδιαίρεση κατά την κατεύθυνση του t. (δ) Ένα βήμα εκλέπτυνσης, όπου φαίνονται τα τρία είδη εδρών: η F-έδρα της* **ABCD**, *η E-έδρα της* **AD**, *και η V-έδρα της* **D**.

2. Για κάθε ακμή **e** του αρχικού πλέγματος, σχηματίζουμε μία νέα έδρα (E-έδρα) από τις εκλεπτυσμένες κορυφές οι οποίες βρίσκονται στις έδρες που έχουν ως κοινή ακμή την **e**.

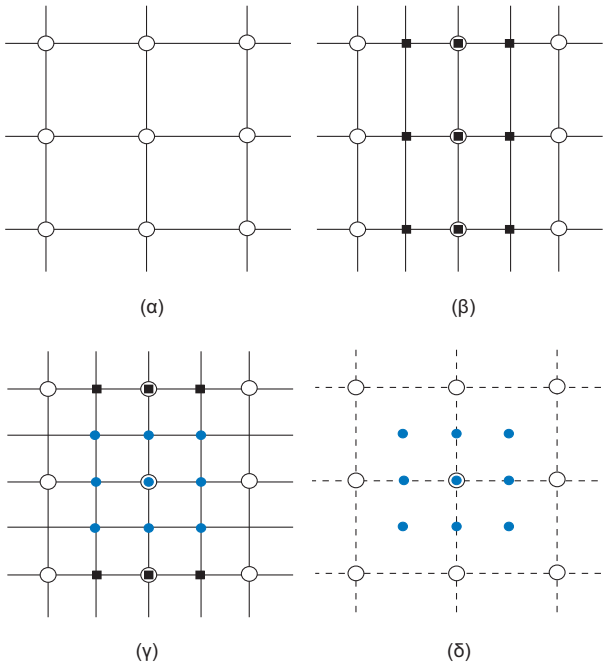
3. Για κάθε κορυφή **v** του αρχικού πλέγματος, σχηματίζουμε μία νέα έδρα (V-έδρα) από τις εκλεπτυσμένες κορυφές οι οποίες βρίσκονται στις έδρες που μοιράζονται την κορυφή **v**.

4. Το εκλεπτυσμένο πολύεδρο σχηματίζεται συνδέοντας τις εκλεπτυσμένες κορυφές ώστε να σχηματίσουν όλες τις παραπάνω έδρες.

Μπορεί να δειχθεί ότι οι νέες κορυφές στην περίπτωση αυτή υπολογίζονται με το τανυστικό γινόμενο της μάσκας $(3,1)$. Για παράδειγμα, η κορυφή $\mathbf{A}'$ υπολογίζεται εφαρμόζοντας το τανυστικό γινόμενο $(3,1) \times (3,1)$, το οποίο είναι ισοδύναμο με την εφαρμογή της μάσκας $(9,3,1,3)$ στις κορυφές **A**, **B**, **C**, **D** με αυτή τη σειρά. Οι υπόλοιπες κορυφές υπολογίζονται περιστρέφοντας αυτή την μάσκα.

8.4.2 Κυβική υποδιαίρεση με τανυστικά γινόμενα

Οι κανόνες της κυβικής υποδιαίρεσης με τανυστικά γινόμενα δίνονται από τα τανυστικά γινόμενα των μασκών που χρησιμοποιούνται στην κυβική υποδιαίρεση καμπύλης, παρόμοια με την τετραγωνική υποδιαίρεση. Εφαρμόζοντας αυτές τις μάσκες στην κατεύθυνση του *s*, δημιουργούμε μία V-κορυφή για κάθε παλαιά κορυφή, και μία E-κορυφή για κάθε κορυφή των ακμών (Σχήμα 8.5). Οι εκλεπτυσμένες κορυφές υποδεικνύονται με μαύρα τετράγωνα σε αυτό το σχήμα. Κατόπιν, οι ίδιες μάσκες εφαρμόζονται στην κατεύθυνση του *t*, δημιουργώντας τις τελικές εκλεπτυσμένες κορυφές. Αυτές οι κορυφές υποδεικνύονται στο σχήμα με δίσκους.



Σχήμα 8.5: *Κυβική υποδιαίρεση με τανυστικά γινόμενα: (α) Το αρχικό πλέγμα. (β) Εκλέπτυνση στην κατεύθυνση του s. (γ) Εκλέπτυνση στην κατεύθυνση του t. (δ) Τα τρία είδη των κορυφών.*

Συγκρίνοντας το αρχικό και το εκλεπτυσμένο πλέγμα, παρατηρούμε ότι:

1. Για κάθε έδρα **f** του αρχικού πλέγματος, μία νέα κορυφή (F-κορυφή) δημιουργείται στο κέντρο της έδρας.

2. Για κάθε ακμή **e** του αρχικού πλέγματος, μία νέα κορυφή (E-κορυφή) δημιουργείται από τις κορυφές της ακμής και τις F-κορυφές των εδρών που προσπίπτουν στην ακμή αυτή.

3. Για κάθε κορυφή **v** του αρχικού πλέγματος, μία νέα κορυφή (V-κορυφή) υπολογίζεται με τον γραμμικό συνδυασμό αυτής της κορυφής, των E-κορυφών των

ακμών οι οποίες έχουν την **v** ως άκρο, και των F-κορυφών των εδρών οι οποίες προσπίπτουν στην **v**.

4. Το εκλεπτυσμένο πολύεδρο σχηματίζεται συνδέοντας τις εκλεπτυσμένες κορυφές ώστε να σχηματίσουν όλες τις παραπάνω έδρες.

Πάλι, οι νέες κορυφές μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας το τανυστικό γινόμενο των μασκών που χρησιμοποιούνται στην κυβική υποδιαίρεση καμπύλης. Για παράδειγμα, μία F-κορυφή υπολογίζεται με το τανυστικό γινόμενο των μασκών $(1,1) \times (1,1)$, μία E-κορυφή με το γινόμενο των μασκών $(1,1) \times (1,6,1)$ και τέλος, μία V-κορυφή υπολογίζεται με το τανυστικό γινόμενο των μασκών $(1,6,1) \times (1,6,1)$.

8.4.3 Διατάξεις υποδιαίρεσης

Η παραπάνω διατύπωση οδήγησε στην γενίκευση των επιφανειών B-spline σε αυθαίρετες τοπολογίες, και αργότερα στην καθιέρωση των επιφανειών υποδιαίρεσης.

Μία *επιφάνεια υποδιαίρεσης* καθορίζεται από ένα ζεύγος (P_0, R), όπου το P_0 είναι ένα αρχικό πλέγμα αυθαίρετης τοπολογίας (ένα πολύεδρο), και το R είναι ένα σύνολο κανόνων που ορίζει την *διαδικασία εκλέπτυνσης*. Θεωρούμε εδώ ότι το πολύεδρο είναι ένα σύνολο κορυφών, ακμών και εδρών στον 3Δ χώρο, του οποίου οι πλευρές δεν είναι κατ' ανάγκην επίπεδες. Η διαδικασία εκλέπτυνσης (η οποία αναφέρεται συχνά και ως *σχήμα* ή *διάταξη υποδιαίρεσης*) εφαρμόζεται στο πολύεδρο P_0 δημιουργώντας ένα άλλο πολύεδρο P_1, το οποίο στη συνέχεια εισάγεται στην διαδικασία εκλέπτυνσης δημιουργώντας ένα άλλο πολύεδρο P_2, κ.ο.κ. Εάν η διαδικασία R τηρεί τις προυποθέσεις που αναφέρονται στο άρθρο [Pete04], τότε η ακολουθία των πολυέδρων $P_0, P_1, P_2, \cdots, P_i, \cdots$ συγκλίνει σε μία λεία επιφάνεια.

Οι πρώτες δύο πρωτοποριακές διαδικασίες εκλέπτυνσης αναπτύχθηκαν από τους Doo–Sabin [Doo78] και Catmull–Clark [Catm78]. Αυτές οι δύο διαδικασίες αποτελούν επεκτάσεις των επιφανειών B-spline σε αυθαίρετες τοπολογίες. Η διαδικασία των Doo–Sabin είναι μία επέκταση της τετραγωνικής υποδιαίρεσης με τανυστικά γινόμενα, ενώ η διαδικασία των Catmull–Clark είναι μία επέκταση της κυβικής υποδιαίρεσης με τανυστικά γινόμενα. Έκτοτε επινοήθηκαν πολλές διαδικασίες υποδιαίρεσης. Σε αυτή την ενότητα περιγράφουμε μόνο μερικές από αυτές τις διαδικασίες· άλλες διαδικασίες μπορούν να βρεθούν στις πηγές που αναφέρονται στη βιβλιογραφία.

Παρακάτω συμβολίζουμε ως P^j το εκλεπτυσμένο πολύεδρο στο επίπεδο j, και οι κορυφές, οι ακμές, και οι έδρες του συμβολίζονται αντίστοιχα ως $\mathbf{v}_i^j$, $\mathbf{e}_i^j$, και $\mathbf{f}_i^j$.

Η διάταξη των Doo–Sabin

Η διάταξη των Doo–Sabin επεκτείνει το τετραγωνικό τανυστικό γινόμενο σε αυθαίρετη τοπολογία. Εφαρμοζόμενη σε κανονικά πλέγματα, στα οποία όλες οι όψεις είναι απλώς τετράπλευρα, η διάταξη αυτή δημιουργεί δι-τετραγωνικές επιφάνειες B-spline. Η δυσκολία έγκειται στον υπολογισμό των εκλεπτυσμένων κορυφών μίας έδρας $\mathbf{f}_i^j$ με n ακμές, όταν το n είναι διαφορετικό του 4. Η ακόλουθη διαδικασία αποτελεί μία επέκταση του αλγορίθμου της Ενότητας 8.4.1 :

1. Για κάθε έδρα $\mathbf{f}_i^j$ με n ακμές, υπολογίζουμε n εκλεπτυσμένες κορυφές $\mathbf{v}_i^{j+1}$ ως έναν γραμμικό συνδυασμό των κορυφών εκείνης της πλευράς:

$$\mathbf{v}_i^{j+1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \mathbf{v}_k^j \tag{8.6}$$

όπου

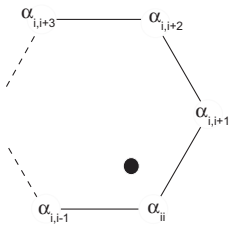
$$\begin{aligned} \alpha_{ii} &= \frac{n+5}{4}, \\ \alpha_{ik} &= \frac{3 + 2\cos(2\pi(i-k))/n}{4n}, \qquad \text{για } k \neq i. \end{aligned} \tag{8.7}$$

2. Υπολογίζουμε ένα εκλεπτυσμένο πολύγωνο P^{j+1} ως εξής:

   (α) Για κάθε έδρα $\mathbf{f}_i^j$ με n ακμές, σχηματίζουμε μία νέα έδρα (που καλείται F-έδρα) από τις εκλεπτυσμένες κορυφές αυτής.

   (β) Για κάθε ακμή $\mathbf{e}_i^j$, σχηματίζουμε μία νέα έδρα (που καλείται E-έδρα) από τις εκλεπτυσμένες κορυφές οι οποίες βρίσκονται στις έδρες που έχουν ως κοινή ακμή την $\mathbf{e}_i^j$.

   (γ) Για κάθε κορυφή $\mathbf{v}_i^j$, σχηματίζουμε μία νέα έδρα (που καλείται V-έδρα) από τις εκλεπτυσμένες κορυφές οι οποίες βρίσκονται στις έδρες που μοιράζονται την κορυφή $\mathbf{v}_i^j$.



Σχήμα 8.6: *Οι μάσκες που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό μίας F-έδρας.*

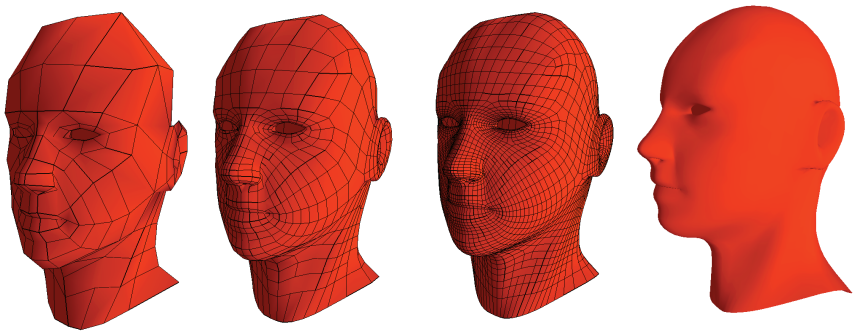
Οι εκλεπτυσμένες κορυφές υπολογίζονται εφαρμόζοντας τη μάσκα που φαίνεται στο Σχήμα 8.6 στις κορυφές μίας έδρας. Το Σχήμα 8.7 παρουσιάζει ένα αρχικό πολύεδρο, τα δύο πρώτα βήματα εκλέπτυνσης, και την αντίστοιχη οριακή επιφάνεια.

Σχετικά με τις επιφάνειες Doo–Sabin παρατηρούμε τα εξής:

1. Κάθε έδρα με n ακμές πάντοτε δημιουργεί μία F-έδρα με τον ίδιο αριθμό ακμών, δηλαδή μία έδρα με n ακμές συνεχίζει να έχει n ακμές και μετά την εκλέπτυνση. Εάν $n \neq 4$, η έδρα είναι ιδιάζουσα, αλλιώς είναι συνήθης.

2. Μία κορυφή με σθένος n δημιουργεί μια έδρα με n ακμές. Ως εκ τούτου, όλες οι κορυφές με σθένος 4 δημιουργούν συνήθεις έδρες.

3. Μετά την πρώτη εκλέπτυνση, όλες οι κορυφές αποκτούν σθένος 4.



Σχήμα 8.7: *Υποδιαίρεση Doo–Sabin. Από αριστερά: η αρχική επιφάνεια, η πρώτη και η δεύτερη εκλέπτυνση αυτής, και η αντίστοιχη οριακή επιφάνεια*

4. Όλες οι E-έδρες είναι συνήθεις.

5. Μετά από λίγα βήματα εκλέπτυνσης, σχεδόν όλες οι έδρες του πολυέδρου αποκτούν τέσσερις ακμές εκτός από τις $ef + ev$ ιδιάζουσες πλευρές, όπου τα ef και ev παριστάνουν αντίστοιχα τους αριθμούς των ιδιαζουσών εδρών και κορυφών του αρχικού πολυέδρου.

6. Παρόμοια με την περίπτωση της καμπύλης, κάθε κορυφή που ανήκει σε τέσσερα πολύγωνα αντιστοιχεί σε ένα τμήμα τετραγωνικής επιφάνειας B-spline. Συνεπώς, οι επιφάνειες Doo–Sabin είναι δι-τετραγωνικές επιφάνειες B-spline, εκτός από μικρές περιοχές που αντιστοιχούν στις ιδιάζουσες κορυφές και έδρες.

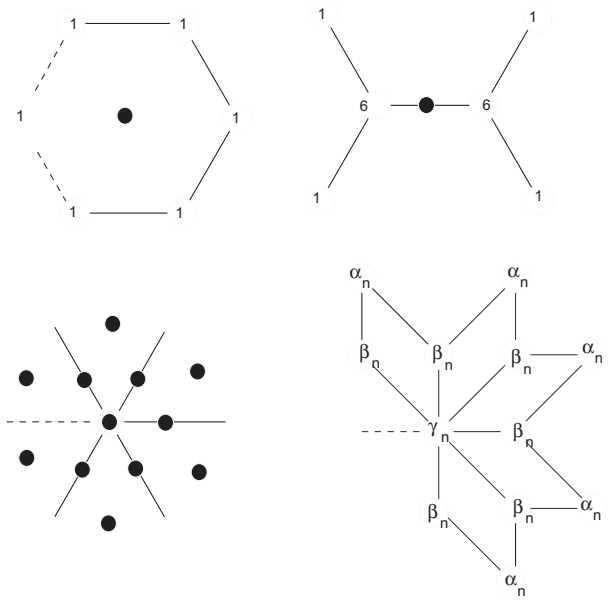
7. Το κέντρο βάρους κάθε έδρας βρίσκεται στην οριακή επιφάνεια, και επίσης μία επίπεδη έδρα εφάπτεται στην οριακή επιφάνεια στο σημείο αυτό.

Η διάταξη των Catmull–Clark

Η διαδικασία εκλέπτυνσης των Catmull–Clark είναι ουσιαστικά μια επέκταση της κυβικής υποδιαίρεσης με τανυστικά γινόμενα. Σε μια αυθαίρετη τοπολογία, οι E-κορυφές και οι F-κορυφές υπολογίζονται με τους ίδιους τύπους που χρησιμοποιούνται στην ορθογώνια τοπολογία. Η δυσκολία έγκειται στον υπολογισμό των V-κορυφών των κορυφών με σθένος n για $n \neq 4$. Ο πλήρης αλγόριθμος είναι ο εξής:

1. Για κάθε έδρα $\mathbf{f}_i^j$ του αρχικού πολυέδρου, υπολογίζουμε μία νέα κορυφή $\mathbf{v}f_i^{j+1}$ (F-κορυφή) ως το κέντρο βάρους αυτής της έδρας.

2. Για κάθε ακμή $\mathbf{e}_i^j = \mathbf{v}_i^j\mathbf{v}_{i+1}^j$ του αρχικού πολυέδρου, υπολογίζουμε μία νέα κορυφή $\mathbf{v}e_i^{j+1}$ (E-κορυφή) ως ένα γραμμικό συνδυασμό των $\mathbf{v}_i^j$, $\mathbf{v}_{i+1}^j$ και των τεσσάρων κορυφών που γειτνιάζουν με αυτές στις δύο έδρες που εφάπτονται σε αυτή την ακμή (δείτε τις μάσκες στο Σχήμα 8.8).



Σχήμα 8.8: *Οι μάσκες της εκλέπτυνσης Catmull–Clark. Πάνω αριστερά: η μάσκα για τις F-κορυφές. Πάνω δεξιά: η μάσκα για τις E-κορυφές. Κάτω αριστερά: εκλεπτυσμένες κορυφές (μαύροι δίσκοι) κοντά σε μία ιδιάζουσα κορυφή. Κάτω δεξιά: η μάσκα για τις V-κορυφές σε ένα πλέγμα τετραπλεύρων.*

3. Για κάθε κορυφή $\mathbf{v}_i^j$ του αρχικού πολυέδρου, υπολογίζουμε μία νέα κορυφή (V-κορυφή) $\mathbf{v}_i^{j+1}$ ως ένα γραμμικό συνδυασμό της $\mathbf{v}_i^j$, των E-κορυφών των ακμών που έχουν ως κορυφή την $\mathbf{v}_i^j$, και των F-κορυφών των εδρών που έχουν ως κορυφή την $\mathbf{v}_i^j$. Έτσι, η V-κορυφή $\mathbf{v}_i^{j+1}$ δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{v}_i^{j+1} = \alpha_n \sum_{k=1}^{n} \mathbf{v} f_k^j + \beta_n \sum_{k=1}^{n} \mathbf{v} e_k^j + \gamma_n \mathbf{v}_i^j \tag{8.8}$$

όπου οι αρχικές τιμές των α_n, β_n, και γ_n είναι οι:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \beta_n = \frac{1}{n^2} \\ \gamma_n &= \frac{n-2}{n} \end{aligned} \tag{8.9}$$

Οι τιμές αυτές μπορούν να τροποποιηθούν έτσι ώστε να βελτιωθεί η λειότητα της οριακής επιφάνειας, όπως προτείνει ο Sabin [Sabi91].

4. Κατασκευάζουμε ένα εκλεπτυσμένο πολύγωνο P^{j+1} ως εξής:

   (α) Για κάθε έδρα $\mathbf{f}_i^j$ του πολυγώνου P^j, συνδέουμε την F-κορυφή της με τις E-κορυφές των ακμών $\mathbf{f}_i^j$.

(β) Για κάθε κορυφή $\mathbf{v}_i^j$ του πολυγώνου P^j, συνδέουμε την V-κορυφή της με τις E-κορυφές της ακμής που προσπίπτει στην $\mathbf{v}_i^j$.

Το Σχήμα 8.8 απεικονίζει τις διάφορες μάσκες της διάταξης Catmull–Clark. Παρατηρούμε τα ακόλουθα χαρακτηριστικά της εκλέπτυνσης Catmull–Clark:

1. Κάθε κορυφή με σθένος n δημιουργεί μια V-κορυφή του ίδιου σθένους. Όταν $n \neq 4$ η κορυφή είναι ιδιάζουσα, αλλιώς είναι συνήθης.

2. Μετά την πρώτη εκλέπτυνση, κάθε αρχική έδρα με n ακμές παράγει μία F-κορυφή σθένους n. Συνεπώς, όλες οι έδρες των εκλεπτυσμένων πολυέδρων στα επόμενα βήματα θα αποκτήσουν τέσσερις ακμές. Για το λόγο αυτό, ο αλγόριθμος των Catmull–Clark περιγράφεται γενικά για πλέγματα τετραπλεύρων, καθώς ένα βήμα της διαδικασίας εκλέπτυνσης αφαιρεί τις έδρες με n ακμές.

3. Όλες οι E-κορυφές έχουν σθένος 4.

4. Μετά από ένα βήμα εκλέπτυνσης, όλες οι κορυφές του εκλεπτυσμένου πολυέδρου αποκτούν σθένος ίσο με 4, εκτός από $ev + ef$ ιδιάζουσες κορυφές, όπου ev και ef παριστάνουν αντίστοιχα τους αριθμούς των ιδιαζουσών κορυφών και εδρών του αρχικού πολυέδρου.

5. Κάθε τετράπλευρο που περιβάλλεται από 8 άλλα τετράπλευρα αντιστοιχεί σε ένα δι-κυβικό τμήμα B-spline. Κατά συνέπεια, οι επιφάνειες Catmull–Clark είναι κυρίως δι-κυβικές επιφάνειες B-spline, εκτός από περιοχές γύρω από τις λίγες ιδιάζουσες κορυφές.

6. Κάθε κορυφή $\mathbf{v}_i^1$ του πολυέδρου P^1, δηλαδή αυτού που προκύπτει μετά την πρώτη εκλέπτυνση, συγκλίνει σε ένα σημείο $\mathbf{v}_i^\infty$ στην οριακή επιφάνεια το οποίο δίνεται από τη σχέση

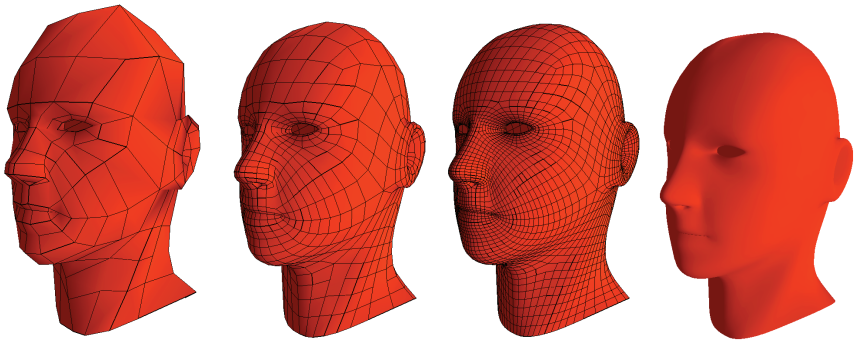
$$\mathbf{v}_i^\infty = \frac{n^2\mathbf{v}_i^1 + 4\sum_{j=1}^{n}\mathbf{v}e_j^1 + \sum_{j=1}^{n}\mathbf{v}f_j^1}{n(n+5)} \tag{8.10}$$

όπου $\mathbf{v}e_j^1$ είναι οι E-κορυφές των ακμών που έχουν ως κορυφή την $\mathbf{v}_i^1$, και $\mathbf{v}f_j^1$ είναι οι F-κορυφές των εδρών έχουν ως κορυφή την $\mathbf{v}_i^1$.

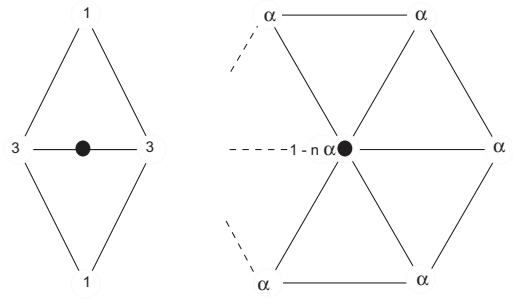
Η διάταξη του Loop

Ενώ οι διατάξεις των Catmull–Clark και των Doo–Sabin εφαρμόζονται σε πλέγματα τετραπλεύρων, ο πρώτος αλγόριθμος υποδιαίρεσης που αναφέρεται κυρίως σε τριγωνικά πλέγματα αναπτύχθηκε από τον Loop [Loop87]. Ο αλγόριθμος αυτός λαμβάνει ως είσοδο ένα πολύεδρο P^j (στο επίπεδο εκλέπτυνσης j) με τριγωνικές έδρες και χρησιμοποιεί τους παρακάτω κανόνες για να δημιουργήσει ένα άλλο πολύεδρο P^{j+1}:

1. Για κάθε ακμή $\mathbf{e}_i^j$, ενεργούμε ως εξής:



Σχήμα 8.9: *Η υποδιαίρεση Catmull–Clark: Από αριστερά προς τα δεξιά: μία αρχική επιφάνεια, το πρώτο και το δεύτερο βήμα εκλέπτυνσης, και η οριακή επιφάνεια.*



Σχήμα 8.10: *Μάσκες υποδιαίρεσης Loop: Από αριστερά προς τα δεξιά: η μάσκα για τις E-κορυφές και η μάσκα για τις V-κορυφές.*

(α) Έστω t_1 και t_2 τα δύο τρίγωνα που μοιράζονται την ακμή $\mathbf{e}_i^j$.

(β) Έστω $\mathbf{c}_1$ και $\mathbf{c}_2$ οι δύο κορυφές της ακμής $\mathbf{e}_i^j$, και $\mathbf{c}_3$ και $\mathbf{c}_4$ οι υπόλοιπες κορυφές των τριγώνων t_1 και t_2.

(γ) Παράγουμε μια E-κορυφή $\mathbf{v}e_i^{j+1}$ χρησιμοποιώντας την μάσκα που φαίνεται στο Σχήμα 8.10 ως εξής:

$$\mathbf{v}e_i^{j+1} = \frac{3\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_3 + 3\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_4}{8} \tag{8.11}$$

2. Για κάθε κορυφή $\mathbf{v}_i^j$ με σθένος n, ενεργούμε ως εξής:

(α) Έστω $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \cdots, \mathbf{c}_n$ οι κορυφές του 1-δακτυλίου γύρω από την κορυφή $\mathbf{v}_i^j$ (βλ. Σχήμα 8.10).

(β) Δημιουργούμε μια V-κορυφή $\mathbf{v}_i^{j+1}$ χρησιμοποιώντας έναν γραμμικό συνδυασμό της κορυφής $\mathbf{v}_i^j$ και των κορυφών $\mathbf{c}_i$ του 1-δακτυλίου αυτής, ως

εξής:

$$\mathbf{v}_i^{j+1} = (1 - n\alpha_n)\mathbf{v}_i^j + \alpha_n \sum_{k=1}^{n} \mathbf{c}_k \tag{8.12}$$

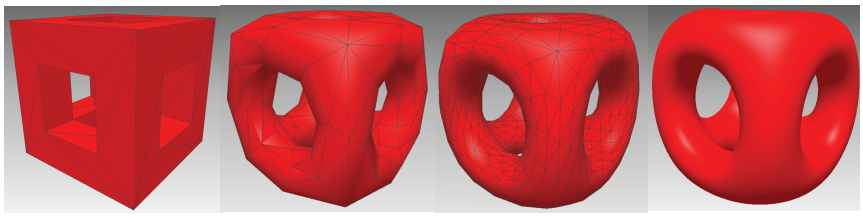
όπου τα α_n ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{3}{16}, \\ \alpha_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{5}{8} - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{n}\right)^2\right), \quad \text{για } n > 3. \end{aligned} \tag{8.13}$$

3. Δημιουργούμε ενα εκλεπτυσμένο πολύεδρο P^{j+1} ως εξής:

   (α) Για κάθε τρίγωνο του πολυέδρου P^j, συνδέουμε τις E-κορυφές των τριών ακμών αυτού σχηματίζοντας ένα τρίγωνο του P^{j+1}

   (β) Για κάθε κορυφή του πολυέδρου P^j με σθένος n, συνδέουμε την V-κορυφή αυτής με τις E-κορυφές των ακμών που προσπίπτουν σε αυτή. Ως εκ τούτου, στο εκλεπτυσμένο πολύεδρο P^{j+1} προστίθενται n τρίγωνα.



Σχήμα 8.11: *Η υποδιαίρεση Loop: Από αριστερά προς τα δεξιά: μία αρχική επιφάνεια, το πρώτο και το δεύτερο βήμα εκλέπτυνσης, και η οριακή επιφάνεια (βλ. επίσης την Εικόνα 1).*

Η χρήση των παραπάνω κανόνων δημιουργεί μία σειρά πολύεδρων η οποία συγκλίνει σε μία λεία οριακή επιφάνεια. Παρατηρούμε τα ακόλουθα χαρακτηριστικά της διαδικασίας αυτής:

1. Μία συνήθης κορυφή στην διαδικασία αυτή έχει σθένος ίσο με 6, αλλιώς πρόκειται για μία ιδιάζουσα κορυφή.

2. Η οριακή επιφάνεια είναι συνεχής C^2, εκτός από τις ιδιάζουσες κορυφές στις οποίες είναι συνεχής C^1.

3. Μία κορυφή $\mathbf{v}_i^0$ του αρχικού πλέγματος, σθένους n, συγκλίνει σε ένα σημείο που δίνεται από τη σχέση

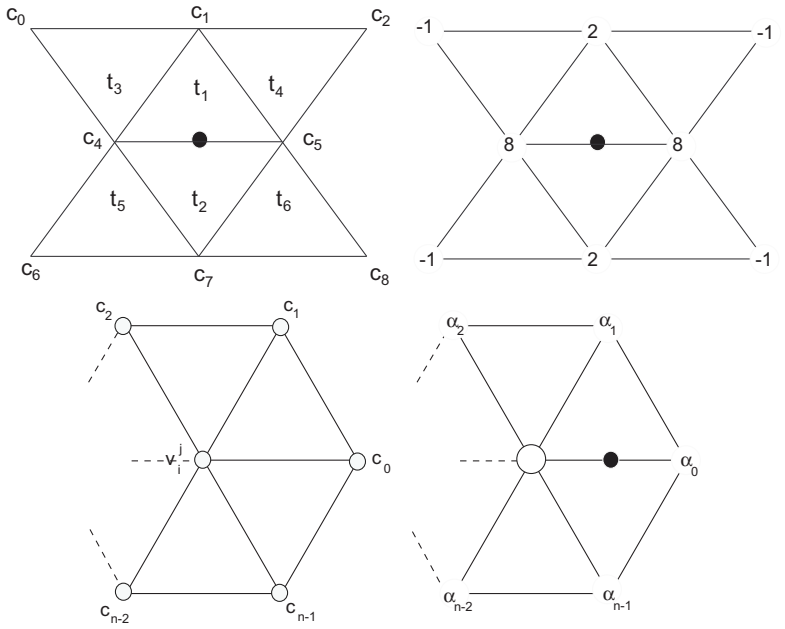
$$\mathbf{v}_i^{\infty} = \frac{3 + 8\alpha_n(n-1)}{3 + 8n\alpha_n}\mathbf{v}_i^0 + \frac{8\alpha_n}{3 + 8n\alpha_n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{v}_j^0 \tag{8.14}$$

όπου $\mathbf{v}_j^0$ είναι οι κορυφές του 1-δακτυλίου της κορυφής $\mathbf{v}_i^0$.

Το Σχήμα 8.11 (και η Εικόνα 1) εμφανίζει ένα παράδειγμα επιφάνειας υποδιαίρεσης του Loop.

Η τροποποιημένη διάταξη πεταλούδας

Η διάταξη αυτή αναπτύχθηκε αρχικά από τον Dyn κ.ά. [Dyn90] ως μία επέκταση της υποδιαίρεσης τεσσάρων σημείων, και αργότερα τροποποιήθηκε από τον Zorin [Zori96] με στόχο την βελτίωση της λειότητάς της. Ο αλγόριθμος εφαρμόζεται σε τριγωνικά πλέγματα και αποτελείται από έναν κύριο κανόνα ο οποίος ρυθμίζει τον υπολογισμό των E-κορυφών. Για πρακτική χρήση παρουσιάζουμε εδώ την τροποποιημένη διάταξη.



Σχήμα 8.12: *Μάσκες για την τροποποιημένη υποδιαίρεση πεταλούδας και αντίστοιχα υποδείγματα: μία συνήθης E-κορυφή (πάνω) και μία E-κορυφή κοντά σε ένα ιδιάζον σημείο (κάτω).*

1. Για κάθε κορυφή $\mathbf{v}_i^j$, ορίζουμε την αντίστοιχη V-κορυφή να είναι ίδια με την αρχική κορυφή:
$$\mathbf{v}_i^{j+1} = \mathbf{v}_i^j$$

2. Για κάθε ακμή $\mathbf{e}_i^j$:

   (α) Εάν και οι δύο κορυφές της ακμής έχουν σθένος ίσο με 6, ενεργούμε ως εξής:

      i. Έστω t_1 και t_2 τα δύο τρίγωνα που μοιράζονται αυτή την ακμή.

ii. Έστω t_3 και t_4 τα δύο άλλα γειτονικά του t_1 τρίγωνα, και έστω t_5 και t_6 τα δύο άλλα γειτονικά του t_2 τρίγωνα.

iii. Υπολογίζουμε μία E-κορυφή αυτής της ακμής ως τον ακόλουθο γραμμικό συνδυασμό των κορυφών των παραπάνω τριγώνων (βλ. Σχήμα 8.12):

$$\mathbf{v}e_i^{j+1} = \sum_{k=1}^{8} \alpha_k \mathbf{c}_k, \tag{8.15}$$

όπου

$$\begin{aligned} \alpha_k &= -1 \quad \text{για } k = 1, 3, 6, 7 \\ \alpha_k &= 2 \quad \text{για } k = 2, 8 \\ \alpha_k &= 8 \quad \text{για } k = 4, 5 \end{aligned} \tag{8.16}$$

(β) Διαφορετικά, εάν μία από τις κορυφές της ακμής έχει σθένος n, όπου $n \neq 6$, δηλαδή είναι ιδιάζουσα (έστω, για παράδειγμα, η $\mathbf{v}_i^j$), ενεργούμε ως εξής:

i. Έστω $(\mathbf{c}_k)_{(0 \leq k \leq n-1)}$ οι κορυφές του 1-δακτυλίου γύρω από την κορυφή $\mathbf{v}_i^j$.

ii. Υπολογίζουμε την E-κορυφή της ακμής ως τον ακόλουθο γραμμικό συνδυασμό των κορυφών του 1-δακτυλίου:

$$\mathbf{v}e_i^{j+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \mathbf{c}_k \tag{8.17}$$

όπου τα α_k εξαρτώνται από το σθένος n ως εξής:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4} + \cos\frac{2\pi k}{n} + \frac{1}{2}\cos\frac{4\pi k}{n}\right) && \text{για } n > 5 \\ \alpha_0 &= \frac{5}{12}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{1}{12} && \text{για } n = 3 \\ \alpha_0 &= \frac{3}{8}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{8}, \quad \alpha_1 = \alpha_3 = 0 && \text{για } n = 4 \end{aligned}$$

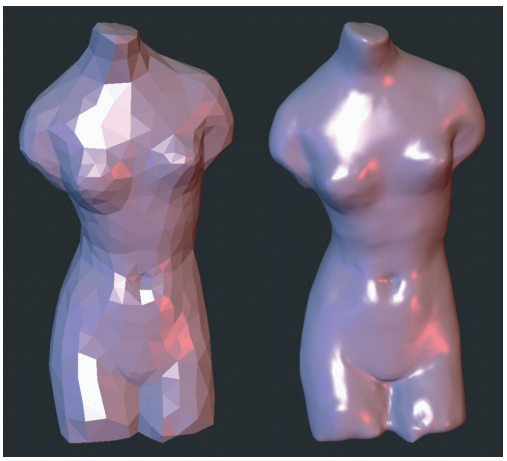
(γ) Διαφορετικά, υπολογίζουμε το μέσο όρο των συντελεστών, αντιμετωπίζοντας κάθε κορυφή ως ιδιάζουσα, και έπειτα χρησιμοποιούμε την προκύπτουσα μάσκα για να υπολογίσουμε την E-κορυφή της ακμής αυτής.

Το Σχήμα 8.13 (και η Εικόνα 2) δείχνει ένα παράδειγμα επιφανειών υποδιαίρεσης τύπου πεταλούδας. Ακολουθούν κάποιες παρατηρήσεις για τη διάταξη αυτή:

1. Καθώς όλες οι αρχικές κορυφές ανήκουν και στο εκλεπτυσμένο πολύεδρο, η διάταξη της πεταλούδας είναι μία διάταξη παρεμβολής.

2. Η εκλέπτυνση μπορεί να γίνει προσαρμοστικά.

3. Στα κανονικά πλέγματα, η διάταξη είναι μόνο C^1 συνεχής.



Σχήμα 8.13: *Υποδιαίρεση πεταλούδας: μία αρχική επιφάνεια (αριστερά), και η οριακή επιφάνειά της (δεξιά). (Με την άδεια του D. Zorin) (βλ. επίσης την Εικόνα 2)*

4. Σε πλέγματα ιδιάζουσας τοπολογίας, η τροποποιημένη διάταξη παράγει λείες επιφάνειες, C^1 συνεχείς, σε αντίθεση με την αρχική εκδοχή της διάταξης η οποία εμφανίζει ανεπιθύμητες πτυχώσεις.

Η διάταξη υποδιαίρεσης στο μέσο

Η υποδιαίρεση στο μέσο είναι η απλούστατη διάταξη υποδιαίρεσης και αναπτύχθηκε από τους Peters και Reif [Pete97]. Ο αλγόριθμος αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

1. Για κάθε ακμή $\mathbf{e}_i^j$, υπολογίζουμε την E-κορυφή της ως το μέσο αυτής της ακμής.

2. Κατασκευάζουμε ένα καινούριο πολύεδρο ως εξής:

   (α) Για κάθε έδρα $\mathbf{f}_i^j$, κατασκευάζουμε μία F-έδρα συνδέοντας τις E-κορυφές των ακμών της.

   (β) Για κάθε κορυφή $\mathbf{v}_i^j$, κατασκευάζουμε μία V-έδρα συνδέοντας τις E-κορυφές των ακμών που προσπίπτουν σε αυτή.

Εξετάζοντας προσεκτικά αυτή τη διάταξη, παρατηρούμε τα εξής:

1. Δύο βήματα αυτού του αλγορίθμου μοιάζουν με μία επανάληψη της υποδιαίρεσης Doo–Sabin, με διαφορετικούς συντελεστές για τον υπολογισμό των νέων κορυφών. Τα βήματα είναι τα εξής:

   (α) Για κάθε έδρα $\mathbf{f}_i^j$ με n ακμές, υπολογίζουμε n εκλεπτυσμένες κορυφές $\mathbf{v}_i^{j+1}$

ως έναν γραμμικό συνδυασμό των παλαιών κορυφών $\mathbf{v}_i^j$ ως εξης:

$$\mathbf{v}_i^{j+1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_r \mathbf{v}_k^j \tag{8.18}$$

όπου $r = (k - j + n) \bmod n$ και οι συντελεστές α_r δίνονται από την ακόλουθη σχέση:

$$\alpha_r = 2 \sum_{j=0}^{\overline{n}} 2^{-j} \cos \frac{2\pi r j}{n} \tag{8.19}$$

όπου

$$\overline{n} = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$$

2. Η οριακή επιφάνεια είναι συνεχής C^1.

3. Ο αλγόριθμος συγκλίνει στην αρχή αργά για μεγάλες έδρες με n ακμές. Για να ξεπεραστεί αυτό το πρόβλημα, ο Peters ανέφερε τροποποιημένους συντελεστές υποδιαίρεσης στο [Pete97].

Η διάταξη υποδιαίρεσης κατά $\sqrt{3}$

Η διάταξη υποδιαίρεσης κατά $\sqrt{3}$ είναι μία διάταξη που εφαρμόζεται σε τριγωνικά πλέγματα, η οποία αναπτύχθηκε απο τον Kobbelt [Kobb00]. Δεδομένου ενός πολυέδρου του οποίου οι έδρες είναι όλες τριγωνικές, ο αλγόριθμος αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

1. Για κάθε έδρα $\mathbf{f}_i^j$, κατασκευάζουμε μία F-κορυφή στο κέντρο βάρους της έδρας αυτής.

2. Για κάθε κορυφή $\mathbf{v}_i^j$ σθένους n, ενεργούμε ως εξής:

   (α) Έστω $(\mathbf{b}_k)$ το σύνολο των κορυφών του 1-δακτυλίου της κορυφής $\mathbf{v}_i^j$.

   (β) Κατασκευάζουμε μία V-κορυφή $\mathbf{v}_i^{j+1}$ ως εξής:

$$\mathbf{v}_i^{j+1} = (1 - \alpha_n)\mathbf{v}_i^j + \frac{\alpha_n}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{b}_k \tag{8.20}$$

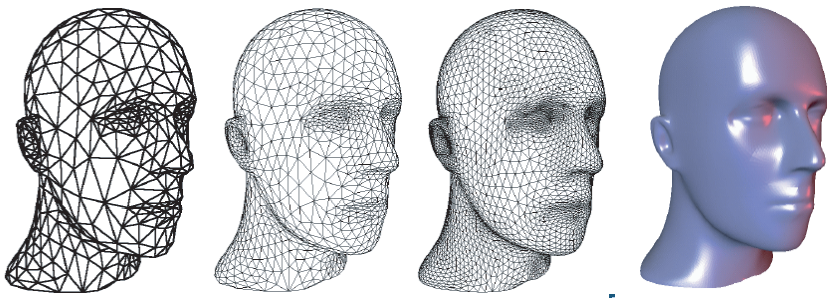
   όπου τα α_n ορίζονται από τον παρακάτω τύπο:

$$\alpha_n = \frac{1}{9}\left(4 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) \tag{8.21}$$

3. Κατασκευάζουμε ένα καινούριο πολύεδρο ως εξής:

   (α) Για κάθε παλαιά ακμή, συνδέουμε τις F-κορυφές (κέντρα βάρους) των δύο εδρών που μοιράζονται αυτή την ακμή.

(β) Για κάθε παλαιά έδρα, συνδέουμε την F-κορυφή αυτής με τις V-κορυφές που αντιστοιχούν στις κορυφές της έδρας.



Σχήμα 8.14: *Υποδιαίρεση κατά $\sqrt{3}$. Από αριστερά προς τα δεξιά: μία αρχική επιφάνεια, το πρώτο και το δεύτερο βήμα υποδαίρεσης, και η οριακή επιφάνεια. (Με την άδεια του L. Kobbelt)*

Το Σχήμα 8.14 εμφανίζει ένα παράδειγμα μίας επιφάνειας υποδιαίρεσης κατά $\sqrt{3}$. Σχετικά με αυτή τη διάταξη υποδιαίρεσης παρατηρούμε τα ακόλουθα:

1. Δεν είναι διάταξη παρεμβολής.

2. Ένα πλεονέκτημα αυτού του αλγορίθμου είναι η δυνατότητά του να υποστηρίξει προσαρμοστική υποδιαίρεση. Ωστόσο, δύο γειτονικά τρίγωνα μπορεί να διαφέρουν μόνο κατά ένα επίπεδο υποδιαίρεσης.

3. Η οριακή επιφάνεια είναι συνεχής C^2 έκτος από τις ιδιάζουσες κορυφές, στις οποίες είναι συνεχής C^1.

8.5 Επεξεργασία των επιφανειών υποδιαίρεσης

Οι περισσότεροι αλγόριθμοι υποδιαίρεσης θεωρούνται τελεστές εξομάλυνσης· παράγουν μία λεία οριακή επιφάνεια έχοντας ως είσοδο ένα αρχικό τραχύ πλέγμα. Όμως η λειότητα της οριακής επιφάνειας δεν είναι πάντοτε επιθυμητή. Για παράδειγμα, σε εφαρμογές των γραφικών, συχνά χρειαζόμαστε μία επιφάνεια η οποία έχει μία πτυχή ή μία οξεία ακμή. Το ζήτημα αυτής της γενικής λειότητας αναφέρθηκε ήδη από τις αρχές της δεκαετίας του 1980. Προς αντιμετώπισή του. ο Nasri παρέσχε μία μέθοδο κατασκευής επιφανειών υποδιαίρεσης με μία σκόπιμη ασυνέχεια (παρόμοια με πτυχή) κατά μήκος μίας συνοριακής καμπύλης [Nasr87]. Μετά μία μακρά μελέτη, αναπτύχθηκαν επιφάνειες υποδιαίρεσης που υποστηρίζουν οξέα χαρακτηριστικά, απαραίτητα στη μοντελοποίηση και στη συνθετική κίνηση [Hopp94, DeRo98].

Πέρα από τα οξέα χαρακτηριστικά, οι επιφάνειες υποδιαίρεσης είναι επιθυμητό να υποστηρίζουν περιορισμούς παρεμβολής. Γενικά διακρίνουμε δύο είδη αλγορίθμων υποδιαίρεσης: τους αλγορίθμους παρεμβολής και τους αλγορίθμους προσέγγισης. Οι

πρώτοι παρεμβάλλουν όλες οι μερικές από τις κορυφές του αρχικού πολυέδρου, ενώ οι δεύτεροι προσεγγίζουν το αρχικό πολύεδρο. Για παράδειγμα, οι διατάξεις των Catmull–Clark, Doo–Sabin, υποδιαίρεσης στο μέσο, και Loop αποτελούν αλγορίθμους προσέγγισης, ενώ η διάταξη πεταλούδας αποτελεί διάταξη παρεμβολής. Συνήθως οι αλγόριθμοι προσέγγισης μπορούν να τροποποιηθούν σε αλγόριθμους παρεμβολής όπως αναφέρεται στα [Nasr87, Hals93].

Σε αυτή την ενότητα περιγράφουμε περιληπτικά κάποια θέματα που αναφέρονται στην επεξεργασία των επιφανειών υποδιαίρεσης.

8.5.1 Οξέα χαρακτηριστικά

Η λειότητα μίας επιφάνειας υποδιαίρεσης σε κάποια κορυφή της μπορεί να μειωθεί σε C^0 τροποποιώντας κατάλληλες μάσκες της διαδικασίας υποδιαίρεσης. Μία τέτοια *οξεία κορυφή*, χαρακτηρίζεται ανάλογα με τον αριθμό οξέων ακμών οι οποίες προσπίπτουν σε αυτή. Αν ο αριθμός των οξέων ακμών είναι μεγαλύτερος από δύο, η κορυφή ονομάζεται *βέλος* (dart), ενώ αν ο αριθμός αυτός είναι ίσος με δύο, ονομάζεται κορυφή *πτυχής*. Διαφορετικά, η κορυφή ονομάζεται απλώς *γωνιακή*. Για παράδειγμα, αν στη διάταξη Catmull–Clark τροποποιήσουμε τους συντελεστές των V-κορυφών μίας αρχικής κορυφής $\mathbf{v}_i^0$ και τους συντελεστές των γειτονικών E-κορυφών όπως δείχνει το Σχήμα 8.15, τότε η κορυφή αυτή θα σχηματίσει ένα βέλος. Παρομοίως, η διάταξη του Loop μπορεί να τροποποιηθεί ώστε μία κορυφή να γίνει οξεία όπως περιγράφεται στο [Hopp94].

Οι διατάξεις υποδιαίρεσης άρτιου βαθμού, όπως η διάταξη των Doo–Sabin και η υποδιαίρεση στο μέσο, απαιτούν ιδιαίτερη τροποποίηση για την κατασκευή οξέων κορυφών.

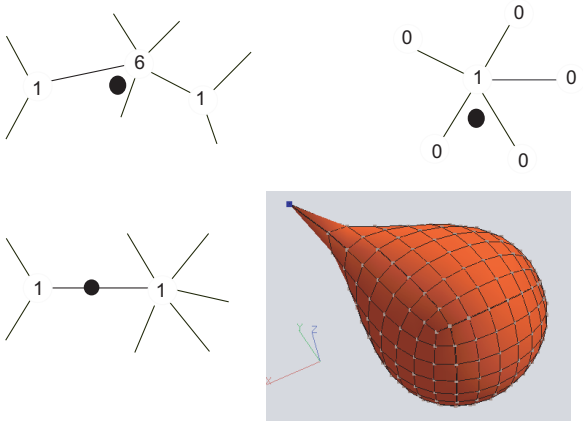
Το Σχήμα 8.15 παρουσιάζει ένα παράδειγμα επιφάνειας υποδιαίρεσης Catmull–Clark με μία κορυφή βέλος.

8.5.2 Ανοικτά πολύεδρα

Οι περισσότεροι από τους αλγορίθμους υποδιαίρεσης που συζητήθηκαν ως εδώ λειτουργούν ομαλά μόνο για κλειστά πολύεδρα. Όμως δεν μπορούν να ελέγξουν τις συνοριακές καμπύλες των οριακών επιφανειών που σχηματίζονται από ανοικτά πολύεδρα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η οριακή επιφάνεια ενός ανοικτού πολυέδρου συρρικνώνεται προς το εσωτερικό του, καθιστώντας δύσκολο τον έλεγχο των συνοριακών καμπυλών του. Ο Nasri εξέτασε αρχικά αυτό το πρόβλημα στο [Nasr87] προτείνοντας μία λύση για τις επιφάνειες Doo–Sabin, και το αντιμετώπισε αργότερα επίσης στα [Nasr95, Nasr97].

Η έλλειψη ελέγχου αντιμετωπίζεται τροποποιώντας τις συνοριακές έδρες του πολυέδρου ώστε να αποκτήσουν συγκεκριμένη δομή, χάρη στην οποία οι συνοριακές καμπύλες της οριακής επιφάνειας ελέγχονται από τις συνοριακές κορυφές της αρχικής επιφάνειας. Αυτές οι κορυφές σχηματίζουν το συνοριακό πολύγωνο ελέγχου[1] της

[1]Σημειώνεται ότι μία επιφάνεια μπορεί ασφαλώς να έχει πολλαπλά συνοριακά πολύγωνα ελέγχου.



Σχήμα 8.15: *Επιφάνεια υποδιαίρεσης με οξέα χαρακτηριστικά. Η μάσκα για κορυφή πτυχής (πάνω αριστερά), η μάσκα για κορυφή βέλος (πάνω δεξιά), η μάσκα για τις Ε-κορυφές οι οποίες προσπίπτουν σε οποιαδήποτε οξεία κορυφή (κάτω αριστερά), και ένα παράδειγμα επιφάνειας υποδιαίρεσης Catmull–Clark με ένα βέλος (κάτω δεξιά).*

συγκεκριμένης επιφάνειας. Φυσικά, η καμπύλη αυτού του πολυγώνου ελέγχου είναι η αντίστοιχη κατά τμήματα καμπύλη B-spline, της οποίας τα τμήματα συνενώνονται στις συνοριακές κορυφές με σθένος 2. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την απλή περίπτωση μίας επιφάνειας Doo–Sabin, της οποίας όλες οι συνοριακές κορυφές έχουν σθένος 3. Οι συνοριακές έδρες μπορούν να τροποποιηθούν με την επέκταση κάθε ακμής $\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j$ δημιουργώντας την κατοπτρική (συμμετρική) της εσωτερικής κορυφής $\mathbf{v}_j$ ως προς τη συνοριακή κορυφή $\mathbf{v}_i$. Υπάρχουν όμως πιο περίπλοκες συνοριακές περιπτώσεις, οι οποίες μπορούν να αντιμετωπισθούν με την εισαγωγή της έννοιας των *n-αντικατοπτριζομένων* εδρών [Nasr03a]. Καθώς αυτή η μέθοδος δεν αλλάζει τους συντελεστές υποδιαίρεσης, αφενός δεν απαιτεί καμία εξειδικευμένη ανάλυση της οριακής επιφάνειας, και αφετέρου επιτρέπει την ομαλή συνένωση δύο επιφανειών υποδιαίρεσης κατά μήκος των συνοριακών καμπυλών τους. Αυτή η έρευνα κατέληξε στην εισαγωγή των πολυγωνικών συμπλόκων, και στην εφαρμογή αυτών στην παρεμβολή καμπυλών· αυτά τα ζητήματα παρουσιάζονται παρακάτω στην Ενότητα 8.5.4.

Μία άλλη μέθοδος για τον έλεγχο των συνοριακών καμπυλών συνίσταται απλώς στη μεταβολή των συντελεστών υποδιαίρεσης κατά μήκος του συνόρου [Zori00]. Απλώς, εκλεπτύνουμε το συνοριακό πολύγωνο ελέγχου χρησιμοποιώντας έναν από τους βασικούς αλγορίθμους υποδιαίρεσης καμπύλης. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της διάταξης Catmull–Clark, ενεργούμε ως εξής:

1. Για κάθε συνοριακή ακμή, κατασκευάζουμε μια E-κορυφή στο μέσο της.

2. Για κάθε συνοριακή κορυφή, κατασκευάζουμε μία V-κορυφή σύμφωνα με την εξίσωση (8.3).

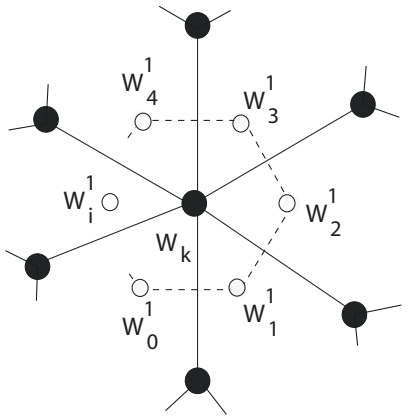
Ένας ανάλογος αλγόριθμος μπορεί να επινοηθεί για τις επιφάνειες Doo–Sabin.

8.5.3 Παρεμβολή με προσεγγιστικές διατάξεις

Η ιδέα της παρεμβολής με τις προσεγγιστικές διαδικασίες παρουσιάστηκε αρχικά στο [Nasr87], με το οποίο καθιερώθηκε ο τρόπος κατασκευής επιφανειών Doo–Sabin που παρεμβάλλουν δεδομένα σημεία. Αργότερα, αναπτύχθηκαν αντίστοιχες επιφάνειες Catmull–Clark από τον Halstead [Hals93]. Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Αν δίνεται ένα πολύεδρο[2] P με ένα σύνολο επισημασμένων κορυφών $\mathbf{v}_k$ που πρέπει να παρεμβληθούν, ζητείται ένα άλλο πολύεδρο Q, με κορυφές $\mathbf{w}_k$, του οποίου η οριακή επιφάνεια παρεμβάλλει τις επισημασμένες κορυφές $\mathbf{v}_k$.

Υποθέτουμε ότι το πολύεδρο Q έχει μία τοπολογία παρόμοια με αυτήν του πολυέδρου P. Μία λύση στο πρόβλημα συνίσταται στην μεταχείριση κάθε επισημασμένης κορυφής $\mathbf{v}_k$ ως οριακής κορυφής $\mathbf{w}_k^\infty$ στην οποία συγκλίνει μία έδρα (στην διάταξη Doo–Sabin) ή μία κορυφή (στις διατάξεις Catmull–Clark ή Loop). Εφόσον προσδιοριστεί αυτή η έδρα ή κορυφή, η $\mathbf{v}_k$ μπορεί να εκφραστεί ως ένας γραμμικός συνδιασμός κάποιων από τις κορυφές $\mathbf{w}_k$, και έπειτα να σχηματιστεί ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων του οποίου η λύση είναι οι ζητούμενες $\mathbf{w}_k$. Επομένως, η λύση του προβλήματος εκτελείται σε δύο στάδια: τον προσδιορισμό της αντίστοιχης οριακής έδρας ή κορυφής, και τη διαμόρφωση του συστήματος εξισώσεων.

Στις επιφάνειες Doo–Sabin, το κέντρο βάρους μίας έδρας αποτελεί μία οριακή κορυφή στην επιφάνεια αυτή. Άρα, πρέπει να συσχετίσουμε κάθε επισημασμένη κορυφή $\mathbf{v}_k$ με το κέντρο βάρους κάποιας έδρας. Αυτό οδηγεί στον ακόλουθο αλγόριθμο για τον υπολογισμό του πίνακα $\mathbf{M}$ του γραμμικού συστήματος (βλ. Σχήμα 8.16):



Σχήμα 8.16: *Παρεμβολή C^1 μίας κορυφής.*

1. Μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία του πίνακα $\mathbf{M}$, διαστάσεων $l \times l$ όπου l είναι ο αριθμός των κορυφών του αρχικού πολυέδρου.

2. Για κάθε κορυφή $\mathbf{w}_k$ με σθένος n, ενεργούμε ως εξής:

   Αν η κορυφή $\mathbf{w}_k$ πρόκειται να παρεμβληθεί, τότε:

[2] Είτε το αρχικό πολύεδρο είτε αυτό που προκύπτει μετά από κάποια βήματα εκλέπτυνσης.

(α) Έστω VF_k η V-έδρα η οποία παράγεται από την κορυφή $\mathbf{w}_k$.

(β) Έστω $(\mathbf{w}_i^1)_{1\le i\le n}$ οι κορυφές της VF_k. Ο εκθέτης υποδεικνύει το γεγονός ότι οι κορυφές αυτές ανήκουν στην πρώτη υποδιαίρεση.

(γ) Σχηματίζουμε την εξίσωση:

$$\mathbf{v}_k = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{w}_i^1)$$

(δ) Αντικαθιστούμε κάθε κορυφή $\mathbf{w}_i^1$ με τον γραμμικό συνδυασμό των κορυφών $(\mathbf{w}_k)$ της έδρας στην οποία ανήκει. Υποθέτοντας ότι η έδρα αυτή έχει m ακμές, ισχύει η σχέση

$$\mathbf{w}_i^1 = \sum_{r=1}^{m} \alpha_{ri}\mathbf{w}_r,$$

από την οποία προκύπτει

$$\mathbf{v}_k = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{m} \alpha_{ri}\mathbf{w}_r).$$

(ε) Σχηματίζουμε την k^{η} γραμμή του πίνακα $\mathbf{M}$ χρησιμοποιώντας τους συντελεστές

$$\frac{1}{n}\alpha_{ri}.$$

Έτσι ορίζουμε τα $m \cdot n$ στοιχεία αυτής της γραμμής. Τα υπόλοιπα $l - m \cdot n$ στοιχεία έχουν ήδη μηδενιστεί.

Αλλιώς, θέτουμε $\mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k$, έτσι ώστε η αντίστοιχη γραμμή του πίνακα $\mathbf{M}$ να έχει παντού τιμή 0 εκτός από το k^{η} της θέση, στην οποία έχει τιμή 1.

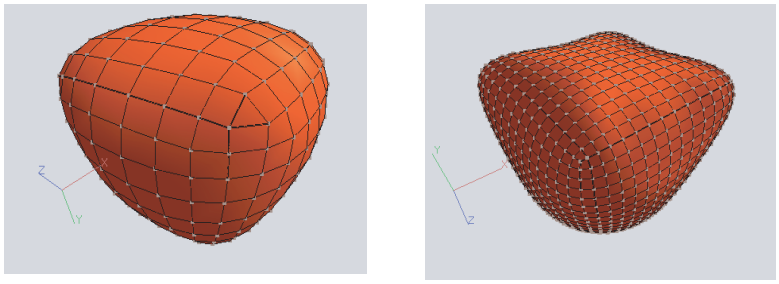
3. Διαμορφώνουμε το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{w}_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{w}_n \end{pmatrix}$$

4. Λύνουμε το παραπάνω σύστημα για τις άγνωστες κορυφές $\mathbf{w}_k$.

5. Κατασκευάζουμε ένα νέο πολύεδρο Q από ένα αντίγραφο του P, αλλά με νέες κορυφές που προέρχονται από την λύση του παραπάνω συστήματος.

Στο Σχήμα 8.17 (αριστερά) φαίνεται ένα παράδειγμα μίας επιφάνειας παρεμβολής Doo–Sabin.



Σχήμα 8.17: *Παρεμβάλλουσες επιφάνειες υποδιαίρεσης. Αριστερά: Μία επιφάνεια Doo–Sabin που παρεμβάλλει τις τέσσερις πάνω κορυφές ενός κύβου. Δεξιά: Μία επιφάνεια Catmull–Clark που παρεμβάλλει τις ίδιες κορυφές.*

Ένας παρόμοιος αλγόριθμος μπορεί να επινοηθεί για τις επιφάνειες παρεμβολής Catmull–Clark [Hals93]. Σε αυτή την περίπτωση, κάθε κορυφή που θα παρεμβληθεί θα συσχετιστεί με το όριο της V-κορυφής αυτής, το οποίο δίνεται από την εξίσωση (8.10). Αν και οι οριακές κορυφές εκφράζονται ως προς τις κορυφές του πρώτου βήματος εκλέπτυνσης, αυτές μπορούν να αντικατασταθούν από συνδυασμούς των κορυφών $\mathbf{w}_k$. Τελικά, κάθε κορυφή θα αντιστοιχεί σε μία γραμμή του πίνακα που απαιτείται για την επίλυση του συστήματος γραμμικών εξισώσεων. Στο Σχήμα 8.17 (δεξιά) φαίνεται ένα παράδειγμα μίας επιφάνειας παρεμβολής Catmull–Clark.

Η ίδια λογική μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες διατάξεις υποδιαίρεσης. Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας την διάταξη του Loop, κάθε κορυφή που πρόκειται να παρεμβληθεί συσχετίζεται με την οριακή κορυφή που δίνεται στην εξίσωση (8.14).

Πρέπει να σημειώσουμε ότι για τα κλειστά πολύεδρα, ο πίνακας **M** είναι τετραγωνικός καθώς υπάρχει μία εξίσωση για κάθε άγνωστη κορυφή. Μία λύση υπάρχει όταν ο πίνακας **M** δεν είναι ιδιάζων. Για τα ανοικτά πολύεδρα, πρέπει να ληφθούν υπόψιν οριακές συνθήκες, όπως αναφέρεται στα [Nasr87, Nasr91].

8.5.4 Παρεμβολή καμπυλών από επιφάνειες υποδιαίρεσης

Σε αυτή την ενότητα εξετάζουμε την παρεμβολή καμπυλών από επιφάνειες υποδιαίρεσης, χρησιμοποιώντας διατάξεις παρεμβολής αλλά και προσέγγισης.

Έστω ένα επισημασμένο πολύγωνο ελέγχου cp στην επιφάνεια ενός πολυέδρου P^0. Επιθυμούμε να αναγκάσουμε την οριακή επιφάνεια του P^0 να παρεμβάλει την καμπύλη B-spline που ορίζεται από το cp. Για να πετύχουμε αυτό το στόχο, διακρίνουμε δύο είδη καμπυλών: τις καμπύλες με συνέχεια C^0 κατά μήκος τους (*πτυχές*), και τις καμπύλες με συνέχεια C^1 κατά μήκος τους. Εξετάζουμε πρώτα το πρώτο είδος.

Οι πτυχές κατασκευάζονται με δύο τρόπους. Ο πρώτος τρόπος χειρίζεται το πολύγωνο ελέγχου cp ως το (κοινό) σύνορο δύο επιφανειών υποδιαίρεσης, στο οποίο συνδέονται με συνέχεια C^0, όπως αναφέρεται στο [Nasr87]. Συνήθως, κάθε επιφάνεια πρέπει να υποστεί την διαδικασία τροποποίησης του συνόρου της που περιγράφεται στην περίπτωση των ανοικτών πολυέδρων (ενότητα 8.5.2). Ο δεύτερος τρόπος τροποποιεί τους συντελεστές υποδιαίρεσης έτσι ώστε κάθε εκλέπτυνση του πολυέδρου να ε-

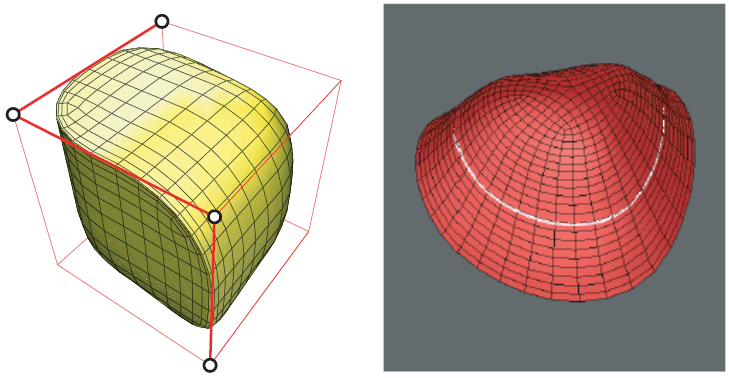
κλεπτύνει το επισημασμένο πολύγωνο ελέγχου με τρόπο ώστε τελικά να δημιουργηθεί η επιθυμητή καμπύλη. Αυτή η μέθοδος μπορεί να διακόψει την λειότητα κατά το μήκος της καμπύλης που παρεμβάλλεται. Για τις επιφάνειες Catmull–Clark και Doo–Sabin, μία πτυχή είναι συνήθως η καμπύλη B-spline του επισημασμένου πολυγώνου ελέγχου. Κατόπιν, το πολύγωνο αυτό πρέπει να εκλεπτυνθεί χρησιμοποιώντας τις ίδιες μάσκες που χρησιμοποιούνται στους αλγόριθμους υποδιαίρεσης καμπυλών που αναφέρονται στην Ενότητα 8.3. Για παράδειγμα, στην περίπτωση των επιφανειών Catmull–Clark χρησιμοποιούμε τον επόμενο αλγορίθμο, ο οποίος είναι παρόμοιος με τον αλγόριθμο που χρησιμοποιείται στην υποδιαίρεση καμπυλών (υποθέτουμε ότι το πολύγωνο ελέγχου cp ορίζεται από τις κορυφές $(\mathbf{c}_i)$):

1. Για κάθε ακμή $\mathbf{v}_{i-1}\mathbf{v}_i$ του πολυγώνου ελέγχου cp θέτουμε την E-κορυφή αυτής στο μέση της ακμής.

2. Για κάθε κορυφή $\mathbf{c}_i$ του πολυγώνου ελέγχου ορίζουμε την V-κορυφή αυτής ως:

$$\frac{\mathbf{v}_{i-1} + 6\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1}}{8}$$

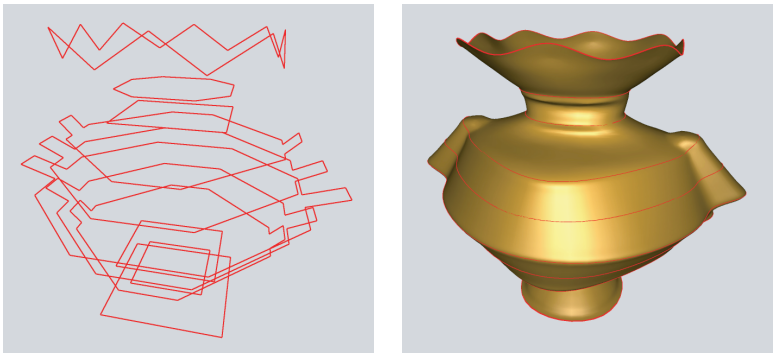
3. Για όλες τις υπόλοιπες ακμές και κορυφές, δημιουργούμε τις E- και V-κορυφές όπως στην διάταξη Catmull–Clark.



Σχήμα 8.18: *Παρεμβολή καμπυλών από επιφάνειες υποδιαίρεσης. Αριστερά: μία επιφάνεια Doo–Sabin που παρεμβάλλει μία πτυχή. Δεξιά: μία επιφάνεια Catmull–Clark που παρεμβάλλει μία καμπύλη με συνέχεια C^1 (βλ. επίσης την Εικόνα 4).*

Στο Σχήμα 8.18 (αριστερά) φαίνεται ένα παράδειγμα μίας επιφάνειας Doo–Sabin που παρεμβάλλει μία πτυχή.

Για την παρεμβολή μίας καμπύλης με συνέχεια C^1, ο Νάσρι εισήγαγε την έννοια των πολυγωνικών συμπλόκων στο [Nasr00]. Ένα πολυγωνικό σύμπλοκο (polygonal complex) είναι απλώς ένα πολύεδρο C το οποίο συγκλίνει σε μία καμπύλη χρησιμοποιώντας μία συγκεκριμένη διάταξη υποδιαίρεσης S. Ενσωματώνοντας ένα τέτοιο σύμπλοκο σε ένα πολύεδρο P θα παραχθεί μία οριακή επιφάνεια η οποία θα παρεμβάλλει την



Σχήμα 8.19: *Περιγεγραμμένες επιφάνειες υποδιαίρεσης Catmull–Clark. Αριστερά: Ένα σύνολο πολυγώνων ελέγχου που ορίζουν κυβικές καμπύλες B-spline. Δεξιά: Μία επιφάνεια υποδιαίρεσης Catmull–Clark που παρεμβάλλει τις καμπύλες αυτές (βλ. επίσης την Εικόνα 5).*

καμπύλη που ορίζεται από το C. Εάν η S είναι η διάταξη υποδιαίρεσης Doo–Sabin, τότε το πιο απλό τέτοιο σύμπλοκο είναι μία λωρίδα τετραπλεύρων, η οποία συγκλίνει σε μία τετραγωνική καμπύλη B-spline. Σημεία ελέγχου της καμπύλης αυτής είναι τα μέσα των ακμών που είναι κοινές μεταξύ γειτονικών τετραπλεύρων. Εάν δύο τέτοια σύμπλοκα μοιράζονται ένα τετράπλευρο q, τότε οι δύο καμπύλες που προκύπτουν θα τέμνονται στο κέντρο βάρους του q. Επέκταση αυτής της μεθόδου για την παρεμβολή περισσότερων από δύο καμπυλών που διέρχονται από μία ιδιάζουσα κορυφή έχουν παρουσιαστεί στο [Nasr03a]. Στο Σχήμα 8.18 (δεξιά) φαίνεται ένα παράδειγμα επιφάνειας Catmull–Clark, η οποία παρεμβάλλει μία καμπύλη με συνέχεια C^1 παντού.

Για τη διάταξη Catmull–Clark, ένα πολυγωνικό σύμπλοκο μπορεί να οριστεί από δύο γειτονικές σειρές εδρών. Όπως αναφέρεται στο [Nasr02a], ένα τέτοια σύμπλοκο συγκλίνει στην αντίστοιχη κυβική καμπύλη B-spline. Τα σημεία ελέγχου αυτής της καμπύλης υπολογίζονται επίσης από τις κορυφές των ακμών που είναι κοινές μεταξύ των εδρών του συμπλόκου. Η παρεμβολή καμπυλών εξετάστηκε επίσης από τον Levin, με χρήση των συνδυασμένων διατάξεων υποδιαίρεσης [Levi99].

Με βάση την παρεμβολή καμπυλών, μπορούν να κατασκευαστούν περιγεγραμμένες (lofted) επιφάνειες υποδιαίρεσης [Nasr03b]. Αν δίνονται κάποιες καμπύλες διατομής της επιφάνειας, κατασκευάζουμε αρχικά ένα πολυγωνικό σύμπλοκο για καθεμία από από αυτές. Κατόπιν συνδέουμε αυτά τα σύμπλοκα σχηματίζοντας ένα πολύεδρο του οποίου η οριακή επιφάνεια παρεμβάλλει τις καμπύλες αυτές. Μία περιγεγραμμένη επιφάνεια Catmull–Clark φαίνεται στο Σχήμα 8.19. Η κατασκευή επιφανειών υποδιαίρεσης που παρεμβάλλουν ένα πλέγμα καμπυλών συζητείται επίσης στο [Scha04].

Για περισσότερες πληροφορίες, μία κατάταξη των συνθηκών παρεμβολής στις καμπύλες και επιφάνειες υποδιαίρεσης υπάρχει στα [Nasr02c, Nasr02b].

8.6 Ανάλυση επιφανειών υποδιαίρεσης⊛

Καθώς οι επιφάνειες υποδιαίρεσης παράγονται από τυχαία τοπολογία, παραβιάσεις της ομαλότητάς τους παρουσιάζονται συνήθως στα ιδιάζοντα σημεία τους ή στην περιοχή αυτών. Αφορούν την τάξη της συνέχειας καθώς και τη συμπεριφορά της καμπυλότητας. Η αποφυγή τέτοιων παραβιάσεων είναι απαραίτητη για την παραγωγή επιφανειών καλής ποιότητας. Έτσι η ανάλυση, και κατόπιν η λεπτομερής ρύθμιση, των διατάξεων υποδιαίρεσης είναι πλέον πολύ σημαντικές διεργασίες για την αποτελεσματική χρήση των περισσότερων από αυτές. Οι πρώτες προσπάθειες έγιναν ήδη κατά τη δεκαετία του 1970, όταν επιδείχθηκε ο ρόλος της *ανάλυσης ιδιοτιμών*, δηλαδή ότι το φάσμα του τελεστή υποδιαίρεσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση των ιδιοτήτων της ομαλότητας στα ιδιάζοντα σημεία και γύρω από αυτά [Doo78].

Καθώς οι αλγόριθμοι υποδιαίρεσης γενικεύουν τους κανόνες υποδιαίρεσης των διτετραγωνικών και δικυβικών επιφανειών B-spline τανυστικό γινόμενο, οι επιφάνειες υποδιαίρεσης κληρονομούν τις ιδιότητες ομαλότητας των υποκείμενων πολυωνυμικών καμπυλών σε όλα τα σημεία εκτός από τα ιδιάζοντα, στα οποία οι συνήθεις κανόνες υποδιαίρεσης δεν ισχύουν. Αν και είχε παρατηρηθεί ομαλότητα χαμηλότερου βαθμού στα ιδιάζοντα σημεία, αυτή επιβεβαιώθηκε τυπικά μόλις στις εργασίες [Pete98, Umla00] και πλέον είναι γνωστό ότι οφείλεται στον χαμηλό πολυωνυμικό βαθμό των επιφανειών υποδιαίρεσης [Reif96, Prau99, Pete00]. Η επίτευξη συνέχειας C^2 στα ιδιάζοντα σημεία έχει αποδειχθεί ανέφικτη [Reif96], όμως θεωρείται κοινώς αποδεκτό ότι οι επιφάνειες υψηλής ποιότητας οφείλουν να εμφανίζουν συνέχεια του κανονικού διανύσματος, φραγμένη —όμως μη μηδενική— καμπυλότητα, και ελάχιστες διακυμάνσεις της καμπυλότητας σε όλα τα σημεία τους.

Οι περισσότερες από τις τρέχουσες διατάξεις υποδιαίρεσης έχουν πλέον μελετηθεί επαρκώς. Η διάταξη των Catmull–Clark [Catm78] παράγει κατά τμήματα δικυβικές επιφάνειες, οι οποίες εμφανίζουν συνέχεια C^2 παντού, εκτός από τα ιδιάζοντα σημεία τους, στα οποία διατηρούν συνέχεια C^1 αλλά εμφανίζουν μη φραγμένη καμπυλότητα. Το προσεγγιστικό σχήμα 4-8 [Velh01a, Velh01b] που γενικεύει την ;;;

γενεραλιζινγ τηε φουρ-διρεστιοναλ βοξ

είναι παντού συνεχές C^4 αλλά μόνο C^1 στις ιδιάζουσες κορυφές. Η διάταξη του Loop επιτυγχάνει παντού συνέχεια C^2, C^1 στα ιδιάζοντα σημεία, και φραγμένη καμπυλότητα μόνο όταν το σθένος είναι ίσο με 4, 5, και 6. Η διάταξη των Doo–Sabin [Doo78] και η διάταξη 4-3 [Pete03] είναι παντού συνεχείς C^2 αλλά μόνο C^1 στα ιδιάζοντα σημεία. Καθώς πολλοί από τους συνήθεις αλγορίθμους αποτυγχάνουν να παράγουν επιφάνειες καλής ποιότητας στα ιδιάζοντα σημεία, πρέπει να *ρυθμιστούν*, τροποποιώντας τις μάσκες γύρω από τα ιδιάζοντα σημεία ώστε να βελτιωθεί η συμπεριφορά της καμπυλότητας γύρω από αυτά. Γενικά τα εργαλεία ανάλυσης που χρησιμοποιούνται χρησιμοποιούν τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις: μετασχηματισμούς κατά z χρησιμοποιώντας διάφορες διατάξεις [Cava91, Dyn92], τεχνικές ανάλυσης Fourier [Cohe92, Daub99, Dyn02, Pete98, Karc04, Pete04], και μεθόδους που φράσσουν την κοινή φασματική ακτίνα των τοπικών τελεστών υποδιαίρεσης [Han03, Jia95, Riou92]. Αφιερώνουμε το υπόλοιπο αυτής της ενότητας σε μία επισκόπηση των τεχνικών ανά-

λυσης Fourier και παραπέμπουμε τον αναγνώστη σε μία πιο διεξοδική παρουσίαση στο [Reif06].

8.6.1 Τεχνικές ανάλυσης Fourier

Οι τεχνικές ανάλυσης Fourier εφαρμόζονται στα πλαίσια επιφανειών υποδιαίρεσης που παράγονται από στατικούς ;;;(στατιοναρψ),[3] γραμμικούς και συμμετρικούς αλγορίθμους υποδιαίρεσης που γενικεύουν τις βοξ;;; splines ή τις B-splines, και των οποίων ο πίνακας υποδιαίρεσης είναι νον-δεφεστιε;;;. Στη γειτονιά ενός ιδιάζοντος σημείου $\mathbf{m}$, η επιφάνεια υποδιαίρεσης $\mathbf{x}$ μπορεί να θεωρηθεί ως η ένωση του $\mathbf{m}$ και μίας εμφωλευμένης ακολουθίας δακτυλίων spline $\mathbf{x}_m$. Κάθε δακτύλιος spline $\mathbf{x}_m$ είναι μία συνάρτηση

$$\mathbf{x}_m : S_n \to \mathbb{R}^3, \quad S_n = \Sigma \times \mathbb{Z}_n, \ \Sigma = [0,2]^2 \setminus [0,1)^2,$$

όπου n είναι το σθένος του $\mathbf{m}$. Έτσι θεωρούμε κάθε δακτύλιο spline $\mathbf{x}_m$ ως την αποκλειστική ένωση τμημάτων δακτυλίων $\mathbf{x}_m^j$, $j \in \mathbb{Z}_n$, οι οποίοι αντιστοιχούν στις ακμές e_j που έχουν ως άκρο το ιδιάζον σημείο. Συμβολίζουμε με m τον δείκτη ενός τυχόντος δακτυλίου spline στην ένωση δακτυλίων που σχηματίζει τον $\mathbf{x}_m$. Θεωρούμε έναν θετικό ακέραιο L, σημεία ελέγχου $\mathbf{B}_m^0, \ldots, \mathbf{B}_m^L$ του $\mathbb{R}^3$, και πραγματικές συναρτήσεις $\varphi_0, \ldots, \varphi_L$ που σχηματίζουν μία ;;; παρτιτιον οφ υνιτψ, και είναι, τουλάχιστον κατά τμήματα, δύο φορές διαφορίσιμες (ώστε ο δακτύλιος spline να μπορεί να σχηματιστεί με μία υποδιαίρεση παρεμβολής συνεχή C^2 [Pete04, Reif06]). Τότε ο δακτύλιος spline μπορεί να θεωρηθεί ως ο γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων φ_i που ορίζονται στο S_n με αντίστοιχα βάρη που δίνονται από τις $\mathbf{B}_m^i$, για $i = 0, \ldots, L$. Συγκεντρώνουμε τις συναρτήσεις σε ένα διάνυσμα-γραμμή φ και τα αντίστοιχα σημεία σε ένα διάνυσμα-στήλη $\mathbf{B}_m$, ώστε οι δακτύλιοι spline να μπορούν να εκφραστούν ως

$$\mathbf{x}_m = \varphi \mathbf{B}_m. \tag{8.22}$$

Η ακολουθία των σημείων ελέγχου $\mathbf{B}_m$ λαμβάνεται με την επαναλαμβανόμενη εφαρμογή ενός πίνακα υποδιαίρεσης $\mathbf{A}$, διαστάσεων $(L+1) \times (L+1)$ στα αρχικά δεδομένα $\mathbf{B}_0$, έτσι ώστε

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{A}^m \mathbf{B}_0. \tag{8.23}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (8.22) και (8.23), λαμβάνουμε

$$\mathbf{x}_m = \varphi \mathbf{A}^m \mathbf{B}_0. \tag{8.24}$$

Συμβολίζουμε με $\lambda_0, \ldots, \lambda_L$ τις ιδιοτιμές του $\mathbf{A}$ κατά σειρά ;;; μοδυλυς, και τα αντίστοιχα δεξιά ιδιοδιανύσματα με $\overrightarrow{\mathbf{v}}_0, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{v}}_L$. Για $\overrightarrow{\mathbf{v}}_i \neq 0$, ορίζουμε την ιδιοσυνάρτηση

$$\Psi_i = \varphi \overrightarrow{\mathbf{v}}_i. \tag{8.25}$$

[3] Ένας αλγόριθμος υποδιαίρεσης καλείται στατικός;;; εφόσον η διάταξη υποδιαίρεσης είναι σταθερή σε όλα τα επίπεδα υποδιαίρεσης.

;;; Λετ $\mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^3$ ρεπρεσεντ ειγεν ϲοεφφιϲιεντϲ ιν $\mathbb{R}^3$ σϲαλινγ τηε ριγητ ειγενεϲτορϲ συϲη τηατ

$$\mathbf{B}_0 = \sum_{i=0}^{L} \overrightarrow{\mathbf{v}}_i \, \mathbf{d}_i .$$

Τότε, οι $\mathbf{x}_m$ εκφράζονται ως

$$\mathbf{x}_m = \sum_{i=0}^{L} \lambda_i^m \Psi_i \mathbf{d}_i . \tag{8.26}$$

Η σχέση (8.26) μοιάζει με τοπικό ανάπτυγμα Taylor του οποίου οι πρώτοι όροι με δείκτες $i = 0, \ldots, 5$ έχουν γεωμετρική ερμηνεία. Συγκεκριμένα, οι όροι που αντιστοιχούν σε $i = 0$ επηρεάζουν τη θέση του ιδιάζοντος σημείου $\mathbf{m}$, οι όροι για $i = 1, 2$ επηρεάζουν το εφαπτόμενο επίπεδο, και οι όροι για $i = 3, 4, 5$ επηρεάζουν την καμπυλότητα: για $i = 3$ το ;;; τηε ϲυπ ϲονφιγυρατιον και για $i = 4, 5$ το σαγματικό σημείο [Bart05].

Υπάρχουν πολλοί αριθμητικοί αλγόριθμοι για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα υποδιαίρεσης $\mathbf{A}$, όμως αυτοί συχνά δεν τα υπολογίζουν σωστά (κάποιες φορές υπολογίζουν μιγαδικές ιδιοτιμές). Αναγκαζόμαστε έτσι να υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές απευθείας, κάτι που γίνεται υπολογιστικά ασύμφορο για σχετικά μεγάλο σθένος της κορυφής. Η συμμετρία της διάταξης, όμως, συνεπάγεται ότι ο πίνακας υποδιαίρεσης είναι ;;; βλοϲκ-ϲιρϲυλαντ, και συνεπώς η (όμοια) εικόνα του $\widehat{\mathbf{A}}$ μέσω του διακριτού μετασχηματισμού Fourier $\mathbf{F}$ είναι ένας μπλοκ-διαγώνιος ;;; πίνακας που δίνεται από τη σχέση

$$\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{F} = \operatorname{diag}\left(\widehat{\mathbf{A}}_0, \ldots, \widehat{\mathbf{A}}_{n-1}\right).$$

Λόγω ομοιότητας, οι δύο πίνακες $\mathbf{A}$ και $\widehat{\mathbf{A}}$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, οι οποίες, χάρη στην μπλοκ-διαγώνια μορφή του $\widehat{\mathbf{A}}$, λαμβάνονται ως η ένωση των ιδιοτιμών των επιμέρους μπλοκ $\widehat{\mathbf{A}}_k$, $k \in \mathbb{Z}_n$. Επιπλέον, όλα αυτά τα μπλοκ είναι της ίδιας, σταθερής διάστασης για όλα τα $n \geq 3$, και έτσι ο απευθείας υπολογισμός των ιδιοτιμών του $\mathbf{A}$ καθίσταται εφικτός. Σε αυτό το πλαίσιο, ο δείκτης Fourier ;;; μίας δεδομένης ιδιοτιμής τ του $\mathbf{A}$ ορίζεται ως

$$\mathcal{F}(\tau) = \{k \in \mathbb{Z}_n \mid \tau \text{ είναι μια ιδιοτιμή του } \widehat{\mathbf{A}}_k\}.$$

8.6.2 Ανάλυση ιδιοτιμών

Αναγκαίες συνθήκες που αφορούν την ομαλότητα της διάταξης υποδιαίρεσης καθώς και τη συμπεριφορά της καμπυλότητας αυτής γύρω από το ιδιάζον σημείο, εκφράζονται βάσει των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων που εμφανίζονται στο ανάπτυγμα της Εξίσωσης (8.26). Συγκεκριμένα, οι ακόλουθες τυποποιημένες συνθήκες είναι απαραίτητες ώστε τουλάχιστον να μην παραβιάζονται οι συνέχειες C^1 και C^2 [Doo78, Reif06]:

1. Όλες οι γραμμές του πίνακα υποδιαίρεσης $\mathbf{A}$ αθροίζουν στη μονάδα, ώστε $\lambda_0 = 1$. Αυτό εξασφαλίζει τη σύγκλιση της διάταξης.

2. ;;; Τηε συβδομιναντ ειγεναλυε λ είναι θετική, και έχει αλγεβρική και γεωμετρική

πολλαπλότητα ίση με 2:

$$1 > \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 > |\lambda_3| \geq \dots$$

και έχει δείκτη Fourier $\mathcal{F}(\lambda) = \{1, n-1\}$. Αν δεν ισχύει αυτό, η διάταξη δεν είναι C^1 συνεχής.

3. ;;; Τηε συβσυβδομιναντ ειγεναλυε μ είναι θετική, και έχει αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα ίση με 3:

$$1 > \lambda > \mu = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 > |\lambda_6|$$

και έχει δείκτη Fourier $\mathcal{F}(\mu) = \{0, 2, n-2\}$. Αν δεν ισχύει αυτό, η διάταξη δεν είναι C^2 συνεχής.

4. ;;; Τηε συβσυβδομιναντ ειγεναλυε μ είναι ίση με λ^2. Αν δεν ισχύει αυτό, η διάταξη δεν είναι C^2 συνεχής· διαφορετικά, αυτό εξασφαλίζει ότι η καμπυλότητα είναι φραγμένη.

5. Τα στοιχεία των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στις λ και μ είναι σε τετραγωνική διάταξη ;;; αρε ιν α χυαδρατις ϛονφιγυρατιον. Αν αυτή η συνθήκη, γνωστή ως *τοπική τετραγωνική ακρίβεια*, δεν ισχύει, η διάταξη δεν είναι C^2 συνεχής. Διαφορετικά, λαμβάνουμε μία διάταξη που αποφεύγει τις ταλαντώσεις γύρω από το ιδιάζον σημείο [Gero05, Sabi02].

8.6.3 Η χαρακτηριστική απεικόνιση

Εξετάζουμε τώρα ικανές συνθήκες για την εξασφάλιση συνέχειας C^1 σε ένα ιδιάζον σημείο. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ;;; συβδομιναντ ιδιοτιμές παράγουν την *χαρακτηριστική απεικόνιση*, μία τοπική παραμετροποίηση της επιφάνειας στην περιοχή του ιδιάζοντος σημείου, με την οποία η επιφάνεια μπορεί να γραφεί ως μία διαφορίσιμη συνάρτηση δύο μεταβλητών. Χάρη στη στατικότητα ;;; της διάταξης, οι δακτύλιοι spline της χαρακτηριστικής απεικόνισης συμπίπτουν σε διαφορετικά επίπεδα υποδιαίρεσης, και επομένως αρκεί να αναλύσουμε μόνο έναν τέτοιο δακτύλιο spline γύρω από ένα ιδιάζον σημείο για να καταλήξουμε σε συμπεράσματα για την ομαλότητα της ίδιας της επιφάνειας υποδιαίρεσης [Pete98, Pete04, Reif06]. Έστω λοιπόν Ψ_1 και Ψ_2 οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στη διπλή ;;; συβδομιναντ ιδιοτιμή λ. Η χαρακτηριστική απεικόνιση ορίζεται ως

$$\mathbf{\Psi} := (\Psi_1, \Psi_2) : S_n \to \mathbb{R}^2.$$

Συμβολίζουμε με $\mathbf{\Psi}^j$ τον περιορισμό της $\mathbf{\Psi}$ στο $\Sigma \times j$, για κάποιο $j \in \mathbb{Z}_n$. Επιπλέον έχουμε ότι η $\mathbf{\Psi^0} = \left(\Psi_1^0, \Psi_2^0\right)$ είναι κανονική αν η ορίζουσα του Jacobi $\mathbf{J}^0 = \det \mathbf{D\Psi^0}$ για

$$\mathbf{D\Psi^0} = \begin{pmatrix} \Psi^0_{1,u} & \Psi^0_{1,v} \\ \Psi^0_{2,u} & \Psi^0_{2,v} \end{pmatrix}$$

δεν είναι μηδενική για κανένα u και v. Οι Peters και Reif [Pete98] προσδιορίζουν μία ικανή συνθήκη ώστε η οριακή επιφάνεια να εμφανίζει συνέχεια C^1 παντού, συμπεριλαμβανομένου του ιδιάζοντος σημείου. Συγκεκριμένα, αν υποθέσουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες (1) και (2) της προηγούμενης παραγράφου και ότι η χαρακτηριστική απεικόνιση είναι κανονική και 1-1, τότε η οριακή επιφάνεια είναι C^1 συνεχής παντού για σχεδόν οποιαδήποτε επιλογή των αρχικών δεδομένων $\mathbf{B}_0$. Απλοποιημένοι έλεγχοι για το αν η χαρακτηριστική απεικόνιση είναι κανονική και 1-1 συζητούνται στα [Pete98, Reif06, Umla05], όμως αυτοί προκύπτουν ως σχεδόν άμεση συνέπεια του βασικού αποτελέσματος του [Pete98] που περιορίζει την ανάγκη αυτών των ελέγχων σε ένα μόνο τμήμα της χαρακτηριστικής απεικόνισης. Συγκεκριμένα, αν το τμήμα $\mathbf{\Psi}^0$ της χαρακτηριστικής απεικόνισης είναι κανονικό και τα $\Psi^0_{1,v}(1,t)$, $\Psi^0_{2,v}(1,t)$ είναι αυστηρά θετικά για όλατα τα $t \in [0,1]$, τότε η χαρακτηριστική απεικόνιση είναι κανονική και 1-1.

Στο [Pete04] δίνεται μία κλειστή μορφή του δακτυλίου spline της χαρακτηριστικής απεικόνισης, ο οποίος είναι επίσης γνωστός ως η *κεντρική επιφάνεια*, και αποδεικνύονται αποτελέσματα σχετικά με τη συμπεριφορά της καμπυλότητάς τους στα ιδιάζοντα σημεία. Συγκεκριμένα, αν δίνονται τυχόντα αρχικά πλέγματα $\mathbf{B}_0$, το σχήμα στο ιδιάζον σημείο $\mathbf{m}$ καθορίζεται από το πρόσημο της καμπυλότητας Gauss K_c της κεντρικής επιφάνειας:

- το σχήμα στο όριο είναι ελλειπτικό, αν $K_c > 0$·
- το σχήμα στο όριο είναι υπερβολικό, αν $K_c < 0$·
- το σχήμα είναι υβριδικό, αν το K_c αλλάζει πρόσημο.

8.6.4 Κατασκευή επιφανειών καλής ποιότητας

Τα εργαλεία ανάλυσης των επιφανειών υποδιαίρεσης προσδιορίζουν τις ιδιότητες μίας συγκεκριμένης διάταξης υποδιαίρεσης με άμεσο τρόπο. Η πρόοδος σε αυτό το πεδίο, όμως, φανερώνει και περιορισμούς των περισσότερων καθιερωμένων αλγορίθμων υποδιαίρεσης. Οι καθιερωμένες μέθοδοι υποδιαίρεσης δεν παράγουν επιφάνειες «καλής ποιότητας» στο όριο, και αυτή ήταν η αφορμή για τις τεχνικές ρύθμισης των διατάξεων υποδιαίρεσης, δηλαδή τον επανακαθορισμό των κανόνων υποδιαίρεσης στα ιδιάζοντα σημεία και γύρω από αυτά, ώστε να ικανοποιούνται πολλά από τα ζητούμενα κριτήρια. Αν και είναι σχετικά απλή η κατασκευή διατάξεων με συνέχεια C^1, η επίτευξη συνέχειας υψηλότερου είναι πολύ δυσκολότερη, όπως φαίνεται από τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για συνέχεια C^2 που αποδεικνύονται στο [Reif06]. Παρ' όλα αυτά, η επιδίωξη για καλή συμπεριφορά της καμπυλότητας μπορεί να είναι πιο σημαντική από την επίτευξη κάποιας επιθυμητής μαθηματικής ιδιότητας, όπως η συνέχεια C^2, αν, για παράδειγμα, η διάταξη υποδιαίρεσης ικανοποιεί την αναγκαία για συνέχεια C^2 συνθήκη για φραγμένη καμπυλότητα αλλά εμφανίζει επίπεδα τμήματα ή ταλαντώσεις γύρω από τα ιδιάζοντα σημεία, χαρακτηριστικά που θεωρούνται ατέλειες [Prau98, Sabi03]. Μπορούμε επίσης να συμπεράνουμε, με βάση τις εκτιμήσεις για το βαθμό των C^k συνεχών, κατά τμήματα πολυωνυμικών επιφανειών υποδιαίρεσης, που υπολογίζονται στο

[Prau99] ότι η ρύθμιση μίας διάταξης υποδιαίρεσης ώστε να διαθέτει συνέχεια C^2 χωρίς επίπεδες περιοχές είναι πολύ πιθανό να εισαγάγει σχετικά ευρείες περιοχές τοπικής στήριξης. Ατέλειες μπορούν επίσης να εισαχθούν αν η απόλυτη τιμή της διαφοράς μεταξύ της ;;; συβδομιναντ ιδιοτιμής και του παράγοντα συρρίκνωσης (1/2 για δυαδικές διατάξεις και 1/3 για τριαδικά) είναι σχετικά μεγάλη [Bart04]. Επίσης ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ευκολία με την οποία θα θυσιαζόταν η ιδιότητα του κυρτού περιβλήματος ;;; κατά τη ρύθμιση μίας διάταξης υποδιαίρεσης [Levi06]. Έτσι, οι τρέχουσες τεχνικές ρύθμισης αποσκοπούν στην ταυτόχρονη ικανοποίηση όσο το δυνατόν περισσότερων από τους ακόλουθους στόχους, ταυτόχρονα:

- διατήρηση της ιδιότητας του κυρτού περιβλήματος·
- επίτευξη συνέχειας C^1 στα ιδιάζοντα σημεία·
- επίτευξη φραγμένης καμπυλότητας στα ιδιάζοντα σημεία·
- αποφυγή δημιουργίας επίπεδων περιοχών στα ιδιάζοντα σημεία·
- ελαχιστοποίηση των διακυμάνσεων της καμπυλότητας Gauss·
- διατήρηση μικρής τοπικής στήριξης·
- διατήρηση μικρής απόκλισης της ;;; συβδομιναντ ιδιοτιμής από τον παράγοντα συρρίκνωσης.

Πρόσφατες εργασίες σχετικά με τη ρύθμιση διατάξεων υποδιαίρεσης είναι τα [Augs06, Bart04, Gink06, Levi06, Loop98, Umla05, Zult06].

8.7 Εφαρμογές υποδιαίρεσης στα πεπερασμένα στοιχεία⊛

Σε αυτή την ενότητα εισάγονται η διαμόρφωση και η χρήση τεχνικών της γεωμετρικής μοντελοποίησης που βασίζονται σε επιφάνειες υποδιαίρεσης (ή/και επιφάνειες spline) στη μοντελοποίηση και προσομοίωση με πεπερασμένα στοιχεία. Περιγράφονται οι αρχές και συγκεκριμένοι αριθμητικοί αλγόριθμοι για την κατασκευή μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων, άμεσα συνδεδεμένων με τις υποκείμενες γεωμετρικές αναπαραστάσεις. Τα μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων είναι βασικό συστατικό πάρα πολλών εφαρμογών προσομοίωσης, βλ. για παράδειγμα τα [Grin02, Tera05, Guen05, Thom06]. Κάποιες συνηθισμένες εφαρμογές των μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων στα γραφικά και στην προσομοίωση περιλαμβάνουν:

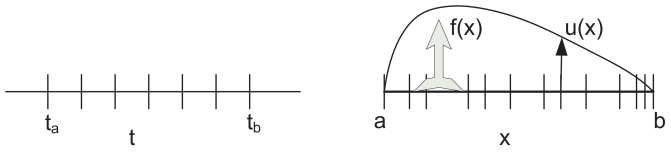
Παραμόρφωση γεωμετρικών μοντέλων. Γεωμετρικά μοντέλα επαυξημένα με ιδιότητες υλικού μπορούν να παραμορφωθούν εφόσον υποβληθούν σε φορτία και σε περιορισμούς παρεμβολής σημείων και εφαπτομένων. Έτσι παρέχουν μία φυσική μηχανική μεταφορά για τη μοντελοποίηση οργανικών σχημάτων. Ένας χρήστης μπορεί να χρησιμοποιήσει εύληπτα εργαλεία για την επεξεργασία σχημάτων ελεύθερης μορφής με χειρισμούς όπως ώθηση, έλξη, στρέβλωση, συστροφή, καμπύλωση, στερέωση ή συμπίεση. Ένα μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων άμεσα

συνδεδεμένο με τη γεωμετρία επιτρέπει την άμεση υλοποίηση τέτοιων εφαρμογών.

Συνθετική κίνηση μοντέλων. Ελαστικά παραμορφώσιμοι χαρακτήρες και μοντέλα αποτελούν ισχυρά εργαλεία για τη δημιουργία ρεαλιστικών συνθετικών σκηνών σε παιχνίδια, ταινίες, και περιβάλλοντα εικονικής πραγματικότητας. Μοντέλα βασισμένα στη φυσική μπορούν να αυτοματοποιήσουν ένα σημαντικό τμήμα των εργασιών της συνθετικής κίνησης, το οποίο διαφορετικά θα έπρεπε να πραγματοποιηθεί χειροκίνητα. Κινήσεις χαρακτήρων, προσομοιώσεις ενδυμάτων και πολλοί άλλοι τύποι συνθετικής κίνησης μπορούν να υποστηριχθούν από μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων άμεσα συνδεδεμένα με τη γεωμετρική αναπαράσταση. Αυτά τα μοντέλα μπορούν να αναπτυχθούν σε πολλαπλά επίπεδα λεπτομέρειας ώστε να υποστηρίξουν διαφορετικές ανάγκες της συνθετικής κίνησης—από πολύ λεπτομερείς και ρεαλιστικές προσομοιώσεις που πραγματοποιούνται συνήθως ;;; οφφ-λινε μέχρι διαδραστικές, προσεγγιστικές αλλά οπτικά αληθοφανείς εφαρμογές πραγματικού χρόνου.

Απτική διάδραση με στερεά μοντέλα. Πρόσφατα έχουν γίνει ευρύτατα διαθέσιμες συσκευές διάδρασης με τον υπολογιστή που ενσωματώνουν την έννοια της αφής. Αυτές οι συσκευές αντιλαμβάνονται τις δυνάμεις και την πίεση και επιτρέπουν στους χρήστες να χειρίζονται εικονικά αντικείμενα και να αισθάνονται άμεσα την ακαμψία, την ενδοτικότητα και άλλα σχετικά μηχανικά χαρακτηριστικά. Εφαρμογές παιχνιδιών και διασκέδασης, εικονικής γλυπτικής και βιομηχανικής σχεδίασης μπορούν να υποβοηθηθούν από την απτική διάδραση. Για να υποστηριχθούν τέτοιες διεπαφές, κατασκευάζονται μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων συνδεδεμένα με τη γεωμετρία και χρησιμοποιούνται ώστε να υπολογιστούν οι δυνάμεις και οι πιέσεις που τροφοδοτούν τις απτικές συσκευές με διαδραστικούς ρυθμούς.

Προσομοίωση φυσικών φαινομένων στη μηχανική και στις φυσικές επιστήμες. Πολλά προβλήματα που εμφανίζονται στη μηχανική και στις φυσικές επιστήμες περιγράφονται από μερικές διαφορικές εξισώσεις πεδίων σε γενικούς γεωμετρικούς 2Δ και 3Δ τομείς και επιλύονται με προσομοιώσεις πεπερασμένων στοιχείων. Τυπικά παραδείγματα τέτοιων προσομοιώσεων είναι η ροή θερμότητας και υγρών καθώς και υπολογισμοί ηλεκτρομαγνητικών πεδίων. Η ανάγκη για υψηλότερη πιστότητα και υψηλότερη ανάλυση σε αυτές τις προσομοιώσεις συνεχίζει να αυξάνει τις ανάγκες για βελτιωμένες μεθόδους αριθμητικής διακριτοποίσης για την επίλυσή τους. Μία τέτοια βελτίωση μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας τις ίδιες συναρτήσεις βάσεις όπως και η γεωμετρία (δηλαδή τις συναρτήσεις βάσης της υποδιαίρεσης) για την αναπαράσταση των πεδίων στα διακριτοποιημένα πεπερασμένα στοιχεία, επιτρέποντας την ακριβή αναπαράσταση της γεωμετρίας που προσομοιώνεται. Αν και δεν θα συζητήσουμε αυτούς τους τομείς στην τρέχουσα ενότητα, αξίζει να σημειωθεί ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν μέθοδοι παρόμοιες με αυτές που θα παρουσιαστούν για τη δόμηση αυτών των



Σχήμα 8.20: *Κάμψη αρχικά ευθύγραμμων σχημάτων. Αναπαράσταση του προβλήματος σε μία διάσταση.*

προσομοιώσεων.

Σε αυτή την ενότητα εισάγουμε τις βασικές ιδέες για την κατασκευή μοντέλων προσομοίωσης με πεπερασμένα στοιχεία στο πεδίο των καμπυλών. Η Ενότητα 8.7.1 περιγράφει τους βασικούς αλγορίθμους σε ένα απλό περιβάλλον: την κάμψη μίας ράβδου που είναι αρχικά ευθύγραμμη. Αυτή η απλή γεωμετρία χρησιμεύει ώστε να εισαχθούν τα μοντέλα χωρίς η συζήτηση να περιπλέκεται λόγω των αλγεβρικών εκφράσεων που αφορούν την καμπυλότητα τυχαίων καμπυλών. Η Ενότητα 8.7.2 περιγράφει το πλαίσιο για ένα παραμορφώσιμο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων σε 2Δ καμπύλες. Τα παραμορφώσιμα μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων για 3Δ επιφάνειες, αν και παρόμοιας φύσης, είναι μαθηματικά πιο πολύπλοκα. Περιγράφουμε σύντομα τον σχηματισμό τους στην Ενότητα 8.7.3 και παραπέμπουμε τους αναγνώστες σε άλλες πηγές για πιο πλήρεις παρουσιάσεις.

8.7.1 Κάμψη αρχικά ευθύγραμμων σχημάτων

Διατύπωση του προβλήματος

Ας θεωρήσουμε ένα αρχικά ευθύγραμμο σχήμα (μία μονοδιάστατη ράβδο) που ορίζεται μέσω μίας μοναδικής χωρικής συντεταγμένης $x(t)$, όπου t είναι η παραμετρική συντεταγμένη. Η γεωμετρία μπορεί να εκφραστεί ως $x = \sum_i x_i \phi_i(t)$ όπου οι ϕ_i είναι n συναρτήσεις βάσης που αντιστοιχούν σε κάποιο διάνυσμα κόμβων. Έστω ότι το χωρικό πεδίο στο οποίο ενδιαφερόμαστε να πραγματοποιήσουμε την προσομοίωση ορίζεται στην περιοχή $a \le x \le b$ που αντιστοιχεί σε ένα παραμετρικό πεδίο $t_a \le t \le t_b$, και έστω $u(x)$ η κατακόρυφη μετατόπιση της ράβδου σε ένα σημείο λόγω της εφαρμογής ενός κατανεμημένου κατακόρυφου φορτίου $f(x)$ κατά μήκος της ράβδου. Αντικείμενο αυτής της ενότητας είναι η ανάπτυξη τεχνικών για την εύρεση της $u(x)$ δεδομένου του $f(x)$. Στο Σχήμα 8.20 αναπαρίσταται το πρόβλημα

Από βασικές αρχές της μηχανικής, που δεν θα περιγραφούν εδώ, η θέση ισορροπίας της ράβδου είναι η συνάρτηση $u(x)$ που ελαχιστοποιεί το ακόλουθο συναρτησοειδές το οποίο είναι γνωστό ως δυναμική ενέργεια:

$$\Pi[u(x)] = \frac{1}{2}\int_a^b c\kappa^2 dx - \int_a^b f u dx = \frac{1}{2}\int_a^b c\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 dx - \int_a^b f u dx,$$

όπου $\kappa = \kappa(x)$ είναι η καμπυλότητα του παραμορφωμένου σχήματος και $\frac{d^2u}{dx^2}$ είναι

η γραμμικοποιημένη προσέγγισή της που θα χρησιμοποιήσουμε εδώ. Η μεταβλητή c είναι μία παράμετρος του υλικού, η οποία μπορεί να μεταβάλλεται κατά μήκος της ράβδου. Μεγαλύτερες τιμές του c αντιπροσωπεύουν πιο δύσκαμπτα σχήματα, ενώ μικρότερες τιμές αντιπροσωπεύουν πιο εύκαμπτα. Ο πρώτος όρος στη σχέση της δυναμικής ενέργειας καλείται ενέργεια ελαστικής διάτασης και αντιπροσωπεύει την ενέργεια που αποθηκεύεται στη ράβδο ως αποτέλεσμα της παραμόρφωσης και της αλλαγής στην καμπυλότητα.

Αυτή η ελαχιστοποίηση υπόκειται σε ένα σύνολο περιορισμών ως προς τη θέση και την κλίση του παραμορφωμένου σχήματος της ράβδου. Αυτοί οι περιορισμοί μπορούν να εκφραστούν στα άκρα του του πεδίου ($x = a$ και $x = b$) και τότε είναι γνωστοί ως «συνοριακές συνθήκες» του προβλήματος. Μπορεί επίσης να υπάρχουν περιορισμοί παρεμβολής θέσης και κλίσης σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου, ή γενικότερα σχέσεις μεταξύ θέσεων και κλίσεων σε ένα πλήθος σημείων. Θα περιγράψουμε αυτές τις συνθήκες και το πώς μπορούμε να τις εντάξουμε στην ελαχιστοποίηση στην Ενότητα 8.7.1.

Για να υπολογίσουν τη συνάρτηση $u(x)$ που αντιπροσωπεύει τη θέση ισορροπίας, οι μέθοδοι πεπερασμένων στοιχείων που βασίζονται στη γεωμετρία χρησιμοποιούν την ίδια διακριτοποίηση των κόμβων του πεδίου για να αναπαραστήσουν τη λύση $u(x)$ ως $\sum_i u_i \phi_i(x)$, όπου οι ϕ_i είναι οι ίδιες συναρτήσεις βάσης που χρησιμοποιούνται στον ορισμό της γεωμετρίας. Αυτό επιτρέπει την κατασκευή μίας διακριτοποιημένης έκφρασης για τη δυναμική ενέργεια,

$$\Pi(u_i) = \frac{1}{2}\int_a^b c\left(\sum_i u_i \frac{d^2\phi_i}{dx^2}\right)^2 dx - \int_a^b f\left(\sum_i u_i \phi_i(x)\right) dx,$$

και το πρόβλημα πλέον περιορίζεται στην εύρεση του διανύσματος $\mathbf{u}$ που ελαχιστοποιεί την Π. Μηδενίζοντας τις πρώτες παραγώγους, λαμβάνουμε το σύνολο n εξισώσεων που καθορίζει τη θέση ισορροπίας:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = \int_a^b c\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\left(\sum_j u_j \frac{d^2\phi_j}{dx^2}\right) dx - \int_a^b f\phi_i dx = 0,$$

το οποίο μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned}
\sum_j \left[\int_a^b c\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\frac{d^2\phi_j}{dx^2}dx\right] u_j &= \int_a^b f\phi_i dx, \qquad i = 1\ldots n,\\
\sum_j K_{ij} u_j &= f_i \qquad\qquad i = 1\ldots n,\\
\mathbf{K}\,\mathbf{u} &= \mathbf{f},
\end{aligned}$$

όπου K_{ij} είναι το στοιχείο με δείκτες (i, j) του πίνακα συντελεστών $\mathbf{K}$, ο οποίος είναι γνωστός ως ο πίνακας ακαμψίας, και f_i είναι το στοιχείο με δείκτη i του διανύσματος $\mathbf{f}$, το οποίο είναι γνωστό ως το διάνυσμα δύναμης. Η πρώτη εργασία σε κάθε προσομοίωση με πεπερασμένα στοιχεία είναι ο υπολογισμός αυτών των τιμών.

Αριθμητικός υπολογισμός του πίνακα ακαμψίας

Για να υπολογιστούν εύκολα τα ολοκληρώματα που υπεισέρχονται στις εκφράσεις των K_{ij} και f_i, εκφράζουμε τους όρους τους στον παραμετρικό χώρο και πραγματοποιούμε όλες τις ολοκληρώσεις σε αυτό τον χώρο. Η δεύτερη παράγωγος ως προς τη χωρική συντεταγμένη x μπορεί εκφραστεί μέσω των παραγώγων ως την παραμετρική συντεταγμένη t, και την παράγωγο (πίνακα Jacobi) a της απεικόνισης, $a = \frac{dx}{dt} = x'$.[4] Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, μπορούμε να εκφράσουμε τη σχέση $\frac{d^2\phi}{dt^2}$ με βάση τις παραγώγους ως προς x, και με απλές αλγεβρικές πράξεις να λάβουμε

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{1}{a^2}\left(\phi'' - \frac{1}{a}\phi' a'\right),$$

όπου τα a και a' υπολογίζονται άμεσα από τη χωρική απεικόνιση που ορίζει τη γεωμετρία: $a = \sum_i x_i \phi'$ και $a' = \sum_i x_i \phi''$.

Επομένως οι συντελεστές K_{ij} έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$K_{ij} = \int_{t_a}^{t_b} c\frac{1}{a^4}\left(\phi_i'' - \frac{1}{a}\phi_i' a'\right)\left(\phi_j'' - \frac{1}{a}\phi_j' a'\right) a\, dt, \tag{8.27}$$

όπου t_a και t_b είναι οι τιμές της παραμέτρου που ορίζουν τα όρια του χωρικού πεδίου $a \le x \le b$ (Σχήμα 8.20).

Σε αυτή την ενότητα χρησιμοποιούμε τις συναρτήσεις βάσης της κυβικής υποδιαίρεσης, όμως ανάλογες ιδέες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για βάσεις χαμηλότερου ή υψηλότερου βαθμού. Οι κυβικές συναρτήσεις βάσης είναι κατά τμήματα πολυωνυμικές, βαθμού 3· έχουν τοπική στήριξη σε τέσσερα διαδοχικά διαστήματα κόμβων (όταν οι κόμβοι δεν επαναλαμβάνονται) στο παραμετρικό πεδίο, και μπορούν να εκφραστούν αναλυτικά ως τέσσερα κυβικά πολυώνυμα ορισμένα σε αυτά τα διαστήματα. Επομένως, αν $|i - j| \ge 4$, τα K_{ij} είναι 0 καθώς τα γινόμενα που εμφανίζονται στο ολοκλήρωμα μηδενίζονται. Μη μηδενικές τιμές για τους συντελεστές K_{ij} λαμβάνονται μόνο όταν οι συναρτήσεις ϕ_i και ϕ_j αλληλοεπικαλύπτονται. Καθώς οι όροι των ολοκληρωμάτων είναι ρητές συναρτήσεις, είναι γενικά εύκολο να πραγματοποιηθεί η ολοκλήρωση με αριθμητικές μεθόδους. Για το σκοπό αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί μία σχέση αριθμητικής ολοκλήρωσης σε καθένα από τα διαστήματα αλληλοεπικάλυψης. Τα διαστήματα μεταξύ κόμβων (παραμετρικά διαστήματα) στην περιοχή $t_a \le t \le t_b$ αναφέρονται ως *πεπερασμένα στοιχεία*.

Έστω r_{ij} το πλήθος των αλληλοεπικαλυπτόμενων διαστημάτων (στοιχείων) μεταξύ δύο συναρτήσεων βάσης ϕ_i και ϕ_j. Μία μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης, όπως

[4] Θα συμβολίζουμε με $'$ τις παραγώγους ως προς την παραμετρική συντεταγμένη t.

η μέθοδος Gauss, προσεγγίζει το παραπάνω ολοκλήρωμα με μία έκφραση της μορφής

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \sum_{e=1}^{r_{ij}} \sum_{g=1}^{ng} \left[c \frac{1}{a^4} \left(\phi_i'' - \frac{1}{a} \phi_i' a' \right) \left(\phi_j'' - \frac{1}{a} \phi_j' a' \right) a \right]_{t_g} w_g \, \Delta t_e \\ &= \sum_{e=1}^{r_{ij}} \sum_{g=1}^{ng} I(t_g) \, w_g \, \Delta t_e, \end{aligned} \tag{8.28}$$

όπου όλες οι ποσότητες μέσα στις αγκύλες αποτιμώνται στο t_g. Η παραμετρική συντεταγμένη του g-οστού σημείου Gauss, ;;; w_g είναι ένας συντελεστής που σχετίζεται με το g-οστό σημείο Gauss, ng είναι το πλήθος των σημείων που χρησιμοποιούνται στην ολοκλήρωση σε κάθε διάστημα,[5] και Δt_e είναι το μέγεθος του διαστήματος στον παραμετρικό χώρο. Αυτό περιορίζει τον υπολογισμό του ολοκληρώματος k_{ij} στην αποτίμηση των παραγόντων σε $r_{ij} \cdot ng$ σημεία.

Υπάρχουν δύο κοινοί τρόποι για την οργάνωση των πράξεων που απαιτούνται για τον υπολογισμό των συντελεστών του πίνακα ακαμψίας:

- *Υπολογισμός των συντελεστών του* **K** *έναν κάθε φορά.* Αυτός ο τρόπος είναι άμεση εφαρμογή της Σχέσης (8.28) όπου ο εσωτερικός βρόχος παράγει όλους τους μη μηδενικούς συντελεστές. Ο πίνακας **K** είναι ;;; βανδεδ· για τις κυβικές συναρτήσεις βάσεις το ;;; σεμι-βανδωιδτη είναι 3.

```
for i = 1..n
    for j = 1..n
        // Βρίσκουμε τα διαστήματα αλληλοεπικάλυψης των πεδία των φ
        r = overlap(i, j)
        for e in r
            K_ij = K_ij + Σ_g I(t_g) w_g Δt_e
```

- *Υπολογισμός των συνεισφορών στους συντελεστές του* **K**. Ένας εναλλακτικός, και πιο δημοφιλής, τρόπος υπολογισμού των συντελεστών του **K** επιτυγχάνεται παρατηρώντας ότι κάθε διάστημα (στοιχείο) περιλαμβάνεται στην τοπική στήριξη τεσσάρων συναρτήσεων βάσης, και επομένως υπάρχουν 16 στοιχεία του **K** που περιλαμβάνουν συνεισφορές ολοκληρωμάτων επί αυτού του διαστήματος. Μπορούμε επομένως να πραγματοποιήσουμε όλες τις ολοκληρώσεις που αφορούν αυτό το διάστημα και να τις συγκεντρώσουμε στις αντίστοιχές τους τέσσερις γραμμές και στήλες του **K**. Οι συνεισφορές που προέρχονται από ένα διάστημα αποθηκεύονται σε ένα μικρό πίνακα (4×4 σε αυτή την περίπτωση) ο οποίος καλείται πίνακας ακαμψίας του στοιχείου. Αυτός ο πίνακας, τον οποίο συμβολίζουμε $\mathbf{k}_e$, αντιπροσωπεύει τις συνεισφορές που προέρχονται από αυτό το στοιχείο στον συνολικό πίνακα **K**. Ένας τυπικός συντελεστής K_{ij} λαμβάνει συνεισφορές από πολλαπλούς $\mathbf{k}_e$.

[5] Κατάλληλες τιμές για τη μέθοδο Gauss ανάλογα με τη ζητούμενη ακρίβεια μπορούν να βρεθούν σε συγγράμματα αριθμητικής ανάλυσης.

for $e = 1..m$
  // Υπολογισμός στοιχείων του πίνακα ακαμψίας του στοιχείου
  for $i = 1..4$
    for $j = 1..4$
      $k_e(i,j) = \sum_g I(t_g)\, w_g\, \Delta t_e$
  // Συγκέντρωση των πινάκων ακαμψίας στοιχείων στον **K**
  s = σύνολο δεικτών των συναρτήσεων βάσης με τοπική στήριξη στο e
  $K(s,s) = K(s,s) + \mathbf{k}_e$

Στο απλό, μονοδιάστατο πλαίσιο που συζητούμε σε αυτή την ενότητα, και οι δύο τρόποι οργάνωσης των υπολογισμών είναι εξίσου αποτελεσματικοί· όμως στις δύο και τρεις διαστάσεις, και με διακριτοποιήσεις που αλλάζουν προσαρμοστικά, η επιλογή του ενός ή του άλλου θα καθοριστεί από διάφορους παράγοντες που σχετίζονται με την υλοποίηση και την αποτελεσματικότητα.

Συνοριακές συνθήκες

Το σύνολο συνθηκών που περιγράφουν τη θέση ισορροπίας δεν επιδέχεται λύσεις χωρίς την επιβολή κατάλληλων περιορισμών στο **u**. Από φυσική σκοπιά, αυτοί οι περιορισμοί είναι απαραίτητοι ώστε το αντικείμενο να μην επιταχυνθεί ή κινηθεί ως στερεό σώμα όταν εφαρμόζονται σε αυτό φορτία. Από μαθηματική σκοπιά, ο πίνακας ακαμψίας **K** που περιγράφηκε παραπάνω είναι ιδιάζων: οι επιπλέον περιορισμοί ως προς τις επιτρεπόμενες μετατοπίσεις απαιτούνται ώστε το Π να έχει φραγμένο ελάχιστο.

Οι συνθήκες που μπορούμε να επιβάλουμε στην παραμορφωμένη καμπύλη είναι γεωμετρικοί περιορισμοί ως προς τη θέση και την κλίση της σε διάφορα σημεία. Για παράδειγμα, μπορούμε να απαιτήσουμε η παραμορφωμένη καμπύλη να παρεμβάλλει ένα συγκεκριμένο σημείο στο αριστερό άκρο του πεδίου: $\mathbf{u}(x = a) = u_o$, το οποίο, ως προς τους αγνώστους u_i, μπορεί να εκφραστεί ως $\sum u_i \phi_i(t_a) = g$, όπου g είναι η ζητούμενη θέση του παρεμβαλλόμενου σημείου. Μπορούμε να θέσουμε αυτό τον περιορισμό σε κανονική γραμμική μορφή, $\mathbf{C}_i\mathbf{u} = \mathbf{g}$, όπου $\mathbf{C}_i$ είναι ένα $1 \times n$ διάνυσμα-γραμμή των συντελεστών των u_i στους περιορισμούς:

$$\mathbf{C}_i = [\phi_1(t_a)\ \phi_2(t_a) \cdots \phi_i(t_a) \cdots \phi_n(t_a)].$$

Για τον περιορισμό που αναφέρουμε παραπάνω, ο πίνακας $\mathbf{C}_i$ είναι πολύ αραιός καθώς οι τρεις συναρτήσεις βάσης έχουν μη μηδενικά στοιχεία μόνο στην παράμετρο $t = t_a$, που αντιστοιχεί στο αριστερό άκρο του χωρικού πεδίου (υποθέτοντας ότι το t_a είναι ένας από τους κόμβους). Δυστυχώς, δεν έχουν όλοι οι περιορισμοί που θα θέλαμε να επιβάλουμε στην παραμόρφωση τόσο αραιά διανύσματα συντελεστών. Για παράδειγμα, ένας περιορισμός ώστε η μέση κάθετη μετατόπιση της ράβδου να είναι μηδενική, έχει πλήρως πυκνό πίνακα συντελεστών. Περιορισμοί μπορούν ακόμη να τεθούν ως προς την κλίσης του παραμορφωμένου σχήματος. Για παράδειγμα, αν επιθυμούμε η εφαπτομένη στο δεξί άκρο του διαστήματος ($x = b$) να είναι οριζόντια, τότε ένας πε-

ριορισμός της μορφής $\sum u_i \phi_i'(t_b) = 0$, ή

$$[\phi_1'(t_b)\ \phi_2'(t_b) \cdots \phi_i'(t_b) \cdots \phi_n'(t_b)]\ \mathbf{u} = \mathbf{0},$$

μπορεί να τεθεί. Και σε αυτή την περίπτωση, ο πίνακας των συντελεστών για αυτό τον περιορισμό είναι εξαιρετικά αραιός. Οι αλγεβρικοί περιορισμοί επί του παραμορφωμένου σχήματος αντιπροσωπεύουν ένα ισχυρό εργαλείο για την επεξεργασία και την έκφραση απαιτήσεων του χρήστη ως προς το τελικό σχήμα της παραμορφωμένης καμπύλης. Στο πλαίσιο της παραμόρφωσης ελεύθερης μορφής, τόσο οι εφαρμοζόμενες «δυνάμεις» όσο και αυτοί οι περιορισμοί ως προς τη θέση και την κλίση επιτρέπουν στον χρήστη να ελέγχει το σχήμα της καμπύλης.

Υποθέτοντας ότι έχουμε r γραμμικούς περιορισμούς για την παραμόρφωση, αυτοί οι περιορισμοί μπορούν να εκφραστούν στη μορφή

$$\mathbf{Cu} = \mathbf{g}, \tag{8.29}$$

όπου $\mathbf{C}$ είναι ένας $r \times n$ πίνακας συντελεστών (ο οποίος εμπεριέχει τις τιμές των συναρτήσεων βάσης και των παραγώγων τους σε διάφορες παραμετρικές τιμές) και $\mathbf{g}$ είναι ένα $r \times 1$ διάνυσμα-στήλη που αντιπροσωπευει το δεξί μέρος των εξισώσεων των περιορισμών. Για να αποφευχθεί η μετακίνηση ολόκληρου του αντικειμένου (κίνηση στερεού σώματος), πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον δύο περιορισμοί και ένας από αυτούς να αφορά μετατοπίσης, όχι μόνο κλίσεις, ώστε το πρόβλημα να είναι καλά ορισμένο.

Η πλήρης διατύπωση του προβλήματος εύρεσης του παραμορφωμένου σώματος μπορεί έτσι να τεθεί ως το πρόβλημα της εύρεσης διανύσματος $\mathbf{u}$ που ελαχιστοποιεί το $\Pi(\mathbf{u})$ με τους περιορισμούς $\mathbf{Cu} = \mathbf{g}$.

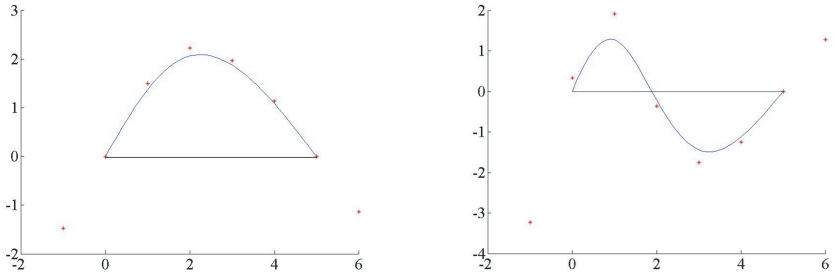
Η λύση αυτού του προβλήματος ελαχιστοποίησης με περιορισμούς υπολογίζεται ως η λύση του ακόλουθου συνόλου εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}, \tag{8.30}$$

όπου το $\mathbf{v}$ είναι γνωστό ως το διάνυσμα των πολλαπλασιαστών Lagrange και υπολογίζεται ως μέρος της λύσης. Αν και υπάρχουν πολλές τεχνικές για την επίλυση αυτού του συνόλου εξισώσεων, όταν το μέγεθος του προβλήματος είναι σχετικά μικρό μία μέθοδος όπως η απαλοιφή Gauss είναι αρκετά καλή ώστε να υπολογίζεται η λύση με σχεδόν αλληλεπιδραστικούς ρυθμούς.

Παραδείγματα

Στο Σχήμα 8.21 φαίνονται κάποια παραδείγματα παραμόρφωσης μίας ράβδου σε διάφορες συνθήκες φορτίου και περιορισμών. Η ράβδος μοντελοποιείται με πέντε κυβικά τμήματα και αρχικά είναι οριζόντια. Το σχήμα στα αριστερά δείχνει την παραμόρφωση λόγω ενός κατακόρυφου προς τα πάνω φορτίου που ασκείται στη θέση $x = 1.5$ με περιορισμούς παρεμβολής στα δύο άκρα. Το σχήμα στα δεξιά δείχνει το παραμορ-



Σχήμα 8.21: *Παραμόρφωση μίας αρχικά επίπεδης καμπύλης μέσω δυνάμεων (αριστερά) και περιορισμών παρεμβολής (δεξιά). Σημειώνονται οι θέσεις των σημείων ελέγχου του παραμορφωμένου σχήματος.*

φωμένο σχήμα λόγω περιορισμών παρεμβολής μόνο: δύο στα άκρα και δύο στις θέσεις $x = 0.5$ (κατακόρυφη μετατόπιση κατά +1) και $x = 2.5$ (κατακόρυφη μετατόπιση κατά −1). Φαίνονται επίσης οι θέσεις των σημείων ελέγχου. Σημειώνεται ότι τα σημεία ελέγχου υφίστανται μόνο κατακόρυφες μετατοπίσεις. Αυτό συμβαίνει γιατί λάβαμε υπόψη μόνο παραμορφώσεις κάμψης λόγω φορτίων που εφαρμόζονται εγκάρσια και αντίστοιχους περιορισμούς. Η προσθήκη αξονικών παραμορφώσεων στη διατύπωση του προβλήματος επιτρέπει στα σημεία ελέγχου να κινούνται και οριζόντια. Αυτό περιγράφεται παρακάτω και αναπτύσσεται πιο γενικά στην Ενότητα 8.7.2.

Αξονικές παραμορφώσεις

Μέχρι εδώ, θεωρήσαμε μόνο κατακόρυφες μετατοπίσεις της ράβδου και ο μόνος άγνωστος ήταν η κατακόρυφη μετατόπιση. Επιπλέον υποθέσαμε ότι η «ενέργεια διάτασης» αποτελούνταν μόνο από την ενέργεια κάμψης λόγω της γραμμικοποιημένης καμπυλότητας ($\kappa = \frac{d^2u}{dx^2}$). Σε αυτή την ενότητα εξετάζουμε το αποτέλεσμα αξονικών παραμορφώσεων.

Σημεία του υλικού της ράβδου μπορούν να υποστούν μετατοπίσεις κατά την αξονική διεύθυνση αν εφαρμοστούν οριζόντια φορτία $f_x(x)$. Αυτές οι μετατοπίσεις προκαλούν μεταβολές στο μήκος της ράβδου με αντίστοιχες αξονικές διατάσεις. Θα υποθέσουμε, για την ώρα, ότι οι αξονικές διατάσεις οφείλονται σε μία μετατόπιση κατά τη διεύθυνση x μόνο, την οποία θα συμβολίσουμε $u_x(x)$. Η διατύπωση είναι παρόμοια με την προηγούμενη, με μόνη διαφορά ότι οι αξονικές διατάσεις (μεταβολές του μήκους), τις οποίες θα συμβολίσουμε $\epsilon = \frac{du_x}{dx}$, αντικαθιστούν τις διατάσεις κάμψης στην έκφραση της δυναμικής ενέργειας. Μετά τη διακριτοποίηση, $u_x(x) = \sum_i u_{xi}\phi_i(x)$, η δυναμική ενέργεια μπορεί να εκφραστεί ως προς το άγνωστο διάνυσμα $\mathbf{u}_x$ ως

$$\Pi_a[u_{xi}] = \frac{1}{2}\int_a^b c_a \epsilon(x)^2 dx - \int_a^b f_x u_x dx \tag{8.31}$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b c_a \left(\sum_i u_{xi}\frac{d\phi_i}{dx}\right)^2 dx - \int_a^b f\left(\sum_i u_{xi}\phi_i\right) dx, \tag{8.32}$$

όπου c_a είναι μία παράμετρος του υλικού που αντιπροσωπεύει την αξονική ακαμψία της ράβδου, η οποία μπορεί να διαφοροποιείται χωρικά. Υποθέτοντας ότι έχουμε θέσει κατάλληλους περιορισμούς ώστε να αποτρέψουμε κίνηση στερεού σώματος (απαιτείται τουλάχιστον ένας), η λύση για την αξονικά παραμορφούμενη ράβδο μπορεί να υπολογιστεί από το εξής πρόβλημα ελαχιστοποίησης με περιορισμούς: να ελαχιστοποιηθεί το Π_a με περιορισμούς $\mathbf{C}_a\,\mathbf{u}_x = \mathbf{g}_a$. Η λύση του προκύπτει ως

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_a & \mathbf{C}_a^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}_a & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{v}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}, \tag{8.33}$$

όπου $\mathbf{K}_a$ είναι ο πίνακας ακαμψίας που αντιστοιχεί στις αξονικές παραμορφώσεις. Τα στοιχεία του K_{aij} λαμβάνονται υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b c_a \frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx} dx = \int_a^b c_a \frac{1}{a^2}\phi_i'\phi_j' a\, dt$$

χρησιμοποιώντας τις τεχνικές που παρουσιάστηκαν στην Ενότητα 8.7.1

Όταν εφαρμόζονται τόσο κατακόρυφα όσο και αξονικά φορτία, το παραμορφωμένο σχήμα της ράβδου οφείλεται σε μετατοπίσεις και κατά τις δύο αυτές διευθύνσεις. Για την περίπτωση μίας αρχικά ευθύγραμμης ράβδου και με τις γραμμικοποιημένες προσεγγίσεις καμπυλότητας και επιμήκυνσης που έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει, οι μετατοπίσεις είναι ανεξάρτητες, και μπορούμε απλώς να επιλύσουμε τα δύο σύνολα εξισώσεων (8.30) και (8.33) ανεξάρτητα:[6]

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{K}_a & \mathbf{C}_a^{\mathrm{T}} & & \\ \mathbf{C}_a & \mathbf{0} & & \\ \hline & & \mathbf{K}_b & \mathbf{C}_b^{\mathrm{T}} \\ & & \mathbf{C}_b & \mathbf{0} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{v}_x \\ \hline \mathbf{u}_y \\ \mathbf{v}_y \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{f}_x \\ \mathbf{g}_x \\ \hline \mathbf{f}_y \\ \mathbf{g}_y \end{array}\right].$$

Ομαδοποιώντας τους πολλαπλασιαστές Lagrange, οι εξισώσεις μπορούν να εκφραστούν στη μορφή

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{K}_a & & \mathbf{C}_a^{\mathrm{T}} & \\ & \mathbf{K}_b & & \mathbf{C}_b^{\mathrm{T}} \\ \hline \mathbf{C}_a & & & \\ & \mathbf{C}_b & & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \\ \hline \mathbf{v}_x \\ \mathbf{v}_y \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{f}_x \\ \mathbf{f}_y \\ \hline \mathbf{g}_x \\ \mathbf{g}_y \end{array}\right].$$

[6] Με τον δείκτη b σημειώνονται οι πίνακες και τα διανύσματα συντελεστών που αντιστοιχούν στις παραμορφώσεις κάμψης.

Ίσως το πιο σημαντικό χαρακτηριστικό του πίνακα συντελεστών αυτού του συνόλου εξισώσεων είναι ότι το πάνω αριστερό τμήμα του, το οποίο αποτελείται από τους πίνακες ακαμψίας που οφείλονται στις παραμορφώσεις ως προς τους άξονες και λόγω κάμψης, είναι ;;; βλοσκ-διαγοναλ. Οι αξονικές παραμορφώσεις οφείλονται αποκλειστικά στο $\mathbf{u}_x$, οι παραμορφώσεις κάμψης αποκλειστικά στο $\mathbf{u}_y$, και δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ τους. Αυτό δεν θα ισχύει όταν το αρχικό σχήμα της ράβδου δεν θα είναι ευθύγραμμο· συζητούμε αυτή την περίπτωση στη συνέχεια.

8.7.2 Τέντωμα και κάμψη καμπυλών

Η διατύπωση που περιγράφηκε παραπάνω μπορεί να επεκταθεί άμεσα σε σχήματα τα οποία αρχικά είναι καμπύλα. Η κυριότερη αλλαγή σε σχέση με την αρχικά ευθύγραμμη ράβδο των προηγούμενων ενοτήτων είναι ότι πλέον δεν είναι λογικό να υποθέτουμε ότι οι αξονικές παραμορφώσεις οφείλονται μόνο σε μετατοπίσεις κατά την οριζόντια διεύθυνση, ούτε ότι η κάμψη οφείλεται αποκλειστικά σε μετατοπίσεις κατά την κατακόρυφη διεύθυνση. Στην περίπτωση καμπύλης γεωμετρίας, και οι δύο συνιστώσες x και y της μετατόπισης (σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων) παράγουν τόσο αξονικές παραμορφώσεις όσο και παραμορφώσεις κάμψης. Οι μετατοπίσεις είναι ;;; ςουπλεδ και δεν μπορούν να υπολογιστούν ανεξάρτητα.

Διαφορική γεωμετρία καμπυλών

Οι διατάσεις κατά τους άξονες και κάμψης είναι συναρτήσεις της μεταβολής του μήκους και της μεταβολής της καμπυλότητας κατά μήκος της ράβδου. Το μήκος και η καμπυλότητα είναι έννοιες της Διαφορικής Γεωμετρίας, και τις παρουσιάζουμε εδώ σύντομα. Ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί το Παράρτημα Β καθώς και τα [Malv69, Fari01, Gray97] για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της παραμόρφωσης.

Η αρχική γεωμετρία της καμπύλης ράβδου ορίζεται από τη σχέση

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \text{με εφαπτόμενο διάνυσμα} \quad \mathbf{a} = \xi'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$$

και η καμπυλότητά της ως

$$\kappa_o = \frac{d\alpha}{ds} = \left| \frac{d^2\xi}{ds^2} \right| = \frac{\left|\xi' \times \xi''\right|}{|\xi'|^3} = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{a}'|}{|\mathbf{a}|^3},$$

όπου $\times$ είναι το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων, s είναι το μήκος τόξου του μεσαίου άξονα της ράβδου, και α είναι η γωνία που σχηματίζει το εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{a}$ με τον οριζόντιο άξονα. Οι διαφορετικές εκφράσεις της καμπυλότητας είναι χρήσιμες σε διαφορετικές περιπτώσεις.

Έστω h η απόσταση κατά μήκος του πάχους από τον μεσαίο άξονα της ράβδου. Μία διαφορική παραμετρική απόσταση dt αντιστοιχεί σε ένα διαφορικό μήκος τόξου

$ds = |\xi'|dt = |\mathbf{a}|dt = a\,dt$. Αυτό το μήκος μπορεί να γραφεί επίσης ως $ds = \rho_o d\alpha$ όπου ρ_o είναι η ακτίνα καμπυλότητας ($\rho_o = 1/\kappa_o$). Λόγω της αρχικά καμπύλης γεωμετρίας της ράβδου, το αντίστοιχο μήκος ενός τμήματος σε απόσταση h από τον μεσαίο άξονα είναι $ds_h = (\rho_o - h)d\alpha$.

Αξονική διάταση: μεταβολή του μήκους. Αφού η καμπύλη παραμορφωθεί, η νέα θέση της ορίζεται από τη σχέση

$$\Xi(t) = \xi(t) + \upsilon(t) = \begin{bmatrix} x(t) + u_x(t) \\ y(t) + u_y(t) \end{bmatrix}.$$

Το μήκος τόξου κατά μήκος του μεσαίου άξονα είναι πλέον $dS = |\mathbf{x}' + \mathbf{u}'|dt$. Ένα κοινό βαθμωτό μέγεθος που χρησιμοποιείται για να εκφραστεί η μεταβολή του μήκους μεταξύ του αρχικού και του παραμορφωμένου σχήματος (ένα μέτρο της κατά μήκος διάτασης) είναι γνωστό ως η *διάταση του Green* και ορίζεται ως:

$$\epsilon = \frac{1}{2}\frac{dS^2 - ds^2}{ds^2} = \frac{1}{2}\frac{(\xi' + \upsilon')^{\mathrm{T}}(\xi' + \upsilon') - \xi'^{\mathrm{T}}\xi'}{\xi'^{\mathrm{T}}\xi'},$$

το οποίο μπορεί να γραμμικοποιηθεί ως

$$\epsilon = \frac{1}{a^2}\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\upsilon', \tag{8.34}$$

όπου

$$a^2 = |\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}.$$

Διάταση κάμψης: μεταβολή της καμπυλότητας. Κατά το πάχος της ράβδου, η μεταβολή του μήκους, σε απόσταση h από τον μεσαίο άξονα, μπορεί παρομοίως να γραφεί ως

$$\epsilon_h = \frac{1}{2}\frac{dS_h^2 - ds_h^2}{ds_h^2} = \frac{1}{2}\frac{(\rho_d - h)^2(\kappa_d dS)^2 - (\rho_o - h)^2(\kappa_o ds)^2}{ds_h^2}.$$

Υποθέτοντας ότι το πάχος της ράβδου είναι μικρό σχετικά με τις υπόλοιπες διαστάσεις της ($h/\rho << 1$), οι $O(h^2)$ όροι μπορούν να παραληφθού, λαμβάνοντας

$$\epsilon_h = \epsilon - h\frac{(\kappa_d dS)^2 - (\kappa_o ds)^2}{ds^2} + O(h^2) \approx \epsilon + \kappa h.$$

Η μεταβολή του μήκους σε απόσταση h οφείλεται τόσο στην αξονική διάταση κατά μήκος του μεσαίου άξονα όσο και στη μεταβολή της καμπυλότητας μεταξύ του αρχικού και του παραμορφωμένου σχήματος. Η ποσότητα κ είναι γνωστή ως *διάταση κάμψης* και μπορεί να γραμμικοποιηθεί ως

$$\kappa = \frac{-1}{a^3}\left(\mathbf{a} \times \upsilon'' - \mathbf{a}' \times \upsilon' - \frac{1}{a^2}(\mathbf{a} \times \mathbf{a}')\mathbf{a} \cdot \upsilon'\right). \tag{8.35}$$

Διατύπωση πεπερασμένων στοιχείων

Η διακριτοποίηση του προβλήματος με πεπερασμένα στοιχεία εκφράζει τις παραπάνω συνεχείς ποσότητες ως προς τις διακριτές τιμές που πολλαπλασιάζουν τις συναρτήσεις βάσης. Η αρχική γεωμετρία γράφεται ως

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \sum_i \phi_i(t) x_i \\ \sum_i \phi_i(t) y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi \mathbf{x} \\ \Phi \mathbf{y} \end{bmatrix},$$

όπου $\Phi = [\phi_1(t)\ \phi_2(t) \cdots \phi_n(t)]$ είναι των διάνυσμα-γραμμή των n συναρτήσεων βάσης. Παρομοίως, το διάνυσμα μετατόπισης εκφράζεται ως

$$\upsilon(t) = \begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi \mathbf{u}_x \\ \Phi \mathbf{u}_y \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi u} \tag{8.36}$$

και οι παράγωγοι του $\mathbf{u}$ μπορούν έτσι να γραφτούν ως

$$\upsilon'(t) = \begin{bmatrix} \Phi' \mathbf{u}_x \\ \Phi' \mathbf{u}_y \end{bmatrix} \qquad \upsilon''(t) = \begin{bmatrix} \Phi'' \mathbf{u}_x \\ \Phi'' \mathbf{u}_y \end{bmatrix}. \tag{8.37}$$

Τα διανύσματα Φ' και Φ'' είναι διανύσματα-γραμμές που αποτελούνται από τις πρώτες και τις δεύτερες παραγώγους των συναρτήσεων βάσης, αντίστοιχα.

Έστω $\mathbf{f}$ το διάνυσμα της δύναμης κατά τη διεύθυνση του μήκους της ράβδου:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} f_x(t) \\ f_y(t) \end{bmatrix}.$$

Αναζητούμε το διάνυσμα μετατόπισης $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ που είναι σε ισορροπία με τις εφαρμοζόμενες δυνάμεις. Αυτό υπολογίζεται διακριτοποιώντας και κατόπιν ελαχιστοποιώντας τη δυναμική ενέργεια που ορίζεται ως

$$\Pi(\upsilon) = \frac{1}{2} \int_0^l c_a \epsilon^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^l c_b \kappa^2 ds - \int_0^l (f_x u_x + f_y u_y)\, ds. \tag{8.38}$$

Με τη διακριτοποίηση της Σχέσης (8.37), η αξονική διάταση ϵ (Σχέση (8.34)) μπορεί να γραφεί ως προς το $\mathbf{u}$ ως

$$\epsilon = \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} a_x \Phi' & a_y \Phi' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{x\phi} & \mathbf{A}_{y\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \end{bmatrix},$$

ενώ η διάταση κάμψης κ (Σχέση (8.35)) μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} \frac{a_y}{a} \Phi'' - \frac{a_y'}{a} \Phi' + d \frac{a_x}{a} \Phi' & \frac{-a_x}{a} \Phi'' + \frac{a_x'}{a} \Phi' + d \frac{a_y}{a} \Phi' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{x\phi} & \mathbf{B}_{y\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{8.39}$$

όπου $d = \frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{a}'|}{a^2}$. Τα διανύσματα $\mathbf{A}_{x\phi}$ και $\mathbf{A}_{y\phi}$ είναι διανύσματα-γραμμές που αποτελούνται από τις παραγώγους των συναρτήσεων βάσης, πολλαπλασιασμένες με γεωμετρικά δεδομένα της ράβδου. Επιτρέπουν την αναπαράσταση της αξονικής διάτασης κατά μήκος της ράβδου ως γραμμικού συνδυασμού των διανυσμάτων μετατόπισης $\mathbf{u}_x$ και $\mathbf{u}_y$. Τα διανύσματα $\mathbf{B}_{x\phi}$ και $\mathbf{B}_{y\phi}$ είναι επίσης διανύσματα-γραμμές που επιτελούν παρόμοια λειτουργία για τη διάταση κάμψης.

Εισάγοντας τη Εξίσωση (8.36) στην έκφραση της δυναμικής ενέργειας (8.39), λαμβάνουμε, μετά από πράξεις,

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\left[\int_0^l c_a \begin{bmatrix}\mathbf{A}_{x\phi}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{A}_{y\phi}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{x\phi}\mathbf{A}_{y\phi}\end{bmatrix} ds + \int_0^l c_b \begin{bmatrix}\mathbf{B}_{x\phi}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{B}_{y\phi}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{x\phi}\mathbf{B}_{y\phi}\end{bmatrix} ds\right]\mathbf{u} - \begin{bmatrix}\int_0^l f_x\Phi\, ds & \int_0^l f_y\Phi\, ds\end{bmatrix}\mathbf{u}, \quad (8.40)$$

ή, πιο σύντομα,

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{K}_a + \mathbf{K}_b\right]\mathbf{u} - \begin{bmatrix}\mathbf{f}_x^{\mathrm{T}} & \mathbf{f}_y^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}. \quad (8.41)$$

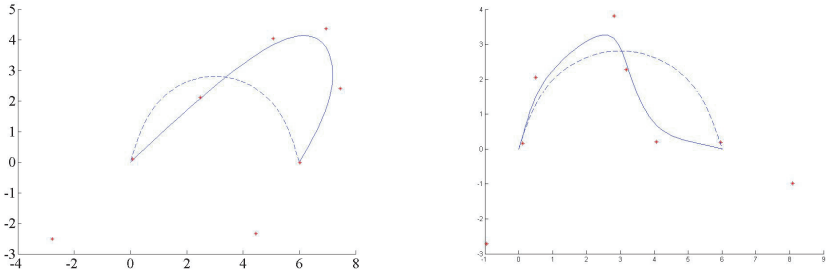
Η συνάρτηση Π είναι μία τετραγωνική μορφή στην οποία οι $\mathbf{K}_a$ και $\mathbf{K}_b$ είναι οι πίνακες ακαμψίας για την αξονική παραμόρφωση και την παραμόρφωση κάμψης, αντίστοιχα. Τα διανύσματα $\mathbf{f}_x$ και $\mathbf{f}_y$ μπορούν να θεωρηθούν ως τα διανύσματα της οριζόντιας και της κατακόρυφης δύναμης, αντίστοιχα, κατά μήκος των n βαθμών ελευθερίας της διακριτοποίησης.

Αριθμητική επίλυση

Υπάρχουν τρία βήματα που πρέπει να κάνουμε για να υπολογίσουμε το διάνυσμα μετατόπισης:

1. Να εφαρμόσουμε περιορισμούς μετατόπισης και εφαπτομένων,
2. Να αποτιμήσουμε τους πίνακες ακαμψίας και τα διανύσματα δυνάμεων,
3. Να επιλύσουμε το προκύπτον σύστημα.

Περιορισμοί μετατόπισης και εφαπτομένων. Για να βρεθεί μία μοναδική λύση για το διάνυσμα μετατόπισης, πρέπει να εισαγάγουμε κατάλληλους περιορισμούς στη ράβδο ώστε να αποτρέψουμε την μετακίνησή της ή την περιστροφή της. Περιορισμοί ως προς τη θέση και την εφαπτομένη της μπορούν να τεθούν σε οποιοδήποτε σημείο κατά μήκος της ράβδου. Οι αλγεβρικές εκφράσεις για τον προσδιορισμό των περιορισμών παρεμβολής θέσης και των περιορισμών κλίσης της ράβδου μπορούν να εκφραστούν ως προς τις συναρτήσεις βάσης και τις παραγώγους αυτών με τρόπο παρόμοιο όπως αυτόν της Ενότητας 8.7.1. Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση στον αναγνώστη.
Αριθμητική αποτίμηση των συντελεστών. Όπως και στην περίπτωση της ευθύγραμμης ράβδου, η λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης με περιορισμούς μπορεί να υπολο-



Σχήμα 8.22: *Συνολική παραμόρφωση μίας καμπύλης λόγω δυνάμεων (αριστερά) και περιορισμών παρεμβολής θέσεων (δεξιά). Σημειώνονται οι θέσεις των σημείων ελέγχου του παραμορφωμένου σχήματος.*

γιστεί επιλύοντας το ακόλουθο σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων, όπου **v** είναι το διάνυσμα των πολλαπλασιαστών Lagrange που αντιστοιχούν στους περιορισμούς **Cu** = **g**:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_a + \mathbf{K}_b & \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \\ \hline \mathbf{C} & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}_x \\ \hline \mathbf{u}_y \\ \hline \mathbf{v} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{f}_x \\ \hline \mathbf{f}_y \\ \hline \mathbf{g} \end{array}\right].$$

Σημειώνεται ότι, αντίθετα με την περίπτωση της ευθύγραμμης γεωμετρίας, το τμήμα του παραπάνω συνόλου εξισώσεων που αντιστοιχεί στην ακαμψία δεν είναι ;;; βλοσκ-διαγοναλ. Οι πίνακες $\mathbf{K}_a$ και $\mathbf{K}_b$ έχουν και οι δύο διαστάσεις $2n \times 2n$ καθώς οι όροι τόσο της οριζόντιας ($\mathbf{u}_x$) όσο και της κατακόρυφης ($\mathbf{u}_y$) μετατόπισης συνεισφέρουν στις αξονικές παραμορφώσεις αλλά και στις παραμορφώσεις κάμψης.

Όπως περιγράφηκε λεπτομερώς στην Ενότητα 8.7.1, υπάρχουν δύο τρόποι υπολογισμού των συντελεστών των πινάκων $\mathbf{K}_a$ και $\mathbf{K}_b$: κατά συντελεστή ή κατά τις συνεισφορές των στοιχείων. Στον συνηθέστερο τρόπο, κατά τις συνεισφορές των στοιχείων, υπολογίζονται οι επιδράσεις όλων των συναρτήσεων βάσης με μερική τοπική στήριξη σε ένα διάστημα (στοιχείο) και κατόπιν συγκεντρώνονται στις κατάλληλες θέσεις του συνολικού πίνακα ακαμψίας.

Για να υπολογιστούν οι συνεισφορές ακαμψίας από κάθε στοιχείο, πρέπει να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα που φαίνονται στις εκφράσεις των **K** και **f** στη Σχέση (8.40). Οι αναλυτικές εκφράσεις των παραγόντων σε αυτούς τους πίνακες και τα διανύσματα δυνάμεων είναι αρκετά πολύπλοκες ώστε γενικά να χρησιμοποιούμε αριθμητικές τεχνικές ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό τους. Η μέθοδος του Gauss είναι μία εύχρηστη μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης, και η χρήση της στους υπολογισμούς πεπερασμένων στοιχείων είναι διαδεδομένη.

Στο Σχήμα 8.22 φαίνεται η συνολική παραμόρφωση μίας καμπύλης λόγω της εφαρμογής φορτίων και/ή περιορισμών παρεμβολής. Στα αριστερά φαίνεται το σχήμα που προκύπτει λόγω ενός φορτίου που εφαρμόζεται στο μέσο και ;;; πυλλινγ προς τα πάνω και δεξιά. Στα δεξιά φαίνεται το σχήμα που προκύπτει προσθέτοντας έναν περιορισμό παρεμβολής που επιβάλλει στην καμπύλη να διέρχεται από το σημείο $(3.5, 1)$.

Σημειώνουμε ότι αυτά τα παραμορφωμένα σχήματα έχουν παραχθεί χρησιμοποιώντας τις γραμμικοποιημένες εκφράσεις που περιγράφηκαν παραπάνω, και δεν αντιστοιχούν υποχρεωτικά στις φυσικές παραμορφώσεις ενός πραγματικού υλικού. Για να υπολογιστούν φυσικά ακριβείς παραμορφώσεις των σχημάτων, μπορούμε να εφαρμόσουμε τα φορτία σταδιακά, παράγοντας έναν νέο πίνακα ακαμψίας σε κάθε βήμα.

8.7.3 Τέντωμα και κάμψη επιφανειών υποδιαίρεσης

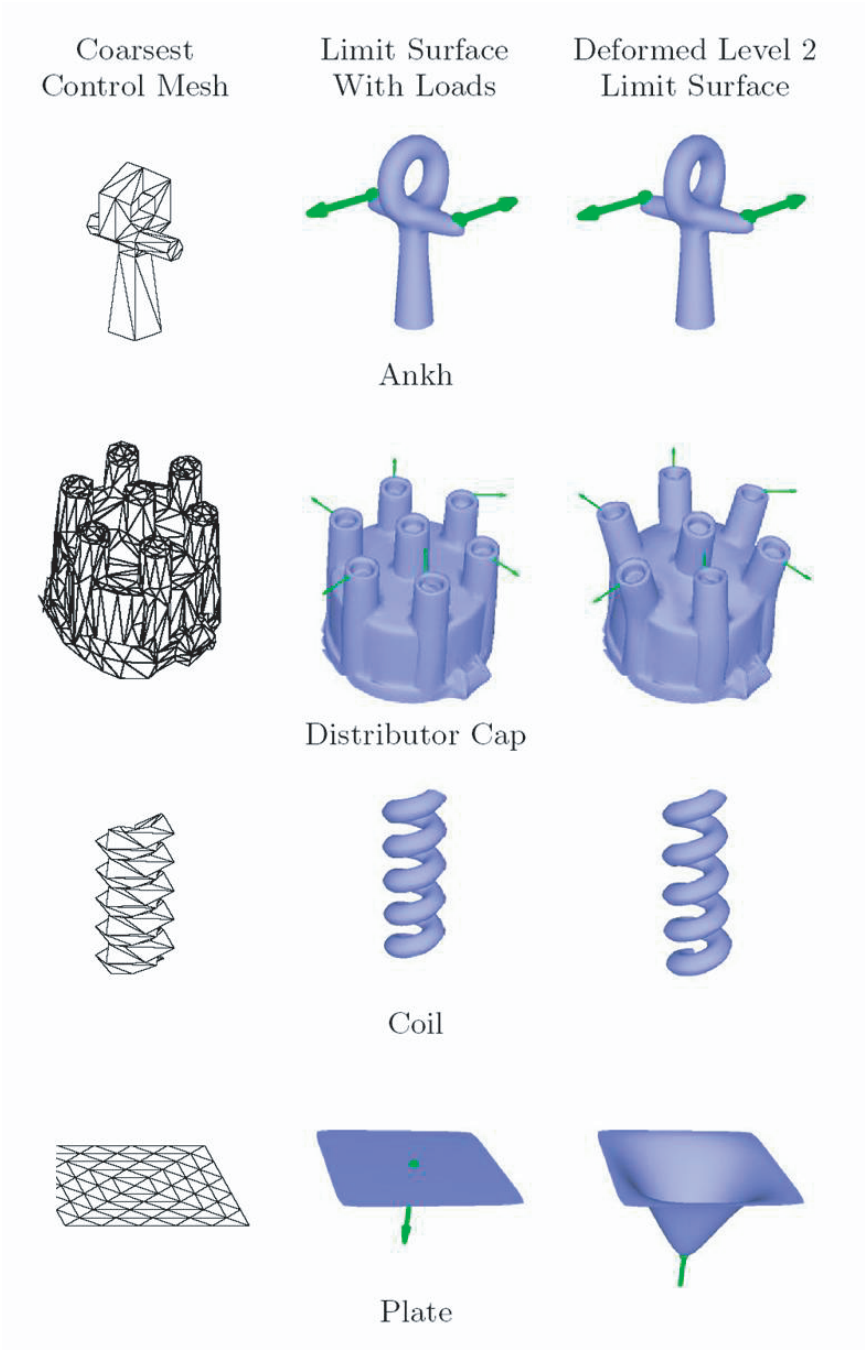
Η παραπάνω διατύπωση μπορεί να γενικευτεί σε επιφάνειες, που είναι και η περίπτωση με το μεγαλύτερο πρακτικό ενδιαφέρον. Όπως και για τις καμπύλες, υπάρχουν δύο τύποι παραμορφώσεων που μπορεί να υποστεί η επιφάνεια με την επίδραση δυνάμεων και περιορισμών μετατόπισης και κλίσης

- *Παραμορφώσεις επί του επιπέδου.* Οι παραμορφώσεις επί του επιπέδου αφορούν το τέντωμα και τη στρέβλωση στο εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο της επιφάνειας. Αντιστοιχούν σε μεταβολές της πρώτης θεμελιώδους μορφής της επιφάνειας.
- *Παραμορφώσεις εκτός του επιπέδου.* Αυτές οι παραμορφώσεις αφορούν την κάμψη και τη συστροφή κατά την κάθετη διεύθυνση της επιφάνειας. Αντιστοιχούν σε μεταβολές της δεύτερης θεμελιώδους μορφής της επιφάνειας.

Το πεδίο δυνάμεων που μπορεί να εφαρμοστεί στην επιφάνεια είναι ένα τριδιάστατο διανυσματικό πεδίο, και οι αναζητούμενες μετατοπίσεις είναι τα διανυσματικά πεδία μετατοπίσεων για κάθε σημείο της επιφάνειας. Οι διατυπώσεις των προβλημάτων ακολουθούν τις ίδιες αρχές που χρησιμοποιήθηκαν στην περίπτωση της καμπύλης ράβδου στην προηγούμενη ενότητα, ασφαλώς όμως περιλαμβάνουν πιο πολυπλοκες αλγεβρικές εκφράσεις. Λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν στα [Cira00, Gree04, Gree05]. Ως παραδείγματα, στο Σχήμα 8.23 παρουσιάζονται οι παραμορφώσεις κάποιων επιφανειών υποδιαίρεσης με την επίδραση διάφορων φορτίων και περιορισμών παρεμβολής. Στην αριστερή στήλη φαίνονται τα πλέγματα ελέγχου που χρησιμοποιούνται στους υπολογισμούς. Στη μεσαία και στη δεξιά στήλη φαίνονται, αντίστοιχα, οι αρχικές και οι παραμορφωμένες επιφάνειες.

8.8 Ασκήσεις

1. Εφαρμόστε στον αλγόριθμο υποδιαίρεσης του Chaikin σε ένα τετράγωνο και αποδείξτε ότι η οριακή καμπύλη είναι μία περιοδική τετραγωνική καμπύλη B-spline.
2. Υπολογίστε τις μάσκες υποδιαίρεσης για την ;;; χυαρτις καμπύλη B-spline.
3. Θεωρήστε έναν τετραγωνικό αλγόριθμο υποδιαίρεσης καμπυλών που εισάγει δύο κόμβους σε κάθε διάστημα. Βρείτε τις μάσκες υποδιαίρεσης για την παραγωγή των εκλεπτυσμένων κορυφών του. Εξηγήστε πώς μπορεί να επεκταθεί αυτός ο αλγόριθμος σε τετραγωνικές επιφάνειες B-spline τανυστικό γινόμενο.



Σχήμα 8.23: *Παραδείγματα παραμορφώσιμων επιφανειών υποδιαίρεσης. Τα πράσινα βέλη αναπαριστούν δυνάμεις που εφαρμόζονται στη γεωμετρία παράγοντας τα σχήματα στη δεξιά στήλη.*

4. Επαναλάβετε την Άσκηση 3 για κυβικές καμπύλες και επιφάνειες B-spline.

5. Θεωρήστε μία τροποποίηση του αλγορίθμου Doo–Sabin που παράγει τις εκλεπτυσμένες κορυφές ως εξής: Για κάθε έδρα, ενώνουμε το κέντρο βάρους αυτής με κάθε κορυφή της και παίρνουμε τα μέσα αυτών των ακμών ως εκλεπτυσμένες κορυφές.

   (α) Συγκρίνετε αυτό τον αλγόριθμο με τον αλγόριθμο Doo–Sabin.

   (β) Οδηγεί σε λεία επιφάνεια·

   (γ) Συγκρίνετε δύο βήματα αυτού του αλγορίθμου με τον αλγόριθμο υποδιαίρεση στο μέσο.

6. Θεωρήστε μία παραλλαγή του αλγορίθμου υποδιαίρεσης του Chaikin που διασπά κάθε ακμή σε τρία ίσα τμήματα.

   (α) Ποια είναι η μάσκα (ή μάσκες) αυτού του αλγορίθμου;

   (β) Πώς μπορεί να επεκτασθεί σε επιφάνειες τανυστικό γινόμενο;

   (γ) Οδηγεί σε λείες καμπύλες/επιφάνειες;

7. Υλοποιήστε ένα σύστημα υποδιαίρεσης που χειρίζεται τις περισσότερες από τις διατάξεις που περιγράφηκαν με δυνατότητες παρεμβολής και οξέων χαρακτηριστικών. Ιδιαίτερα, δώστε μία λύση για την παραγωγή επιφανειών Doo–Sabin με πτυχές.

8. Έστω $\mathbf{A}$ ο πίνακας υποδιαίρεσης του αλγορίθμου Doo–Sabin. Να εξαγάγετε την αντίστοιχη εικόνα Fourier $\hat{\mathbf{A}}$ του $\mathbf{A}$ και να προσδιορίσετε τις ιδιοτιμές του και τις αντίστοιχες πολλαπλότητες. Αν δίνονται τα αρχικά βάρη,

$$\alpha^j = \frac{\delta_{j,0}}{4} + \frac{3 + 2\cos(2\pi j/n)}{4n}, \quad j = 0, \ldots, n-1,$$

   όπου $\delta_{j,0}$ το δέλτα του Kronecker, να δείξετε ότι η ;;; συβδομιναντ ιδιοτιμή είναι $\lambda = 1/2$.

9. Έστω $\mathbf{A}$ ο πίνακας υποδιαίρεσης του αλγορίθμου Catmull–Clark αλγοριτημ. Να εξαγάγετε την αντίστοιχη εικόνα Fourier $\hat{\mathbf{A}}$ του $\mathbf{A}$ και να προσδιορίσετε τις ιδιοτιμές του και τις αντίστοιχες πολλαπλότητες.

10. Στη γλώσσα προγραμματισμού της προτίμησής σας, υλοποιήστε τον αλγόριθμο παραγωγής του πίνακα ακαμψίας που περιγράφεται στην Ενότητα 8.7.1.

11. Γράψτε τον πίνακα περιορισμών για περιορισμούς παρεμβολής θέσης και κλίσης σε μία παραμετρική θέση t_o για την καμπύλη ράβδο (βλ. Ενότητα 8.7.2).

9

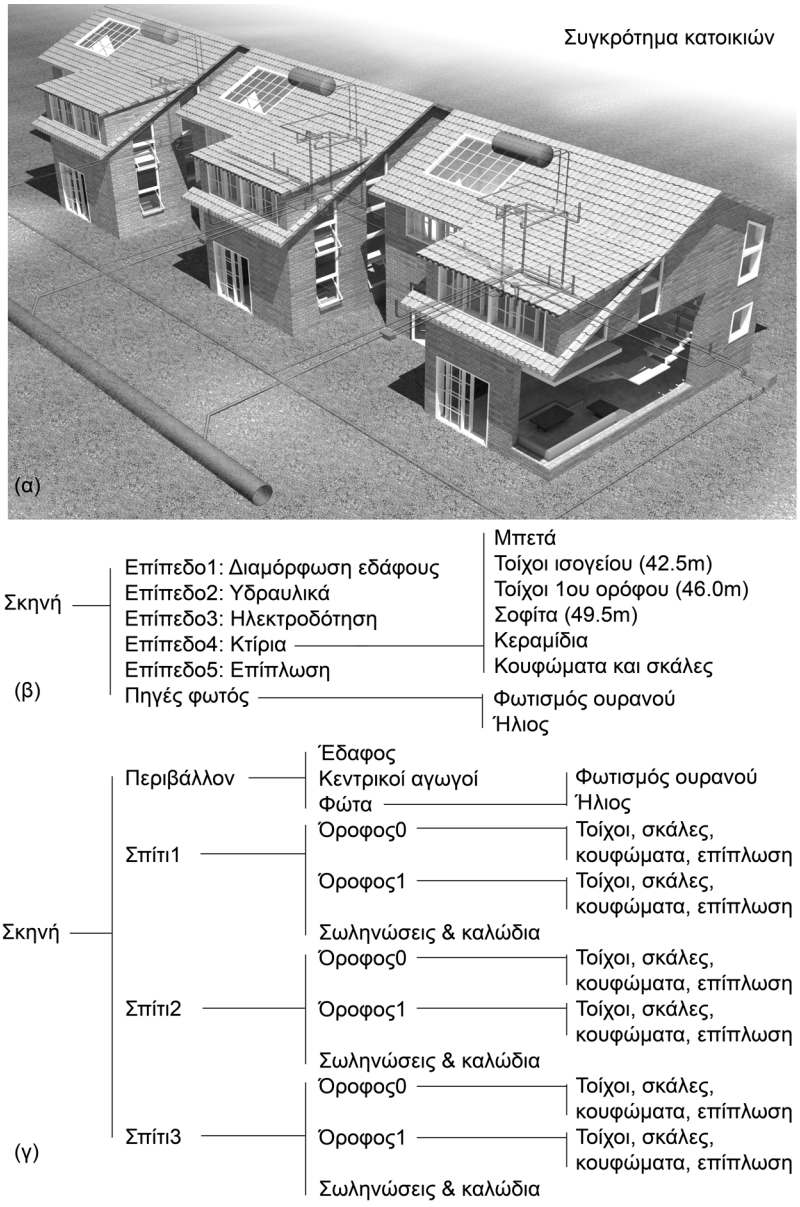
Διαχείριση σκηνής

Όποια και να είναι η ψευδαίσθηση που δημιουργείται, συνεχίζει να είναι ένας επίπεδος καμβάς
και πρέπει να οργανωθεί κατά σχήματα.
—David Hockney

9.1 Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο 5 είδαμε ότι προκειμένου να αποφύγουμε τη συμφόρηση στη γραφική σωλήνωση λόγω υπερβολικής εισροής γεωμετρικής πληροφορίας, απορρίπτουμε με διάφορους μηχανισμούς εκείνα τα πολύγωνα που δεν πρόκειται ποτέ να φανούν στο πεδίο παρατήρησης. Για να εκτελεστούν οι παραπάνω έλεγχοι ορατότητας αποδοτικά, τα στοιχειώδη σχήματα οργανώνονται σε συστοιχίες και χωρικές ιεραρχίες, έτσι ώστε οι έλεγχοι να γίνονται μόνο πάνω στους περιβάλλοντες όγκους των ομαδοποιημένων συνόλων και όχι σε καθένα ξεχωριστό γεωμετρικό στοιχείο. Είναι προφανές πως κάτι τέτοιο έχει ως αποτέλεσμα να εκτελούνται λιγότεροι υπολογισμοί και κατά συνέπεια, η επίδραση του μεγέθους του συνόλου δεδομένων στην ταχύτητα απεικόνισης μειώνεται. Η ομαδοποίηση πολυγώνων ή άλλων στοιχειωδών σχημάτων σε χωρικά συναφείς συστοιχίες και η περαιτέρω ιεραρχική σύμπτυξη ομάδων σε μεγαλύτερες συναθροίσεις σημαίνει ότι η οργάνωση της σκηνής χτίζεται από κάτω προς τα πάνω (τα γεωμετρικά στοιχεία/πολύγωνα είναι τα φύλλα της ιεραρχίας) και ελέγχεται από πάνω προς τα κάτω. Μ' αυτό τον τρόπο, όλα τα στοιχειώδη σχήματα είναι τακτοποιημένα σε μια δενδρική δομή και μπορούμε να τα προσπελάσουμε γρήγορα, να τα εξαιρέσουμε προκαταρκτικά από υπολογισμούς, όπως η περικοπή στο οπτικό πεδίο, και να τα διαχειριστούμε εύκολα ως αντικείμενα στη μνήμη (δυναμικό φόρτωμα, caching, κλπ.). Αυτός ο τύπος οργάνωσης των δεδομένων αποκαλείται *διαμέριση χώρου* (spatial partitioning), και, όπως ήδη είδαμε στο Κεφάλαιο 5, υπάρχουν πολλοί ενδιαφέροντες μηχανισμοί για να την πετύχουμε.

Στην πραγματικότητα, αυτή είναι μόνο η καθοδηγούμενη από τα δεδομένα πτυχή της οργάνωσης μιας σκηνής. Όταν οι κανείς σχεδιάζει έναν εικονικό κόσμο, δηλαδή μια τριδιάστατη *σκηνή* (scene), τείνει να ομαδοποιεί τα γεωμετρικά αντικείμενα οντολογικά με βάση τη λογική εξάρτησή τους και όχι τη χωρική τους τοποθέτηση. Ορισμένες φορές οι οντολογικές ιεραρχίες αναπαριστούν μια χωρική οργάνωση των αντικειμένων, αλλά όχι πάντα. Αυτό μπορεί να φανεί και από το παράδειγμα του Σχήματος



Σχήμα 9.1: *(α) Παράδειγμα διαφορετικής οργάνωσης για μια σκηνή. (β) Αρχιτεκτονικά σχέδια κατά επίπεδα – δεν υπάρχει χωρική συνάφεια. (γ) Χωρικά συνεκτική διαμέριση της σκηνής για πλοήγηση σε πραγματικό χρόνο.*

9.1, όπου η ίδια σκηνή — ένα συγκρότημα κατοικιών — είναι διαμερισμένη ιεραρχικά σε ανεξάρτητα στοιχεία με έναν οντολογικό τρόπο. Αν οργανωθεί η σκηνή με βάση μια αρχιτεκτονική θεώρηση, (Σχήμα 9.1(β)), τα στοιχεία των μοντέλων ομαδοποιούνται ανάλογα με τη λειτουργία τους, το υλικό τους και τη συμβατότητα της οργάνωσης με τις κατόψεις που θα περίμενε κανείς σε ένα τυπικό σχέδιο οικιών. Φανερά, η χωρική διευθέτηση της σκηνής σε τέτοιες ομάδες δε διευκολύνει την περικοπή της γεωμετρίας ούτε καθιστά αποδοτική τη διάσχιση της ιεραρχίας για σχεδίαση. Παρόλα αυτά, εξυπηρετεί καλύτερα το σκοπό της συγκεκριμένης εφαρμογής του αρχιτεκτονικού σχεδιασμού σε ό,τι αφορά στην καθαρότητα της απόδοσης των επιμέρους τμημάτων.

Από την άλλη πλευρά, η εσκεμμένη ιεραρχική κατάτμηση της σκηνής σε χωρικά συνεκτικές ομάδες αντικειμένων (π.χ. Σπίτι1, Σπίτι2, κλπ.) προσφέρει μια σημαντική αύξηση της απόδοσης στις περισσότερες περιπτώσεις, διότι η μη ορατή γεωμετρία, η οποία βρίσκεται στα φύλλα της ιεραρχίας, μπορεί να περικοπεί πολύ νωρίς με την εξαίρεση ολόκληρου υπο-δένδρου. Στο παράδειγμά μας, αν ένα ολόκληρο σπίτι είναι εκτός οπτικού πεδίου, τότε τα (προϋπολογισμένα) όριά του μπορούν να ελεγχθούν σε σχέση με την πυραμίδα παρατήρησης που σχηματίζει το οπτικό πεδίο. Έτσι, ολόκληρο το υπο-δένδρο της σκηνής που αντιστοιχεί στο σπίτι, δύναται να εξαιρεθεί από τη σχεδίαση με μια απλή πράξη.

Για εφαρμογές γραφικών πραγματικού χρόνου, η πιο κοινή πρακτική είναι να σχεδιάζονται οντολογικά μεν οι σκηνές αλλά δίνοντας βάρος και προσέχοντας τη χωρική διευθέτηση των αντικειμένων, ώστε να σχηματίζουν ανεξάρτητες, διακριτές χωρικά ομάδες. Τα εσωτερικά περιβάλλοντα κατασκευάζονται λαμβάνοντας υπόψη από την αρχή την περικοπή σε πραγματικό χρόνο με πύλες (portal culling) και BSP δένδρα. Ανοικτά, εξωτερικά περιβάλλοντα σχεδιάζονται συνήθως με τη λογική της δημιουργίας ιεραρχιών με μεγάλο συντελεστή διακλάδωσης για πιο αποδοτική περικοπή στο οπτικό πεδίο. Εκτός από τη βελτίωση της απόδοσης, αυτός ο σχεδιασμός προσφέρει καλύτερη διαχείριση πόρων, καθώς έτσι χτίζει κανείς αυτοτελή μοντέλα και κλειστά περιβάλλοντα (π.χ. ένα σπίτι) τα οποία μπορούν εύκολα να επαναληφθούν ως αντίγραφα μέσα στη σκηνή και να δώσουν μεγαλύτερες συναθροίσεις αντικειμένων (π.χ. μια μικρή πόλη). Όπως θα δούμε αργότερα, κάτι τέτοιο έχει και σημαντική επίπτωση στη μείωση της κατανάλωσης μνήμης μέσω του μηχανισμού των στιγμιοτύπων γεωμετρίας (geometry instancing).

Η υπερβολική διάσπαση της σκηνής σε ιεραρχικά στοιχεία μπορεί πολλές φορές να οδηγήσει στο αντίθετο από το επιθυμητό αποτέλεσμα, δηλαδή να επιβραδύνει τη σχεδίαση. Αυτό ενδέχεται να συμβεί για δύο λόγους. Πρώτο, η εφαρμογή τείνει να σπαταλά πολύ χρόνο επεξεργασίας για τη διάσχιση της ιεραρχίας της σκηνής, ενώ θα ήταν προτιμότερο κάποια τμήματα γεωμετρίας να σχεδιαστούν κι ας μη φαίνονται, προκειμένου να απλοποιηθεί το δένδρο. Δεύτερο, σε γραφικά που σχεδιάζονται στο hardware, μια πολύ λεπτή διαμέριση σε γεωμετρικές οντότητες αναγκαστικά παράγει πολυάριθμα, μικρά και πλεοναστικά σε πληροφορία ρεύματα γεωμετρικών δεδομένων προς τον επεξεργαστή γραφικών (π.χ. κοντά triangle strips και vertex arrays στο OpenGL) και προκαλεί συχνές αλλαγές στις καταστάσεις σχεδίασης (π.χ., αλλαγή χρώματος ή τρέχουσας εικόνας υφής). Κατά συνέπεια, εκτελείται ένας πολύ μεγάλος

αριθμός εντολών και διακινούνται πολύ περισσότερα γεωμετρικά δεδομένα στο υποσύστημα γραφικών από όσα πραγματικά απαιτούνται για τη σχεδίαση της εικόνας.

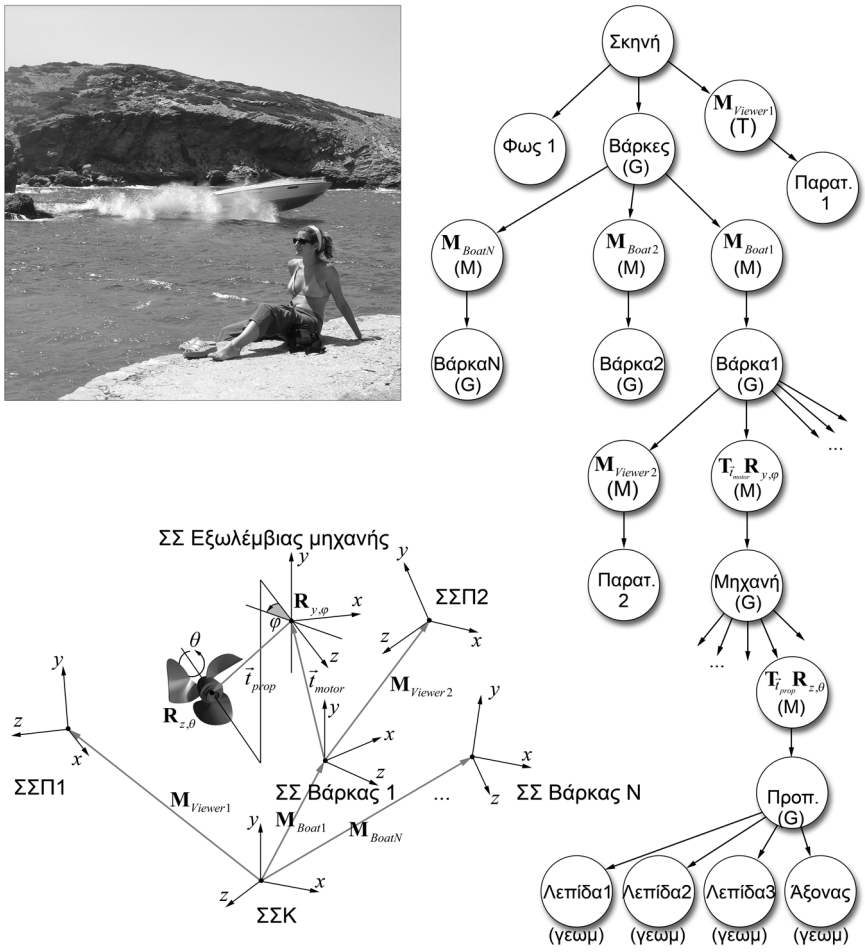
9.2 Γράφοι σκηνής

Μια ιεραρχία από γεωμετρικά στοιχεία που σχετίζονται οντολογικά και αλληλοεξαρτώνται χωρικά καλείται *γράφος σκηνής* (*scene graph*). Παρά το γεγονός ότι ένας ολοκληρωμένος ορισμός για το γράφο σκηνής είναι πολύ δύσκολο να διατυπωθεί καθώς περιλαμβάνει πολλά αντικείμενα και έννοιες, η παραπάνω απόδοση τουλάχιστον καλύπτει τα πιο κοινά χαρακτηριστικά των περισσότερων υλοποιήσεων του. Ένας γράφος σκηνής αποτελείται από κόμβους που παριστάνουν συναθροίσεις από γεωμετρικά στοιχεία (2Δ και 3Δ), μετασχηματισμούς, υπό συνθήκη διακλαδώσεις υπο-δένδρων, άλλες οντότητες που μπορούν να αναπαραχθούν (π.χ. ήχους), διεργασίες (κόμβους υπολογισμών και triggers), ή άλλους γράφους σκηνής.

Ένας γράφος σκηνής είναι ένας κατευθυνόμενος, ακυκλικός γράφος (δένδρο) από κόμβους, του οποίου οι ακμές δηλώνουν τη γεωμετρική ή λειτουργική εξάρτηση ενός κόμβου-παιδιού από τον πρόγονό του. Ένα σημαντικό στοιχείο για τους γράφους σκηνής είναι ότι δεν αποτελούν απλά μια δομή για την αποδοτική αποθήκευση γεωμετρικής πληροφορίας. Οι κόμβοι ενθυλακώνουν όλη τη λειτουργικότητα που απαιτείται για να αποδοθεί μια συμπεριφορά για κάθε τύπο τους και επομένως ακολουθούν την πλήρη λογική του αντικειμενοστραφούς μοντέλου προγραμματισμού (βλ. Ενότητα 9.2.4). Η ρίζα της ιεραρχίας είναι συνήθως μια αφηρημένη αναπαράσταση της σκηνής, σκοπός της οποίας είναι να παρέχει ένα σημείο εισόδου για τη διάσχιση της δεντρικής οργάνωσης των κόμβων και την προώθηση των τελούμενων λειτουργιών στα στοιχεία που περιέχει. Με αυτή τη λογική, όταν μια πράξη εφαρμόζεται σε έναν κόμβο, επηρεάζει όλα του τα παιδιά. Για παράδειγμα, ένας κόμβος μετασχηματισμού εφαρμόζει έναν υπολογισμένο πίνακα γεωμετρικού μετασχηματισμού σε όλα του τα παιδιά, τα οποία μπορούν και αυτά με τη σειρά τους να είναι επίσης κόμβοι μετασχηματισμού. Αν ένας κόμβος-διακόπτης κλείσει, ολόκληρο το υπο-δένδρο που κρέμεται από αυτόν, εξαιρείται από τη σχεδίαση (και πιθανά και από τους υπόλοιπους υπολογισμούς).

Η δυνατότητα της ομαδοποίησης γεωμετρικών οντοτήτων και της εκτέλεσης πράξεων πάνω τους ως ένα αντικείμενο, αποκρύπτοντας εντελώς την εσωτερική διάρθρωση και λειτουργία αυτού του τμήματος της σκηνής, καθιστά εύκολη τη μοντελοποίηση και κίνηση σύνθετων περιβαλλόντων και παρέχει τα μέσα για την κατασκευή αυτοτελών και επαναχρησιμοποιήσιμων δομικών στοιχείων.

Ας πάρουμε για παράδειγμα την περίπτωση ενός ταχύπλοου (Σχήμα 9.2). Είναι πολύ δύσκολο να περιγράψουμε απευθείας την κίνηση και τοποθέτηση κάθε επιμέρους μηχανικού εξαρτήματος αναφορικά με το καθολικό σύστημα συντεταγμένων. Η προπέλα περιστρέφεται γύρω από τον άξονα της, ο οποίος με τη σειρά του στρίβει δεξιά και αριστερά ακολουθώντας την κίνηση του πηδάλιου, ενώ η βάρκα ταξιδεύει και ταλαντεύεται πάνω στα κύματα της ταραγμένης θάλασσας. Το ζητούμενο είναι ποια



Σχήμα 9.2: *Παράδειγμα χωρικών εξαρτήσεων σε ένα γράφο σκηνής. Οι (M) είναι κόμβοι μετασχηματισμών, οι (G) είναι κόμβοι ομαδοποίησης (groups), και οι κόμβοι (geom) παριστάνουν τα πραγματικά γεωμετρικά δεδομένα.*

είναι η φαινόμενη κίνηση της προπέλας αναφορικά μ' έναν παρατηρητή που κάθεται στην κοντινή προκυμαία (Σχήμα 9.2, Παρατηρητής 1); Πώς περιγράφεται η κίνηση της προπέλας σε σχέση με κάποιον που βρίσκεται μέσα στη βάρκα (Σχήμα 9.2, Παρατηρητής 2);

Για να μπορέσουμε να απαντήσουμε σε τέτοιου είδους ερωτήσεις, χρειάζεται να κατασκευάσουμε μια ιεραρχία σχέσεων και εξαρτήσεων μεταξύ αντικειμένων· αυτή ακριβώς είναι η χρήση ενός γράφου σκηνής. Στο παράδειγμα μας, η προπέλα είναι τοποθετημένη στην εξωλέμβια μηχανή με μια μετατόπιση $\vec{t}_{\text{prop}}$ σε σχέση με το τοπικό σύστημα συντεταγμένων της μηχανής και επιτρέπεται να περιστρέφεται πάνω στον άξονα μετάδοσης της κίνησης (τοπικός άξονας z) σύμφωνα με ένα μετασχηματισμό περιστροφής $\mathbf{R}_{z,\theta}$. Η μηχανή στρίβει δεξιά και αριστερά γύρω από το σημείο ανάρτησής

της στην καρίνα ($\mathbf{R}_{y,\varphi}$), το οποίο σημείο είναι στην ουσία και η αρχή των αξόνων του τοπικού συστήματος συντεταγμένων της εξωλέμβιας (βλ. γωνία φ του Σχήματος 9.2). Η μηχανή είναι μετατοπισμένη κατά $\vec{t}_{\text{motor}}$ ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων όλης της βάρκας. Ο δεύτερος παρατηρητής θεωρείται σταθερός ως προς το σύστημα συντεταγμένων του σκάφους (καθισμένος κάπου στο εσωτερικό του—μετασχηματισμός $\mathbf{M}_{\text{Viewer2}}$ ως προς το σύστημα αναφορά της βάρκας). Η φαινόμενη κίνηση της προπέλας, όπως την αντιλαμβάνεται ο δεύτερος παρατηρητής, είναι ο σύνθετος γεωμετρικός μετασχηματισμός $\mathbf{M}_{\text{prop(Viewer2)}}$ που περιλαμβάνει τη σχετική μετατόπιση της αρχής αξόνων της εξωλέμβιας ως προς τον παρατηρητή, την περιστροφή της εξωλέμβιας, την μετατόπιση της προπέλας ως προς την εξωλέμβια μηχανή και την περιστροφή της προπέλας:

$$\mathbf{M}_{\text{prop(Viewer2)}} = \mathbf{M}^{-1}_{\text{Viewer2}} \mathbf{T}_{\vec{t}_{\text{motor}}} \mathbf{R}_{y,\varphi} \mathbf{T}_{\vec{t}_{\text{prop}}} \mathbf{R}_{z,\theta}. \tag{9.1}$$

Ο παρατηρητής είναι τοποθετημένος σε σχέση με το σύστημα αναφοράς της βάρκας σύμφωνα με το μετασχηματισμό $\mathbf{M}_{\text{Viewer2}}$, οπότε, κατά αντιστοιχία, το τοπικό σύστημα της βάρκας είναι μετασχηματισμένο δυϊκά αναφορικά με τον παρατηρητή 2 κατά $\mathbf{M}^{-1}_{\text{Viewer2}}$. Οι υπόλοιποι μετασχηματισμοί που περιγράφει η παραπάνω σχέση είναι το αποτέλεσμα της συσσώρευσης της μετατόπισης της εξωλέμβιας, ακολουθούμενη από την στροφή της γύρω από το σημείο ανάρτησης, τη μετατόπιση της προπέλας και την περιστροφή της τελευταίας. Αυτός ο σύνθετος μετασχηματισμός περιγράφει την κίνηση της προπέλας ως προς το σύστημα συντεταγμένων της βάρκας.

Στην Εξίσωση (9.1), καθώς διερευνούμε το μετασχηματισμό ενός ζητούμενου κόμβου ως προς ένα δεύτερο κόμβο αναφοράς, εκτελούμε μια ανοδική διάσχιση του δένδρου από το ζητούμενο κόμβο (την προπέλα εδώ) μέχρι τον κοινό πρόγονο μεταξύ του ζητούμενου κόμβου και του κόμβου αναφοράς. Στη συνέχεια, κατεβαίνουμε προς τον κόμβο του οποίου το τοπικό σύστημα χρησιμοποιούμε ως αναφορά, εφαρμόζοντας αντίστροφα όλους τους μετασχηματισμούς που μεσολαβούν (εδώ, τον $\mathbf{M}^{-1}_{\text{Viewer2}}$ — βλ. την ιεραρχία στο Σχήμα 9.2).

Αντί να χρησιμοποιηθεί ο κοινός κόμβος-πρόγονος για την αλλαγή της κατεύθυνσης διάσχισης, θα μπορούσε κανείς τυφλά να φτάσει ως την κορυφή του γράφου σκηνής (ΚΣΣ) και να κατέβει από εκεί προς τον κόμβο αναφοράς. Το αποτέλεσμα θα ήταν το ίδιο, αφού οι μετασχηματισμοί στο κοινό μονοπάτι της διαδρομής θα αλληλοαναιρούνταν. Προφανώς όμως, είναι οικονομικότερο από πλευράς υπολογισμών να εντοπισθεί ο κοινός πρόγονος και να αποφευχθούν οι άσκοπες μεταβάσεις (και οι πολλαπλασιασμοί πινάκων). Στη γενική περίπτωση, ο μετασχηματισμός ενός κόμβου στο επίπεδο k σε έναν κλάδο A αναφορικά με έναν άλλο κόμβο στο επίπεδο m ενός κλάδου B με κοινή ρίζα (που συνδέει τους κλάδους A και B) στο επίπεδο r, δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{M}_{A\to B} = \prod_{j=m}^{r+1} \mathbf{M}^{-1}_{Bj} \prod_{i=r+1}^{k} \mathbf{M}_{Ai}. \tag{9.2}$$

Η Εξίσωση (9.2) είναι η απευθείας συνέπεια της δυϊκής σχέσης μεταξύ μετασχη-

ματισμών και αλλαγής συστήματος αναφοράς. Εδώ, αλλάζουμε το σύστημα αναφοράς από τον κοινό κόμβο στο επίπεδο r σε αυτό του κόμβου αναφοράς (επίπεδο m στον κλάδο B). Δεδομένου ότι ο κόμβος αναφοράς είναι μετασχηματισμένος κατά $\mathbf{M}_{Br+1} \cdot \mathbf{M}_{Br+2} \cdot \ldots \cdot \mathbf{M}_{Bm}$ ως προς την κοινή ρίζα στο επίπεδο r, ο κόμβος r και οτιδήποτε εξαρτάται απ' αυτόν πρέπει να μετασχηματιστούν αντίστροφα για να επιδράσει πάνω τους η αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων.

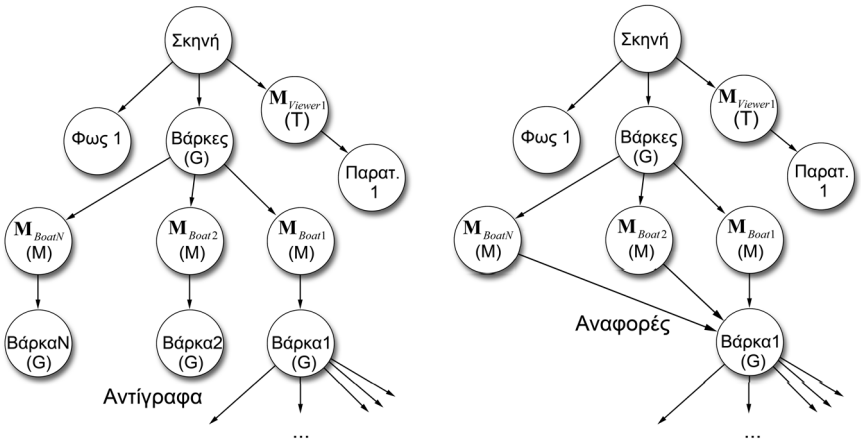
Το ταχύπλοο του παραδείγματος είναι μια αυτοτελής οντότητα με κινούμενα μέρη και πλήρη γεωμετρική περιγραφή. Μπορεί κανείς να το θεωρήσει ως ένα μαύρο κουτί και να μην ασχοληθεί με την εσωτερική του λειτουργία και μορφή όταν προσπαθεί να μοντελοποιήσει μια μαρίνα με διακόσια παρόμοια σκάφη μέσα.

Καθώς ο πρώτος παρατηρητής που κάθεται στην προκυμαία καταγράφει την εικόνα του ταχύπλοου που περνά μπροστά του, βλέπει το αποτέλεσμα της *λειτουργίας και κίνησης* του σκάφους, καθώς τα *εμφανή* τμήματά του αντικειμένου *αποτυπώνονται* στο πεδίο παράστασής του. Όπως θα αναλύσουμε στη συνέχεια, στην Ενότητα 9.2.4, αυτές οι λέξεις–κλειδιά αποτελούν στην ουσία τα κύρια συστατικά του κύκλου εργασιών ενός γράφου σκηνής και όλων των επιμέρους κόμβων του.

9.2.1 Οργάνωση των δεδομένων

Το μεγαλύτερο μέρος ενός γράφου σκηνής περιγράφει σχέσεις μεταξύ γεωμετρικών οντοτήτων και συναθροίσεων από κόμβους. Όπως είναι φυσικό, όλα τα καθαρά γεωμετρικά δεδομένα βρίσκονται στα φύλλα της ιεραρχικής δομής. Οι κόμβοι γεωμετρίας μπορεί να περιέχουν αταξινόμητα, δεικτοδοτημένα ή αδόμητα πολυγωνικά δεδομένα, σημεία ελέγχου παραμετρικών επιφανειών ή δεδομένα όγκου. Εναλλακτικά, οι γεωμετρικοί κόμβοι ενδέχεται ταυτόχρονα να συμμετέχουν σε μια δομή διαμέρισης χώρου, όπως για παράδειγμα σε ένα δένδρο από *περιβάλλοντα κιβώτια ευθυγραμμισμένα με τους άξονες* (axis-aligned bounding box — *AABB*-tree).

Ο παραπάνω μηχανισμός οργάνωσης δεδομένων απαντάται συχνά σε εφαρμογές που φορτώνουν μεγάλα σύνολα δεδομένων. Ο γράφος σκηνής αναπαριστά την οντολογική ιεραρχία των δεδομένων μαζί με κάποια ενδεχόμενη λειτουργικότητα, ενώ το σύστημα διαμέρισης χώρου εργάζεται με τα φύλλα του γράφου σκηνής για να επιταχύνει τις διαδικασίες σχεδίασης και αναζήτησης γεωμετρίας. Δεδομένου ότι για την αποδοτική διαμέριση χώρου απαιτείται σε πρώτη φάση η προεπεξεργασία και ταξινόμηση των γεωμετρικών στοιχείων στην κατάλληλη δομή, ο συνδυασμός γράφου σκηνής–διαμέρισης χώρου είναι αποτελεσματικός μόνο για στατικά δεδομένα· δηλαδή γεωμετρική πληροφορία η οποία έχει μια αναλλοίωτη αναπαράσταση ως προς το τοπικό της σύστημα αναφοράς και ούτε αλλάζει δυναμικά με το χρόνο ούτε παραμορφώνεται. Σε ορισμένες εφαρμογές πραγματικού χρόνου, ο γράφος σκηνής είναι ανεξάρτητος από το μηχανισμό διαμέρισης χώρου και χρησιμοποιείται μόνο για κινούμενα αντικείμενα, ενώ όλη η στατική γεωμετρία του περιβάλλοντος είναι απομονωμένη σε ένα σύστημα διαμέρισης χώρου με υψηλή απόδοση αναζήτησης, όπως είναι ένα BSP δένδρο.



Σχήμα 9.3: *Δημιουργία στιγμιότυπων γεωμετρίας.*

9.2.2 Στιγμιότυπα γεωμετρίας

Στο παράδειγμα της Ενότητας 9.2, το ταχύπλοο ήταν μοντελοποιημένο αναφορικά με ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων και όλο το υπο-δένδρο που αντιστοιχούσε στη συνάθροιση των εξαρτημάτων του το θεωρήσαμε ως ένα μαύρο κουτί — μια αφηρημένη αναπαράσταση της βάρκας. Θα μπορούσαμε να τοποθετήσουμε τον κόμβο «βάρκα» οπουδήποτε μέσα στο γράφο της συνολικής σκηνής και να δημιουργήσουμε αντίγραφα αυτού για να αναπαραστήσουμε πολλαπλές κινούμενες βάρκες μέσα στη σκηνή μας. Μια σημαντική ερώτηση που πρέπει να θέσουμε είναι, γιατί πρέπει να αντιγράψουμε φυσικά τον κόμβο για να δημιουργήσουμε πολλαπλά *πανομοιότυπα* αντικείμενα; Ένας διαδεδομένος μηχανισμός, ο οποίος σχετίζεται άμεσα με τις αντίστοιχες δομές που φυλάνε τη γεωμετρική πληροφορία του γράφου σκηνής, είναι η *δημιουργία στιγμιότυπων γεωμετρίας* (instancing). Αντί να κάνουμε ένα πλήρες αντίγραφο όλης της γεωμετρικής πληροφορίας, των μετασχηματισμών και λοιπών δεδομένων που είναι προσαρτημένα στον κόμβο, απλά δημιουργούμε μια αναφορά προς τον αρχικό κόμβο κάθε φορά που ένα ακριβές αντίγραφό του πρέπει να εισαχθεί στο γράφο σκηνής (Σχήμα 9.3). Η καθαρά δενδρική δομή του γράφου σκηνής με αυτή τη λειτουργία μετατρέπεται σε κατευθυνόμενο γράφο.

Προφανώς, η δημιουργία στιγμιότυπων κόμβων αντί για πραγματικά αντίγραφα μειώνει αρκετά την κατανάλωση μνήμης. Επιπλέον, ενδέχεται να επιταχύνει σημαντικά τους υπολογισμούς που χρειάζονται για την προσομοίωση και κίνηση των κόμβων μεταξύ διαδοχικών καρέ. Η προσομοίωση εκτελείται μία μόνο φορά για τον ένα κόμβο και όλα τα στιγμιότυπα που αναφέρονται σε αυτόν επαναχρησιμοποιούν τα ίδια ενημερωμένα δεδομένα. Για παράδειγμα, η ενημέρωση της περιστροφής $\mathbf{R}_{\vec{v},\theta(k+1)}$ της προπέλας στο καρέ $k+1$,

$$\mathbf{R}_{\vec{v},\theta(k+1)} : \theta(k+1) = \theta(k) + 2\pi \cdot \Delta t \cdot \mathrm{rpm}/60$$

μπορεί να εκτελεστεί την πρώτη μόνο φορά που, μέσω μιας αναφοράς, καλείται η μέθοδος προσομοίωσης του κόμβου. Από εκεί και ύστερα, ο κόμβος μπορεί να μαρκαριστεί ως «επεξεργασμένος» για την τρέχουσα χρονική στιγμή (τρέχον καρέ). Οι κλήσεις στη μέθοδο προσομοίωσης από τις υπόλοιπες αναφορές, ελέγχοντας τη σήμανση του κόμβου ως επεξεργασμένο, θα παρακάμπτουν τον υπολογισμό του πίνακα μετασχηματισμού και θα προχωρούν στη χρήση του ήδη υπολογισμένου αποτελέσματος. Στην πράξη, ολόκληρο το υπο-δένδρο του ταχύπλοου θα διασχιζόταν και θα γίνονταν οι σχετικοί υπολογισμοί την πρώτη φορά που η διάσχιση κάποιου άλλου κόμβου έφτανε ως εκεί στο τρέχον καρέ και στη συνέχεια θα «ισοπεδωνόταν», δηλαδή θα υπολογίζονταν όλοι οι ιεραρχικοί μετασχηματισμοί από τη ρίζα του υπο-δένδρου αυτού και κάτω και θα εφαρμόζονταν στη γεωμετρία, μία φορά μόνο. Στο OpenGL [Sega04], αυτό θα ήταν ισοδύναμο με τη δημιουργία μιας λίστας σχεδίασης (display list) μετά την πρώτη επίσκεψη στο αντικείμενο για το τρέχον καρέ, η οποία θα περιελάμβανε τους υπολογισμένους μετασχηματισμούς και τη σειρά εκτέλεσής τους στα γεωμετρικά δεδομένα. Η λίστα αυτή θα χρησιμοποιούνταν για σχεδίαση, χωρίς να ξανα-υπολογιστεί, τόσες φορές όσα και τα στιγμιότυπα του κόμβου που παριστάνει.

Ο παραπάνω μηχανισμός για τη δημιουργία στιγμιότυπων «παγώνει» τις εσωτερικές λειτουργίες και την κίνηση ενός κόμβου και καθιστά τόσο τους υπολογισμούς όσο και την αποθήκευση του κόμβου πολύ πιο αποδοτικές. Παρόλα αυτά, δεν ανταποκρίνεται πάντα στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Στο παράδειγμά μας, καθώς κάθε βάρκα ακολουθεί μια διαφορετική διαδρομή καθώς κινείται, η εξωλέμβια μηχανή της καθεμιάς θα πρέπει να εκτελεί διαφορετική στροφή, έτσι ώστε να δικαιολογείται η πορεία που ακολουθεί το αντίστοιχο σκάφος και να γίνεται η κίνηση πιστευτή. Αν όλα τα στιγμιότυπα επαναχρησιμοποιούσαν τα ίδια δεδομένα προσομοίωσης, τότε δεν θα μπορούσαμε ποτέ να πάρουμε αυτές τις παραλλαγές στην κίνηση. Το ίδιο θα συνέβαινε αν ο κόμβος που αναπαράγεται περιείχε ένα διακόπτη, ο οποίος θα έπρεπε να ενεργοποιείται χωριστά για κάθε στιγμιότυπο. Σε τέτοιες καταστάσεις, η δημιουργία στιγμιότυπων μπορεί να αφορά μόνο στο κομμάτι της αποθήκευσης της γεωμετρικής πληροφορίας στη μνήμη και όχι σε κάποια άλλη πράξη με τον κόμβο αυτό (π.χ. προσομοίωση). Αυτό επηρεάζει και τη σειρά με την οποία γίνεται η διάσχιση των κόμβων για την εκτέλεση των πράξεων· ένα βήμα προσομοίωσης για τον κόμβο που επαναλαμβάνεται πρέπει να ακολουθείται αμέσως από τη σχεδίαση του αποτελέσματος. Η προσομοίωση και η σχεδίαση δεν μπορούν να γίνουν πια ως ανεξάρτητα περάσματα για όλη τη σκηνή, εξαιτίας της εξάρτησης του δεύτερου βήματος από το πρώτο, για κάθε αντιγραμμένο κόμβο χωριστά.

9.2.3 Διάσχιση και περικοπή γράφου σκηνής

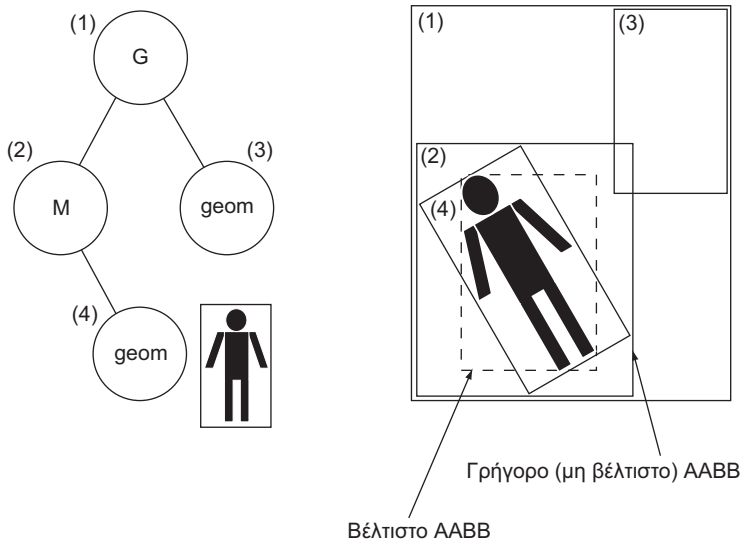
Σχετικά με τη λειτουργικότητα της εφαρμογής και τον προγραμματισμό, το κύριο πλεονέκτημα της αναπαράστασης του τριδιάστατου κόσμου με γράφο σκηνής είναι το γεγονός ότι κάθε πράξη που θέλουμε να εκτελέσουμε πάνω στα δεδομένα μας την εφαρμόζουμε απλά στη ρίζα της ιεραρχίας (σκηνή) και αυτή προωθείται αυτόματα σε όλα τα τμήματα της σκηνής, μέσω του μηχανισμού της διάσχισης του γράφου σκηνής.

Οι τέσσερις κύριες πράξεις που εφαρμόζουμε πάνω στη σκηνή είναι η *αρχικοποίηση*, η *προσομοίωση*, η *περικοπή* και η *σχεδίαση*. Καθεμία από αυτές αντιστοιχεί σε μια διαδικασία που εφαρμόζεται ιεραρχικά σε όλους τους κόμβους.

Η διαδικασία της προσομοίωσης είναι υπεύθυνη για τον προσδιορισμό όλων των εσωτερικών παραμέτρων του κόμβου και την ενημέρωση όλων των μεταβλητών εμφάνισης και κίνησης, σύμφωνα με μια συμπεριφορά εξαρτώμενη από το είδος και την αρχικοποίηση του κόμβου. Μερικές φορές η διαδικασία αυτή αναφέρεται ως στάδιο κίνησης (animation stage) ή εφαρμογής (application stage), δίνοντας έμφαση αντίστοιχα στην επίδραση της διεργασίας στο οπτικό αποτέλεσμα ή στο γεγονός ότι αυτό το στάδιο είναι ανεξάρτητο από τους αλγόριθμους της καθαρής απεικόνισης.

Η περικοπή στους γράφους σκηνής είναι στενά συνδεδεμένη με τις εξαρτήσεις μεταξύ κόμβων. Τυπικά, κάθε κόμβος θεωρείται ότι «περιέχει» όλα του τα παιδιά, με την έννοια ότι, αν κατά την περικοπή μαρκαριστεί η ρίζα ενός υπο-δένδρου ως μη ορατή, για να είναι αποτελεσματική η διαδικασία θα πρέπει και όλοι οι κόμβοι από εκεί και κάτω να μπορούν να θεωρηθούν επίσης μη ορατοί και άρα ολόκληρο το υπο-δένδρο να εξαιρεθεί από τη σχεδίαση. Αντίστροφα, αν ένας κόμβος ομαδοποίησης θεωρηθεί ορατός, θα πρέπει να ελεγχθούν όλα του τα παιδιά ένα προς ένα διότι μπορεί κάποια να είναι μη ορατά εξαιτίας μερικής ορατότητας του προγόνου τους. Το αποτέλεσμα της περικοπής συνήθως προκύπτει από τον έλεγχο των ορίων του περιβάλλοντος όγκου του κόμβου σύμφωνα με το επιλεγμένο κριτήριο ορατότητας, π.χ. αν περιέχεται ολικώς, μερικώς ή καθόλου στο χώρο της πυραμίδας που χρησιμοποιούμε στην περικοπή παρεμπόδισης ή οπτικού πεδίου (frustum/occlusion culling). Για έναν κόμβο που περιλαμβάνει άλλους κόμβους-παιδιά, ο περιβάλλον όγκος του μεταβάλλεται έτσι ώστε να αντανακλά τα συνολικά όρια όλων των παιδιών του.

Αν ένας κόμβος περιέχει έναν κλάδο της ιεραρχίας που υπάρχει κίνηση, τα καταγεγραμμένα όριά του πρέπει να προσαρμόζονται δυναμικά κάθε φορά που τα αντίστοιχα όρια κάποιου από τα παιδιά του αλλάζουν. Ο επανυπολογισμός των ακριβών ορίων ενός κόμβου γεωμετρίας απαιτεί να διατρέξει κανείς όλες τις κορυφές που περιέχει για να εντοπίσει τις ελάχιστες και μέγιστες τιμές, ενώ για κάποιους περιβάλλοντες όγκους απαιτείται και η εύρεση ορμών και κυρίων αξόνων. Για την περίπτωση κινούμενων υποδένδρων που έτσι κι αλλιώς είναι αναγκαία η σειριακή επεξεργασία όλων των κορυφών που περιέχουν (π.χ., στη σκελετική κίνηση), αυτός ο έλεγχος δεν προσθέτει σημαντική επιβάρυνση. Από την άλλη μεριά, για την κίνηση μη παραμορφώσιμων στερεών, αυτός ο υπολογισμός απαιτεί αρκετό υπολογιστικό χρόνο και μπορεί να είναι απαγορευτικός για μεγάλα μοντέλα. Μια πολύ κοινή τακτική που υιοθετείται εναλλακτικά, όταν η ταχύτητα είναι πιο σημαντική από την ακρίβεια των ελέγχων ορατότητας, είναι η προσαρμογή του περιβάλλοντος όγκου του κόμβου-προγόνου με βάση τα όρια των μετασχηματισμένων περιβαλλόντων όγκων των παιδιών του. Για παράδειγμα, αν μια γεωμετρική οντότητα περιβάλλεται από ένα τοπικό κιβώτιο προσανατολισμένο προς τους άξονες και συνδέεται έμμεσα μέσω ενός κόμβου μετασχηματισμού με τον κόμβο ομαδοποίησης, τότε τα όρια του κόμβου ομαδοποίησης μπορούν να εξαχθούν από τις οκτώ μετασχηματισμένες κορυφές του κιβωτίου (Σχήμα 9.4). Αυτή η λύση δεν είναι βέλτιστη από πλευράς αποδοτικότητας περικοπής (ο περιβάλλον όγκος αφήνει αρκετό



Σχήμα 9.4: *Υπολογισμός ορίων για κόμβους ομαδοποίησης σε εφαρμογές πραγματικού χρόνου. Το προσανατολισμένο προς τους άξονες περιβάλλον κιβώτιο (AABB) δεν είναι μεν βέλτιστο, αλλά μπορεί να υπολογιστεί πολύ γρήγορα.*

κενό χώρο στο εσωτερικό του) καθώς τα όρια ενός μετασχηματισμένου περιβάλλοντος όγκου είναι εν γένει μεγαλύτερα από τα όρια της μετασχηματισμένης γεωμετρίας που περικλείει ο όγκος. Τη λεπτομερή περικοπή μπορεί να τη χειριστεί ένας μηχανισμός διαμέρισης χώρου σε επίπεδο καταληκτικών κόμβων γεωμετρίας, αν αυτό είναι επιθυμητό.

Η διαδικασία της σχεδίασης κινείται αναδρομικά από την κορυφή της ιεραρχίας προς τα κάτω και εφαρμόζει τους αλγόριθμους σχεδίασης σε κάθε ορατό και ικανό να σχεδιαστεί κόμβο. Στην άμεση απεικόνιση (direct rendering) και στην παρακολούθηση ακτίνων πρώτου επιπέδου (βλ. Κεφάλαιο 15), τα μαρκαρισμένα ως μη ορατά υπο-δένδρα δεν τα επισκέπτεται σε καμία περίπτωση η διαδικασία σχεδίασης.

Κατά τη διάρκεια της σχεδίασης, ανεξάρτητα από την απεικονιστική μέθοδο (άμεση απεικόνιση ή εκπομπή ακτίνων), κάθε φορά που απαντάται ένας κόμβος μετασχηματισμού, η τρέχουσα κατάσταση των δεδομένων σχεδίασης αλλάζει έτσι ώστε να ακολουθεί το μετασχηματισμό. Για παράδειγμα, αν χρησιμοποιούμε άμεση απεικόνιση με OpenGL, όταν μια κλήση σχεδίασης γίνεται σε έναν κόμβο μετασχηματισμού καθώς κατεβαίνουμε έναν κλάδο της ιεραρχίας, ο ισχύων μέχρι αυτή τη στιγμή πίνακας μετασχηματισμού μπαίνει σε μια στοίβα και ο πίνακας μετασχηματισμού που συναντήσαμε πολλαπλασιάζεται μαζί του για να μας δώσει τον ενημερωμένο συνολικό πίνακα γι' αυτό το επίπεδο του κλάδου. Καθώς η «πρώτα κατά βάθος» διάσχιση των κόμβων επιστρέφει σε ανώτερο επίπεδο, εξάγονται από τη στοίβα οι μετασχηματισμοί που αντιστοιχούν στο τρέχον επίπεδο.

9.2.4 Προγραμματισμός με γράφους σκηνής

Όπως έχει αναφερθεί, σε ένα γράφο σκηνής οι περισσότεροι κόμβοι συνήθως είναι αυτο-διαχειριζόμενοι, με την έννοια ότι διαθέτουν τη δική τους λειτουργικότητα για σχεδίαση και τη δική τους συμπεριφορά. Ας πάρουμε για παράδειγμα έναν κόμβο-ρότωρα, δηλαδή έναν εξειδικευμένο κόμβο μετασχηματισμού, ο οποίος περιστρέφει τα παιδιά του γύρω από έναν προκαθορισμένο από το χρήστη άξονα αναφορικά με το τοπικό του σύστημα αναφοράς. Οι κόμβοι χρειάζεται να υπολογίσουν τη γωνία περιστροφής για το τρέχον καρέ με βάση τον απόλυτο χρόνο, τη χρονική στιγμή που ξεκίνησε η περιστροφή και την κατάσταση του κόμβου (ενεργός/ανενεργός, σταματημένος κλπ). Αυτή η λειτουργικότητα μπορεί να υλοποιηθεί ως μια διαδικασία προσομοίωσης του ίδιου του κόμβου. Όντας κόμβος ομαδοποίησης, παρότι δεν είναι οντότητα που μπορεί να σχεδιάσει τον εαυτό της, πρέπει να μεταβιβάσει στα παιδιά του την εντολή σχεδίασης που θα φτάσει σε αυτόν. Συνεπώς, ο κόμβος πρέπει να παρέχει και μια διαδικασία σχεδίασης, της οποίας ο ρόλος είναι να σχεδιάζει όλους τους εξαρτώμενους κόμβους. Παρομοίως, ο κόμβος είναι υπεύθυνος για τον υπολογισμό και τον έλεγχο των ορίων του σε σχέση με οποιοδήποτε κριτήριο περικοπής του παρέχουμε. Αυτή η κατανεμημένη λειτουργία του γράφου σκηνής παραπέμπει σε μια αντικειμενοστραφή σχεδίαση των κόμβων και εκμεταλλεύεται τον πολυμορφισμό και την αφηρημένη οργάνωση των τύπων δεδομένων.

Τυπικά, όλοι οι κόμβοι ενός γράφου σκηνής κληρονομούνται από μια κοινή κλάση «γενικευμένος κόμβος» και παραλλάσσουν τη συμπεριφορά τους καθώς κληρονομούν κοινά χαρακτηριστικά και αντικαθιστούν ή προσαυξάνουν την κεκτημένη συμπεριφορά τους. Η διεπαφή ενός γενικευμένου κόμβου υψηλού επιπέδου θα έχει σε γενικές γραμμές την παρακάτω μορφή:

```
class Node
{
protected:
    bool active, culled;
public:
    Node();
    virtual void init();
    virtual void simulate();
    virtual void cull();
    virtual void draw();
    virtual void reset();
};

class Group : Node
{
protected:
    vector<Node*> children;
    Bvolume extents;
public:
    Group();
```

```
    void add(Node *n);
    void remove(int i);
    Node * getChild(int i);
    int  getNumChildren();
    virtual void init();
    virtual void simulate();
    virtual void cull();
    virtual void draw();
};
```

Οποιοσδήποτε κόμβος επεκτείνει την αφηρημένη κλάση `Node`, κληρονομεί τις τέσσερις βασικές πράξεις. Οι κόμβοι ομαδοποίησης είναι απόγονοι της κλάσης `Group` και μοιράζονται μια κοινή λειτουργικότητα: παρέχουν μια λίστα από τους κόμβους-παιδιά τους και εκτελούν τις βασικές πράξεις πάνω τους. Πιο σύνθετες υπο-κλάσεις της `Group` ενδεχομένως επεκτείνουν αυτή τη βασική συμπεριφορά προσθέτοντας εξειδικευμένες μεθόδους, όπως στην περίπτωση ενός κόμβου `Transformation` ή ενός πολλαπλού επιλογέα (`Selector`), ο οποίος έχει ενεργοποιημένο ένα από τα παιδιά του κάθε στιγμή. Ένα πολύ βασικό — κοινό — χαρακτηριστικό όλων των κόμβων τύπου `Group` είναι η διάσχιση των παιδιών τους, η οποία υλοποιείται ως μια επαναληπτική κλήση μιας μεθόδου σε όλους τους διαθέσιμους κόμβους στη λίστα παιδιών τους. Εξαιτίας του πολυμορφισμού, ένα στιγμιότυπο κλάσης που προέρχεται από τη `Group` μπορεί να καλέσει μια από τις μεθόδους init(), draw(), cull(), ή simulate() κάποιου από τα παιδιά του, χωρίς να ενδιαφέρεται για την ακριβή κλάση αυτού. Έτσι, όλες οι κλάσεις που ανήκουν στο γράφο σκηνής διαμοιράζονται μια κοινή διεπαφή:

```
void Group::draw()
{
    vector <Node>::size_type i,sz;
    sz = children.size();
    for (i=0; i<sz; i++)
        children[i]->draw();
}

void Geometry::draw()
{
    if (!enabled || culled)
        return;

    // ... σχεδίασε τη γεωμετρία

}
```

Τα βήματα της περικοπής, της αρχικοποίησης και της προσομοίωσης καθορίζονται με παρόμοιο τρόπο.

Η σειρά της κλήσης κάθε μεθόδου κατά την εκτέλεση του κώδικα προσδιορίζεται από τον τρόπο διάσχισης του γράφου σκηνής. Συνήθως, η αρχικοποίηση και τα άλλα

τρία επαναλαμβανόμενα βήματα εκτελούνται επί του συνολικού γράφου σκηνής κάθε φορά — και όχι ανά κόμβο. Μετά την αρχικοποίηση, ο τυπικός κύκλος εργασιών του γράφου σκηνής περιλαμβάνει την κλήση των μεθόδων προσομοίωσης, περικοπής και σχεδίασης της ρίζας του δένδρου (`Scene` — είναι κάποια υπο-τάξη και αυτή του κόμβου `Group`). Επομένως, συμβαίνουν τρεις διακριτές διασχίσεις του γράφου σκηνής πριν οπτικοποιηθεί το αποτέλεσμα:

```
Scene *myScene = new Scene();
myScene->load("village.scn");

myScene->init();

while (notTerminating)
{

    // ... άλλες πράξεις, όπως η ανάγνωση δεδομένων
    // από τις συσκευές εισόδου

    myScene->simulate();
    myScene->cull();
    myScene->draw();

}
```

Αυτός ο τρόπος διάσχισης του γράφου σκηνής βοηθάει στο να παραμένουν συγχρονισμένοι οι κόμβοι από πλευράς κατάστασης και τιμές παραμέτρων, ενώ διευκολύνεται και η εφαρμογή μιας στρατηγικής *ενημέρωσης με υστέρηση*. Σύμφωνα με αυτή τη στρατηγική, αλλαγές στην κατάσταση μιας οντότητας κατά την προσομοίωση που εκτελεί ο αντίστοιχος κόμβος δεν παράγουν ένα άμεσο αποτέλεσμα (π.χ. ενημέρωση ενός πίνακα μετασχηματισμού). Αντίθετα, υπολογίζονται μια φορά μόνο οι τελικές τιμές των παραμέτρων για ολόκληρη την ιεραρχία και εκτελείται η περικοπή και η σχεδίαση στο τέλος. Η ενημέρωση με υστέρηση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν ένας βαρύς υπολογισμός πρέπει να επαναληφθεί κάθε φορά που μια παράμετρος αλλάζει τιμή. Για παράδειγμα, όταν N κόμβοι συμμετέχουν σε μια προσομοίωση μηχανικής, θα πάρουμε μια τελική θέση και στροφή για τον καθένα, μόνο όταν όλοι ολοκληρώσουν το στάδιο προσομοίωσής τους, και δεν έχει νόημα να ενημερώνουμε πιο πριν τους πίνακες γεωμετρικών μετασχηματισμών τους.

Καθώς ένας γράφος σκηνής, του οποίου οι κόμβοι αναπαριστούν αυτόνομες οντότητες, γίνεται ολοένα και πιο πολύπλοκος, προκύπτει η ανάγκη να ξεφύγουμε από τον απόλυτα ιεραρχικό έλεγχο ροής εκτέλεσης. Ως μέρος της διαδικασίας προσομοίωσης, οι κόμβοι μπορούν να επικοινωνούν μεταξύ τους με απευθείας κλήση μεθόδων ή με *αποστολή μηνυμάτων*. Στη δεύτερη (και κομψότερη) περίπτωση, κάθε κόμβος πρέπει να επεκταθεί, έτσι ώστε να υποστηρίζει μια ουρά μηνυμάτων και πιθανά έναν πίνακα αντιστοίχισης γεγονότων (event map):

```
class NodeMessage
{
    Node *from, *to;
    int ID;
    void * params;
};
typedef EventID int;

class Node
{
protected:
...
    vector<NodeMessage *> msgQueue;
    multimap<EventID,NodeMessage *> eventMap;

    // Βγάλε από την ουρά όλα τα εναπομένοντα μηνύματα
    // και κάλεσε τις αντίστοιχες μεθόδους

    void processMessages();

    // Στείλε μηνύματα σε άλλους κόμβους, ανάλογα με το ποιοι
    // είναι δηλωμένοι στον πίνακα αντιστοίχισης γεγονότων

    void dispatchMessages();
public:
...

    // πρόσθεσε ένα μήνυμα στην ουρά μηνυμάτων

    void message( NodeMessage *msg );

    // Κατέγραφε την αντιστοίχιση συμβάντος με κόμβο που
    // θα ειδοποιηθεί με το σχετικό μήνυμα και τις
    // παραμέτρους του

    registerEvent( EventID evt, Node* target,
                   int msgID, void* params );
};
```

Η ουρά μηνυμάτων είναι απαραίτητη καθώς ένας κόμβος ενδέχεται να λάβει πολλαπλά μηνύματα από έναν απροσδιόριστο από την αρχή αριθμό άλλων κόμβων. Ο πίνακας αντιστοίχισης γεγονότων βοηθά στη δημιουργία ενός μηχανισμού για την αυτόματη απάντηση σε αλλαγές κατάστασης ενός κόμβου και την ενημέρωση άλλων κόμβων γι αυτές (ιδιαίτερα χρήσιμο για κόμβους σκανδαλιστές – triggers). Για παράδειγμα, έστω ένα δωμάτιο γεμάτο με έπιπλα. Το φως είναι αρχικά σβηστό και επομένως δε χρειάζεται τα έπιπλα να δημιουργούν σκιές, οπότε οι τελευταίες είναι απενεργοποιημένες γι' αυτούς τους κόμβους γεωμετρίας. Όταν, εξαιτίας ενός μηνύματος ή λόγω εσωτερικής λειτουργίας ανάψει το φως, οι κόμβοι γεωμετρίας των επίπλων πρέπει να ειδοποιηθούν αντίστοιχα από τον κόμβο-φως για να ενεργοποιήσουν τη δημιουργία σκιών. Ακόμα, μπορεί να θέλουμε να ενεργοποιήσουμε ένα εφέ φωταύγειας γύρω από το λαμπτήρα:

```
Light * bulb;
Geometry *furniture, *halo;
...
bulb->registerEvent( EVENT_ON, furniture, MSG_SHADOWS_ON, NULL);
bulb->registerEvent( EVENT_ON, halo, MSG_ENABLE, NULL);
```

Στη βελτιωμένη έκδοση της κλάσης Node class προσθέσαμε δύο νέες προστατευμένες μεθόδους, την processMessages() και την dispatchMessages(). Για να γίνει σωστός ο χρονισμός των μηνυμάτων μεταξύ των κόμβων, αυτές οι λειτουργίες πρέπει να εκτελεστούν αντίστοιχα πριν και μετά το στάδιο της προσομοίωσης ολόκληρου του γράφου σκηνής. Συνεπώς, χρειάζεται να εισάγουμε δύο επιπρόσθετες μεθόδους που θα καλούνται πριν και μετά την προσομοίωση για ολόκληρη τη σκηνή:

```
void Scene::simulate()
{
    preSimulate();
    Group::simulate();
    postSimulate();
}
...
void Group::preSimulate()
{
    vector <Node>::size_type i,sz;
    sz = children.size();
    processMessages();
    for (i=0; i<sz; i++)
        children[i]->preSimulate();
}
...
void Node::preSimulate()
{
    processMessages();
    ...
}
```

Παρόμοιες μεθόδους για την εκτέλεση κώδικα πριν και μετά από μια βασική πράξη κόμβου μπορούμε να υλοποιήσουμε και για τα στάδια της περικοπής και της σχεδίασης. Η κλήση τους μπορεί να γίνει είτε τοπικά για κάθε κόμβο (καλούνται ακριβώς πριν και μετά από την αντίστοιχη πράξη για κάθε κόμβο χωριστά) είτε συνολικά για όλη τη σκηνή, όπως ακριβώς συνέβη στον παραπάνω κώδικα για την preSimulate() και την postSimulate(). Για παράδειγμα, όταν χρησιμοποιούμε το OpenGL για σχεδίαση, ένας κόμβος μετασχηματισμού χρειάζεται να υλοποιεί μια μέθοδο pre-draw και μια post-draw για να εισάγει και απομακρύνει αντίστοιχα τον τρέχοντα πίνακα μετασχηματισμού από τη στοίβα πινάκων του OpenGL. Αντίθετα, μια καθολική μέθοδος post-draw της σκηνής μπορεί να ενεργοποιεί την εναλλαγή καταχωρητών εικόνας (buffer swap).

9.3 Κατανεμημένη σχεδίαση σκηνής

9.3.1 Εισαγωγή

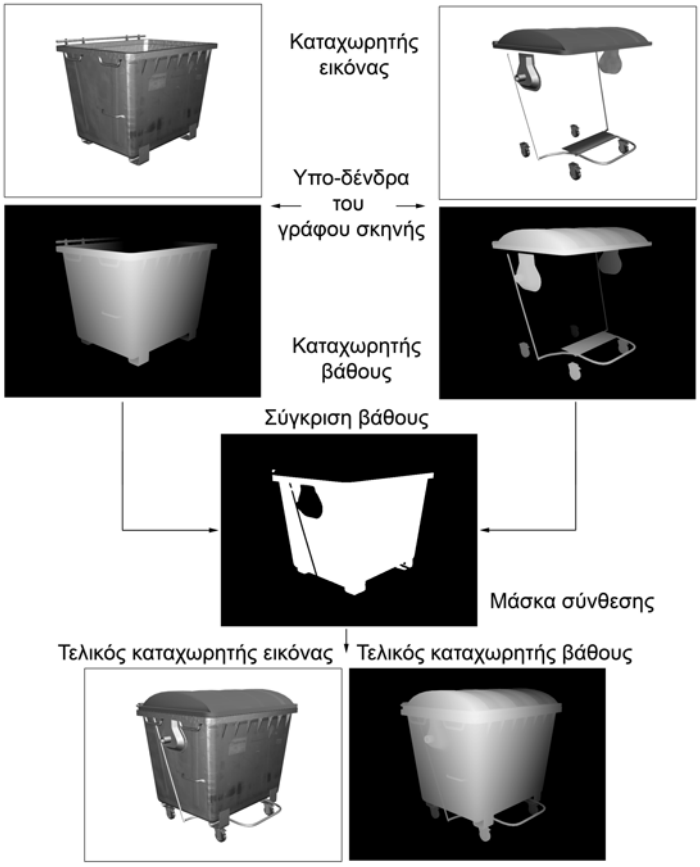
Η συνεχής επιδίωξη της απόδοσης λεπτομέρειας και ρεαλισμού τόσο στα γραφικά πραγματικού χρόνου όσο και στα φωτορεαλιστικά γραφικά (μη πραγματικού χρόνου), όπως επίσης και στις εκ φύσεως παράλληλες εφαρμογές όπως είναι τα παιχνίδια πολλαπλών χρηστών και η εικονική πραγματικότητα, κατέστησαν αναγκαίο το διαμοιρασμό των δεδομένων και του φόρτου σχεδίασης σε πολλαπλές μονάδες επεξεργασίας. Μια μονάδα επεξεργασίας για μας δεν είναι απαραίτητα ένας ξεχωριστός υπολογιστής, όπως ένας κόμβος συστοιχίας υπολογιστών (cluster node) ή ένας υπολογιστής συνδεδεμένος στο διαδίκτυο. Μπορεί να είναι εξειδικευμένος συνεπεξεργαστής για παρακολούθηση ακτίνων, μια ομάδα παράλληλων πυρήνων του κύριου επεξεργαστή, ή ένα παράλληλο και επεκτάσιμο υποσύστημα γραφικών. Συνεπώς, θα πρέπει να εξετάσουμε στη γενικότερη δυνατή περίπτωση το πρόβλημα της οργάνωσης και διαχείρισης ενός κατανεμημένου συστήματος απεικόνισης με παράλληλες διεργασίες που σχεδιάζουν τμηματικά τον ίδιο τριδιάστατο κόσμο. Για την ανάλυσή μας θα θεωρήσουμε ότι η σκηνή δε βρίσκεται απαραίτητα σε διαμοιραζόμενη μνήμη και ότι οι ρυθμοί μετάδοσης δεδομένων μεταξύ των μονάδων επεξεργασίας ποικίλουν.

Η πράξη της σχεδίασης μιας σκηνής μπορεί να σπάσει με τρεις κύριους τρόπους: στο πεδίο του χώρου, στο πεδίο του χρόνου, και στο πεδίο της εικόνας. Η διαδικασία της απεικόνισης ενός καρέ της τελικής συνθετικής εικόνας αποτελείται από τέσσερα στάδια: κατάτμηση, μοίρασμα, σχεδίαση και σύνθεση αποτελέσματος.

9.3.2 Μηχανισμοί κατανεμημένης σχεδίασης

Όταν κατανέμεται η σχεδίαση μιας σκηνής σε μονάδες επεξεργασίας στο πεδίο του χώρου, ένα τμήμα της σκηνής μεταφέρεται σε κάθε μονάδα, σχεδιάζεται ανεξάρτητα και στο τέλος οι επιμέρους εικόνες συνδυάζονται για να σχηματιστεί το τελικό αποτέλεσμα. Τυπικά, η σκηνή χωρίζεται με βάση την ιεραρχική δομή του γράφου σκηνής ή της δομής διαμέρισης χώρου που χρησιμοποιείται. Στη συνέχεια, τα τμήματα (υποδένδρα στην περίπτωση του γράφου σκηνής) κατανέμονται στις ελεύθερες μονάδες σύμφωνα με κάποιο κριτήριο ισοκατανομής φόρτου και σχεδιάζονται. Τα μερικά αποτελέσματα συγκεντρώνονται στη μονάδα-αφέντη (master unit) και συντίθεται η τελική εικόνα.

Στην περίπτωση της άμεσης απεικόνισης, οι επιμέρους εικόνες που παράγουν οι μονάδες δε διαθέτουν κάποια μορφή ταξινόμησης ως προς το βάθος και επικαλύπτονται στο πεδίο της εικόνας (Σχήμα 9.5). Τα περιεχόμενα μόνο των καταχωρητών εικόνας δεν είναι δυνατό επομένως να συνδυαστούν και η συνήθης πρακτική είναι να φυλάσσεται και να μεταδίδεται και ο καταχωρητής βάθους στη μονάδα που αναλαμβάνει τη σύνθεση του αποτελέσματος [Theo89a]. Μια μονάδα (διεργασία που σχεδιάζει την τελική εικόνα) παίζει το ρόλο της *μηχανής σύνθεσης εικόνας* (compositing engine): μαζεύει τα τμηματικά αποτελέσματα σε μορφή εικόνων χρώματος και βάθους και επιλέγει



Σχήμα 9.5: *Παράδειγμα κατανεμημένης άμεσης απεικόνισης με μετα-ταξινόμηση σε δύο μονάδες σχεδίασης.*

για κάθε εικονοστοιχείο το χρώμα εκείνης της εισερχόμενης εικόνας που συνοδεύεται από την κοντινότερη τιμή βάθους ως προς τον παρατηρητή. Το χρώμα αναμιγνύεται στην τελική εικόνα σύμφωνα με το κανάλι διαφάνειας. Η παραπάνω λογική αποκαλείται *κατανεμημένη απεικόνιση με μετα-ταξινόμηση* (sort-last) [Moln94], διότι η απόφαση για το ποιο κομμάτι της εικόνας προκύπτει από ποια μονάδα βγαίνει στο τέλος της δημιουργίας του καρέ [Muel95, Whit92].

Μια προσέγγιση με παραλληλία ως προς τα δεδομένα *data-parallel* είναι δυνατή για την περίπτωση της παρακολούθησης ακτίνων (βλ. Κεφάλαιο 15). Τα δεδομένα της σκηνής κατανέμονται σε όλες τις μονάδες και μία από αυτές με το ρόλο του εξυπηρέτη [1] εκπέμπει ακτίνες, οι οποίες ανακατευθύνονται στις διαθέσιμες μονάδες για τον υπολογισμό της τομής ακτίνας με γεωμετρικές οντότητες [Chal98, Lin91]. Καθώς ο

[1] Εδώ, ένας εξυπηρέτης είναι ένας κόμβος του κατανεμημένου συστήματος που παράγει (εκπέμπει) μια ακτίνα. Δευτερεύουσες ακτίνες εκπέμπονται από άλλους κόμβους οι οποίοι συμπεριφέρονται ως σημεία συγκέντρωσης αποτελεσμάτων κι αυτοί, δηλαδή ως εξυπηρετητές για το επόμενο επίπεδο αναδρομής της παρακολούθησης ακτίνων.

εξυπηρετητής γνωρίζει την ιεραρχική εξάρτηση των δεδομένων που έχουν κατανεμηθεί στις μονάδες, μπορεί να συγκεντρώνει όλα τα αιτήματα για τομή ακτίνων με ένα συγκεκριμένο τμήμα της σκηνής και να τα στέλνει, κατά δέσμες, στην αντίστοιχη μονάδα για υπολογισμό τομών, όταν η τελευταία ελευθερωθεί. Ο παραπάνω αλγόριθμος ανήκει κι αυτός στις μεθόδους κατανεμημένης απεικόνισης με μετα-ταξινόμηση, διότι τα αποτελέσματα των τομών των ακτίνων με τη σκηνή πρέπει στο τέλος να ταξινομηθούν σύμφωνα με την απόσταση των σημείων τομής από την αφετηρία της ακτίνας· αυτό προφανώς, μπορεί να συμβεί μόνο όταν όλα τα αποτελέσματα για μια ακτίνα έχουν συγκεντρωθεί πίσω στον εξυπηρέτη. Επειδή η κατανομή των ακτίνων σε μονάδες είναι μια παράλληλη διεργασία χαμηλού επιπέδου, αυτή η αρχιτεκτονική απεικόνισης είναι κατάλληλη μόνο για στενά συνδεδεμένα παράλληλα συστήματα (συστήματα πολλαπλών πυρήνων ή προγραμματιζόμενους παράλληλους επεξεργαστές γραφικών — GPUs).

Οι μέθοδοι *κατανεμημένης απεικόνισης με προ-ταξινόμηση* εκτελούν σε πρώτη φάση μια διαμέριση του τελικού πεδίου παράστασης (πεδίο εικόνας ή άξονας χρόνου) και κάθε μονάδα σχεδίασης αναλαμβάνει ένα ή περισσότερα τμήματα [Fuch77, Muel95]. Η σύνθεση των σχεδιασμένων κομματιών είναι τετριμμένη στην περίπτωση αυτών των μεθόδων, καθώς τα συγκεντρωμένα κομμάτια εικόνας δεν έχουν καμία επικάλυψη.

Στην περίπτωση της παραγωγής κινούμενης ταινίας (όχι σε πραγματικό χρόνο), μια ευέλικτη και εύκολη στην υλοποίηση στρατηγική κατανεμημένης απεικόνισης με προ-ταξινόμηση είναι ο χωρισμός της ταινίας (πεδίο χρόνου) σε ξεχωριστά καρέ και η ανάθεση του καθενός σε μια μονάδα επεξεργασίας. Κάθε μονάδα διατηρεί ένα πλήρες αντίγραφο όλης της σκηνής καθώς και των εξωτερικών πηγών δεδομένων (π.χ. εικόνες υφής) και σχεδιάζει μια πλήρη εικόνα. Μόλις τελειώσει τη σχεδίαση, αναλαμβάνει το επόμενο διαθέσιμο καρέ κ.ο.κ. Αυτός ο τύπος κατανεμημένης απεικόνισης είναι τετριμμένα παράλληλος, με τη λογική ότι δεν ανταλλάσσεται καμία πληροφορία και δεν απαιτείται κανένας συγχρονισμός, εκτός από την αρχική αντιγραφή της σκηνής και τη μεταφορά των αποτελεσμάτων πίσω στον εξυπηρέτη της *φάρμας σχεδίασης* (render farm: computer cluster). Αυτό το σχήμα επεκτείνεται συνήθως περισσότερο με την κατάτμηση της λογικής επιφάνειας της τελικής εικόνας σε περιοχές και το μοίρασμά τους σε διαφορετικούς υπολογιστές, ή σε διαφορετικούς επεξεργαστές του κάθε κόμβου της φάρμας.

Οι μέθοδοι κατανεμημένης απεικόνισης με προ-ταξινόμηση στο πεδίο της εικόνας είναι πολύ κοινές τόσο στα γραφικά πραγματικού χρόνου όσο και στις αργές προσομοιώσεις φωτισμού (παρακολούθηση ακτίνων, υπολογισμός ολικού φωτισμού κλπ). Τα δεδομένα της σκηνής αντιγράφονται σε όλες τις μονάδες ή, στην περίπτωση συστήματος πολλαπλών κεντρικών επεξεργαστών, ή πολλαπλών επεξεργαστών γραφικών, τοποθετούνται σε κοινή περιοχή μνήμης που τη διαμοιράζονται όλες οι διεργασίες σχεδίασης. Κάθε μονάδα αναλαμβάνει τη σχεδίαση ενός ή περισσοτέρων «παραθύρων» μέσα στην τελική εικόνα και τα αποτελέσματα συντίθενται εύκολα με απλή αντιγραφή των έτοιμων τμημάτων σ' έναν κοινό καταχωρητή εικόνας. Την άμεση σχεδίαση με χρήση πολλαπλών υποσυστημάτων γραφικών στον ίδιο υπολογιστή την αναλαμβάνει το ίδιο το hardware γραφικών, το οποίο εντελώς διάφανα καταμερίζει την τελική εικό-

να και κατανέμει το φόρτο μεταξύ των σωληνώσεων σχεδίασης που είναι διαθέσιμες χρησιμοποιώντας μια αρχιτεκτονική master-slave.

Ο τρόπος χωρισμού της εικόνας παίζει σημαντικό ρόλο στην αποδοτικότητα της ισοκατανομής φόρτου. Οι πιο κοινές μέθοδοι κατάτμησης είναι κατά «γραμμή παρά γραμμή» σάρωσης (interlaced), κατά ψηφίδες (ορθογώνιες περιοχές, λωρίδες ή στήλες) και πλήρους οθόνης με μετατόπιση (για αντιταύτιση). Όσο μεγαλύτερα είναι τα κομμάτια, τόσο πιο μεγάλη είναι η πιθανότητα ο φόρτος σχεδίασης να μην είναι ισοκατανεμημένος στις μονάδες σχεδίασης. Αυτό είναι εύκολο να το διαπιστώσει κανείς αν πάρει ως παράδειγμα μια σκηνή με έναν άδειο ουρανό στο πάνω μέρος και από κάτω ένα τοπίο με μια μεγάλη πόλη. Αν χωρίσουμε την εικόνα σε δύο οριζόντιες λωρίδες, η μονάδα που έχει αναλάβει την άνω περιοχή θα έχει σχεδόν μηδενικό φόρτο, ενώ η άλλη μονάδα θα πρέπει να σχεδιάσει σχεδόν όλα τα πολύγωνα της σκηνής. Μια διαμέριση που χωρίζει την εικόνα κατά περιττές και άρτιες γραμμές σάρωσης (ή στήλες αντίστοιχα) θα εξασφάλιζε τη βέλτιστη κατανομή φόρτου. Από την άλλη πλευρά όμως, αν η εικόνα σπάσει σε υπερβολικά πολλά τμήματα, η μεταφορά δεδομένων στη μνήμη κατά μπλοκ θα πάψει να είναι ιδιαίτερα αποδοτική.

Στην απεικόνιση γραφικών πραγματικού χρόνου, ένας άλλος σοβαρός παράγοντας επιλογής στρατηγικής διαμέρισης της εικόνας είναι η επαυξητική μορφή που έχει η διαδικασία σχεδίασης των πολυγώνων και άλλων σχημάτων. Τα διάφορα στάδια σχεδίασης του υποσυστήματος γραφικών ευνοούνται από τη χωρική συνάφεια και την ομοιόμορφη δειγματοληψία των σχημάτων. Για παράδειγμα, η σχεδίαση κατά περιττές και άρτιες γραμμές σάρωσης (interlaced) δεν μεταβάλλει σημαντικά τη σάρωση κατά γραμμές των πολυγώνων, καθώς ο απαριθμητής γραμμών σάρωσης απλά θα πρέπει να αυξάνει κατά δύο μονάδες αντί για μία (βλ. Κεφάλαιο 5).

Όταν χρησιμοποιούμε μετα-φιλτράρισμα (supersampling/multisampling) ως τεχνική αντιταύτισης κατά τη σχεδίαση, μια ενδιαφέρουσα τεχνική παραλληλίας είναι η κατανομή της πράξης του συγκερασμού στις μονάδες επεξεργασίας. Αυτό γίνεται με τη σχεδίαση της πλήρους εικόνας από κάθε μονάδα (χρειάζονται τόσες μονάδες, όσα και τα δείγματα που παίρνουμε). Σε κάθε μονάδα, το κέντρο κάθε εικονοστοιχείου έχει διαφορετική μετατόπιση, όση είναι και η μετατόπιση του δείγματος που θα παίρναμε. Για το σχηματισμό του κάθε εικονοστοιχείου της τελικής (φιλτραρισμένης) εικόνας, ζυγίζονται με κατάλληλα βάρη τα αντίστοιχα εικονοστοιχεία των επιμέρους εικόνων και προστίθενται.

Για συστήματα με πολλαπλές εξόδους γραφικών, πάλι ακολουθείται μια λογική προ-ταξινόμησης στο πεδίο της εικόνας· μόνο που ο χωρισμός γίνεται σε επίπεδο πεδίου παρατήρησης και δε χρειάζεται καμία σύνθεση εικόνας στο τέλος. Για παράδειγμα, σε ένα τυπικό cluster σύστημα εικονικής πραγματικότητας, κάθε κόμβος κρατάει ένα πλήρες αντίγραφο του τριδιάστατου κόσμου και σχεδιάζει ένα διαφορετικό παράθυρο που βλέπει μέσα στο εικονικό περιβάλλον. Αν υλοποιείται μια αρχιτεκτονική master-slave [Zuff02], η μετακίνηση δεδομένων είναι ελάχιστη, καθώς μόνο σήματα συγχρονισμού και τα δεδομένα εισόδου από το χρήστη χρειάζεται να μεταδίδονται μεταξύ των κόμβων.

9.4 Ασκήσεις

1. Χτίστε έναν βέλτιστο γράφο σκηνής για μια σκακιέρα στις ακόλουθες περιπτώσεις: (α) τα πιόνια είναι στατικά τοποθετημένα και δεν κινούνται· (β) τα πιόνια κινούνται προσδίδοντάς τους ένα μετασχηματισμό εξωτερικά· (γ) τα πιόνια κινούνται από εσωτερική σε αυτά διαδικασία προσομοίωσης.

2. Πώς μπορεί μια στρατηγική διαμέρισης χώρου να ωφελήσει ένα γράφο σκηνής; Ποιοί παράγοντες επιδρούν στην αποδοτικότητα της συνδυασμένης τεχνικής;

3. Υλοποιείστε ένα κόμβο γράφου σκηνής για την εναλλαγή μεταξύ μοντέλων πολλαπλών αναλύσεων. Περιγράψτε λεπτομερώς ποια δεδομένα πρέπει να παρέχονται στην περίπτωση που ο κόμβος υλοποιεί μετρική εναλλαγής με βάση (α) την απόσταση από τον παρατηρητή και (β) το εμβαδόν της προβολής του αντικειμένου στο επίπεδο παρατήρησης.

4. Υλοποιείστε έναν κόμβο γράφου σκηνής που λειτουργεί ως σκανδαλιστής εγγύτητας. Ο κόμβος αυτός θα πρέπει να μπορεί να στείλει ένα μήνυμα σε κάποιον προκαθορισμένο κόμβο στα ακόλουθα ενδεχόμενα: (α) κάποιος κόμβος έχει εισέλθει στην εμβέλεια του σκανδαλιστή· (β) κάποιος κόμβος μόλις εξήλθε από την εμβέλειά του· (γ) όλοι οι κόμβοι που ήταν στην εμβέλειά του έχουν εξέλθει από αυτή· (δ) κάποιος προκαθορισμένος κόμβος βγήκε ή μπήκε στην περιοχή του σκανδαλιστή.

5. Υλοποιείστε ένα λογικό σκανδαλιστή (AND, OR, XOR, NOT) που ενεργοποιείται ανάλογα με την κατάσταση ενεργοποίησης άλλων σκανδαλιστών. Οι άλλοι σκανδαλιστές πρέπει να περνιούνται με αναφορά στο λογικό σκανδαλιστή και δεν είναι απαραίτητα παιδιά του στην ιεραρχία του γράφου σκηνής.

10

Αρχές Οπτικοποίησης

Όποιος δεν μπορεί να δει ένα άλογο που καλπάζει
πάνω σε μια τομάτα είναι ανεπαρκής.
—André Breton

10.1 Εισαγωγή

Έστω ότι βλέπετε απρόσμενα την εικόνα ενός αγαπητού σας προσώπου. Ξαφνικά σας πλημμυρίζουν συναισθήματα αγάπης. Η πληροφορία περνά από το οπτικό σας σύστημα —διαμέσου του εγκεφάλου— στο σημείο αντίληψης της αγάπης. Το τελικό αποτέλεσμα είναι η εμπειρία της αγάπης [Ledo02]. Συνεπώς, κατάλληλα συνθετικά ερεθίσματα μπορούν να παράγουν το ίδιο αποτέλεσμα όπως και τα αντίστοιχα φυσικά· τα οπτικά ερεθίσματα συγκεκριμένα είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικά.

Τα σύγχρονα επιστημονικά πειράματα και οι προσομοιώσεις συχνά παράγουν τεράστιο όγκο δεδομένων· αυτό υποβοηθάται από τη σημαντική αύξηση της διαθέσιμης υπολογιστικής ισχύος καθώς και από την μείωση του κόστους αποθήκευσης. Όμως τα δεδομένα που παράγονται από πειράματα και προσομοιώσεις αποτελούνται συνήθως από σύμβολα και γίνεται ολοένα και δυσκολότερο να τα κατανοήσει ο άνθρωπος, λόγω του αυξανόμενου μεγέθους τους. Το Σχήμα 10.1 δίνει ένα παράδειγμα. Στα αριστερά έχουμε έναν αριθμητικό πίνακα και στα δεξιά μια απεικόνιση των αριθμών σε αποχρώσεις του γκρι. Όπως πάντα, μια εικόνα αξίζει όσο χίλιες λέξεις!

Οι εφαρμογές της οπτικοποίησης μπορούν να καταταγούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

- Εξερεύνηση μεγάλων *καταγεγραμμένων* συνόλων δεδομένων , π.χ.
  - ιατρικά δεδομένα (Εικόνα 29 (αριστερά))·
  - ενεργειακά δεδομένα (από πηγές πετρελαίου ή φυσικού αερίου)·
  - μετεωρολογικά δεδομένα·
- Εξερεύνηση μεγάλων συνόλων δεδομένων που έχουν προκύψει από *προσομοίωση*, π.χ.
  - προσομοιώσεις μηχανικών·
  - μετεωρολογικές προβλέψεις (Εικόνα 29 (δεξιά))·

23	24	25	27	26	25	25	24	24
24	26	28	30	29	27	26	28	31
26	28	29	31	32	29	30	32	36
26	27	30	32	33	34	35	38	41
27	28	28	32	34	35	37	41	42
27	28	31	33	36	38	40	42	43
28	29	32	32	35	37	41	43	44
30	33	33	34	36	38	41	42	44
32	34	27	29	40	42	43	44	45

23	24	25	27	26	25	25	24	24
24	26	28	30	29	27	26	28	31
26	28	29	31	32	29	30	32	36
26	27	30	32	33	34	35	38	41
27	28	28	32	34	35	37	41	42
27	28	31	33	36	38	40	42	43
28	29	32	32	35	37	41	43	44
30	33	33	34	36	38	41	42	44
32	34	27	29	40	42	43	44	45

22-25	26-29	30-33
34-37	38-41	42-45

Σχήμα 10.1: *Αριθμητικά δεδομένα και απεικόνισή τους σε αποχρώσεις του γκρι.*

- δυναμικές προσομοιώσεις ρευστών·
- οικονομικές προσομοιώσεις.

Φυσικά, σε πολλές περιπτώσεις οι παραπάνω κατηγορίες ενοποιούνται. Για παράδειγμα, στη μετεωρολογία μπορούμε να έχουμε ταυτόχρονα πάνω σε ένα χάρτη τρέχουσες καιρικές τιμές από αισθητήρες, καθώς και τιμές πρόβλεψης από μετεωρολογικές προσομοιώσεις.

Ο στόχος της οπτικοποίησης είναι πρακτικός. Η οπτικοποίηση στοχεύει στην πληρέστερη κατανόηση πολύπλοκων δεδομένων. Αυτό το πετυχαίνει χρησιμοποιώντας τεχνικές κυρίως από τα γραφικά για την οπτική παράσταση δεδομένων για την εκμετάλλευση του μεγάλου εύρους του ανθρώπινου οπτικού καναλιού. Για να είναι χρήσιμη μια οπτικοποίηση πρέπει να είναι το μέσο που επιτρέπει την αποτελεσματική επικοινωνία της πληροφορίας [Hanr05]. Σκοπός της είναι ο μετασχηματισμός των δεδομένων σε πληροφορία.

Υπάρχουν αρκετοί ορισμοί της οπτικοποίησης. Το 1987 μια επιτροπή του NSF[1] [NSF87] ενσωμάτωσε κατάλληλα το νόημα της οπτικοποίησης: «Η *οπτικοποίηση* είναι μια μέθοδος υπολογισμού. Μετατρέπει το συμβολικό στο γεωμετρικό, δίνοντας τη δυνατότητα στους ερευνητές να παρατηρούν τις προσομοιώσεις και τους υπολογισμούς τους. Η οπτικοποίηση προσφέρει έναν τρόπο ενόρασης. Εμπλουτίζει τη διαδικασία της επιστημονικής ανακάλυψης και επιτρέπει σημαντικές και απροσδόκητες παρατηρήσεις.» Φυσικά, δεν περιέχουν όλα τα δεδομένα χωρικές πληροφορίες. Όμως συχνά τα πειράματα και οι προσομοιώσεις γίνονται πάνω σε πλέγματα πολλαπλών διαστάσεων που παριστάνουν μια διακριτοποίηση του χώρου. Αυτά τα πλέγματα γίνονται τότε το όχημα για την οπτική παράσταση των δεδομένων, αφού τα σημεία τους μπορούν

[1]National Science Foundation



Σχήμα 10.2: *Βήματα εξερεύνησης.*

σχετικά εύκολα να απεικονισθούν σε ένα σύστημα συντεταγμένων.

Ένας πολύ περιγραφικός ορισμός δίνεται σε ένα σύγχρονο μάθημα οπτικοποίησης [Edin05]: «Η *οπτικοποίηση* είναι μια γνωστική διαδικασία που χρησιμοποιεί την μεγάλη ισχύ επεξεργασίας και ανάλυσης δεδομένων που παρέχει το ανθρώπινο οπτικό σύστημα. Πάντα ήταν ένας σημαντικός παράγοντας στην επιστημονική πρόοδο και, τώρα, με τη βοήθεια των γραφικών, επεκτείνει το οπτικό μας σύστημα από την υποατομική στη διαστρική κλίμακα, ενώ επιτρέπει γεωμετρικές παραστάσεις και προσομοιώσεις πολυδιάστατων συνόλων δεδομένων. Βασικός στόχος της είναι η δημιουργία *νέας* γνώσης παρά η δημιουργία εικόνων.» Τα σημαντικά στοιχεία εδώ είναι η ευελιξία στην οπτικοποίηση οποιασδήποτε κλίμακας και ο στόχος δημιουργίας νέας γνώσης.

Και ένας καλός σύντομος ορισμός από το [Hanr05]: «Η μεταβίβαση πληροφορίας μέσω γραφικών.»

Παρά την έντονη ανάπτυξή της από τα μέσα της δεκαετίας του 1980, η οπτικοποίηση δεν είναι νέος κλάδος. Από τα αρχαία χρόνια, οι επιστήμονες χρησιμοποιούσαν 2Δ γραφήματα για να οπτικοποιήσουν δεδομένα από μετρήσεις ή υπολογισμούς ώστε να κατανοήσουν καλύτερα τη συμπεριφορά φαινομένων και να τα κατατάξουν σε γνωστές μαθηματικές οντότητες (π.χ. ευθείες και καμπύλες). Σήμερα, η οπτικοποίηση αναφέρεται σε ένα σώμα γνώσης που περιλαμβάνει τεχνικές και αλγορίθμους για την οπτική παράσταση γενικών τύπων δεδομένων.

10.2 Μέθοδοι Επιστημονικής Εξερεύνησης

Από τα αρχαία χρόνια οι επιστήμονες προσπαθούν να εξηγήσουν τον κόσμο. Κοινός στόχος τους είναι η κατανόηση της λειτουργίας των πάντων. Η κατανόηση ενός φαινομένου επιτρέπει την δημιουργία *μοντέλου* του, για παράδειγμα μιας περιγραφής του σε ένα μαθηματικό πλαίσιο. Το μοντέλο μπορεί στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί για να γίνουν *προγνώσεις* (Σχήμα 10.2).

Ας πάρουμε τη βαρύτητα σαν ένα απλό παράδειγμα. Οι άνθρωποι έβλεπαν αντικείμενα που έπεφταν για χιλιετίες πριν ο Νεύτωνας εξηγήσει την συμπεριφορά αυτή συστηματικά. Δημιούργησε ένα μοντέλο που είναι ο νόμος της βαρύτητας:

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

όπου F η βαρυτική δύναμη που ασκείται μεταξύ δύο αντικειμένων, G η σταθερά της βαρύτητας, m_1 και m_2 οι μάζες των δύο αντικειμένων (π.χ. μήλου και γης) και r η απόσταση μεταξύ των δύο αντικειμένων. Βασιζόμενος στις αστρονομικές παρατηρήσεις του Κοπέρνικου[2] (βήμα παρατηρήσεων) και στον τρίτο νόμο του Kepler για την περί-

[2]δηλ. του Αρίσταρχου;

οδο περιστροφής των πλανητών, ο Νεύτωνας πρότεινε αυτό το γενικευμένο μοντέλο για την βαρυτική δύναμη που ασκείται μεταξύ δύο αντικειμένων (βήμα δημιουργίας μοντέλου). Το μοντέλο του επιβεβαιώθηκε από αστρονομικές παρατηρήσεις της εποχής του και αργότερα από τον Cavendish για μικρά αντικείμενα (βήμα ελέγχου μοντέλου). Η εξυπνάδα του Νεύτωνα έγκειται στο γεγονός ότι ενοποίησε την δύναμη που έλκει τους πλανήτες και τους θέτει σε τροχιά με την δύναμη που κάνει ένα μήλο να πέφτει στη γη και, γενικά, τη δύναμη που ασκείται μεταξύ όλων των αντικειμένων (βήμα προβλέψεων).

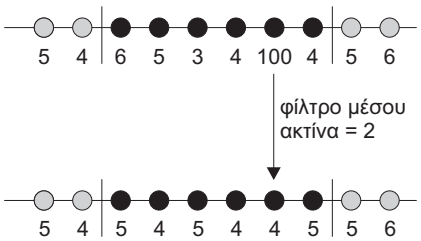
Η δημιουργία ενός μοντέλου είναι επαναληπτική διαδικασία. Έχοντας παρατηρήσει ένα φαινόμενο αρκετά, ο επιστήμονας προτείνει ένα αρχικό μοντέλο. Στην προσπάθεια επαλήθευσής του με πραγματικά δεδομένα, συχνά υπάρχουν αποκλίσεις· αυτές οδηγούν σε διορθώσεις των παραμέτρων του μοντέλου ή και του ίδιου του μοντέλου. Συχνά γίνονται απλουστευτικές υποθέσεις για μείωση του υπολογιστικού κόστους, αλλά παράλληλα η αλματώδης βελτίωση του υλικού και των αλγορίθμων επιτρέπουν ολοένα και πιο πολύπλοκα (και πιο ακριβή) μοντέλα. Η πρόγνωση του καιρού είναι ένα καλό παράδειγμα. Τα αρχικά μοντέλα χρησιμοποιούσαν αραιό πλέγμα διακριτοποίησης του χώρου. Αυτό ήταν κατανοητό, δεδομένης της πολυπλοκότητας των υπολογισμών και της απόλυτης ανάγκης για ολοκλήρωση των υπολογισμών πρόγνωσης για κάποια χρονική στιγμή t, πολύ πριν την έλευση της t! Όμως η ταχεία αύξηση της ταχύτητας επεξεργασίας και η εισαγωγή παράλληλων αλγορίθμων επέτρεψε σημαντική αύξηση της πυκνότητας του πλέγματος, πράγμα που οδήγησε σε μεγαλύτερη ακρίβεια πρόγνωσης καθώς και μακρύτερο ορίζοντα πρόγνωσης.

Ανάλογα με τις απαιτήσεις, μπορούν να κατασκευαστούν διάφορα είδη μοντέλων. Τα μαθηματικά μοντέλα —που αποτελούνται από ένα σύνολο εξισώσεων— και τα υπολογιστικά μοντέλα —που περιγράφουν φαινόμενα αλγοριθμικά— είναι τα πιο κοινά. Συχνά χρησιμοποιούνται μικτά μοντέλα.

Ένα παράδειγμα εξελισσόμενου μοντέλου από τα γραφικά είναι το μοντέλο φωτισμού (βλ. Κεφάλαιο 12). Τα αρχικά μοντέλα φωτισμού παρείχαν μόνο μείωση φωτεινότητας ανάλογα με το βάθος [Warn69]. Μετά εμφανίστηκε το μοντέλο του Phong [Phon75], που περιελάμβανε διάχυτες και κατοπτρικές ανακλάσεις αλλά όχι την αλληλεπίδραση του φωτός μεταξύ αντικειμένων, υποθέτοντας μια σταθερή τιμή περιβάλλοντος φωτισμού. Αργότερα, το μοντέλο παρακολούθησης ακτίνας [Whit80] καθώς και το Radiosity [Kaji86a] περιέλαβαν υπολογισμούς αλληλεπίδρασης, παράγοντας ρεαλιστικότερες εικόνες με αυξημένο όμως υπολογιστικό κόστος.

10.3 Δεδομένα και μετασχηματισμοί τους

Τα δεδομένα της οπτικοποίησης προέρχονται από δύο κύριες πηγές: *πειράματα* και *προσομοιώσεις*. Τα πειραματικά δεδομένα είναι συνήθως *εξωτερικά*, καθώς παράγονται εκτός του συστήματος οπτικοποίησης, ενώ τα δεδομένα προσομοίωσης είναι συνήθως *εσωτερικά*. Μια άλλη συχνή κατηγοριοποίηση είναι σε *πρωτότυπα* και *παραγόμενα* δεδομένα· τα δεύτερα έχουν υποστεί κάποιου είδους επεξεργασία, π.χ. κανονικοποίηση



Σχήμα 10.3: *Εφαρμογή 1Δ φίλτρου μεσαίου όρου με ακτίνα 2 (η περιοχή εφαρμογής του προσδιορίζεται από κάθετες γραμμές).*

ή φιλτράρισμα.

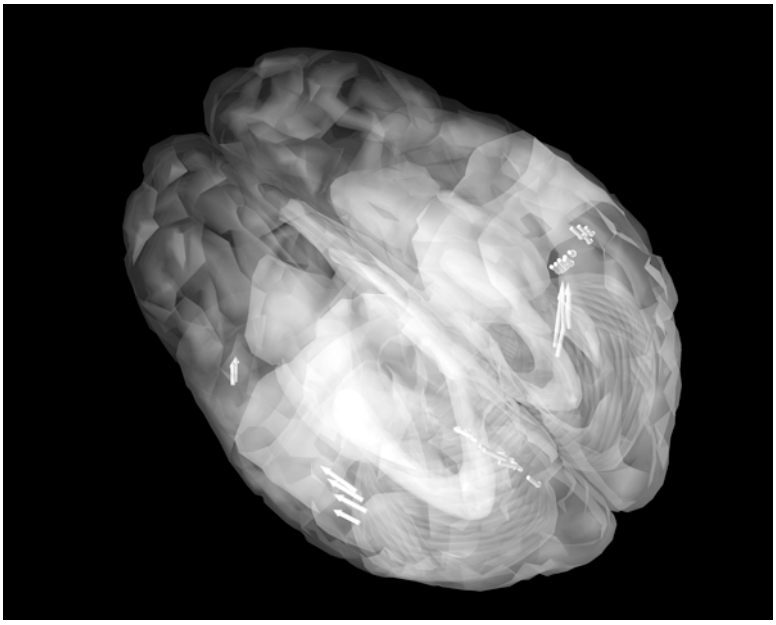
Ανεξάρτητα από την πηγή και την επεξεργασία, τα δεδομένα χαρακτηρίζονται από πολλές ιδιότητες: τύπος, πεδίο και πρότυπο δειγματοληψίας, πλήθος διαστάσεων, κλπ. Τα συστήματα οπτικοποίησης πρέπει συνεπώς να παρέχουν στο χρήστη ισχυρές μονάδες εισαγωγής δεδομένων. Ο τύπος των δεδομένων καθορίζει σε μεγάλο βαθμό το είδος του αλγορίθμου οπτικοποίησης που θα εφαρμοσθεί (π.χ. διανυσματικά ή βαθμωτά). Οι επικρατούντες αλγόριθμοι για κοινούς τύπους δεδομένων είναι το αντικείμενο του Κεφαλαίου 18.

Τα δεδομένα από πειράματα ή προσομοιώσεις μπορούν να έχουν τυχαίο εύρος. Τα πακέτα οπτικοποίησης, αντίθετα, απαιτούν συχνά κάποιο *κανονικό* εύρος για τα δεδομένα εισόδου, π.χ. [0.0, 1.0]. Ένας λόγος γι' αυτό είναι η ύπαρξη συγκεκριμένου χάρτη χρώματος. Η διαδικασία μετατροπής ενός τυχαίου εύρους σε κανονικό ονομάζεται *κανονικοποίηση*. Οι συναρτήσεις κανονικοποίησης είναι συνήθως γραμμικές, αλλά μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλες, όπως οι λογαριθμικές. Για παράδειγμα, αν τα $i_{\min}$ και $i_{\max}$ παριστάνουν αντίστοιχα την ελάχιστη και μέγιστη τιμή των δεδομένων εισόδου, μπορούμε να κανονικοποιήσουμε γραμμικά μια τυχαία τιμή εισόδου i στο κανονικοποιημένο εύρος $[n_{\min}, n_{\max}]$ ως εξής:

$$i_{\text{norm}} = \frac{i - i_{\min}}{i_{\max} - i_{\min}} \cdot (n_{\max} - n_{\min}) + n_{\min}.$$

Τα πειραματικά δεδομένα που προέρχονται από οπτικά, μαγνητικά ή άλλα φυσικά μέσα σχεδόν πάντα περιέχουν ένα ποσοστό θορύβου ή άλλου τύπου υποβάθμισή τους. Οι *τεχνικές φιλτραρίσματος* χρησιμοποιούνται για να εξάγουν αυτό το θόρυβο, να ομαλοποιήσουν, να αμβλύνουν ή να βελτιώσουν με κάποιον άλλο τρόπο την ποιότητα των δεδομένων. Ένα κλασικό φίλτρο εξαγωγής θορύβου που διατηρεί τη λεπτομέρεια είναι το *φίλτρο μεσαίου όρου*. Αυτό αντικαθιστά κάθε δεδομένο (πάνω σε ένα πλέγμα) με τον μεσαίο όρο των τιμών του εαυτού του και των γειτόνων του μέσα σε κάποια ακτίνα. Το Σχήμα 10.3 δίνει ένα 1Δ παράδειγμα της εφαρμογής του φίλτρου μεσαίου όρου με ακτίνα 2· όπως φαίνεται στο σχήμα αφαιρεί την τιμή θορύβου 100.

Διαφορετικές πηγές δεδομένων μπορεί να παράγουν δεδομένα σε διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων (π.χ. καρτεσιανές ή πολικές συντεταγμένες, γραμμικές ή λογαριθμικές κλίμακες κλπ.). Μετασχηματισμοί συντεταγμένων πρέπει να εφαρμοσθούν



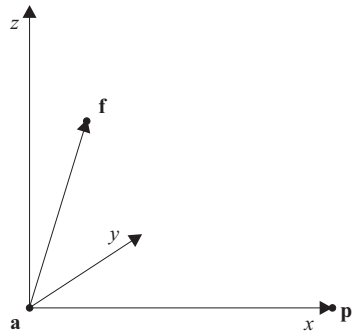
Σχήμα 10.4: *Ταυτοποίηση συστημάτων συντεταγμένων γενικού μοντέλου εγκεφάλου και σημάτων ΜΕΓ. (βλ. και Εικόνα 30.)*

στα δεδομένα για να εξασφαλισθεί η συμβατότητα μεταξύ των δεδομένων μιας πηγής και του συστήματος οπτικοποίησης, ή ακόμα και μεταξύ πολλαπλών πηγών όταν αυτά συν-εμφανίζονται. Η διαδικασία ταυτοποίησης των συστημάτων συντεταγμένων γενικά χρησιμοποιεί συσχετισμένους μετασχηματισμούς (βλ. Κεφάλαιο 3).

10.3.1 Μελέτη ταυτοποίησης συστημάτων συντεταγμένων: σήματα ΜΕΓ και γενικό μοντέλο εγκεφάλου

Σκοπός μας είναι η ταυτόχρονη απεικόνιση στις 3Δ, σημάτων *μαγνητοεγκεφαλογραφίας* (ΜΕΓ) από συγκεκριμένα άτομα και ενός διάφανου γενικού μοντέλου εγκεφάλου [Kats05]. Το γενικό μοντέλο εγκεφάλου και τα σήματα ΜΕΓ απαρτίζουν δύο ξεχωριστά σύνολα δεδομένων, τα οποία πρέπει να συν-απεικονισθούν μετά από ταυτοποίηση των συστημάτων συντεταγμένων τους (Σχήμα 10.4 και Εικόνα 30). Τα σήματα ΜΕΓ έχουν θέση, κατεύθυνση και μέγεθος· άρα είναι φυσικό να απεικονισθούν με διανυσματικά σύμβολα (βλ. Ενότητα 10.7).

Για την ταυτοποίηση πρέπει πρώτα να καθορίσουμε τα δύο συστήματα συντεταγμένων και στη συνέχεια να μετατρέψουμε το ένα σύστημα στο άλλο. Έστω ότι τα συστήματα συντεταγμένων του γενικού μοντέλου εγκεφάλου και των σημάτων ΜΕΓ είναι CS_B και CS_M αντίστοιχα. Τρία μη συγγραμμικά σημεία ορίζουν ένα σύστημα συντεταγμένων (εδώ υποθέτουμε δεξιόστροφα συστήματα). Τα συστήματα συντεταγμένων μπορούν συνεπώς να καθοριστούν προσδιορίζοντας τρία ίδια φυσιολογικά σημεία στα δύο σύνολα δεδομένων. Έστω, ότι αυτά τα σημεία είναι τα $\mathbf{a}_B$, $\mathbf{p}_B$, $\mathbf{f}_B$ και



Σχήμα 10.5: *Σύστημα συντεταγμένων από τρία σημεία.*

$\mathbf{a}_M$, $\mathbf{p}_M$, $\mathbf{f}_M$ αντίστοιχα, και ας υποθέσουμε ότι μετατρέπουμε τα δεδομένα ΜΕΓ στο γενικό μοντέλο εγκεφάλου. Τα σημεία **a** καθορίζουν τα κέντρα των δύο συστημάτων, τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathbf{ap}}$ τους άξονες $+x$ και τα σημεία **f** την «πάνω» κατεύθυνση από την οποία προκύπτει ο άξονας $+z$. Ο άξονας z δεν δίνεται άμεσα για αποφυγή αριθμητικών σφαλμάτων, καθώς και για απλοποίηση της διεπαφής του χρήστη (βλ. Ενότητα 4.4.1). Οι κατευθύνσεις των τριών αξόνων σε κάθε σύστημα συντεταγμένων υπολογίζονται ως εξής (Σχήμα 10.5):

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{f}} &= \mathbf{f} - \mathbf{a}, \\
\overrightarrow{\mathbf{x}} &= \mathbf{p} - \mathbf{a}, \\
\overrightarrow{\mathbf{y}} &= \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{f}}, \\
\overrightarrow{\mathbf{z}} &= \overrightarrow{\mathbf{y}} \times \overrightarrow{\mathbf{x}}.
\end{aligned}$$

Το πρώτο βήμα μετασχηματισμού μεταφέρει το σύνολο ΜΕΓ, έτσι, ώστε τα κέντρα των δύο συστημάτων (τα σημεία **a**) να ταυτιστούν:

$$\mathbf{MEG}' = \mathbf{T}(\mathbf{a}_B - \mathbf{a}_M) \cdot \mathbf{MEG}.$$

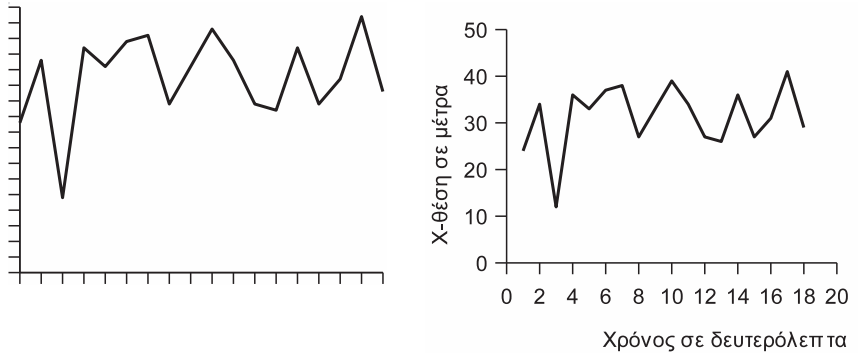
Ο επόμενος μετασχηματισμός ευθυγραμμίζει τους άξονες $+x$. Αυτό απαιτεί δύο περιστροφές γύρω από τους άξονες z και y (βλ. Παράδειγμα 3.12 για λεπτομέρειες):

$$\mathbf{MEG}'' = \mathbf{R}_\mathbf{z}(\theta_2) \cdot \mathbf{R}_\mathbf{y}(\theta_1) \cdot \mathbf{MEG}'.$$

Άλλη μια περιστροφή γύρω από τον άξονα x ευθυγραμμίζει τους άλλους δύο άξονες των συστημάτων συντεταγμένων:

$$\mathbf{MEG}''' = \mathbf{R}_\mathbf{x}(\theta_3) \cdot \mathbf{MEG}''.$$

Τέλος, καθώς το μέγεθος του γενικού μοντέλου εγκεφάλου μπορεί να διαφέρει από το μέγεθος του εγκεφάλου συγκεκριμένων ατόμων, μπορούμε να αλλάξουμε την κλίμακα των διανυσμάτων ΜΕΓ ανάλογα με τους λόγους των αντίστοιχων μετρήσεων



Σχήμα 10.6: *Οπτικοποίηση με (αριστερά) και χωρίς (δεξιά) σωστή βαθμονόμηση και ονομασία των αξόνων*

(υποθέτοντας αντιστοιχία των εσωτερικών δομών):

$$\mathbf{MEG}'''' = \mathbf{S}\left(\frac{\mathrm{XSIZE}_B}{\mathrm{XSIZE}_M}, \frac{\mathrm{YSIZE}_B}{\mathrm{YSIZE}_M}, \frac{\mathrm{ZSIZE}_B}{\mathrm{ZSIZE}_M}\right) \cdot \mathbf{MEG}'''.$$

Έτσι ο σύνθετος μετασχηματισμός:

$$\mathbf{S}\left(\frac{\mathrm{XSIZE}_B}{\mathrm{XSIZE}_M}, \frac{\mathrm{YSIZE}_B}{\mathrm{YSIZE}_M}, \frac{\mathrm{ZSIZE}_B}{\mathrm{ZSIZE}_M}\right) \cdot \mathbf{R_x}(\theta_3) \cdot \mathbf{R_z}(\theta_2) \cdot \mathbf{R_y}(\theta_1) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{a}_B - \mathbf{a}_M)$$

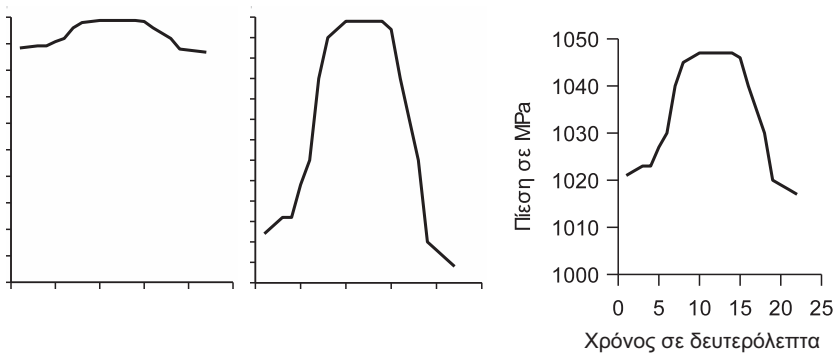
ταυτοποιεί τα δεδομένα ΜΕΓ πάνω στο γενικό μοντέλο εγκεφάλου και τα δύο σύνολα δεδομένων μπορούν να απεικονισθούν ταυτόχρονα.

10.4 Δοκιμασμένες αρχές γραφημάτων

Η οπτική παρουσίαση δεδομένων υπήρχε πολύ πριν την έλευση των τεχνικών οπτικοποίησης στην πληροφορική. Κάποιοι βασικοί αλλά σημαντικοί κανόνες από τα κλασικά γραφήματα έχουν άμεση εφαρμογή στις σημερινές τεχνικές οπτικοποίησης.

Αν μια οπτικοποίηση περιλαμβάνει *άξονες συντεταγμένων*, αυτοί πρέπει να είναι ξεκάθαρα βαθμονομημένοι με τις ποσότητες που παριστάνουν καθώς και τις μονάδες τους (Σχήμα 10.6). Η ονομασία της ποσότητας και οι μονάδες κάθε άξονα δεν πρέπει να αποφεύγονται ακόμα και αν είναι προφανείς. Έστω και έτσι όμως, μια *υπερφορτωμένη* οπτικοποίηση είναι δύσκολα κατανοητή. Αν πρέπει να απεικονισθεί μεγάλος αριθμός μεταβλητών, η οπτικοποίηση πρέπει να χωριστεί σε πολλαπλά τμήματα. Όπως και στα παραδοσιακά γραφήματα, ο δημιουργός μιας οπτικοποίησης πρέπει να καθοδηγείται από την απλότητα.

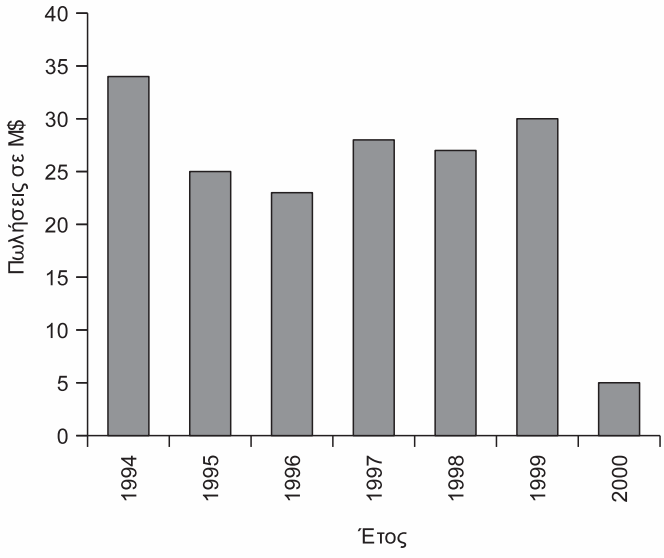
Κρίσιμη επίσης είναι η *κλίμακα* και η αρχή των αξόνων. Η επιλογή λανθασμένης κλίμακας, σε σχέση με τις τιμές των δεδομένων, μπορεί να δώσει την εντύπωση ότι μεγάλες μεταβολές είναι μικρές ή το αντίθετο· αυτό είναι γνωστό κόλπο παραπληροφόρησης σε παρουσιάσεις. Παρομοίως, θέτοντας την αρχή ενός άξονα σε μη μηδενική



Σχήμα 10.7: *Αριστερά: υπερβολικά μεγάλη κλίμακα. Μέση: μη-μηδενική αρχή άξονα χωρίς ένδειξη. Δεξιά: σωστή κλίμακα και ένδειξη αρχής αξόνων.*

τιμή δίνει την αίσθηση μείωσης στις τιμές των δεδομένων. Αν και η τεχνική αυτή είναι χρήσιμη όταν τα δεδομένα έχουν μικρές διακυμάνσεις σε υψηλές τιμές, πρέπει να χρησιμοποιείται προσεκτικά και να δείχνεται ξεκάθαρα η τιμή έναρξης των αξόνων (Σχήμα 10.7).

Μια άλλη πηγή παραπληροφόρησης σε γραφήματα είναι η σύγκριση *ανόμοιων ποσοτήτων*· με άλλα λόγια, η κοινή παρουσίαση ποσοτήτων με διαφορετικές ιδιότητες. Παράδειγμα: ένα ιστόγραμμα του οποίου οι στήλες αναφέρονται σε όγκους πωλήσεων (κάθετος άξονας) κατά έτος (οριζόντιος άξονας), εκτός από την τελευταία στήλη που αναφέρεται στο τρέχον έτος, αλλά μόνο έως την σημερική ημερομηνία. Συνεπώς



Σχήμα 10.8: *Σύγκριση ανόμοιων ποσοτήτων. Το έτος 2000 δεν είναι πλήρες.*

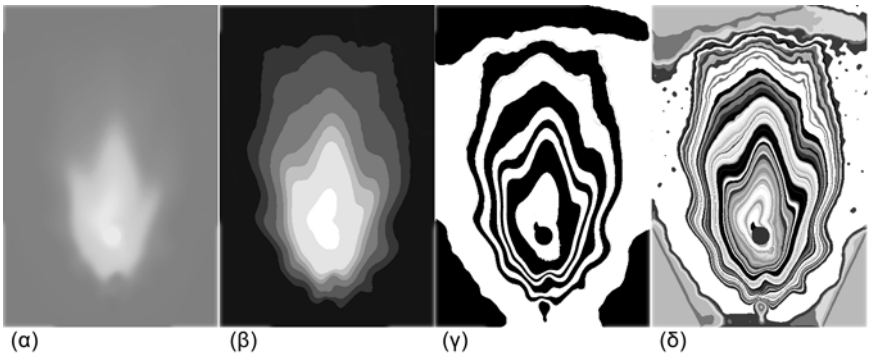
η τελευταία στήλη έχει διαφορετικές ιδιότητες από τις υπόλοιπες αφού αναφέρεται σε περίοδο μικρότερη του έτους (Σχήμα 10.8). Ένα άλλο παράδειγμα είναι ένα πολλαπλό γραμμικό γράφημα, όπου κάθε γραμμή παριστάνει μια διαφορετική μεταβλητή, χωρίς όμως να υπάρχουν ξεχωριστές ενδείξεις στους άξονες για κάθε μεταβλητή.

Η μετάβαση από την ποσοτική στην οπτική πληροφορία είναι άλλος ένας κρίσιμος παράγοντας μιας οπτικοποίησης. Η οπτική πληροφορία περιλαμβάνει όλα τα οπτικά χαρακτηριστικά μιας παρουσίασης, όπως το χρώμα ή η διαφάνεια. Μια σωστά επιλεγμένη *χρωματική απεικόνιση* μπορεί να εμφανίσει πληροφορίες που αλλιώς θα ήταν αόρατες. Για παράδειγμα, η απεικόνιση των οργάνων του σώματος με το πραγματικό τους χρώμα βοηθά την κατανόηση σε ιατρικές οπτικοποιήσεις. Επίσης, η επιλογή χρωμάτων με αρκετή διαφορά για την απεικόνιση διαφορετικών μεταβλητών μειώνει την σύγχυση. Αναλυτική αναφορά στους χάρτες χρώματος γίνεται στην Ενότητα 10.5.2.

10.5 Τονική απεικόνιση

Τα βαθμωτά μεγέθη που καλούμαστε να οπτικοποιήσουμε προέρχονται από διάφορες πηγές δεδομένων, οπότε το εύρος των τιμών τους διαφέρει σημαντικά. Επιπρόσθετα, η απόλυτη κλίμακα αναπαράστασης των δεδομένων, όπως μας έρχονται, δεν είναι απαραίτητα συμβατή με την απόκριση των ανθρώπινων φωτο-αισθητήρων κατά συνέπεια, μια απευθείας γραμμική αντιστοίχηση των δεδομένων εισόδου σε ένταση εικόνας δεν έχει πολλές φορές ικανοποιητικό ή κατανοητό αποτέλεσμα. Υπάρχουν ακόμα περιπτώσεις, που χρειάζεται να απεικονίσουμε μια γραμμική κλίμακα δεδομένων η οποία όμως έχει τόσο μεγάλη κλίμακα ώστε να μπορούμε να δούμε μόνο μια ανεπαρκώς κβαντισμένη εκδοχή της με βάση την ευαισθησία του ματιού μας ή τις δυνατότητες απεικόνισης του συστήματος γραφικών. Σε αυτές τις περιπτώσεις, χρειάζεται να ενισχύσουμε κάποιες συγκεκριμένες ενδιαφέρουσες μεταβάσεις τιμών των δεδομένων μας και να καταστείλουμε τις υπόλοιπες περιοχές του εύρους τιμών.

Γενικά, η κλίμακα του πεδίου τιμών των αρχικών δεδομένων πρέπει να μετατραπεί σ' ένα εύρος τιμών έντασης και χρώματος που να διευκολύνει την αντίληψη της εικόνας από το ανθρώπινο μάτι και να μας βοηθά να εντοπίζουμε και να εξάγουμε την επιθυμητή πληροφορία γρήγορα και εύκολα. Αυτό επιτυγχάνεται με το μετασχηματισμό των δεδομένων, με τη βοήθεια συναρτήσεων μεταφοράς που συμπιέζουν, τονίζουν και διαμορφώνουν το σήμα της πληροφορίας εισόδου σε μια πιο βολική κλίμακα και στη συνέχεια κωδικοποιούν την ένταση που προκύπτει με χρώμα. Ένα τέτοιο παράδειγμα μετασχηματισμού είναι η χρήση decibels για την αναπαράσταση της ισχύος των ηχητικών σημάτων. Ορίζονται ως $10 \log_{10} S$, όπου S είναι ο λόγος του σήματος ως προς μια στάθμη αναφοράς. Η αντιστοίχιση χρωμάτων σε τιμές της πληροφορίας έχει ως αποτέλεσμα τη μεγαλύτερη ευκρίνεια της πληροφορίας και τη διαχωρισιμότητα επιμέρους τιμών.



Σχήμα 10.9: *Συναρτήσεις μεταφοράς. (α) Τα αρχικά δεδομένα: χαμηλή αντίθεση, δε διακρίνονται οι μορφές. (β) Κανονικοποιημένο εύρος τιμών και κβάντιση 4 bits: δημιουργούνται ζώνες ίδιας έντασης. (γ) ημιτονοειδής συνάρτηση μεταφοράς με αποκοπή: η μέτρηση χωρικών χαρακτηριστικών είναι πιο εύκολη. (δ) Θόρυβος ως συνάρτηση μεταφοράς: δημιουργούνται έντονες αντιθέσεις σε κοντινές τιμές που αποκαλύπτουν φυσαλίδες που δεν θα ανιχνεύονταν διαφορετικά.*

10.5.1 Συναρτήσεις μεταφοράς

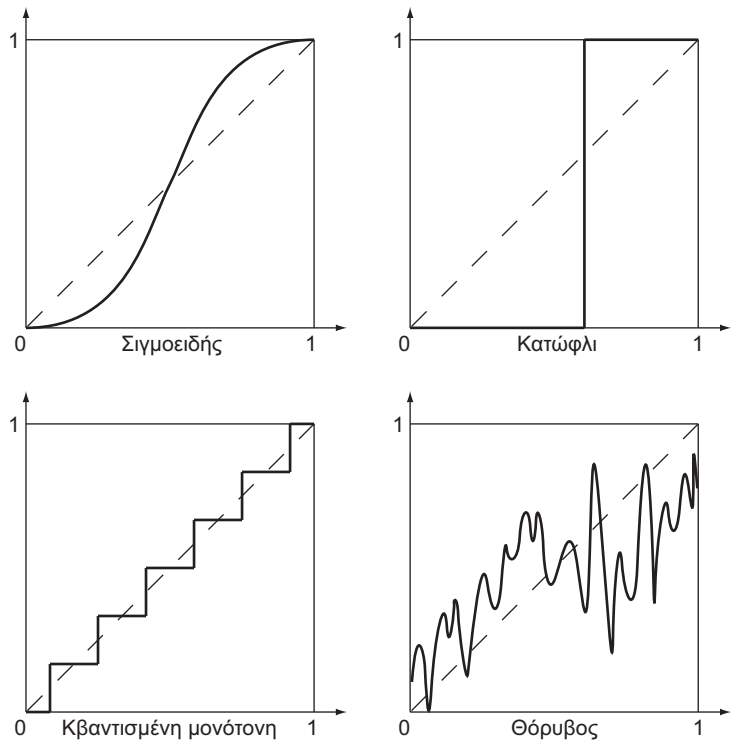
Ας πάρουμε το παράδειγμα του Σχήματος 10.9. Το αρχικό σήμα (Σχήμα 10.9(α)) είναι ένα στιγμιότυπο από ένα θερμικό αισθητήρα με την κλίμακα ευαισθησίας του να είναι αντιστοιχισμένη με μια κλίμακα του γκρι των 8 bits. Η οπτικοποίηση των δεδομένων εισόδου μπορεί να μας δώσει μόνο μια γενική ιδέα της κατανομής της θερμότητας, ενώ η πηγή της θερμότητας δεν διακρίνεται εύκολα. Η ωφέλιμη πληροφορία βρίσκεται σ' ένα στενό παράθυρο τιμών έντασης μέσα στο πλήρες εύρος των 256 διαφορετικών τόνων του γκρι, έχοντας ως αποτέλεσμα χαμηλή αντίθεση. Εκτός από αυτό, η ομαλή μετάπτωση της έντασης καθιστά σχεδόν αδύνατο να ταξινομήσουμε την πληροφορία σε χονδρικές ζώνες ύψους θερμοκρασίας και να μετρήσουμε την έκτασή τους. Στο Σχήμα 10.9(β), το αρχικό σήμα μεταβλήθηκε από μια συνάρτηση μεταφοράς που αύξησε την αντίθεσή του και κβάντισε την κλίμακά του σε λίγα, αλλά πιο ευδιάκριτα διαστήματα τιμών. Στη γενική της μορφή, μια συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$i_{\text{out}} = f_{\text{transfer}}(i_{\text{in}}). \tag{10.1}$$

Η συνάρτηση f_{transfer} δεν είναι απαραίτητα γραμμική, αλλά ούτε καν συνεχής. Στο παράδειγμά μας, έχουμε την:

$$\begin{aligned} i_{\text{out}} &= f_{\text{quant}}\left(f_{\text{contrast}}\left(i_{\text{in}}\right)\right), \\ f_{\text{contrast}}(x) &= \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \cdot v_{\max}, \\ f_{\text{quant}}(x) &= x_{\min} + \frac{(x_{\max} - x_{\min})}{N} \cdot \left\lfloor N \cdot \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \end{aligned} \tag{10.2}$$

όπου τα $x_{\min}$ και $x_{\max}$ αναφέρονται στην ελάχιστη και μέγιστη τιμή του σήματος εισόδου, $v_{\max}$ είναι η μέγιστη επιτρεπτή τιμή, και N είναι ο αριθμός των βαθμίδων κβάντισης.

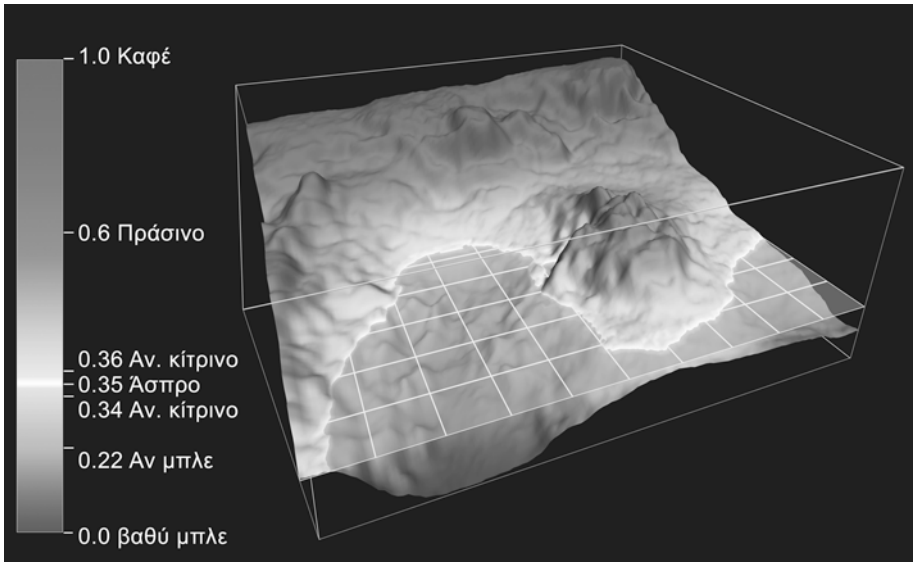


Σχήμα 10.10: *Μερικές κοινά χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις μεταφοράς. Ο οριζόντιος άξονας παριστάνει τις τιμές εισόδου και ο κατακόρυφος άξονας τις τιμές της συνάρτησης μεταφοράς.*

Μπορούμε ν' αυξήσουμε τον αριθμό των διακριτών επιπέδων τιμών που αναπαριστούμε, χωρίς να χάνουμε σε αντίθεση, επιτρέποντας τη χρήση μη μονότονων συναρτήσεων μεταφοράς, όπως είναι η περιορισμένη (clamped) ημιτονοειδής συνάρτηση που απεικονίζεται στο Σχήμα 10.9(γ). Άλλες δύο πολύ χρήσιμες συναρτήσεις μεταφοράς, που εισάγουν μη γραμμικότητα, είναι η σιγμοειδής συνάρτηση, η οποία ενισχύει την αντίθεση τοπικά γύρω από μία προκαθορισμένη τιμή, και η συνάρτηση κατωφλίου (Σχήμα 10.10).

10.5.2 Πίνακες αντιστοίχισης χρωμάτων

Η ένταση από μόνη της δεν μπορεί σε όλες τις περιπτώσεις να μεταδώσει μια εύκολα αντιληπτή εικόνα για τα δεδομένα. Όπως είδαμε νωρίτερα σε αυτό το κεφάλαιο, οι άνθρωποι αποδίδουν συνειρμικά συγκεκριμένα χρώματα σε δεδομένες καταστάσεις ή αναγνωρίζουν ποσότητες και ποιοτικά χαρακτηριστικά με βάση αυτά. Για παράδειγμα, όταν κοιτάζουμε ένα χάρτη, περιμένουμε η περιοχή του εδάφους να είναι χρωματισμένη με γήϊνους τόνους και συγκεκριμένα, με καφέ για ορεινούς όγκους και με πράσινο για χαμηλές πεδιάδες· ενώ περιμένουμε τη θάλασσα να έχει αποδοθεί με τόνους του μπλε. Τέτοιου είδους στερεοτυπικές μεταφορές κάνουμε καθημερινά. Ένα άλλο πα-



Σχήμα 10.11: *Κωδικοποίηση χρώματος για το ύψος του εδάφους και το βάθος της θάλασσας με χρήση πίνακα αντιστοίχησης χρωμάτων, ο οποίος μεταφράζει κανονικοποιημένες τιμές ύψους σε τιμές χρώματος (βλ. επίσης Εικόνα 26.)*

ράδειγμα είναι η σήμανση των κρίσιμων επιπέδων μιας ποσότητας με χρωματική κωδικοποίηση από το πράσινο (χαμηλή/ασφαλής τιμή) στο κίτρινο και τελικά στο κόκκινο (υψηλή ή επικίνδυνη τιμή).

Πέρα όμως από τους συνειρμούς που μας προκαλούν τα διάφορα χρώματα, υπάρχει ένας άλλος σοβαρός λόγος για τον οποίο το χρώμα είναι προτιμότερο για την οπτικοποίηση δεδομένων σε σχέση με σχέδια σε μια κλίμακα του γκρι: Τα χρώματα εμφανίζουν μεγαλύτερο διαχωρισμό σε σχέση με τις διαφορές έντασης του ίδιου χρώματος και μπορούν να τονίσουν ξεκάθαρα σημαντικές περιοχές τιμών.

Συνδυασμένα γραφήματα χρώματος και έντασης μας βοηθούν να οπτικοποιήσουμε ποσότητες που μεταβάλλονται σε δύο άξονες. Ένα παράδειγμα είναι η οπτικοποίηση πυκνότητας και θερμοκρασίας αέρος. Τα χρώματα, ως βαθμωτές τριάδες, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ακόμα για την οπτικοποίηση διανυσμάτων στο χώρο, παρότι το οπτικό αποτέλεσμα δεν είναι εύκολα κατανοητό (Εικόνα 22).

Για να πάμε από μια κλίμακα του γκρι σε μια χρωματική κλίμακα με τυχαίο αριθμό χρωμάτων, χρησιμοποιούμε έναν *πίνακα αντιστοίχησης χρωμάτων* (color map), ο οποίος είναι ένας πίνακας αναζήτησης και παρεμβολής τιμών χρώματος με βάση μια ταξινομημένη ακολουθία από διακριτές εντάσεις αναφοράς. Μια τιμή έντασης εισόδου η οποία υπάρχει αποθηκευμένη στον πίνακα αντιστοιχείται απευθείας στο χρώμα που αναφέρει ο πίνακας, ενώ οποιαδήποτε άλλη τιμή παρεμβάλλεται από τις δύο γειτονικές καταχωρημένες τιμές-κλειδιά (Σχήμα 10.11. Βλ. επίσης Εικόνα 26).

Έστω, N_C ο αριθμός των καταχωρήσεων χρωμάτων $\mathbf{c}_i$, $i = 0..N_C - 1$ στον πίνακα, οι οποίες είναι ταξινομημένες κατά αύξουσα σειρά ως προς την τιμή αντίστοιχης έντα-

σης s_i. Το χρώμα εξόδου **c** για μια τιμή έντασης εισόδου s υπολογίζεται εύκολα μέσω παρεμβολής —όχι απαραίτητα γραμμικής— με τον ακόλουθο αλγόριθμο:

```
if (Nc < 2)
    c = colormap[0].col;
i=Nc-2;
while ( colormap[i].val > s && i > 0 )
    i--;
s1 = colormap[i].val;
s2 = colormap[i+1].val;
if ( s1 == s )
    c = colormap[i].col;
else
    {
    t = (s - s1) / (s2  - s1);
    c = interp(colormap[i].col, colormap[i+1].col, t);
    }
```

10.6 Θέματα αντίληψης

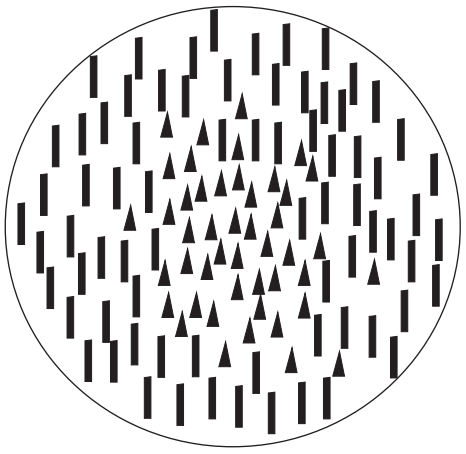
Κατά τη σχεδίαση μιας οπτικοποίησης πρέπει να ληφθούν υπόψη και τα χαρακτηριστικά του *ανθρώπινου οπτικού συστήματος* [Greg97]. Εξάλλου ο «πελάτης» μιας οπτικοποίησης είναι το ανθρώπινο μάτι. Το μάτι περιλαμβάνει την *κόρη,* σημείο εισόδου του φωτός, το οποίο εστιάζεται από τον *φακό* πάνω στον *αμφιβληστροειδή*. Ο αμφιβληστροειδής μπορεί να θεωρηθεί ως ένας τοίχος προβολής και αποτελείται από νευρικά κύτταρα που ονομάζονται *φωτοδέκτες*· αυτά συλλαμβάνουν την οπτική πληροφορία και την μεταβιβάζουν στον εγκέφαλο. Η κεντρική περιοχή του αμφιβληστροειδούς ονομάζεται *κεντρικό βοθρίο* . Υπάρχουν δύο είδη φωτοδεκτών: τα *ραβδία* και τα *κωνία* (Σχήμα 10.12). Τα ραβδία είναι ευαίσθητα σε μεταβολές της *έντασης*, ενώ τα κωνία σε μεταβολές της *χρωματικότητας* (βλ. επίσης Κεφάλαιο 11). Τα ραβδία είναι πλέον της μιας τάξης μεγέθους περισσότερα από τα κωνία. Τα κωνία βρίσκονται κοντά στο κεντρικό βοθρίο, ενώ τα ραβδία είναι ισοκατανεμημένα πάνω στην επιφάνεια του αμφιβληστροειδούς. Τα κωνία ενός τυπικού ανθρώπινου ματιού εξειδικεύονται στην αντίληψη τριών διαφορετικών τμημάτων του φάσματος. Κάποια έχουν μέγιστη ευαισθησία σε μεγάλα μήκη κύματος (κόκκινο φως), κάποια σε μεσαία (πράσινο φως) και κάποια σε μικρά (μπλε φως). Τα πράσινα κωνία αποτελούν περίπου το 64% του συνόλου, τα κόκκινα 32% και τα μπλε 4% [Ahne87, Marc77]. Τα κόκκινα και τα πράσινα κωνία βρίσκονται κοντά στο κεντρικό βοθρίο ενώ τα μπλε σχηματίζουν ένα δακτύλιο γύρω τους.

Τα διάφορα μήκη χρωματικού κύματος αναγκάζουν τον φακό να πάρει διαφορετικές εστιακές αποστάσεις. Για παράδειγμα, ένα καθαρό (ακόρεστο) μπλε και ένα καθαρό κόκκινο αντικείμενο που βρίσκονται στην ίδια απόσταση από το μάτι απαιτούν εστιάσεις με σημαντική διαφορά, αφού το κόκκινο και το μπλε βρίσκονται σε αντίθετες άκρες του ορατού φάσματος. Ένα μη-αμελητέο ποσοστό των ανθρώπων έχουν

κάποιου είδους αχρωματοψία, μια πάθηση που δεν επιτρέπει τον διαχωρισμό ορισμένων χρωμάτων. Αυτό συνήθως συμβαίνει μεταξύ του κόκκινου και του πράσινου και σχετίζεται με τη λειτουργία των κόκκινων και των πράσινων φωτοδεκτών.

Τα παραπάνω χαρακτηριστικά του ανθρώπινου οπτικού συστήματος έχουν μια σειρά από σημαντικές επιπτώσεις στην οπτικοποίηση (βλ. επίσης [Murc84]):

- Αφού τα κωνία βρίσκονται κοντά στο κεντρικό βοθρίο, έχουμε καλύτερη έγχρωμη όραση κοντά στο κέντρο του οπτικού μας πεδίου.
- Αφού τα ραβδία είναι πολύ περισσότερα από τα κωνία, διακυμάνσεις της έντασης είναι γενικά πιο αποτελεσματικές από διακυμάνσεις της χρωματικότητας· ειδικά δε όταν αυτές παριστάνουν διακυμάνσεις τιμών. Αντίθετα, διακυμάνσεις της χρωματικότητας είναι χρησιμότερες για να δείξουν κατάτμηση περιοχών.
- Χρώματα με σημαντικά διαφορετικά μήκη κύματος δεν πρέπει να εμφανίζονται κοντά το ένα στο άλλο, καθώς απαιτούν διαφορετική εστίαση και κουράζουν το μάτι (Εικόνα 31).
- Το καθαρό μπλε είναι ακατάλληλο για κείμενο, που πρέπει να παρατηρηθεί με λεπτομέρεια, αφού η περιοχή γύρω από το κεντρικό βοθρίο δεν έχει μπλε κωνία. Αντίθετα, το μπλε είναι άριστο χρώμα για το υπόβαθρο μιας εικόνας.
- Το κόκκινο και το πράσινο πρέπει να αποφεύγονται σε περιφερειακές περιοχές, αφού δεν υπάρχουν κόκκινα και πράσινα κωνία στην περιφέρεια του αμφιβληστροειδούς.
- Χρώματα που διαφέρουν μόνο στο λόγο κόκκινου-πράσινου πρέπει να αποφεύγονται, ώστε η οπτικοποίηση να είναι κατάλληλη και για άτομα με αχρωματοψία. Για παράδειγμα, διαφορές στο λόγο μπλε-κίτρινου είναι μια καλύτερη επιλογή.



Σχήμα 10.12: *Ραβδία και κωνία.*



Σχήμα 10.13: *Τα επίπεδα έντασης που αντιλαμβανόμαστε εξαρτώνται από τη σχετική ένταση. Το εσωτερικό τετράγωνο έχει την ίδια τιμή έντασης και στις δύο εικόνες· όμως στην δεξιά φαίνεται πιο σκούρο (η ένταση της εξωτερικής περιοχής στην αριστερή εικόνα είναι 50 ενώ στην δεξιά είναι 200 και της εσωτερικής περιοχής είναι 125 και στις δύο περιπτώσεις).*

Όταν χρησιμοποιούμε διακυμάνσεις έντασης χρειάζεται προσοχή. Η αντίληψη της έντασης είναι λογαριθμική· για παράδειγμα αντιλαμβανόμαστε ότι η διαφορά μεταξύ των ζευγών έντασης (0.2, 0.4) και (0.4, 0.8) είναι ίδια. Επίσης η αντίληψη της έντασης δεν είναι απόλυτη αλλά εξαρτάται από το σχετικό επίπεδο έντασης της γειτονικής περιοχής. Έτσι ένα αντικείμενο με την ίδια ένταση θα φαίνεται πιο σκούρο σε ανοικτό φόντο και πιο ανοικτό σε σκούρο φόντο (Σχήμα 10.13).

Η αντίληψη των οπτικών ερεθισμάτων μπορεί να διαχωριστεί σε συνειδητή και σε προσυνειδητή επεξεργασία [Frie91]. Η προσυνειδητή οπτική επεξεργασία γίνεται αυτόματα, είναι ιδιαίτερα γρήγορη και προηγείται της συνειδητής οπτικής επεξεργασίας. Πρέπει συνεπώς να την εκμεταλλευόμαστε όταν αντιστοιχούμε τιμές σε οπτικά ερεθίσματα, πράγμα που μπορεί να γίνει και με τους ακόλουθους τρόπους:

- χρήση της έντασης αντί της χρωματικότητας για τον *διαχωρισμό τιμών* — αντιλαμβανόμαστε πολύ καλύτερα τα σχετικά μεγέθη πολλαπλών τιμών όταν αυτά απεικονίζονται σε κλίμακα έντασης παρά σε κλίμακα χρωματικότητας.

- χρήση της αλλαγής για την εστίαση της προσοχής—η αλλαγή μπορεί να επηρεάζει χαρακτηριστικά αντικειμένων όπως η θέση (κίνηση), το μέγεθος, το χρώμα κλπ.

- απεικόνιση μεγαλύτερων τιμών σε πλησιέστερα (και συνεπώς μεγαλύτερα) αντικείμενα — αντιλαμβανόμαστε την τιμή ενός αντικειμένου ανάλογα με την επιφάνεια της προβολής του στον αμφιβληστροειδή.

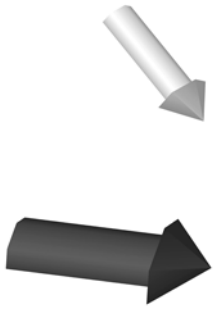
Τέλος, καθώς η οπτική αντίληψη δεν είναι απλά ένα φυσιολογικό αλλά ένα ψυχοφυσιολογικό φαινόμενο, πρέπει να λαμβάνεται υπόψη και η συναισθηματική ανταπόκριση των ανθρώπων στα διάφορα χρώματα. Η ακόλουθη λίστα από τον [Owen99]

δίνει λεπτομέρειες για τη σημασία κάποιων χρωμάτων. Αφού η ανταπόκριση στο χρώμα είναι, εν μέρει, συνειδητή διαδικασία πρέπει να γνωρίζουμε ότι το ίδιο χρώμα μπορεί να προκαλεί διαφορετική ανταπόκριση σε διαφορετικά άτομα (π.χ. σε διαφορετικούς πολιτισμούς):

- κόκκινο: κίνδυνος, σταμάτημα, άρνηση, ενθουσιασμός ζέστη·
- σκούρο μπλε: σταθερότητα, ηρεμία, εμπιστοσύνη, ωριμότητα·
- ανοικτό μπλε: νεανικότητα, αρρενωπότητα, δροσιά·
- πράσινο: αύξηση, θετικότητα, οργανικό, ξεκίνημα, ξεκούραση·
- άσπρο: αγνότητα, καθαριότητα, ειλικρίνεια·
- μαύρο: σοβαρότητα, βάρος, θάνατος·
- γκρι: ακεραιότητα, ουδετερότητα, δροσιά, ωριμότητα·
- καφέ: θρεπτικό, οργανικό, ειλικρίνεια·
- κίτρινο: συναισθηματικό, θετικό, προσοχή·
- χρυσό: συντηρητικό, σταθερότητα, κομψότητα·
- πορτοκαλί: συναισθηματικό, θετικό, οργανικό·
- μωβ: νεανικό, σύγχρονο, βασιλικό·
- ροζ: νεανικό, θηλυκό, ζεστό·
- παστέλ χρώματα: νεανικό, απαλό, θηλυκό, ευαίσθητο·
- μεταλλικά χρώματα: κομψότητα, διάρκεια, πλούτος.

10.7 Οπτικοποίηση πολυδιάστατων δεδομένων

Στα παραδοσιακά γραφήματα αφιερώνεται ένας άξονας (διάσταση) σε κάθε μεταβλητή. Όμως σε πολύπλοκα προβλήματα ή σε εφαρμογές βάσεων πρέπει να οπτικοποιήσουμε πολλές μεταβλητές ταυτόχρονα, οπότε οι λίγες διαστάσεις που μπορούμε να υποστηρίξουμε δεν αρκούν. Οι περισσότερες οθόνες είναι διδιάστατες και οι οπτικοποιήσεις που τις χρησιμοποιούν μπορούν συνεπώς να παραστήσουν μέχρι δύο μεταβλητές ταυτόχρονα. Τα συστήματα εικονικής πραγματικότητας έκαναν δυνατή την οπτικοποίηση της τρίτης διάστασης προσομοιώνοντας την 3Δ εμπειρία του χώρου που ζούμε. Αυτό επεκτείνει τη δυνατότητα οπτικοποίησης κατά μία ακόμα ταυτόχρονη διάσταση, αλλά ακόμα και οι τρεις διαστάσεις είναι περιοριστικές για πολλά σύνολα δεδομένων.



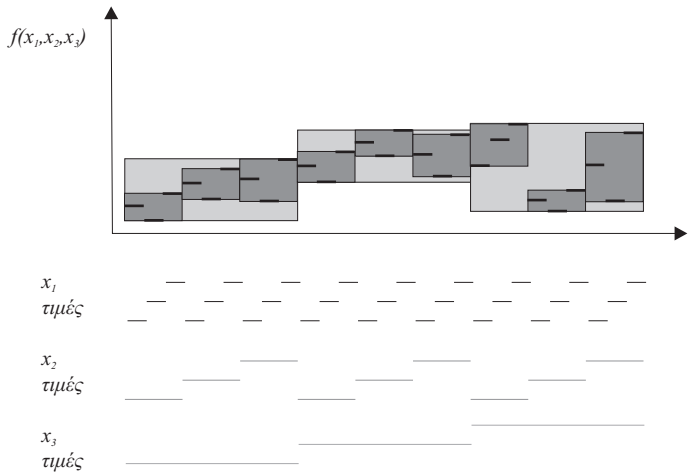
Σχήμα 10.14: *Απεικόνιση δύο μεταβλητών σε μέγεθος και χρώμα συμβόλου οπτικοποίησης.*

Για ένα σύνολο δεδομένων d μεταβλητών $\{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$, μια μέθοδος απλοποίησης του προβλήματος της οπτικοποίησης είναι η προβολή σ' ένα υποσύνολο των διαστάσεων (Κεφάλαιο 4). Ένας απλός τρόπος προβολής είναι η ανάθεση σταθερών τιμών σ' ένα υποσύνολο των μεταβλητών. Για παράδειγμα, μπορούμε να προβάλουμε d μεταβλητές στις πρώτες δύο δίνοντας σταθερές τιμές στις υπόλοιπες $\{v_1, v_2, v_3 = c_3, v_4 = c_4, \ldots, v_d = c_d\}$ και λαμβάνοντας ένα σύνολο δεδομένων δύο μεταβλητών το οποίο μπορεί να οπτικοποιηθεί εύκολα σε μια 2Δ συσκευή απεικόνισης. Για να εξερευνηθεί ένα τέτοιο πολυδιάστατο σύνολο δεδομένων, οι σταθερές τιμές πρέπει να ενημερώνονται κατά την κρίση του χρήστη. Παράδειγμα 2Δ προβολής είναι η χρήσιμη τεχνική της *τομής*. Η Εικόνα 32 δείχνει μια 2Δ τομή ενός 3Δ συνόλου δεδομένων όγκου.

Μια επιπλέον μεταβλητή μπορεί να απεικονισθεί στη διάσταση του χρόνου. Είναι προφανώς προτιμητέο να επιλεγεί κάποια μεταβλητή που έχει σχέση με τον χρόνο. Οι τεχνικές συνθετικής κίνησης (Κεφάλαιο 17) είναι χρήσιμες για το σκοπό αυτό (Εικόνα 33).

Το *χρώμα* και οι *αποχρώσεις του γκρι* μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για να απεικονίσουν τις τιμές μιας μεταβλητής. Στην Εικόνα 30, απεικονίζονται δύο σύνολα δεδομένων ΜΕΓ (διαφορετικά ερεθίσματα) με διαφορετικά χρώματα· εδώ το χρώμα διαφοροποιεί την μεταβλητή των ερεθισμάτων.

Για την απεικόνιση περισσότερων μεταβλητών μπορούν να χρησιμοποιηθούν *σύμβολα* οπτικοποίησης. Ένα τέτοιο σύμβολο είναι ένα οπτικό αντικείμενο πάνω στο οποίο απεικονίζονται τιμές μεταβλητών ως οπτικά χαρακτηριστικά [Past02]. Το σύμβολο πρέπει να επιλέγεται έτσι ώστε να προκαλεί την οπτική αίσθηση του είδους των δεδομένων που παριστάνει. Για παράδειγμα, τα διανυσματικά δεδομένα παριστάνονται επιτυχώς με βέλη. Άλλα, συχνά απαντώμενα σύμβολα, περιλαμβάνουν τη σφαίρα, τον δίσκο, τον σταυρό και τον κύλινδρο. Μέχρι τρεις μεταβλητές θέσης μπορούν να απεικονισθούν με τη θέση του συμβόλου. Μερικές ακόμα μεταβλητές μπορούν να απεικονισθούν σε άλλα του χαρακτηριστικά· στην πράξη όμως πάνω από δύο χαρακτηριστικά υπερφορτώνουν το σύμβολο. Συχνά τα δύο χαρακτηριστικά που χρησιμοποιούνται είναι το μέγεθος και το χρώμα (ή η υφή) του συμβόλου (Σχήμα 10.14).



Σχήμα 10.15: *Ιεραρχική οπτικοποίηση συνάρτησης πολλαπλών μεταβλητών σε 2Δ γράφημα.*

Ο Mihalisin [Miha91] πρότεινε μια ιεραρχική μέθοδο για την οπτικοποίηση συναρτήσεων N ανεξάρτητων μεταβλητών $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ σαν 2Δ γραφήματα. Κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή παίρνει τιμές σε ένα πεπερασμένο, διακριτό και συμπαγές διάστημα. Ο κάθετος άξονας παριστάνει την τιμή της συνάρτησης ενώ οι ανεξάρτητες μεταβλητές παίρνουν μια «προτεραιότητα» και απεικονίζονται ιεραρχικά στον οριζόντιο άξονα. Η μεταβλητή με τη μεγαλύτερη προτεραιότητα, έστω x_1, μεταβάλλεται με το μεγαλύτερο ρυθμό, ενώ η μεταβλητή με τη μικρότερη προτεραιότητα, έστω x_N, με τον μικρότερο. Έτσι για κάθε τιμή του x_N, που απεικονίζεται σε ένα ευθύγραμμο τμήμα στον οριζόντιο άξονα, όλες οι άλλες μεταβλητές παίρνουν κυκλικά όλες τις τιμές τους σαν φωλιασμένος βρόχος, με την x_1 να έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα. Η τιμή της f αποτυπώνεται για κάθε σύνολο τιμών που παίρνουν οι ανεξάρτητες μεταβλητές. Το Σχήμα 10.15 δίνει ένα παράδειγμα μιας συνάρτησης με τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές. Σημειώνουμε ότι οι τιμές της συνάρτησης, για κάθε κύκλο των τιμών των μεταβλητών, είναι ιεραρχικά φωλιασμένες σε περιβάλλοντα κιβώτια —πράγμα που βοηθά την οπτικοποίηση.

10.8 Ασκήσεις

1. (Το πλέγμα του Hermann) Δημιουργήστε ένα κανονικό 2Δ πλέγμα 4×4 μαύρων τετραγώνων πάνω σε άσπρο φόντο. Για παράδειγμα, σε μια άσπρη εικόνα 512×512 μπορείτε να τοποθετήσετε μαύρα τετράγωνα διαστάσεων 70×70. Παρατηρήστε προσεκτικά αυτή την εικόνα. Βλέπετε κάτι περίεργο στις ενώσεις (άσπρους σταυρούς); Οι περισσότεροι άνθρωποι βλέπουν σκούρες φιγούρες οι οποίες εξαφανίζονται όταν συγκεντρωθεί το μάτι επάνω τους.

2. Με τη βοήθεια του επεξεργαστή κειμένου σας, να δημιουργήσετε ένα αρχείο με λίγες σελίδες μπλε κειμένου σε κόκκινο φόντο. Αποκόψτε και επικολλήστε

το ίδιο κείμενο σ' ένα άλλο αρχείο όπου το κείμενο είναι μαύρο και το φόντο άσπρο. Προσπαθήστε να διαβάσετε τα δύο κείμενα και συγκρίνετε την κόπωση που δημιουργείται στα μάτια σας.

3. Δημιουργήστε ένα παράθυρο 512 × 256 που να περιέχει δύο εικόνες 256 × 256. Η αριστερή εικόνα πρέπει να είναι ένα κίτρινο τετράγωνο και η δεξιά ένα μπλε τετράγωνο. Το κάθε μισό πρέπει να περιέχει επίσης ένα μικρότερο πορτοκαλί τετράγωνο 100×100, κεντραρισμένο μέσα στο μεγαλύτερο τετράγωνο. Συγκρίνετε την αντίληψη των εσωτερικών πορτοκαλί τετραγώνων στις δύο εικόνες.

11

Το Χρώμα στα Γραφικά και στην Οπτικοποίηση

Τέταρτον δη λοιπόν έτη γένος ημίν αισθητικόν, ό διελέσθαι δεί συχνά εν εαυτώ ποικίλματα κεκτημένον, ά ξύμπαντα μεν χρόας εκαλέσαμεν… (Μας μένει ακόμα να εξετάσουμε το τέταρτο είδος αισθήσεως (όραση), το οποίο πρέπει να διαιρέσουμε, διότι έχει μέσα του πολλές ποικιλίες, αυτές τις ονομάζουμε όλες μαζί χρώματα…)

—Πλάτων: Τίμαιος

11.1 Εισαγωγή

Το χρώμα πάντοτε έλκυε την ανθρωπότητα και αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης για χιλιετίες. Σήμερα, η μελέτη του χρώματος και του τρόπου που το αντιλαμβάνεται ο άνθρωπος είναι σημαντικός κλάδος της φυσικής, της φυσιολογίας, της τέχνης καθώς και των γραφικών και της οπτικοποίησης.

Το αποτέλεσμα της εφαρμογής των αλγορίθμων που παρουσιάζονται στο παρόν βιβλίο είναι μια έγχρωμη ή ασπρόμαυρη εικόνα, η οποία γίνεται ορατή σε μια οθόνη, ή μέσω εκτύπωσης. Η προγραμματιστική χρήση του χρώματος, ή των αποχρώσεων του γκρι, απαιτεί θεμελιώδεις γνώσεις για το χρώμα και για την ψηφιακή του παράσταση.

11.2 Αποχρώσεις γκρι (grayscale)

Αν αφαιρέσουμε τα χρωματικά χαρακτηριστικά του φωτός, μας απομένει το *αχρωματικό* φως το οποίο έχει μοναδικό χαρακτηριστικό την *ένταση* [1]. Οι «ασπρόμαυρες» οθόνες και τηλεοράσεις απεικονίζουν μόνο την ένταση. Αυτή μπορεί να παρασταθεί μ' έναν πραγματικό αριθμό μεταξύ του 0 (μαύρο) και του 1 (άσπρο). Τιμές μεταξύ των δύο αυτών ορίων παριστάνουν τις *αποχρώσεις του γκρι*.

Έστω ότι αφιερώνουμε d δυαδικά ψηφία για την παράσταση της έντασης του κάθε εικονοστοιχείου μιας ψηφιακής εικόνας, επιτρέποντας $n = 2^d$ διαφορετικές τιμές έντασης. Το ερώτημα είναι, ποιά επίπεδα έντασης θα επιλέξουμε να παραστήσουμε; Η προφανής απάντηση, μια γραμμική κλίμακα εντάσεων μεταξύ της ελάχιστης και της

[1] Η ένταση τυπικά ορίζεται ως φωτεινή ροή ανά στερεά γωνία (βλ. Κεφάλαιο 12).

μέγιστης, δεν είναι καλή επιλογή. Είναι γνωστό από την φυσιολογία ότι το ανθρώπινο μάτι αντιλαμβάνεται καλύτερα *λόγους φωτεινής έντασης* παρά απόλυτες τιμές. Για παράδειγμα, το μάτι θεωρεί ότι τα ζεύγη έντασης $(0.1, 0.2)$ και $(0.3, 0.6)$ έχουν την ίδια διαφορά. Αυτό μπορεί εύκολα να επαληθευτεί και πειραματικά παρατηρώντας τρεις λαμπτήρες των 20, 40 και 60 watt. Η διαφορά μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης μοιάζει πολύ μεγαλύτερη από τη διαφορά μεταξύ της δεύτερης και της τρίτης. Αρμόζει λοιπόν καλύτερα η λογαριθμική κατανομή των τιμών έντασης. Έστω ότι η ελάχιστη τιμή έντασης[2] είναι Φ_0. Για μια τυπική οθόνη, το Φ_0 είναι περίπου 1/300 της μέγιστης έντασης 1 (άσπρο). Λέμε ότι μια τέτοια οθόνη έχει *δυναμικό εύρος* 300 : 1 (βλ. επίσης Ενότητα 11.5). Αν λ είναι ο λόγος μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών έντασης, τότε:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \lambda \cdot \Phi_0 \\ \Phi_2 &= \lambda \cdot \Phi_1 = \lambda^2 \cdot \Phi_0 \\ &\dots \\ \Phi_{n-1} &= \lambda^{n-1} \cdot \Phi_0 = 1. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Ο λόγος λ μπορεί να υπολογιστεί από την (11.1) αν γνωρίζουμε το Φ_0 της συσκευής απεικόνισης:

$$\lambda = (1/\Phi_0)^{1/(n-1)}.$$

Αλλά πόσες τιμές έντασης χρειαζόμαστε; Αυτό μπορεί να απαντηθεί από το πλήθος των τιμών έντασης που είναι απαραίτητες ώστε το βήμα μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών να μην είναι διακριτό από το ανθρώπινο μάτι· αυτό είναι πολύ σημαντικό στις ψηφιακές εικόνες αν θέλουμε να εξασφαλίσουμε ότι δεν θα είναι υποδεέστερες από τις κοινές φωτογραφίες ως προς την ανάλυση των αποχρώσεων του γκρι. Το ερώτημα αυτό έχει απαντηθεί ήδη στη φυσιολογία: αν το λ είναι μικρότερο από 1.01 (δηλ. διαδοχικές τιμές διαφέρουν λιγότερο από 1%) τότε το ανθρώπινο μάτι δεν μπορεί να διακρίνει μεταξύ των διαδοχικών τιμών έντασης [Wysz00]. Συνεπώς μπορούμε να υπολογίσουμε το ελάχιστο πλήθος τιμών έντασης θέτοντας $\lambda = 1.01$ στην (11.1) και λύνοντας για το n:

$$\begin{aligned} 1.01^{n-1} \cdot \Phi_0 &= 1, \\ n &= \log_{1.01}(1/\Phi_0) + 1. \end{aligned}$$

Καθώς τυπικές οθόνες έχουν $\Phi_0 \sim 1/300$, το n πρέπει να είναι γύρω στο 500. Το Σχήμα 11.1 δείχνει την παράσταση μιας εικόνας με διάφορα πλήθη τιμών έντασης.

11.2.1 Αυτοτυπία (Halftoning)

Οι μέθοδοι αντιταύτισης ανταλλάσσουν χρωματική ανάλυση (ή ανάλυση αποχρώσεων του γκρι) για χωρική ανάλυση (βλ. Κεφάλαιο 2). Σε κάποιες περιπτώσεις, όπου έχουμε πλεόνασμα χωρικής ανάλυσης, μπορούμε να κάνουμε το αντίθετο δηλαδή να ανταλλάξουμε χωρική ανάλυση για ανάλυση αποχρώσεων του γκρι. Αυτός είναι ο σκοπός των τεχνικών *αυτοτυπίας* των οποίων οι ρίζες βρίσκονται στη βιομηχανία εκτύπω-

[2] Μια οθόνη δεν μπορεί να παραστήσει το απόλυτο μαύρο λόγω εσωτερικών αντανακλάσεων.



Σχήμα 11.1: *Παράσταση εικόνας με* $n = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256$ *τιμές της κλίμακας του γκρι.*

σης. Σε ορισμένα είδη εκτύπωσης είναι επιθυμητή η ελαχιστοποίηση του πλήθους των χρησιμοποιούμενων αποχρώσεων του γκρι, κυρίως για οικονομικούς λόγους, αλλά οι τεχνικές αυτοτυπίας είναι χρήσιμες και σε άλλες περιπτώσεις [Cho03]. Το αποτέλεσμά τους μπορεί να παρατηρηθεί σε ασπρόμαυρες φωτογραφίες εφημερίδων οι οποίες από απόσταση φαίνεται να έχουν πολλές αποχρώσεις του γκρι, αλλά η παρατήρηση από κοντά προδίδει τη σύστασή τους από μικρές μαύρες κουκίδες διαφόρων μεγεθών. Το μέγεθος των μαύρων κουκίδων είναι ανάλογο με την απόχρωση του γκρι που παριστάνουν (Σχήμα 11.2).

Μια συνήθης υλοποίηση της αυτοτυπίας σε ψηφιακές εικόνες είναι η προσομοίωση του μεγέθους της κουκίδας με την πυκνότητα των «μαύρων» εικονοστοιχείων. Η εικόνα διαιρείται σε μικρές περιοχές των $m \times m$ εικονοστοιχείων· η χωρική ανάλυση των περιοχών αυτών ανταλλάσσεται για μεγαλύτερη ανάλυση αποχρώσεων του γκρι. Η χωρική ανάλυση μειώνεται m φορές σε κάθε κατεύθυνση, αλλά το πλήθος των διαθέσιμων αποχρώσεων του γκρι αυξάνεται επί m^2. Θα χρησιμοποιήσουμε για παράδειγμα την περίπτωση μιας ασπρόμαυρης εικόνας με περιοχές 2×2 ($m = 2$) η οποία δίνει πέντε δυνατές αποχρώσεις του γκρι (Σχήμα 11.3). Γενικά, για περιοχές $m \times m$ και δύο αρχικές τιμές έντασης, παίρνουμε $m^2 + 1$ τελικές αποχρώσεις του γκρι.

Η παραπάνω ανάθεση συνδυασμών εικονοστοιχείων σε αποχρώσεις του γκρι μπορεί να παρασταθεί συνοπτικά από τον πίνακα:



Σχήμα 11.2: *Αριστερά: αρχική φωτογραφία. Δεξιά: παράσταση με αυτοτυπία.*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

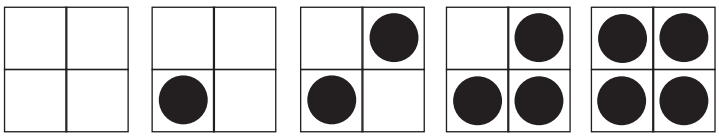
όπου μια συγκεκριμένη απόχρωση k $(0 \leq k \leq 4)$ παριστάνεται «ανάβοντας» τις θέσεις των εικονοστοιχείων της περιοχής 2×2 για τις οποίες το αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα έχει τιμή μικρότερη του k. Για παράδειγμα, η απόχρωση 2 παριστάνεται «ανάβοντας» το κάτω-αριστερό και το πάνω-δεξιό στοιχείο αφού οι τιμές τους είναι μικρότερες του 2.

Υπάρχουν βέβαια και όρια στην εφαρμογή της αυτοτυπίας. Παίρνοντας ένα οριακό παράδειγμα, δεν θα είχε νόημα να ανταλλάξουμε όλη τη χωρική ανάλυση για αύξηση των αποχρώσεων γκρι (παίρνοντας το m ίσο με την ανάλυση της εικόνας). Τα όρια αυτά εξαρτώνται από παράγοντες όπως η αρχική ανάλυση της εικόνας και η απόσταση παρατήρησης.

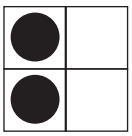
Η ακολουθία που ορίζει τις αποχρώσεις του γκρι πρέπει να επιλεγεί με προσοχή. Για παράδειγμα, η υλοποίηση της απόχρωσης 2 όπως στο Σχήμα 11.4 θα έκανε μια επιφάνεια που αποτελείτο αποκλειστικά από την απόχρωση 2 να εμφανίζει κάθετες γραμμές. Άλλο επιθυμητό χαρακτηριστικό είναι η αυστηρά αυξητική μορφή της ακολουθίας που ορίζει τις διαδοχικές αποχρώσεις του γκρι. Με άλλα λόγια, οι θέσεις εικονοστοιχείων που «ανάβουν» για την απόχρωση i πρέπει να είναι υποσύνολο των θέσεων του επιπέδου j, για κάθε $j > i$. Αυτός ο κανόνας τηρείται στο Σχήμα 11.3.

Μια ακολουθία που ικανοποιεί τα κριτήρια ποιότητας για περιοχές 2×2 είναι [Limb69]:

$$\mathbf{H_2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 11.3: *5 αποχρώσεις του γκρι από 2, με χρήση περιοχών* 2×2.



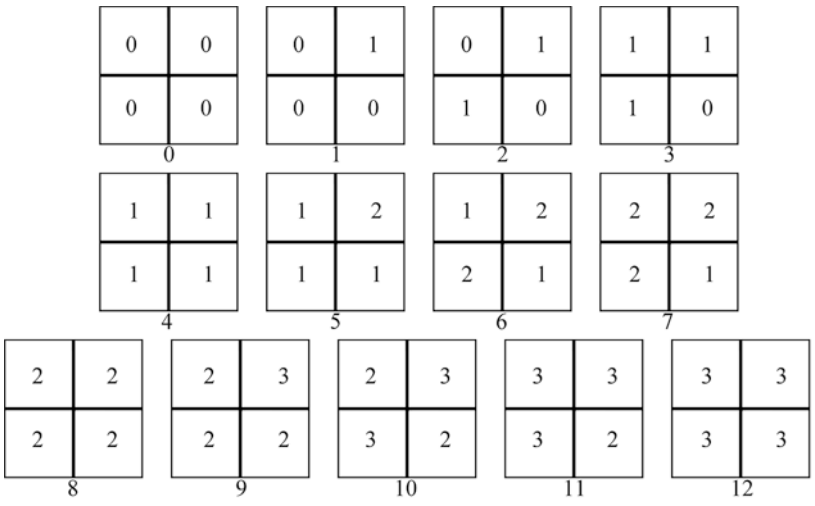
Σχήμα 11.4: *Μια κακή επιλογή για την απόχρωση 2.*

Μεγαλύτεροι πίνακες μπορούν να δημιουργηθούν αναδρομικά, π.χ. 4×4, 8×8 [Jarv76], ως εξής:

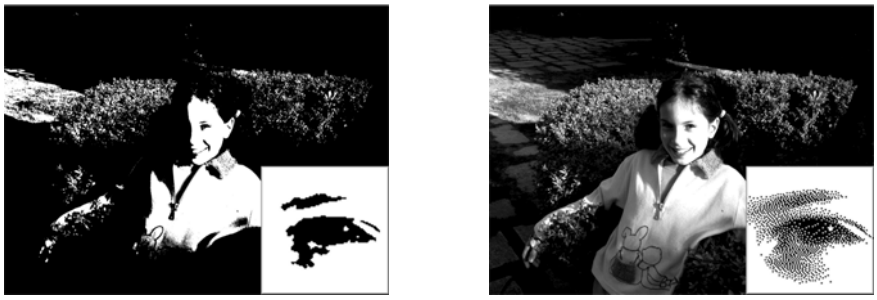
$$\mathbf{H_m} = \begin{bmatrix} 4 \cdot \mathbf{H_{m/2}} & 4 \cdot \mathbf{H_{m/2}} + 2 \cdot \mathbf{U_{m/2}} \\ 4 \cdot \mathbf{H_{m/2}} + 3 \cdot \mathbf{U_{m/2}} & 4 \cdot \mathbf{H_{m/2}} + \mathbf{U_{m/2}} \end{bmatrix}, \qquad m \geq 4 \qquad m = 2^k,$$

όπου $\mathbf{U_m}$ ο $m \times m$ πίνακας με όλα τα στοιχεία του ίσα με 1. Η τεχνική της αυτοτυπίας επεκτείνεται εύκολα και σε μέσα που μπορούν να παραστήσουν πολλαπλές αρχικές αποχρώσεις του γκρι. Για παράδειγμα, αν μπορούν να εμφανισθούν τέσσερις αποχρώσεις του γκρι ανά εικονοστοιχείο (2 ψηφία/εικονοστοιχείο), μπορούμε να αυξήσουμε το πλήθος των αποχρώσεων σε δεκατρείς, χρησιμοποιώντας περιοχές 2×2 όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.5. Γενικά, χρησιμοποιώντας περιοχές $m \times m$ μπορούμε να αυξήσουμε το πλήθος των αποχρώσεων από k σε $(k-1)m^2+1$, μειώνοντας ταυτόχρονα την χωρική ανάλυση κατά m τόσο κατά τον x όσο και κατά τον y άξονα.

Η τεχνική της αυτοτυπίας υποθέτει ότι υπάρχει πλεόνασμα χωρικής ανάλυσης, (δηλαδή ότι η ανάλυση του μέσου απεικόνισης είναι σημαντικά μεγαλύτερη της ανάλυσης της εικόνας)· έτσι αυτή μπορεί να ανταλλαγεί για ανάλυση αποχρώσεων του γκρι. Τι μπορεί όμως να γίνει στην περίπτωση που οι χωρικές αναλύσεις του μέσου και της εικόνας είναι ίδιες, αλλά η εικόνα έχει μεγαλύτερη ανάλυση αποχρώσεων από το μέ-



Σχήμα 11.5: *13 αποχρώσεις από 4, με περιοχές* 2×2.



Σχήμα 11.6: *Αριστερά: απλή στρογγυλοποίηση. Δεξιά: η μέθοδος Floyd-Steinberg. Και οι δύο εικόνες έχουν δύο αποχρώσεις.*

σο; Η απλή στρογγυλοποίηση δεν δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα καθώς χάνεται μεγάλος όγκος πληροφορίας της εικόνας (Σχήμα 11.6 (αριστερά)).

Οι Floyd και Steinberg [Floy75] πρότειναν μέθοδο που περιορίζει την απώλεια πληροφορίας μεταδίδοντας το σφάλμα στρογγυλοποίησης από ένα εικονοστοιχείο στους γείτονές του. Η μέθοδος μοιάζει με τη λειτουργία των μονάδων υπερχείλισης κατά την πρόσθεση. Η διαφορά ε μεταξύ της τιμής της εικόνας $E_{x,y}$ και της πλησιέστερης τιμής $O_{x,y}$ που μπορεί να απεικονισθεί στο εικονοστοιχείο (x, y) υπολογίζεται ως

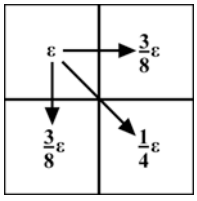
$$\varepsilon = E_{x,y} - O_{x,y}.$$

Το εικονοστοιχείο παίρνει την τιμή $O_{x,y}$ και το σφάλμα ε μεταδίδεται στα γειτονικά του εικονοστοιχεία, κατά τη φορά της σάρωσης, δηλ. στα $(x + 1, y)$, $(x, y - 1)$ και $(x + 1, y - 1)$, ως ακολούθως (βλ. επίσης Σχήμα 11.7):

$$\begin{aligned} E_{x+1,y} &= E_{x+1,y} + 3 \cdot \varepsilon/8, \\ E_{x,y-1} &= E_{x,y-1} + 3 \cdot \varepsilon/8, \\ E_{x+1,y-1} &= E_{x+1,y-1} + \varepsilon/4. \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα είναι πολύ καλύτερο από την απλή στρογγυλοποίηση, βλ. Σχήμα 11.6 (δεξιά).

Ο ακόλουθος πίνακας παρουσιάζει συνοπτικά τις προϋποθέσεις και τα οφέλη των τεχνικών της αντιταύτισης, αυτοτυπίας και Floyd-Steinberg:



Σχήμα 11.7: *Μετάδοση σφάλματος στη μέθοδο Floyd-Steinberg.*



Σχήμα 11.8: *Αριστερά: εικόνα με διόρθωση γάμμα. Δεξιά: εικόνα χωρίς διόρθωση γάμμα.*

	Αντιταύτιση	**Αυτοτυπία**	**Floyd-Steinberg**
Προϋποθέσεις	$I_G < D_G$	$I_S < D_S$	$I_S = D_S$ & $I_G > D_G$
Αύξηση ανάλυσης	Χωρικής	Αποχρώσεων γκρι	Αποχρώσεων γκρι

όπου D_G και I_G οι αναλύσεις αποχρώσεων γκρι του μέσου και της εικόνας, και D_S και I_S οι χωρικές αναλύσεις του μέσου και της εικόνας αντίστοιχα.

11.2.2 Διόρθωση γάμμα (Gamma correction)

Στις περισσότερες οθόνες υπάρχει μη γραμμική σχέση μεταξύ της τάσης που εφαρμόζεται (δηλ. της έντασης των εικονοστοιχείων *(input)*) και της απεικονιζόμενης έντασης *(output)*. Αυτή η σχέση είναι εκθετική

$$\text{output} = \text{input}^{\gamma}, \tag{11.2}$$

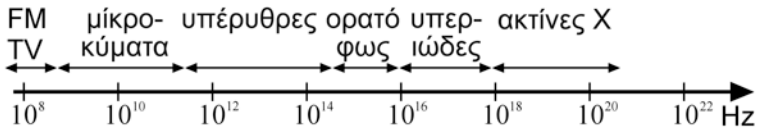
όπου το γ εξαρτάται από την οθόνη και συνήθως βρίσκεται στο διάστημα $[1.5, 3.0]$. Καθώς οι τιμές της τάσης εισόδου είναι συνήθως κανονικοποιημένες στο διάστημα $[0, 1]$, εικόνες που δεν έχουν διορθωθεί ως προς το γ θα είναι γενικά σκοτεινές (Σχήμα 11.8 (δεξιά)). Η διόρθωση γάμμα είναι απλή· οι τιμές της έντασης εισόδου διορθώνονται πριν την οθόνη ώστε να υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ των εντάσεων εισόδου και των απεικονιζόμενων:

$$\text{input}' = \text{input}^{1/\gamma}. \tag{11.3}$$

Αν διοχετεύσουμε στην οθόνη τις τιμές input' η εικόνα έχει γάμμα διόρθωση (Σχήμα 11.8 (αριστερά)).

Στην πράξη υπάρχουν κάποιες δυσκολίες. Πρώτον, ορισμένα απεικονιστικά συστήματα[3] κάνουν διόρθωση γάμμα, κάποια κάνουν μερική διόρθωση γάμμα και κάποια καθόλου. Είναι συνεπώς απαραίτητο να γνωρίζουμε τι ακριβώς κάνει το σύστημά μας πριν εφαρμόσουμε διόρθωση γάμμα. Δεύτερον, τα περισσότερα πρότυπα αποθήκευσης εικόνων δεν φυλάσσουν πληροφορίες για τη διόρθωση γάμμα, πράγμα που καθιστά δύσκολη την εφαρμογή της τεχνικής μεταξύ διαφορετικών συστημάτων απεικόνισης.

[3]Με τον όρο σύστημα απεικόνισης εννοούμε τον συνδυασμό του επεξεργαστή γραφικών, της οθόνης και του σχετικού λογισμικού.



Σχήμα 11.9: *Ηλεκτρομαγνητικό φάσμα.*

Η διόρθωση γάμμα εφαρμόζεται τόσο σε έγχρωμες όσο και σε εικόνες με αποχρώσεις του γκρι. Στην πρώτη περίπτωση η διόρθωση γάμμα μεταβάλλει κυρίως την ένταση της έγχρωμης εικόνας.

11.3 Χρωματικά μοντέλα

Η εντύπωση του χρώματος είναι αποτέλεσμα της αντίδρασης του εγκεφάλου στις συχνότητες του φωτός που εισέρχονται από τα μάτια μας.

Δεδομένου του μεγάλου πλήθους χρωμάτων που απαντώνται στη φύση, ο άνθρωπος από την αρχαιότητα προσπαθεί να συστηματοποιήσει τα χρώματα. Έτσι έχουν γίνει προσπάθειες δημιουργίας μοντέλων για την συστηματική περιγραφή, σύγκριση, κατηγοριοποίηση και κατάταξη των χρωμάτων· τα μοντέλα αυτά ονομάζονται *χρωματικά μοντέλα*. Αρχικά δοκιμάστηκε η απλούστερη προσέγγιση, το γραμμικό χρωματικό μοντέλο του Αριστοτέλη (Εικόνα 6). Ο Αριστοτέλης εμπνεύστηκε από την κυκλική διαδοχή των χρωμάτων κατά τη σταδιακή μετάβαση από τη μέρα στη νύχτα και αντίστροφα. Δυστυχώς, το απλό αυτό μοντέλο απέχει αρκετά από την πραγματικότητα. Ο Πλάτωνας και ο Πυθαγόρας ανακάλυψαν πιο σύνθετα χρωματικά μοντέλα και κάποιες από τις ιδέες τους διατηρήθηκαν έως την Αναγέννηση.

Τα ορατά χρώματα αντιστοιχούν σε *συχνότητες* του φωτός που αποτελούν ένα μικρό τμήμα του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος (Σχήμα 11.9). Διαφορετικές συχνότητες μέσα σε αυτήν την μικρή περιοχή αντιπροσωπεύουν διαφορετικά χρώματα, από περίπου $4.3 \cdot 10^{14}$ Hz (κόκκινο) έως περίπου $7.5 \cdot 10^{14}$ Hz (βιολετί).[4]

Μια σημαντική κατηγοριοποίηση των σύγχρονων χρωματικών μοντέλων βασίζεται στην *ανεξαρτησία από συσκευές*. Σ' ένα ανεξάρτητο συσκευής χρωματικό μοντέλο, οι συντεταγμένες ενός χρώματος[5] παριστάνουν μια μοναδική χρωματική τιμή, σύμφωνα με την ανθρώπινη αντίληψη. Αντίθετα, σε ένα χρωματικό μοντέλο που δεν είναι ανεξάρτητο συσκευής, οι ίδιες χρωματικές συντεταγμένες παράγουν ορατά χρώματα με μικρές διαφορές στις διαφορετικές συσκευές απεικόνισης. Η Commission Internationale d'Eclairage (CIE) έχει προτείνει χρωματικά μοντέλα ανεξάρτητα συσκευής· αυτά είναι χρήσιμα —μεταξύ άλλων— για την ορθή μετατροπή μεταξύ χρωματικών μοντέλων που εξαρτώνται από συσκευές. Για παράδειγμα, τα μοντέλα RGB και CMY είναι εξαρτώμενα από συσκευές ενώ το CIE XYZ είναι ανεξάρτητο.

[4] Η *συχνότητα* ν και το *μήκος κύματος* λ είναι ανταλλάξιμα καθώς $\lambda \cdot \nu = c$, όπου c η ταχύτητα του φωτός· το κόκκινο αντιστοιχεί σε μήκος κύματος 780 nm και το βιολετί σε 380 nm.

[5] Βλ. Ενότητα 11.3.1.

Κάποια από τα χρωματικά μοντέλα που είναι εξαρτώμενα από συσκευές ακολουθούν και τη φιλοσοφία των αντίστοιχων συσκευών για την παραγωγή τυχαίων χρωμάτων από τα βασικά· αυτά μπορούμε να τα κατηγοριοποιήσουμε σε *προσθετικά* και σε *αφαιρετικά*. Ένα προσθετικό μοντέλο ακολουθεί τον τρόπο που παράγονται τα χρώματα σε μια οθόνη *προσθέτοντας* τις συνεισφορές των βασικών χρωμάτων, ενώ ένα αφαιρετικό μοντέλο ακολουθεί τη λειτουργία του εκτυπωτή, όπου η μίξη των χρωμάτων επιτυγχάνεται μέσω μιας *αφαιρετικής* διαδικασίας.

Σημαντικό χαρακτηριστικό των χρωματικών μοντέλων είναι η *αντιλαμβανόμενη γραμμικότητά* τους. Αν η διαφορά στην αντίληψη δύο χρωμάτων είναι ανάλογη με τη διαφορά των αριθμητικών τιμών τους σε όλο το φάσμα του μοντέλου, τότε το μοντέλο είναι γραμμικό ως προς την αντίληψή του. Ένα άλλο θεμιτό χαρακτηριστικό των χρωματικών μοντέλων είναι η *διαισθητική* χρηστικότητά τους.

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζεται ένας μικρός αριθμός χρωματικών μοντέλων με κριτήριο τη σχετικότητά τους με τα γραφικά και την οπτικοποίηση. Υπάρχουν πολλά ακόμα χρωματικά μοντέλα [Wysz00], περιλαμβανομένων και μοντέλων που αναπτύχθηκαν για την τηλεόραση (όπως τα YUV, YIQ, YCbCr και YPbPr) καθώς και «ιδιωτικά» μοντέλα (όπως το YCC της Kodak).

11.3.1 Το χρωματικό μοντέλο CIE XYZ

Στην επιστήμη των χρωμάτων, ο πρώτος νόμος του Grassman ορίζει ότι οποιοδήποτε χρώμα μπορεί να συντεθεί ως γραμμικός συνδυασμός *τριών βασικών χρωμάτων*, με την προϋπόθεση ότι κανένας συνδυασμός υποσυνόλου των βασικών δεν παράγει άλλο βασικό χρώμα. Αυτό είναι ανάλογο της γραμμικής ανεξαρτησίας που πρέπει να ισχύει για τα διανύσματα μιας βάσης.

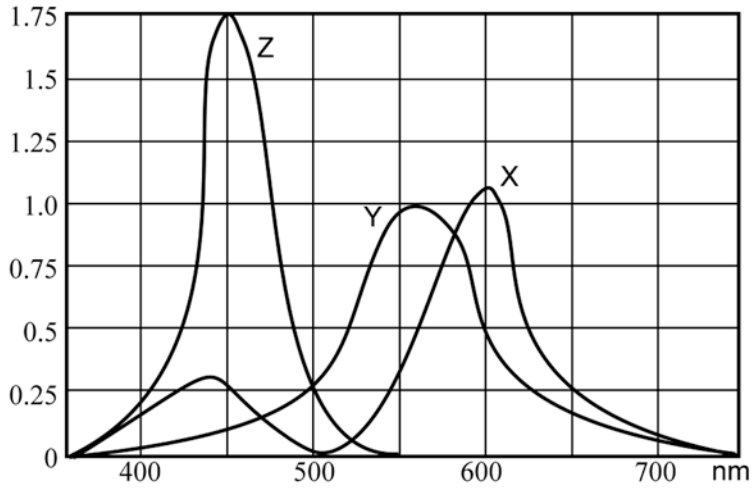
Με στόχο τον καθορισμό ενός προτύπου περιγραφής χρωμάτων, η CIE δημιούργησε το χρωματικό μοντέλο XYZ το 1931. Αυτό σήμερα θεωρείται η μητέρα των μοντέρνων χρωματικών μοντέλων. Τα χρώματα παριστάνονται σε έναν τριδιάστατο χώρο, οι άξονες του οποίου ορίζονται από τα βασικά χρώματα $\overrightarrow{\mathbf{X}}$, $\overrightarrow{\mathbf{Y}}$ και $\overrightarrow{\mathbf{Z}}$. Η ανάμιξη των βασικών χρωμάτων με κατάλληλες αναλογίες X, Y και Z παράγει όλα τα ορατά χρώματα (Σχήμα 11.10)· τα $\overrightarrow{\mathbf{X}}$, $\overrightarrow{\mathbf{Y}}$ και $\overrightarrow{\mathbf{Z}}$ δεν αντιστοιχούν σε ορατά χρώματα και πρέπει να θεωρηθούν υπολογιστικές ποσότητες. Στην πράξη τα X και Z παρέχουν πληροφορία *χρωματικότητας* (καθορίζουν το χρώμα) ενώ το Y αντιστοιχεί στην *ένταση*.

Τα βασικά χρώματα αποτελούν μια *χρωματική βάση* και τα υπόλοιπα χρώματα $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ εκφράζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί αυτής της βάσης:

$$\overrightarrow{\mathbf{F}} = X \cdot \overrightarrow{\mathbf{X}} + Y \cdot \overrightarrow{\mathbf{Y}} + Z \cdot \overrightarrow{\mathbf{Z}},$$

όπου X, Y, Z είναι οι *χρωματικές συντεταγμένες* του $\overrightarrow{\mathbf{F}}$.

Ο δεύτερος νόμος του Grassman καθορίζει τη μίξη χρωμάτων σε σύστημα τριών βασικών χρωμάτων. Αν $\overrightarrow{\mathbf{F_1}} = X_1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{X}} + Y_1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{Y}} + Z_1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{Z}}$ και $\overrightarrow{\mathbf{F_2}} = X_2 \cdot \overrightarrow{\mathbf{X}} + Y_2 \cdot \overrightarrow{\mathbf{Y}} + Z_2 \cdot \overrightarrow{\mathbf{Z}}$



Σχήμα 11.10: *Οι καμπύλες μίξης XYZ για την παραγωγή των ορατών χρωμάτων.*

είναι δύο δοσμένα χρώματα, τότε η μίξη τους είναι το χρώμα:

$$\overrightarrow{\mathbf{F_M}} = (X_1 + X_2) \cdot \vec{\mathbf{X}} + (Y_1 + Y_2) \cdot \vec{\mathbf{Y}} + (Z_1 + Z_2) \cdot \vec{\mathbf{Z}}.$$

Η χρωματική παρεμβολή με παράγοντα t $(0 \leq t \leq 1)$ μεταξύ των χρωμάτων $\vec{\mathbf{F_1}}$ και $\vec{\mathbf{F_2}}$ μπορεί να ορισθεί παρομοίως:

$$\vec{\mathbf{F_I}} = (t \cdot X_1 + (1-t) \cdot X_2) \cdot \vec{\mathbf{X}} + (t \cdot Y_1 + (1-t) \cdot Y_2) \cdot \vec{\mathbf{Y}} + (t \cdot Z_1 + (1-t) \cdot Z_2) \cdot \vec{\mathbf{Z}}.$$

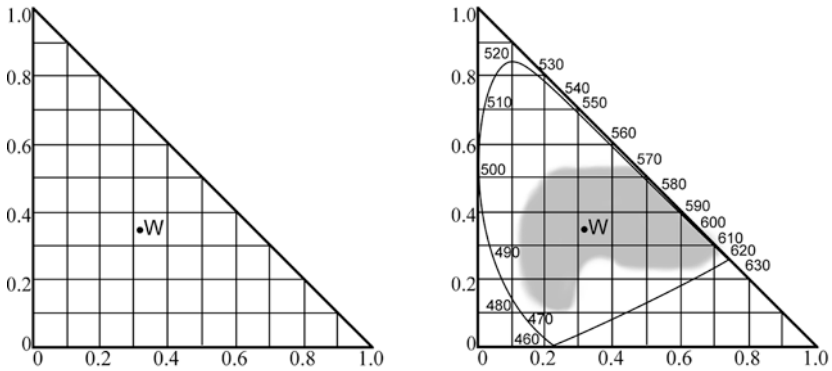
Αν προβάλουμε τα χρώματα του μοντέλου CIE XYZ πάνω στο επίπεδο $X+Y+Z = 1$, λαμβάνουμε το χρωματικό τρίγωνο XYZ. Ένα τυχαίο χρωματικό διάνυσμα (X, Y, Z) αντιστοιχεί στο σημείο (x, y, z) του τριγώνου XYZ που δίνεται από τις:

$$x = \frac{X}{(X+Y+Z)}, \qquad y = \frac{Y}{(X+Y+Z)}, \qquad z = \frac{Z}{(X+Y+Z)}.$$

Το σημείο (x, y, z) είναι η τομή του διανύσματος (X, Y, Z) και του τριγώνου XYZ. Αφού $x + y + z = 1$, μπορούμε να ορίσουμε όλα τα χρώματα του τριγώνου με δύο μόνο συντεταγμένες, έστω x και y. Λαμβάνουμε έτσι την προβολή του τριγώνου XYZ στο επίπεδο xy, που είναι το τρίγωνο XY (Σχήμα 11.11). Συνεπώς, ένας εναλλακτικός τρόπος για να ορίσουμε ένα χρώμα είναι να δώσουμε τις x και y τιμές του (ή οποιοδήποτε άλλο ζεύγος από την τριάδα (x, y, z)) συν την τιμή έντασης Y. Αυτός ο τρόπος προσδιορισμού χρώματος αναφέρεται ως Yxy.

Για να επιστρέψουμε στο CIE XYZ από το CIE Yxy, χρησιμοποιούμε τις

$$X = x \cdot \frac{Y}{y}, \qquad Y = Y, \qquad Z = (1-x-y) \cdot \frac{Y}{y} = z \cdot \frac{Y}{y}.$$



Σχήμα 11.11: *Αριστερά: τρίγωνο XY. Δεξιά: ορατά χρώματα στο τρίγωνο XY.*

Το Σχήμα 11.11 δείχνει μια καμπύλη που περιλαμβάνει όλα τα ορατά χρώματα (που είναι υποσύνολο των χρωμάτων του τριγώνου CIE XY) και μια σκιασμένη περιοχή που αντιπροσωπεύει τα χρώματα που απαντώνται στη φύση (υποσύνολο των ορατών).

Το μοντέλο XYZ δεν είναι γραμμικό ως προς την αντίληψη, ούτε έχει διαισθητική χρηστικότητα.

11.3.2 Το χρωματικό μοντέλο CIE Yu′v′

Αυτό είναι μετασχηματισμός του μοντέλου CIE XYZ με στόχο την αντιλαμβανόμενη γραμμικότητα. Οι συνιστώσες u' και v' του συστήματος αυτού ορίζονται σε σχέση με τις x και y του CIE XYZ ως ακολούθως:

$$u' = \frac{4x}{-2x + 12y + 3},$$
$$v' = \frac{9y}{-2x + 12y + 3}.$$

Ο παραπάνω μετασχηματισμός αντιστρέφεται εύκολα. Και πάλι θα μπορούσε να υπάρχει και τρίτη συνιστώσα, αλλά είναι περιττή. Μια πλήρης περιγραφή χρώματος στο CIE Yu′v′ δίνεται ως τριάδα (Y, u', v'), όπου Y είναι η ίδια τιμή έντασης όπως στο CIE XYZ.

11.3.3 Το χρωματικό μοντέλο CIE L*a*b*

Αυτό αποτελεί έναν άλλο μετασχηματισμό του CIE XYZ με στόχο την αντιλαμβανόμενη γραμμικότητα. Οι παράμετροί του ορίζονται σε σχέση με το *σημείο του λευκού (white point)* της συσκευής απεικόνισης (οποιασδήποτε συσκευής απεικόνισης καθώς είναι ανεξάρτητο συσκευής). Το σημείο του λευκού είναι το χρώμα που εμφανίζεται

όταν όλες οι χρωματικές συνιστώσες παίρνουν την μέγιστη τιμή τους[6] και εκφράζεται στο σύστημα CIE XYZ ως (X_n, Y_n, Z_n). Το μοντέλο CIE L*a*b* ορίζει τρεις παραμέτρους: $L*$ (ένταση) και $a*$, $b*$ (χρωματικότητα) σε σχέση με τον ορισμό του χρώματος X, Y, Z στο CIE XYZ και του σημείου του λευκού (X_n, Y_n, Z_n) (Εικόνα 7):

$$L* = \begin{cases} 116\sqrt[3]{Y_r} - 16, & \text{ιφ } Y_r > 0.008856, \\ 903.3 Y_r, & \text{ιφ } Y_r \le 0.008856, \end{cases}$$

$$a* = 500(f(X_r) - f(Y_r)),$$

$$b* = 200(f(Y_r) - f(Z_r)),$$

όπου

$$X_r = \frac{X}{X_n}, \quad Y_r = \frac{Y}{Y_n}, \quad Z_r = \frac{Z}{Z_n},$$

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t}, & \text{ιφ } t > 0.008856, \\ 7.787t + 16/116, & \text{ιφ } t \le 0.008856. \end{cases}$$

Ο παραπάνω μετασχηματισμός είναι αντιστρέψιμος.

11.3.4 Το χρωματικό μοντέλο RGB

Όπως υπονοείται από το όνομά του, τα βασικά χρώματα στο προσθετικό μοντέλο RGB είναι το *κόκκινο (red)*, το *πράσινο (green)*, και το *μπλε (blue)*. Η επιλογή αυτών των τριών βασικών χρωμάτων έγινε επειδή η ανθρώπινη όραση βασίζεται σε κόκκινα, πράσινα και μπλε χρωμο-ευαίσθητα κύτταρα (κωνία) (βλ. Κεφάλαιο 10). Και πάλι, άλλα χρώματα μπορούν να εκφρασθούν ως γραμμικοί συνδυασμοί της βάσης:

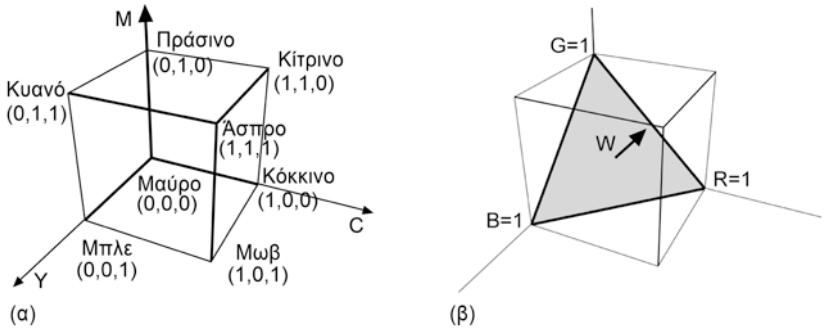
$$\vec{\mathbf{F}} = r \cdot \vec{\mathbf{R}} + g \cdot \vec{\mathbf{G}} + b \cdot \vec{\mathbf{B}},$$

όπου $\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{G}}, \vec{\mathbf{B}}$ είναι τα διανύσματα βάσης κόκκινο, πράσινο και μπλε και r, g, b οι χρωματικές συντεταγμένες του $\vec{\mathbf{F}}$.

Στις περισσότερες οθόνες τα χρώματα δημιουργούνται με μια προσθετική μέθοδο. Η προσθετική μίξη χρωμάτων ξεκινά με το μαύρο (μη ύπαρξη φωτός) και καταλήγει στο άσπρο (το άθροισμα όλων των βασικών χρωμάτων). Καθώς προστίθεται χρώμα, το αποτέλεσμα γίνεται πιο φωτεινό και τείνει στο άσπρο (Εικόνα 8). Οι έγχρωμοι σαρωτές λειτουργούν με παρόμοιο τρόπο· ανιχνεύουν τις ποσότητες των βασικών χρωμάτων που αντανακλώνται ή μεταδίδονται από ένα αντικείμενο και τις μετατρέπουν σε ψηφιακά μεγέθη. Το χρωματικό μοντέλο RGB είναι χρήσιμο σε τέτοιες συσκευές λόγω της προσθετικής φύσης του και της χρήσης των βασικών χρωμάτων κόκκινο, πράσινο και μπλε —τα οποία είναι ορατά χρώματα και όχι θεωρητικές υπολογιστικές ποσότητες.

Η μίξη και η παρεμβολή χρωμάτων μπορεί να οριστεί με τρόπο παρόμοιο με το μοντέλο XYZ. Ο κύβος RGB είναι ο μοναδιαίος κύβος στο χώρο RGB (Σχήμα 11.12(α)

[6] Καθώς οι συσκευές απεικόνισης συνήθως χρησιμοποιούν το μοντέλο RGB (βλ. Ενότητα 11.3.4), το σημείο του λευκού λαμβάνεται θέτοντας $r = g = b = 1$.



Σχήμα 11.12: *(α) Διάγραμμα Κύβου RGB. (Βλ. επίσης Εικόνα 9). (β) Τρίγωνο RGB. (Βλ. επίσης Εικόνα 10).*

και Εικόνα 9).

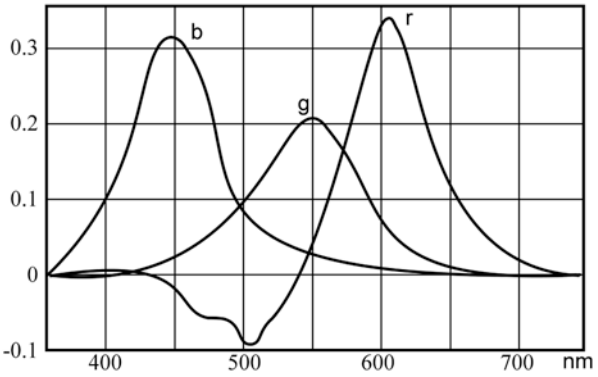
Τα χρώματα παριστάνονται με διανύσματα από το κέντρο συντεταγμένων $(0,0,0)$ (μαύρο) σε σημεία εντός του κύβου RGB. Το άσπρο είναι το $(1,1,1)$, το πράσινο το $(0,1,0)$, κλπ. Στην παράσταση αυτή η κατεύθυνση ενός χρωματικού διανύσματος ορίζει την χρωματικότητα ενώ το μήκος του την ένταση. Η κύρια διαγώνιος του κύβου RGB αποτελείται από αποχρώσεις του γκρι (από μαύρο σε άσπρο). Αν αγνοήσουμε την ένταση, είναι δυνατόν να παραστήσουμε το σύστημα RGB μ' ένα τρίγωνο που σχηματίζεται από την τομή του κύβου RGB με το επίπεδο που ορίζεται από τα σημεία κόκκινο $(1,0,0)$, πράσινο $(0,1,0)$ και μπλε $(0,0,1)$ (Σχήμα 11.12(β) και Εικόνα 10). Όλα τα χρώματα RGB απεικονίζονται πάνω σε αυτό το τρίγωνο καθώς όλα τα χρωματικά διανύσματα το τέμνουν. Η μόνη πληροφορία που χάνεται είναι η ένταση.

Με χρήση του τριγώνου RGB είναι δυνατό να αναλύσουμε την έννοια της χρωματικότητας σε *απόχρωση* και *κορεσμό*. Η απόχρωση παριστάνει το κυρίαρχο μήκος κύματος που δίνει στο χρώμα την ταυτότητά του και ο κορεσμός είναι το ποσοστό συμμετοχής του λευκού. Όλες οι αποχρώσεις απαντώνται στην περίμετρο του τριγώνου RGB· ο κορεσμός είναι μέγιστος στο κέντρο του τριγώνου και ελάχιστος στην περίμετρό του. Χρώματα της ίδιας απόχρωσης αλλά με διαφορετικό κορεσμό απαντώνται στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει ένα σημείο της περιμέτρου με το κέντρο του τριγώνου. (Στον κύβο RGB ο κορεσμός αντιστοιχεί στη γωνία που σχηματίζει ένα χρωματικό διάνυσμα με τη διαγώνιο του κύβου.)

Η αντιστοιχία μεταξύ των ορατών χρωμάτων και του μοντέλου RGB μπορεί να οριστεί δίνοντας τα ποσοστά του κόκκινου, πράσινου και μπλε που ορίζουν τα ορατά χρώματα (Σχήμα 11.13)[7]. Το μοντέλο RGB δεν έχει αντιλαμβανόμενη γραμμικότητα ούτε είναι ιδιαίτερα διαισθητικό ως προς την χρηστικότητά του αφού δεν είναι εύκολο να ορίσουμε το μίγμα των τριών βασικών χρωμάτων που απαιτούνται για την παραγωγή ενός τυχαίου χρώματος.

Λόγω της εξαρτώμενης από συσκευές φύσης του μοντέλου RGB, η ίδια τριάδα

[7]Σημειώνουμε τις αρνητικές τιμές κόκκινου σ' ένα διάστημα, πράγμα που υποδεικνύει την αδυναμία αυτού του προσθετικού μοντέλου να παράγει *όλα* τα ορατά χρώματα.



Σχήμα 11.13: *Κσμπύλες μίξης RGB για την παραγωγή των ορατών χρωμάτων.*

(r, g, b) μπορεί να παράγει διαφορετικά χρώματα σε διαφορετικές συσκευές απεικόνισης. Για να εξασφαλίσουμε χρωματική ισοδυναμία κατά τη μεταφορά χρωματικών εικόνων μεταξύ συσκευών RGB, πρέπει να μετατρέψουμε τις χρωματικές τιμές μέσω ενδιάμεσου συστήματος ανεξάρτητου συσκευής. Οι συσκευές RGB συνήθως παρέχουν έναν πίνακα **M** για την μετατροπή του χρωματικού τους μοντέλου RGB στο CIE XYZ[8]:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} r \\ g \\ b \end{bmatrix}, \tag{11.4}$$

όπου

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} X_R & X_G & X_B \\ Y_R & Y_G & Y_B \\ Z_R & Z_G & Z_B \end{bmatrix}.$$

Δοθέντων των πινάκων μετατροπής RGB σε CIE XYZ δύο συσκευών απεικόνισης $\mathbf{M_1}$ και $\mathbf{M_2}$, μπορούμε να μετατρέψουμε χρώματα έτσι ώστε αυτά να είναι ισοδύναμα ως προς την αντίληψη, ως εξής:

$$\begin{bmatrix} r_2 \\ g_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \mathbf{M_2^{-1}} \cdot \mathbf{M_1} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ g_1 \\ b_1 \end{bmatrix}. \tag{11.5}$$

Χρώμα άλφα και συμπιεσμένη μορφή RGB.

Το πλήθος των ψηφίων που αφιερώνονται στη φύλαξη του χρώματος ενός εικονοστοιχείου (bpp), καθορίζει τον μέγιστο αριθμό χρωμάτων που μπορούν να εμφανίζονται ταυτόχρονα σε μια εικόνα καθώς και τον χώρο που καταλαμβάνει η εικόνα. Με

[8]Εναλλακτικά, κάποιες συσκευές απεικόνισης δίνουν τις προδιαγραφές CIE XYZ για το κόκκινο, πράσινο και μπλε καθώς και για το σημείο του λευκού, από τις οποίες μπορεί να εξαχθεί ο πίνακας **M**.

την εξαίρεση των εικόνων υψηλού δυναμικού εύρους (Ενότητα 11.5), τυπικά χρησιμοποιούνται οκτώ ψηφία ανά χρωματική συνιστώσα, δηλαδή 24 bpp. Καθώς οι λέξεις των υπολογιστών έχουν συχνά 32 ψηφία, τα υπόλοιπα 8 ψηφία συχνά χρησιμοποιούνται για την παράσταση του *άλφα* (alpha).

Ένα *χρώμα άλφα* είναι μια τετράδα $[r, g, b, \alpha]^{\mathrm{T}}$, $\alpha \neq 0$ και αντιστοιχεί στο $[r/\alpha, g/\alpha, b/\alpha]^{\mathrm{T}}$· το α παριστάνει την επιφάνεια (ή τον όγκο) μέσα στην οποία υφίσταται η χρωματική ενέργεια [Will06]. Έτσι ένα χρώμα άλφα μπορεί να θεωρηθεί ως $[C, \alpha]^{\mathrm{T}} = [energy_contribution, area_contribution]^{\mathrm{T}}$ όπου C είναι συντομογραφία για τις χρωματικές συνιστώσες RGB. Η διαφάνεια και η τμηματική κάλυψη ενός εικονοστοιχείου μπορούν να υπολογιστούν, ελατώνοντας την τιμή α.

Η παράσταση άλφα μοιάζει πολύ με τις ομογενείς συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται στην προβολική γεωμετρία, όπου ένα ομογενές σημείο $[x, y, z, w]^{\mathrm{T}}$, $w \neq 0$, έχει τη βασική παράσταση $[x/w, y/w, z/w]^{\mathrm{T}}$ (βλ. Ενότητα 3.4.1). Ο Willis έδειξε ότι τα χρώματα άλφα σχηματίζουν έναν προβολικό χώρο, κατάλληλο για οποιονδήποτε χρωματικό υπολογισμό [Will06].

Για παράδειγμα, έστω το διαφανές αντικείμενο A με χρώμα άλφα $[C_A, 1]^{\mathrm{T}}$ που βρίσκεται μπροστά από το διαφανές αντικείμενο B με χρώμα άλφα $[C_B, 1]^{\mathrm{T}}$. Καθώς το μπροστινό αντικείμενο είναι διαφανές, το χρώμα του συνεισφέρει μόνο ένα ποσοστό α_A οπότε πρέπει να μειώσουμε την επιφάνεια κάλυψης· σε προβολικά δεδομένα η συνεισφορά του είναι $[\alpha_A C_A, \alpha_A]^{\mathrm{T}}$. Η συνεισφορά του όπισθεν αντικειμένου είναι το τμήμα α_B της δικής του διαφάνειας, επί το ποσοστό της χρωματικής ενέργειας $(1-\alpha_A)$ που περνά διαμέσου του αντικειμένου A, δηλ., $[\alpha_B(1-\alpha_A)C_B, \alpha_B(1-\alpha_A)]^{\mathrm{T}}$. Έτσι η συνολική συνεισφορά των δύο αντικειμένων είναι:

$$[\alpha_A C_A + \alpha_B(1-\alpha_A)C_B, \alpha_A + \alpha_B(1-\alpha_A)]^{\mathrm{T}},$$

πράγμα που είναι γνωστό ως τελεστής *over* [Port84].

Το μέγεθος μιας εικόνας μπορεί να μειωθεί με μείωση των bpp· τότε ονομάζεται *συμπιεσμένη μορφή*. Αυτή επιτυγχάνεται με νέα δειγματοληψία του διαστήματος κάθε χρωματικής συνιστώσας. Η κατανομή των bpp στις συνιστώσες κόκκινο, πράσινο, μπλε και άλφα παριστάνεται ως r:g:b:a· αν δοθούν μόνο 3 αριθμοί τότε δεν χρησιμοποιείται το άλφα. Συνήθεις συμπιεσμένες μορφές περιλαμβάνουν τις 4:4:4:4, 5:5:5:1, 5:6:5[9] και 3:3:2.

11.3.5 Το χρωματικό μοντέλο HSV

Οι αναλογίες του κόκκινου, πράσινου και μπλε ενός χρώματος ελέγχουν *έμμεσα* την απόχρωση, τον κορεσμό και την έντασή του. Είναι διαισθητικά ευκολότερο για τον άνθρωπο να ορίσει ένα χρώμα με τα χαρακτηριστικά αυτά, παρά με αναλογίες κόκκινου, πράσινου και μπλε. Μια από τις πρώτες σύγχρονες προσεγγίσεις στη συστηματική οργάνωση ενός χρωματικού μοντέλου έγινε από τον καλλιτέχνη A. H. Mun-

[9] Μεγαλύτερο πλήθος ψηφίων αφιερώνεται στο πράσινο, καθώς το μάτι είναι πιο ευαίσθητο σε διακυμάνσεις αυτής της χρωματικής συνιστώσας.

sell [Muns41]. Ο Munsell αναζήτησε έναν εννοιολογικά απλό τρόπο για την περιγραφή του χρώματος και πρότεινε το σύστημα *απόχρωση-κορεσμός-τιμή* (hue-saturation-value ή HSV) το οποίο παριστάνει γεωμετρικά τα χρώματα σε έναν κώνο[10].

Ο Munsell ξεκίνησε οργανώνοντας τα χρώματα σ' έναν κύκλο, περιγράφοντας έτσι την απόχρωσή τους. Συνεπώς η απόχρωση περιγράφεται από μια γωνία σχετικά με μια αρχική θέση στον κύκλο (Εικόνα 11). Για παράδειγμα, το κόκκινο βρίσκεται στις 0°, το πράσινο στις 120° και το μπλε στις 240°. Αυτός ο κύκλος αποχρώσεων αντιστοιχεί σε μια εγκάρσια τομή του κώνου. Ο κορεσμός είναι μέγιστος στην επιφάνεια του κώνου (εκτός της βάσης), όπου παριστάνονται χρώματα με «μέγιστη χρωματικότητα»· ο άξονας του κώνου παριστάνει τον ελάχιστο κορεσμό (αποχρώσεις του γκρι). Η συνιστώσα *τιμή* αντιστοιχεί στην ένταση· η ελάχιστη τιμή 0 παριστάνει την απουσία φωτός (μαύρο) ενώ η μέγιστη τιμή ορίζει ότι το χρώμα έχει τη μέγιστη έντασή του. Αυτή η συνιστώσα παριστάνεται με μια θέση κατά μήκος του άξονα του κώνου: το 0 αντιστοιχεί στην κορυφή του κώνου, ενώ η μέγιστη τιμή αντιστοιχεί στο κέντρο της βάσης του κώνου.

Ένας σχετικά απλός γραμμικός μετασχηματισμός μετατρέπει χρωματικές τιμές από το RGB στο HSV και αντίστροφα· το HSV μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί του μοντέλου RGB μιας συσκευής για διαισθητικά καλύτερη χρωματική αλληλεπίδραση.

11.3.6 Το χρωματικό μοντέλο CMY(K)

Όταν αναμιγνύονται τα χρώματα κατά την διαδικασία εκτύπωσης (ή και ζωγραφικής), εκτελείται μια αφαιρετική χρωματική σύνθεση. Η αφαιρετική μίξη χρωμάτων ξεκινά με το άσπρο (το χρώμα του χαρτιού). Καθώς προστίθενται χρώματα, το αποτέλεσμα σκουραίνει και τείνει προς το μαύρο. Για παράδειγμα, αν ρίξουμε κυανή (θαλασσί) μπογιά στο χαρτί, αυτή απορροφά την κόκκινη συνιστώσα του προσπίπτοντος φωτός. Αν το χαρτί φωτίζεται από άσπρο φως (άσπρο = κόκκινο + πράσινο + μπλε), το ανακλώμενο (ορατό) φως από την χρωματισμένη περιοχή θα είναι (κόκκινο + πράσινο + μπλε) − κόκκινο = (πράσινο + μπλε) = κυανό.

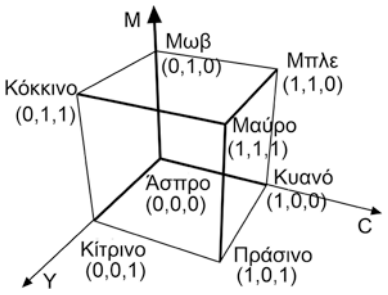
Το μοντέλο CMY ορίζεται ως συμπλήρωμα του RGB. Τα τρία βασικά του χρώματα είναι το κυανό ($\vec{\mathbf{C}}$), το μωβ ($\vec{\mathbf{M}}$) και το κίτρινο ($\vec{\mathbf{Y}}$). Ο κύβος CMY είναι ο μοναδιαίος κύβος στον χώρο CMY (Σχήμα 11.14 και Εικόνα 12). Το άσπρο βρίσκεται στο $(0,0,0)$ και το μαύρο στην κορυφή $(1,1,1)$· τα υπόλοιπα χρώματα βρίσκονται στις αντίθετες κορυφές σε σχέση με τον κύβο RGB. Ένα χρώμα $\vec{\mathbf{F}}$ παριστάνεται ως γραμμικός συνδυασμός των βασικών χρωμάτων:

$$\vec{\mathbf{F}} = c \cdot \vec{\mathbf{C}} + m \cdot \vec{\mathbf{M}} + y \cdot \vec{\mathbf{Y}},$$

όπου c, m και y οι χρωματικές συντεταγμένες του $\vec{\mathbf{F}}$.

Το CMY, ως συμπλήρωμα του RGB, είναι μη γραμμικό στην αντίληψη και μη διαισθητκό, καθώς δεν είναι εύκολο να οριστεί ένα χρώμα σαν μίγμα των $\vec{\mathbf{C}}$, $\vec{\mathbf{M}}$ και $\vec{\mathbf{Y}}$. Ακολουθούν οι μετασχηματισμοί μεταξύ του CMY και του RGB:

[10] Σημειώνουμε ότι στο πλαίσιο αυτό η *τιμή* αναφέρεται στην *ένταση*.



Σχήμα 11.14: *Κύβος CMY. (Βλ. επίσης Εικόνα 12.)*

$$\begin{bmatrix} c \\ m \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r \\ g \\ b \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} r \\ g \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ m \\ y \end{bmatrix}.$$

Κάποιοι εκτυπωτές περιλαμβάνουν και μαύρο μελάνι εκτός από το κυανό, το μωβ και το κίτρινο για να αποφύγουν τη σύνθεση του μαύρου που χρησιμοποιείται στην πλειονότητα των κειμένων και των διαγραμμάτων. Έτσι, κάνουν οικονομία και τυπώνουν μαύρο καλύτερης ποιότητας. Σε σχέση με το χρωματικό μοντέλο, το μαύρο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μεταφέρει τη διαδικασία της χρωματικής σύνθεσης κατά την ελάχιστη συνιστώσα ενός χρώματος $\vec{\mathbf{F}}$. Το χρωματικό μοντέλο CMYK περιλαμβάνει το μαύρο επιπλέον του CMY και ο (αντιστρέψιμος) μετασχηματισμός μεταξύ του CMY και του CMYK (με συνιστώσες c', m', y', b) είναι:

$$\begin{aligned} b &= \min(c, m, y), \\ c' &= \frac{c - b}{1 - b}, \\ m' &= \frac{m - b}{1 - b}, \\ y' &= \frac{y - b}{1 - b}. \end{aligned}$$

Χρειάζεται προσοχή κατά την μετατροπή από τον χώρο RGB μιας οθόνης στο χώρο CMY ενός εκτυπωτή, καθώς και τα δύο είναι μοντέλα εξαρτώμενα από συσκευές. Οι παραπάνω απλοί μετασχηματισμοί είναι απίθανο να οδηγήσουν σε ακριβή χρωματική αναπαράσταση. Ιδανικά, πρέπει να γίνει μετατροπή από το το RGB της οθόνης σε κάποιο μοντέλο ανεξάρτητο συσκευής, όπως το CIE XYZ και στην συνέχεια στο CMY χρησιμοποιώντας τους πίνακες μετασχηματισμού των αντίστοιχων συσκευών, αν είναι γνωστοί:

$$\begin{bmatrix} c \\ m \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{XYZ} \rightarrow \\ \text{CMY} \\ \text{εκτυπωτή} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{RGB} \rightarrow \\ \text{XYZ} \\ \text{οθόνης} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ g \\ b \end{bmatrix}.$$

Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει τα βασικά χαρακτηριστικά των χρωματικών μοντέλων που παρουσιάστηκαν (Ν και Ο αντιστοιχούν σε ναι και όχι):

	Ανεξάρτητο συσκευής;	**Αντιλαμβανόμενη γραμμικότητα;**	**Διαισθητικό;**
CIE XYZ	N	O	O
CIE Yu′v′	N	N	~ O
CIE L*a*b*	N	N	~ O
RGB	O	O	~ O
HSV	O	O	N
CMY	O	O	~ O

11.4 Θέματα διαδικτύου

Το σημαντικότερο ίσως γνώρισμα των εικόνων που τοποθετούνται στο διαδίκτυο είναι ότι μπορεί να τις δει ένα μεγάλο ακροατήριο με πολλές και διαφορετικές συσκευές απεικόνισης. Αν δεν δοθεί προσοχή, η ίδια ψηφιακή εικόνα μπορεί να εμφανίζεται αρκετά διαφορετική στις διάφορες συσκευές.

Καταρχήν μπορεί να υπάρχει *διαφορά στη διόρθωση γάμμα*. Μια εικόνα που έχει αποθηκευτεί με διαφορετική διόρθωση γάμμα από αυτήν της συσκευής απεικόνισης, θα φαίνεται πολύ σκούρη ή πολύ ανοιχτή. Αν δεν μπορούμε να υποθέσουμε ποιό είναι το ακροατήριο μιας εικόνας, έχει νόημα να χρησιμοποιήσουμε μια μέση τιμή διόρθωσης γάμμα, π.χ. 2.2.

Το δεύτερο θέμα αφορά στη *διαφορά του χρωματικού μοντέλου*. Οι εικόνες συχνά αποθηκεύονται στο εξαρτώμενο από συσκευές σύστημα RGB. Όταν λοιπόν η συσκευή απεικόνισης είναι διαφορετική από τη συσκευή κατασκευής μιας εικόνας, τα χρώματα θα παρουσιάζουν διαφορές. Αυτό είναι ιδιαίτερα ενοχλητικό σε εφαρμογές διαδικτύου όπου ο κατασκευαστής μιας εικόνας δεν είναι γνώστης της συσκευής που θα χρησιμοποιηθεί για την απεικόνισή της.

Μια λογική διέξοδος είναι η χρήση κάποιου χρωματικού μοντέλου της CIE, μη εξαρτώμενου από συσκευές, για τη μεταφορά των εικόνων. Αυτό όμως έχει κάποια μειονεκτήματα. Πρώτον, απαιτεί ένα επιπλέον βήμα βαθμονόμησης, αφού κάποια χρωματικά μοντέλα απαιτούν τον ορισμό του σημείου του λευκού για την μετατροπή. Δεύτερον, αν χρησιμοποιείται ένα σχετικά διαισθητικό μοντέλο όπως το L*a*b*, απαιτείται ακριβή μετατροπή με χρήση κυβικών ριζών. Τέλος, το μοντέλο RGB είναι ευρέως αποδεκτό για συσκευές απεικόνισης.

sRGB.

Το πρότυπο RGB ή sRGB (standard RGB) είναι ένα ανεξάρτητο συσκευής χρωματικό μοντέλο, το οποίο είναι επίσης ελκυστικότερο για κατασκευαστές οθονών λόγω της ομοιότητάς του με το RGB. Το sRGB αποκτά την ανεξαρτησία του από συσκευές παρέχοντας

- χρωματομετρικό ορισμό των βασικών χρωμάτων κόκκινο, πράσινο και μπλε με βάση το ανεξάρτητο συσκευής πρότυπο CIE XYZ
- γάμμα 2.2
- καλά ορισμένες συνθήκες παρατήρησης.

Επιπλέον των εφαρμογών διαδικτύου, το sRGB είναι χρήσιμο στα καταναλωτικά ηλεκτρονικά (π.χ. ψηφιακές φωτογραφικές μηχανές) ως πρότυπο για την ανταλλαγή εικόνων.

11.5 Εικόνες υψηλού δυναμικού εύρους - ΥΔΕ (High Dynamic Range Images - HDR)

Ατενίζοντας το μέλλον, είναι λογικό να διερωτηθούμε πόσο πιθανό είναι οι σημερινές εικόνες, φυσικές ή συνθετικές, να χρησιμοποιηθούν από μελλοντικές γενιές. Η διάδοση των μέσων ψηφιακής αποθήκευσης μας δίνει την αίσθηση ότι οι εικόνες μας είναι «αθάνατες». Πρέπει όμως να διερωτηθούμε πόσο ελκυστικές θα είναι οι εικόνες μας στο μέλλον, υποθέτοντας σημαντική πρόοδο στις συσκευές απεικόνισης. Το ερώτημα πλέον είναι αν αποθηκεύουμε τις εικόνες μας σε κάποιο πρότυπο που είναι δυνητικά «αθάνατο».

Αν και δεν είναι δυνατόν να προβλεφθεί η μελλοντική τεχνολογία είναι λογικό να υποθέσουμε ότι το ανθρώπινο οπτικό σύστημα θα παραμείνει απαράλλαχτο. Η χρήση λοιπόν ενός προτύπου που να μπορεί να αποθηκεύσει όλα όσα μπορεί να δει το μάτι εξασφαλίζει, σε σημαντικό βαθμό, την «αθανασία» των εικόνων μας. Ας ορίσουμε το *δυναμικό εύρος* μιας εικόνας ως το λόγο της μέγιστης προς την ελάχιστη τιμή έντασής της. Το ανθρώπινο οπτικό σύστημα έχει πολύ μεγάλο δυναμικό εύρος. Πειράματα στην φυσιολογία έδειξαν ότι μπορούμε να αντιληφθούμε ταυτόχρονα περίπου πέντε τάξεις μεγέθους δυναμικού εύρους (10,000 : 1). Αν μάλιστα δοθούν στο μάτι λίγα λεπτά προσαρμογής, αυτό το εύρος αυξάνεται σε πάνω από εννέα τάξεις μεγέθους! Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της δυνατότητάς μας είναι η βραδινή οδήγηση. Το δυναμικό εύρος των προβολέων αντίθετα κινούμενων οχημάτων και του εσωτερικού φωτισμού του αυτοκινήτου μας είναι τεράστιο· ωστόσο το μάτι μπορεί να αντιληφθεί και τα δύο ταυτόχρονα.

Οι συμβατικές οθόνες (π.χ. τεχνολογίας LCD ή καθοδικού σωλήνα) δεν πλησιάζουν καν το δυναμικό εύρος του ματιού, αφού το δυναμικό εύρος τους δεν ξεπερνά το 1000 : 1. Ακόμα χειρότερα, το συμβατικό πρότυπο αποθήκευσης RGB με 24 ψηφία ανά

εικονοστοιχείο έχει δυναμικό εύρος μόνο 90 : 1 [Ward01]. Έτσι, το πρότυπο RGB με 24 ψηφία ανά εικονοστοιχείο αποτυπώνει οριακά αυτό που μπορεί να δείξει μια σύγχρονη οθόνη (τουλάχιστον με τάξεις μεγέθους) αλλά εντελώς ανεπαρκώς αυτό που μπορεί να αντιληφθεί το ανθρώπινο μάτι [Ward01]. Μάλιστα το δυναμικό εύρος του συμβατικού φωτογραφικού φιλμ είναι σημαντικά υψηλότερο από το RGB με 24 ψηφία ανά εικονοστοιχείο, δίνοντας στις εικόνες που έχουν αποτυπωθεί σε φιλμ μεγαλύτερη πιθανότητα ν' αντέξουν στο χρόνο.

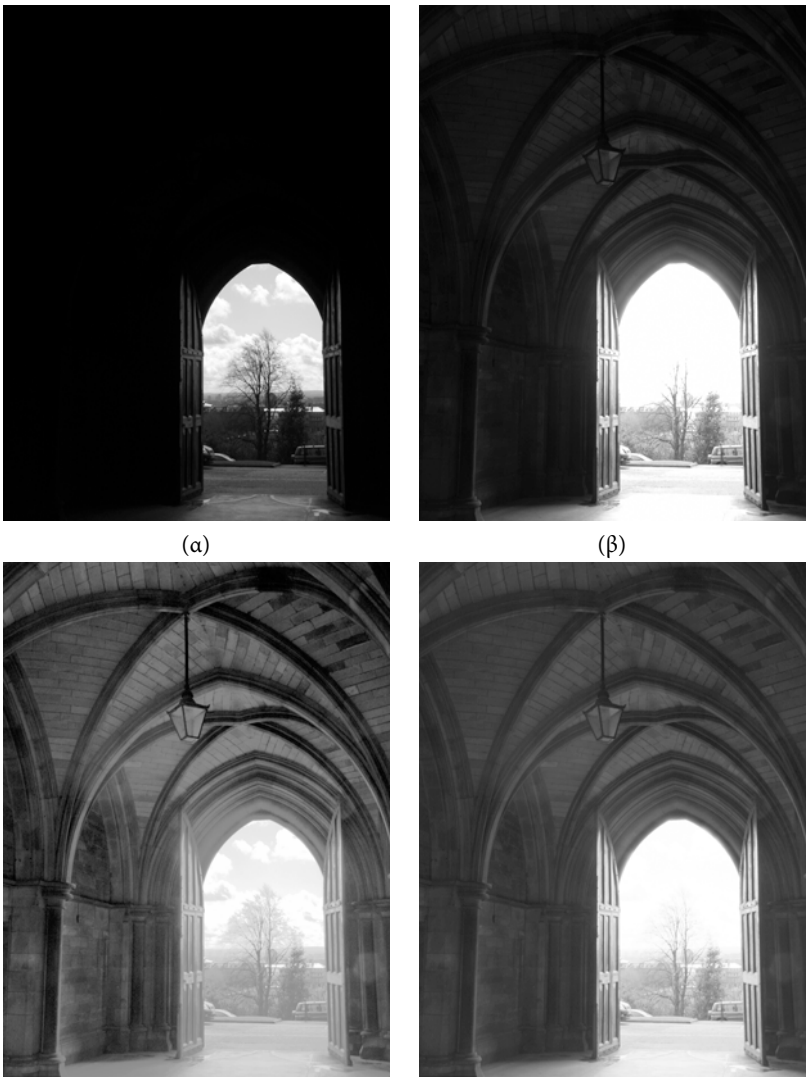
Εικόνες υψηλού δυναμικού εύρους (ΥΔΕ) μπορούν να παραχθούν με ειδικό φωτογραφικό εξοπλισμό (που περιλαμβάνει CCD υψηλού δυναμικού εύρους), συνδυάζοντας συνθετικά πολλαπλές εικόνες με διαφορετικά επίπεδα φωτεινότητας (π.χ. με τεχνικές ολικού φωτισμού [Rein05]). Έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι *τονικής απεικόνισης*[11] που συμπιέζουν εικόνες ΥΔΕ στο δυναμικό εύρος συμβατικών οθονών [Dura02, Lars97, Tumb99], σύμφωνα με συγκεκριμένες *προθέσεις* διατήρησης χαρακτηριστικών (Σχήμα 11.15 και Εικόνα 13). Όσο αναγνωρίσιμες και αν είναι οι εικόνες αυτές, δύσκολα συγκρίνονται με την οπτική εμπειρία λ.χ. των προβολέων αντίθετα κινούμενων οχημάτων την νύχτα, απλά επειδή οι συμβατικές οθόνες δεν έχουν το απαιτούμενο δυναμικό εύρος. Σημειώνουμε ότι αυτό που λείπει δεν είναι η μέγιστη ένταση που μπορεί να εμφανισθεί· αυξάνοντας την φωτεινότητα μιας οθόνης απλά μετατρέπει τα σχεδόν-μαύρα εικονοστοιχεία σε γκρι [Rein05]. Αυτό που λείπει είναι η δυνατότητα εμφάνισης ενός μεγάλου δυναμικού εύρους ταυτόχρονα. Η δημιουργία εικόνων ΥΔΕ έχει δύο πλεονεκτήματα:

1. Οι εικόνες μπορούν να αποθηκευθούν για μελλοντική χρήση στο δυναμικό εύρος του ανθρώπινου οπτικού συστήματος, προλαμβάνοντας έτσι μελλοντικά συστήματα απεικόνισης ΥΔΕ[12].

2. Είναι δυνατόν να εφαρμοσθούν στη συνέχεια *διαφορετικές* τεχνικές τονικής απεικόνισης σε εικόνες ΥΔΕ, αναδεικνύοντας έτσι χαρακτηριστικά τους σύμφωνα με τις εκάστοτε απαιτήσεις.

Οι εικόνες ΥΔΕ μπορούν να αποθηκευτούν αυξάνοντας δραστικά το πλήθος των ψηφίων ανά εικονοστοιχείο (π.χ. με 32 ψηφία ανά χρωματική συνιστώσα, δίνοντας συνολικά 96 ψηφία ανά εικονοστοιχείο). Τα πρότυπα φύλαξης εικόνων ΥΔΕ συνήθως εκμεταλλεύονται την έννοια της ελάχιστης αντιληπτής διαφοράς (ΕΑΔ) (just noticeable difference - JND) [Seet04]. Η ΕΑΔ είναι η ελάχιστη διαφορά έντασης η οποία μπορεί να γίνει αντιληπτή από το ανθρώπινο οπτικό σύστημα σε συγκεκριμένο επίπεδο έντασης. Η σχέση μεταξύ της ΕΑΔ και του επίπεδου έντασης είναι λογαριθμική [Bart92, Bart93]. Συνεπώς έχει νόημα ο διαχωρισμός της έντασης ενός εικονοστοιχείου από το χρωματικό του περιεχόμενο και η χωριστή αποθήκευσή του σε λογαριθμικά κλίμακα. Τα πρότυπα ΥΔΕ, όπως το RGBE του Radiance [Ward91, Ward94] και το LogLuv [Lars98a, Lars98b], χρησιμοποιούν αυτή την τεχνική. Εδώ θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας στο LogLuv με 32 ψηφία ανά εικονοστοιχείο.

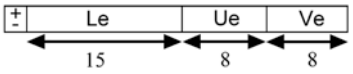
[11] Για μια ολοκληρωμένη περιγραφή της τονικής απεικόνισης βλ. Κεφάλαιο 10.
[12] Η ερευνητική προσπάθεια σε οθόνες ΥΔΕ είναι πολύ ενθαρρυντική [Seet04].



(α) (β)

(γ) (δ)

Σχήμα 11.15: *Εικόνες από σκηνή με μεγάλο δυναμικό εύρος. (α) Η σκοτεινή λήψη χάνει πληροφορία από το εσωτερικό της αψίδας. (β) Η φωτεινή λήψη χάνει πληροφορία από τα σύννεφα. (γ, δ) Μια εικόνα ΥΔΕ κατασκευασμένη από πολλαπλές απλές εικόνες [οι (α) και (β) είναι οι δύο ακραίες] με τονική απεικόνιση ιστογράμματος (γ) και γενική φωτογραφική τονική απεικόνιση κατά Reinhard (δ) είναι πλησιέστερη σε αυτό που μπορεί να αντιληφθεί το ανθρώπινο μάτι. (Εικόνες από Greg Ward.) (Βλ. επίσης Εικόνα 13.)*



Σχήμα 11.16: *Χρήση των 32 ψηφίων του LogLuv.*

Η χρήση των 32 ψηφίων του LogLuv φαίνεται στο Σχήμα 11.16. 15 ψηφία χρησιμοποιούνται για την τιμή έντασης, 1 ψηφίο για το πρόσημο έντασης (επιτρέπονται και αρνητικές τιμές έντασης), και 16 ψηφία για την χρωματικότητα[13]. Η λογαριθμική μετατροπή μεταξύ της (ψηφιοποιημένης ή υπολογισμένης) πραγματικής τιμής έντασης L και της (ακέραιας αποθηκεύσιμης κατά LogLuv) τιμής έντασης L_e είναι της μορφής:

$$L_e = \lfloor c_1(\log_2 L + c_2) \rfloor,$$
$$L = 2^{[L_e/c_1 - c_2]}.$$

Το παραπάνω ενσωματώνει το πλήρες εύρος έντασης που αντιλαμβάνεται ο άνθρωπος σε μικρά βήματα που δεν είναι αντιληπτά από το μάτι [Lars98a].

Οι τιμές χρωματικότητας μετατρέπονται από το CIE XYZ στο Yxy, κατά την Ενότητα 11.3.1, και στη συνέχεια στο Yu′v′ για γραμμικότητα όπως δείχνεται στην Ενότητα 11.3.2 [Wysz00]. Το ορατό εύρος u′v′ κλιμακώνεται στη συνέχεια σε 8 ψηφία για καθένα από τα u′ και v′, δίνοντας αρκετή ακρίβεια για την κάλυψη του ορατού χρωματικού φάσματος.

11.6 Ασκήσεις

1. Υλοποιήστε τον αλγόριθμο αυτοτυπίας και χρησιμοποιήστε τον για να παραστήσετε εικόνα που περιέχει πέντε αποχρώσεις του γκρι με δύο αποχρώσεις του γκρι χρησιμοποιώντας τον πίνακα $\mathbf{H_2}$ της Ενότητας 11.2.1.

2. Σχεδιάστε και υλοποιήστε αλγόριθμο που παίρνει ως είσοδο εικόνα με αποχρώσεις του γκρι και υπολογίζει το πλήθος των τιμών φωτεινότητας (αποχρώσεων) Q, σε πρότυπο της επιλογής σας. Ο αλγόριθμός σας πρέπει στη συνέχεια να κατασκευάζει τον πίνακα αυτοτυπίας $\mathbf{H_m}$ που παρέχει τουλάχιστον Q αποχρώσεις του γκρι (βλ. Ενότητα 11.2.1) και να μετατρέπει την αρχική εικόνα σε ασπρόμαυρη (2 αποχρώσεων: άσπρο και μαύρο) χρησιμοποιώντας τον $\mathbf{H_m}$.

3. Υλοποιήστε τον αλγόριθμο Floyd-Steinberg και δοκιμάστε τον σε εικόνες με αποχρώσεις του γκρι της επιλογής σας.

4. Γενικεύστε τον αλγόριθμο Floyd-Steinberg έτσι, ώστε να λειτουργεί για έγχρωμες εικόνες. Υποθέτοντας χρήση του RGB, θα χρειαστεί να επεξεργασθήτε καθεμία από τις 3 χρωματικές συνιστώσες (κόκκινο, πράσινο, μπλε) χωριστά. Χρη-

[13] Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, η χρωματικότητα αναφέρεται σε δύο από τα τρία χαρακτηριστικά του μοντέλου HSV (απόχρωση και κορεσμός)· η ένταση («τιμή» στο HSV) είναι το τρίτο.

σιμοποιήστε τον αλγόριθμό σας για να μετατρέψετε μια εικόνα με 24 ψηφία ανά εικονοστοιχείο (8 ψηφία ανά χρωματική συνιστώσα) σε εικόνα με 6 ψηφία ανά εικονοστοιχείο (2 ψηφία ανά χρωματική συνιστώσα) και συγκρίνετε το αποτέλεσμα με την εικόνα που προκύπτει από την απλή στρογγυλοποίηση κάθε χρωματικής συνιστώσας σε 2 ψηφία.

5. Ελέγξτε αν η οθόνη σας παρέχει πίνακα μετατροπής $\mathbf{M_1}$ από το RGB στο CIE XYZ. Βρείτε τον αντίστοιχο πίνακα $\mathbf{M_2}$ για μια άλλη οθόνη και μετατρέψτε εικόνες από την πρώτη στη δεύτερη χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (11.5). Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με την απλή μεταφορά των εικόνων RGB μεταξύ των οθονών.

   Σημείωση: Χρησιμοποιήστε ένα απλό πρότυπο, όπως raw RGB.

6. Γράψτε ένα απλό πρόγραμμα που να απεικονίζει αποχρώσεις του γκρι και να επιτρέπει την μετάβαση μεταξύ διαδοχικών αποχρώσεων διαδραστικά, καθώς και μεταπηδήσεις εντός της κλίμακας (π.χ. δίνοντας πραγματικούς αριθμούς μεταξύ του 0 (μαύρο) και του 1 (άσπρο)). Χρησιμοποιήστε το πρόγραμμά σας για να επιβεβαιώσετε πειραματικά την λογαριθμική σχέση μεταξύ των ΕΑΔ και του επιπέδου έντασης, καταγράφοντας την απόλυτη διαφορά σε αποχρώσεις του γκρι για την ΕΑΔ σε διάφορα επίπεδα έντασης (βλ. Ενότητα 11.5).

   Σημείωση: Πρέπει να επιβεβαιώσετε ότι η οθόνη σας εκτελεί αποδεκτή διόρθωση γάμμα (βλ. Ενότητα 11.2.2.)

12

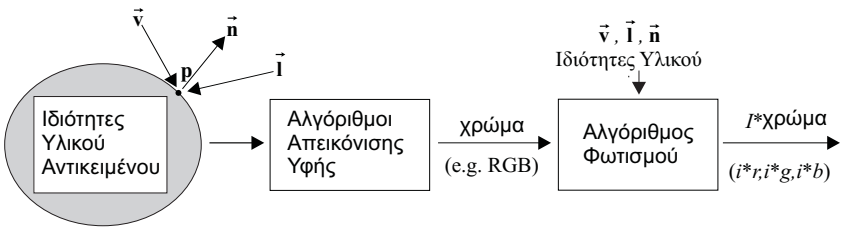
Μοντέλα και αλγόριθμοι φωτισμού

Το ίδιο το φως δε μπορεί να αποτυπωθεί,
επομένως πρέπει να παρασταθεί με κάτι άλλο—το χρώμα.
—Paul Cézanne

12.1 Εισαγωγή

Η ρεαλιστική παράσταση του φωτισμού στα γραφικά επιτυγχάνεται μέσω της θεωρίας της οπτικής. Η θεωρία αυτή έχει αναπτυχθεί μέσα από αιώνες έρευνας της φυσικής και η σχετική βιβλιογραφία είναι μεγάλη. Στα γραφικά επιδιώκουμε την υλοποίηση των τμημάτων της θεωρίας της οπτικής που έχουν τη μεγαλύτερη πρακτική σημασία, λαμβάνοντας παράλληλα υπόψη και το υπολογιστικό κόστος.

Ας εξηγήσουμε όμως πρώτα ποιός είναι ο ρόλος ενός *μοντέλου φωτισμού*. Όταν το φως πέφτει πάνω σε σημείο **p** ενός αντικειμένου (είτε άμεσα είτε έμμεσα μέσω ανακλάσεων) *αλλάζει* το χρώμα του αντικειμένου στο **p** σύμφωνα με παραμέτρους όπως η κατεύθυνση του προσπίπτοντος φωτός, η κατεύθυνση παρατήρησης, το κανονικό διάνυσμα στο **p** (προσανατολισμός), η ανακλαστικότητα του υλικού. Η διαδικασία του φωτισμού δεν πρέπει να συγχέεται με την απεικόνιση υφής, η οποία *επιλέγει* το χρώμα του αντικειμένου στο **p**. Η απεικόνιση υφής προηγείται του φωτισμού ως έννοια και αναλύεται στο Κεφάλαιο 14. Τα αποτελέσματα του φωτισμού και της απεικόνισης υφής συχνά συγχέονται από νέους στην περιοχή των γραφικών και το Σχήμα 12.1 βοηθά να γίνει αντιληπτή η διαφορά.



Σχήμα 12.1: *Αλγόριθμοι υφής και φωτισμού.*

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφέρουμε δύο διαφορετικές τάσεις που υπάρχουν στα γραφικά. Η πρώτη χρησιμοποιεί πρακτικά μοντέλα φωτισμού για την παραγωγή παραδεκτού φωτισμού με χαμηλό υπολογιστικό κόστος, κατάλληλο για εφαρμογές πραγματικού χρόνου και είναι το αντικείμενο του τρέχοντος Κεφαλαίου. Η δεύτερη υλοποιεί ένα μεγάλο μέρος της υπάρχουσας θεωρίας φωτισμού για την παραγωγή ρεαλιστικότερου φωτισμού με μεγάλο υπολογιστικό κόστος· είναι κατάλληλη για απαιτητικές σε ποιότητα εφαρμογές (όχι πραγματικού χρόνου) και είναι το αντικείμενο του Κεφαλαίου 16. Μια ουσιώδης διαφορά μεταξύ των δύο είναι ότι η τελευταία εξετάζει την αλληλεπίδραση του φωτός μεταξύ αντικειμένων, δηλαδή το πως τα αντικείμενα φωτίζονται έμμεσα από φως που αντανακλάται από άλλα αντικείμενα. Γι' αυτό το λόγο μοντέλα της πρώτης κατηγορίας ονομάζονται *μοντέλα τοπικού φωτισμού* ενώ της δεύτερης κατηγορίας ονομάζονται *μοντέλα ολικού φωτισμού*.

Τέλος πρέπει να γίνει σαφής η διαφορά μεταξύ μοντέλου και αλγορίθμου φωτισμού: ένα μοντέλο φωτισμού αποτελείται από ένα σύνολο φυσικών νόμων, ή πρακτικές απλοποιήσεις αυτών, ενώ ένας αλγόριθμος φωτισμού είναι μια αποτελεσματική υλοποίηση ενός μοντέλου φωτισμού.

12.2 Φυσική της αλληλεπίδρασης φωτός-αντικειμένων I

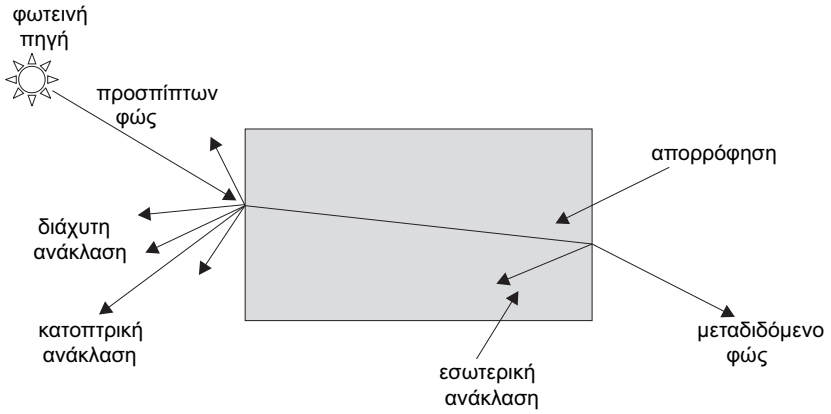
Το φως που φτάνει σ' ένα αντικείμενο διασπάται σε τέσσερα μέρη:

προσπίπτον φως = ανακλώμενο φως+
διαχεόμενο φως + απορροφώμενο φως + μεταδιδόμενο φως

Ανάλογα με την δομή (αδρότητα) της επιφάνειας του αντικειμένου καθώς και άλλες δευτερεύουσες παραμέτρους, ένα τμήμα της προσπίπτουσας φωτεινής ενέργειας ανακλάται στην «αντίθετη» της προσπίπτουσας κατεύθυνσης (*κατοπτρική* ανάκλαση), ενώ ένα άλλο τμήμα διαχέεται προς όλες τις κατευθύνσεις (*διάχυτη* ανάκλαση) αυξάνοντας την διάχυτη φωτεινή ενέργεια. Ένα άλλο τμήμα απορροφάται, αυξάνοντας την θερμοκρασία του αντικειμένου, και ένα τελευταίο τμήμα μεταδίδεται μέσω του αντικειμένου ανάλογα με την διαφάνειά του (Σχήμα 12.2).

Για να κατανοήσουμε τις βασικές έννοιες της αλληλεπίδρασης του φωτός με τα αντικείμενα, είναι απαραίτητη η βασική γνώση *ραδιομετρικών* ποσοτήτων, όπως αυτές ορίζονται από διεθνή πρότυπα [Illi00, Shor05]. Θα χρησιμοποιήσουμε το Διεθνές Πρότυπο Μονάδων (SI). Η ραδιομετρία ασχολείται με τη μέτρηση της οπτικής ακτινοβολίας, δηλαδή της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας στην περιοχή συχνοτήτων από 3×10^{11} Hz ως 3×10^{15} Hz η οποία περιλαμβάνει την υπεριώδη, την ορατή και την υπέρυθρη [Palm05]. Στο σημείο αυτό συνιστάται ανασκόπηση των εννοιών των *στερών γωνιών* (Παράρτημα Δ).

Η *εκπεμπόμενη ενέργεια* (Q) εκπέμπεται από μια φωτεινή πηγή ή ανακλάται από μια επιφάνεια και διαδίδεται με τη μορφή φωτονίων. Η εκπεμπόμενη ενέργεια είναι η συνολική ενέργεια όλων των συχνοτήτων που εκπέμπεται και μετράται σε joule. Ο



Σχήμα 12.2: *Ανάλυση προσπίπτοντος φωτός.*

ρυθμός με τον οποίο η εκπεμπόμενη ενέργεια περνά από κάποιο σημείο του χώρου ονομάζεται *φωτεινή ροή* Φ και μετράται σε watts (watt = joule/sec):

$$\Phi = dQ/dt. \tag{12.1}$$

Η ενέργεια που εκπέμπεται ή ανακλάται από ένα σημείο μπορεί να περιορίζεται σε κάποιες κατευθύνσεις ή να εξαπλώνεται εξίσου προς όλες τις κατευθύνσεις. Η *φωτοβολία* (I_r) ορίζεται ως φωτεινή ροή ανά μονάδα στερεάς γωνίας ω_r σε κάποια κατεύθυνση:

$$I_r = d\Phi_r/d\omega_r. \tag{12.2}$$

Το SI ορίζει ειδική μονάδα, την *candela*, ως τη φωτεινή ένταση σε μια κατεύθυνση για φωτεινή πηγή που εκπέμπει μονοχρωματική ακτινοβολία συχνότητας 540×10^{12} Hz και που έχει φωτοβολία στην κατεύθυνση αυτή 1/683 watt ανά στερακτίνιο. Θα υιοθετήσουμε ως μονάδα έντασης το watt/στερακτίνιο. Εδώ πρέπει να αναφέρουμε ότι ο όρος *ένταση* είναι «υπερφορτωμένος» [Palm95] και υιοθετώντας τον ορισμό φωτεινή ροή ανά στερεά γωνία σε μια κατεύθυνση, ακολουθούμε την πιο διαδεδομένη εκδοχή που αντιστοιχεί και στη μονάδα του SI.

Έτσι φθάνουμε στην έννοια της *λαμπρότητας* (L). Έστω μια στοιχειώδης επιφάνεια dA με κανονικό διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$ που σχηματίζει γωνία θ με την κατεύθυνση του προσπίπτοντος ή εξερχόμενου φωτισμού $\hat{\mathbf{l}}$ (Σχήμα 12.3). Η λαμπρότητα ορίζεται ως φωτεινή ροή ανά μονάδα στερεάς γωνίας που εξέρχεται ή προσπίπτει στην στοιχειώδη επιφάνεια dA από κάποια κατεύθυνση ανά μονάδα προβαλλόμενης επιφάνειας στην κατεύθυνση αυτή:

$$L = d\Phi/(d\omega dA\cos\theta) = d\Phi/(d\omega dA(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{l}})). \tag{12.3}$$

Λόγω της στερεάς γωνίας, η λαμπρότητα είναι αντιστρόφως ανάλογη με το τετράγωνο της απόστασης από την φωτεινή πηγή και μετράται σε watt/(στερακτίνιο $\cdot$ m^2).

Η *λευκαύγεια* (albedo) ρ ενός υλικού είναι ο λόγος της ακτινοβολούμενης προς την προσπίπτουσα ακτινοβολία σε όλο το φάσμα. Η λευκαύγεια —ουσιαστικά— καθορίζει το χρώμα του υλικού χωρίς την επίδραση του φωτισμού.

Ο *φωτισμός* E_i ενός σημείου επιφανείας είναι η προσπίπτουσα φωτεινή ροή ανά μονάδα επιφανείας στη γειτονιά του σημείου. Ο φωτισμός μπορεί να θεωρηθεί ως φωτεινή ροή ανά μονάδα επιφανείας που προσπίπτει απόλες τις κατευθύνσεις εντός ενός ημισφαιρίου σε μια στοιχειώδη επιφάνεια που βρίσκεται στο κέντρο της βάσης του ημισφαιρίου:

$$E_i = d\Phi_i/dA \tag{12.4}$$

με μονάδα το watt/m^2. Παρομοίως η *ένταση φωτεινής ακτινοβολίας (ακτινοβολία)* B είναι η φωτεινή ροή ανά μονάδα επιφανείας που εξέρχεται από μια επιφάνεια:

$$E_r = B = d\Phi_r/dA \tag{12.5}$$

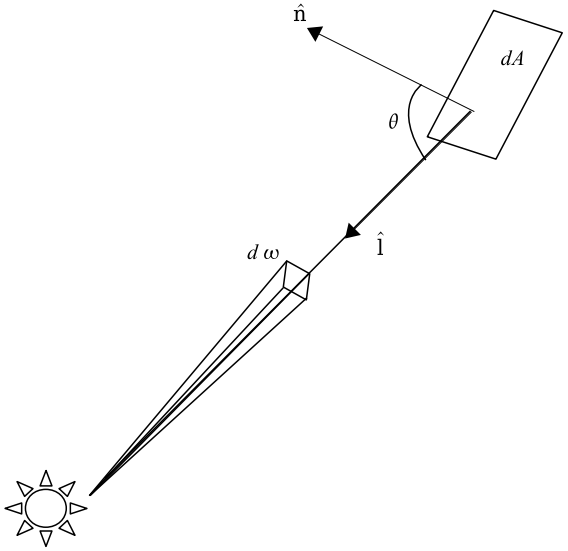
με μονάδα επίσης το watt/m^2.

Για ένα σημείο φωτιζόμενης επιφάνειας ορίζουμε την *προσπίπτουσα ένταση* I_i αντίστοιχα με την φωτοβολία ως προσπίπτουσα ροή ανά μονάδα στερεάς γωνίας:

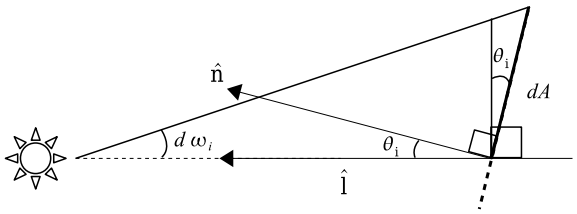
$$I_i = d\Phi_i/d\omega_i. \tag{12.6}$$

Η προσπίπτουσα ένταση μπορεί να συσχετισθεί με τον φωτισμό συνδυάζοντας τις Εξισώσεις (12.4) και (12.6):

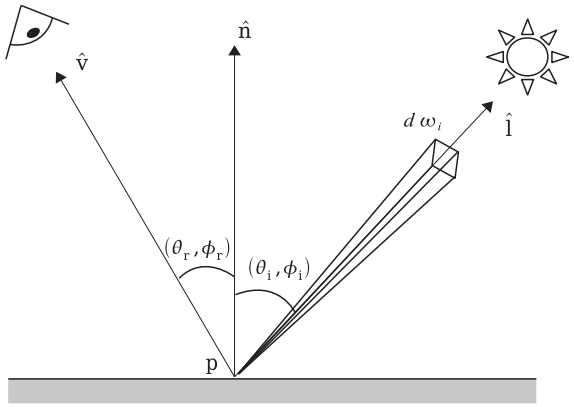
$$E_i = I_i d\omega_i/dA. \tag{12.7}$$



Σχήμα 12.3: *Λαμπρότητα.*



Σχήμα 12.4: $d\omega_i$.



Σχήμα 12.5: *Προσδιορισμός της έντασης σε σημείο επιφάνειας.*

Από τον ορισμό της στερεάς γωνίας έχουμε:

$$d\omega_i = \frac{dA\cos\theta_i}{d^2},$$

όπου $dA \cdot \cos\theta_i$ η προβολή της στοιχειώδους επιφάνειας dA σε ένα επίπεδο κάθετο προς την κατεύθυνση φωτισμού και d η απόσταση της φωτεινής πηγής από την στοιχειώδη επιφάνεια (βλέπε Σχήμα 12.4 και Παράρτημα Δ).

Καταλήγουμε έτσι στο νόμο της φωτομετρίας:

$$E_i = I_i \frac{\cos\theta_i}{d^2} = I_i \frac{(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{l}})}{d^2}. \tag{12.8}$$

Στα γραφικά ενδιαφερόμαστε για τη σχέση του προσπίπτοντος σε μια επιφάνεια φωτός από κάποια κατεύθυνση, με το ανακλώμενο φως σε κάποια άλλη κατεύθυνση, καθώς και με το μεταδιδόμενο φως μέσα από το αντικείμενο (σε περίπτωση διαφάνειας). Αυτή η σχέση ενσωματώνεται στην *κατανομή αμφίδρομης ανακλαστικότητας* (ΚΑΑ) (*bidirectional reflectance distribution function - BRDF*)[Nico77]. Η ΚΑΑ εξαρτάται από πολλές παραμέτρους —κατεύθυνση φωτισμού και παρατήρησης, μήκος κύματος, σκιές, οπτικές ιδιότητες του αντικειμένου, ανακλαστικότητα, απορροφητικό-

τητα, κλπ. Στην πράξη η ΚΑΑ μπορεί μόνο να προσεγγιστεί και είναι γνωστή στις κοινότητες της τηλεπισκόπησης (remote sensing) και της μοντέρνας ζωγραφικής. Η ΚΑΑ συσχετίζει την εξερχόμενη λαμπρότητα dL_r στην κατεύθυνση (θ_r, ϕ_r) με τον φωτισμό dE_i από την κατεύθυνση (θ_i, ϕ_i) (βλέπε Σχήμα 12.5):

$$\text{BRDF} = \frac{dL_r}{dE_i}. \tag{12.9}$$

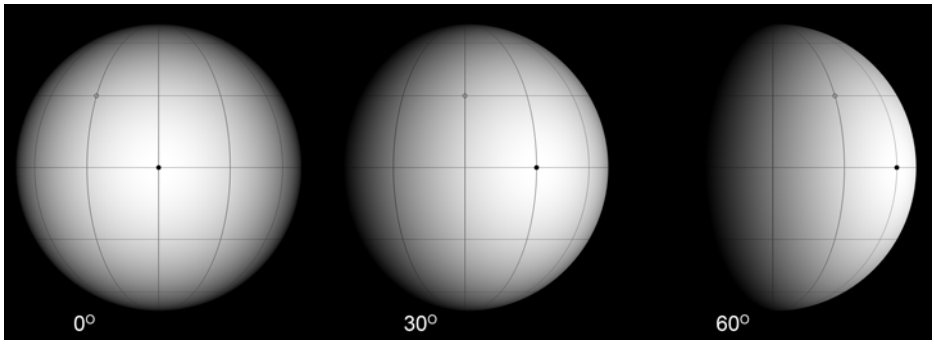
Ουσιαστικά η ΚΑΑ αντιμετωπίζει το γεγονός ότι τα αντικείμενα φαίνονται διαφορετικά όταν παρατηρούνται από διαφορετικές οπτικές γωνίες ή όταν φωτίζονται από διαφορετικές κατευθύνσεις. Ένα κλασικό παράδειγμα από την τηλεπισκόπηση είναι η διαφορά μεταξύ έμπροσθεν και όπισθεν διάχυσης (forward / backward scattering) [Rouj04] όπου η φωτεινή πηγή είναι μπροστά και πίσω από τον παρατηρητή, αντίστοιχα. Η Εικόνα 14 δίνει ένα παράδειγμα με φωτισμό γρασιδιού.

12.3 Το μοντέλο φωτισμού Lambert⊛

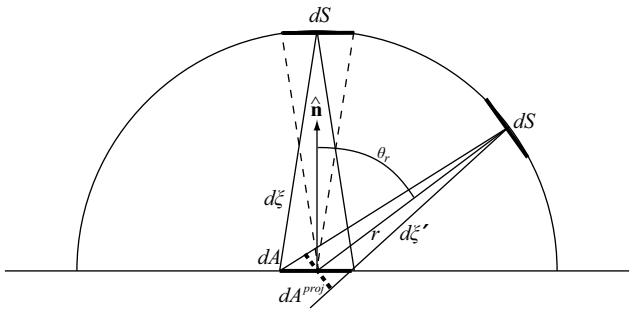
Στο απλούστερο μοντέλο για την ανάκλαση ενέργειας από ένα σώμα, θεωρείται ότι το προσπίπτον φως στη γειτονία του σημείου $\mathbf{p}$ διαχέεται ισοτροπικά προς όλες τις κατευθύνσεις στο ημισφαίριο πάνω από το σημείο (ιδανικός σκεδαστής). Αυτό σημαίνει πως η BRDF (ΚΑΑ) της επιφάνειας είναι σταθερή για όλες τις κατευθύνσεις και αναλλοίωτη ως προς το μήκος κύματος και την πόλωση του προσπίπτοντος φωτός. Ένας ιδανικός σκεδαστής αποκαλείται *Lambertian* επιφάνεια. Ο *φωτισμός διάχυσης* αφορά στο ανακλώμενο φως που προκύπτει από την *ανακλαστικότητα της μάζας* του σώματος, δηλαδή τη ρηχή διάδοση του φωτός κοντά στην επιφάνεια και την έξοδο του από αυτή. Σε αντιδιαστολή με το φωτισμό διάχυσης, ο *κατοπτρικός φωτισμός* αντιστοιχεί στην ενέργεια που ανακλάται ακριβώς στη διαχωριστική επιφάνεια του σώματος με το περιβάλλον του· δηλαδή, στην επαφή δύο μέσων με διαφορετικό δείκτη διάθλασης.

Το 1760, Ο Lambert δημοσίευσε την εργασία του με τίτλο *Photometria* [Lamb60], στην οποία παρουσιάστηκε αυτό που σήμερα είναι γνωστό ως *νόμος συνημιτόνου του Lambert*, ή νόμος της εκπομπής του Lambert: η ολική εκπεμπόμενη ισχύς από μια Lambertian επιφάνεια είναι ευθέως ανάλογη του συνημιτόνου της γωνίας θ_r μεταξύ της κατεύθυνσης παρατήρησης και του κανονικού διανύσματος. Συνέπεια αυτού του νόμου είναι ότι, όταν παρατηρούμε μια στοιχειώδη επιφάνεια dA από οποιαδήποτε κατεύθυνση μέσα στο ημισφαίριο Ω πάνω από το dA, αυτή φαίνεται με την ίδια λαμπρότητα (Σχήμα 12.6). Μια απλουστευμένη εξήγηση αυτού του φαινομένου είναι η ακόλουθη: καθώς η εκπεμπόμενη ισχύς $d\Phi_r$ που αντιλαμβανόμαστε από μια κατεύθυνση (θ_r, φ_r) φθίνει σύμφωνα με το νόμο συνημιτόνου του Lambert, ανάλογα μικραίνει και η στερεά γωνία $d\xi$ που αντιστοιχεί στο τμήμα επιφανείας dA όταν αυτό προβάλλεται αναφορικά με μια στοιχειώδη προσανατολισμένη επιφάνεια dS στη θέση του παρατηρητή (Σχήμα 12.7). Επομένως, προκύπτει η ίδια μείωση και στους δύο όρους του κλάσματος του ορισμού της λαμπρότητας, η οποία προφανώς αλληλο-αναιρείται.

Υποθέστε ότι η επιφάνεια dS που λαμβάνει την ενέργεια είναι τοποθετημένη ακρι-



Σχήμα 12.6: *Το μοντέλο φωτισμού Lambert. Το φως που ανακλάται σε κάθε σημείο της επιφάνειας δεν εξαρτάται από την κατεύθυνση παρατήρησης. Η σφαίρα στο συγκεκριμένο παράδειγμα φωτίζεται από μια μακρινή σημειακή πηγή και απεικονίζεται από τρεις διαφορετικές γωνίες παρατήρησης.*



Σχήμα 12.7: *Η στερεά γωνία που αντιστοιχεί σε μια διαφορική επιφάνεια όπως η δεύτερη «φαίνεται» από ισαπέχουσες από αυτήν θέσεις.*

βώς πάνω από την dA [1] και κάθετη στο κανονικό διάνυσμα της dA (και συνεπώς, εδώ, κάθετη στη διεύθυνση μετάδοσης του εξερχόμενου φωτός). Δεδομένου ότι $\theta_r = 0$, από τον ορισμό της λαμπρότητας (Εξίσωση 12.3), η παρατηρούμενη λαμπρότητα είναι:

$$L_0 = \frac{d\Phi_0}{dSd\xi}. \tag{12.10}$$

Ας τοποθετήσουμε τώρα την επιφάνεια dS σε διαφορετική οπτική γωνία, απομακρύνοντάς την από την κατεύθυνση του κανονικού διανύσματος dA (δηλαδή χαμηλότερα στο ημισφαίριο πάνω από την dA), αλλά έχοντάς την πάντα προσανατολισμένη κάθετα στο διάνυσμα παρατήρησης (Σχήμα 12.7). Σύμφωνα με το νόμο συνημιτόνου του Lambert, η νέα λαμπρότητα σε αυτή την εξερχόμενη κατεύθυνση είναι:

$$L = \frac{d(\Phi_0 \cos\theta_r)}{dSd\xi'} = \frac{\cos\theta_r d\Phi_0}{dSd\xi'}. \tag{12.11}$$

[1] Οι όροι dS και dA συμβολίζουν τα εμβαδά των αντίστοιχων διαφορικών επιφανειών.

Επιπρόσθετα, επειδή η dA είναι πολύ μικρή, η νέα στερεά γωνία $d\xi'$ είναι ευθέως ανάλογη προς την προβολή της dA στην κατεύθυνση διάδοσης του φωτός ($d\xi' = dA\cos\theta_r/r^2$), και έτσι:

$$d\xi' = \cos\theta_r d\xi. \tag{12.12}$$

Αντικαθιστώντας τη νέα στερεά γωνία στην (12.11) παίρνουμε:

$$L = \frac{\cos\theta_r d\Phi_0}{dSd\xi'} = \frac{\cos\theta_r d\Phi_0}{\cos\theta_r dSd\xi} = \frac{d\Phi_0}{dSd\xi} = L_0. \tag{12.13}$$

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε την τιμή της σταθερής BRDF f_d για τις Lambertian επιφάνειες [Glas95]. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, παρά το γεγονός ότι η εξερχόμενη ενέργεια είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο ημισφαίριο πάνω από τη στοιχειώδη επιφάνεια στη γειτονία του $\mathbf{p}$, η f_d δεν είναι ίση με $1/2\pi$ (όπου 2π steradians είναι το μισό της στερεάς γωνίας που αντιστοιχεί στη σφαίρα).

Η εξερχόμενη λαμπρότητα είναι σταθερή και, συνεπώς, δεν εξαρτάται από την κατεύθυνση ανάκλασης του φωτός: $L_r(\theta_r, \varphi_r) = L_r$. Ακόμα, θεωρούμε ότι ο φωτισμός (irradiance) δεν αποσβένει εξαιτίας του υλικού και διαμοιράζεται ισόποσα σε οποιαδήποτε διαφορική στερεά γωνία εκπομπής φωτός από την επιφάνεια. Αυτό σημαίνει ότι ο συντελεστής ανακλαστικότητας [2] $\rho(\vec{\omega}_i \to \Omega)$, δηλαδή ο λόγος του ολικού εκπεμπόμενου φωτός προς το εισερχόμενο φως από τη διαφορική στερεά γωνία (κατεύθυνση) $d\vec{\omega}_i$, ισούται με τη μονάδα. Από τον ορισμό του φωτισμού, της ακτινοβολίας (radiosity), και της λαμπρότητας (Εξισώσεις (12.4), (12.5), και (12.3)), όπως επίσης και από τη σχέση μεταξύ στερεάς γωνίας και της προβολής της σε μια επιφάνεια (Παράρτημα Δ), παίρνουμε:

$$d\Phi_i = E_i dA, \tag{12.14}$$

$$L_r(\theta_r, \varphi_r) = \frac{dE_r(\theta_r, \varphi_r)}{d\vec{\omega}_r \cos\theta_r} = \frac{dE_r(\theta_r, \varphi_r)}{d\vec{\omega}_r^{\text{proj}}} \quad \Rightarrow \tag{12.15}$$

$$dE_r = L_r d\vec{\omega}_r^{\text{προθ}} \Rightarrow E_r = \int_\Omega L_r d\vec{\omega}_r^{\text{προθ}}.$$

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των Εξισώσεων (12.14) και (12.15), η μοναδιαία ανακλαστικότητα γίνεται:

$$\rho(\vec{\omega}_i \to \Omega) = 1 = \frac{d\Phi_r}{d\Phi_i} = \frac{dA\int_\Omega L_r d\vec{\omega}_r^{\text{proj}}}{E_i dA} = \frac{L_r dA\int_\Omega d\vec{\omega}_r^{\text{proj}}}{E_i dA}. \tag{12.16}$$

Από τον ορισμό της BRDF και λαμβάνοντας υπόψη ότι η BRDF για μια Lambertian επιφάνεια είναι σταθερή, έχουμε:

[2] Αποκαλείται για την ακρίβεια συντελεστής ανακλαστικότητας από κώνο σε ημισφαίριο, με βάση την ορολογία της φωτομετρίας. Υπάρχουν άλλοι οκτώ συνδυασμοί συντελεστών ανακλαστικότητας (βλ. [Nico77]).

$$f_d = \frac{dL_r}{L_i \cos\theta_i d\vec{\omega}_i} \quad \Rightarrow \quad dL_r = f_d L_i d\vec{\omega}_i^{\text{proj}} \quad \Rightarrow$$
$$L_r = \int_\Omega f_d L_i d\vec{\omega}_i^{\text{proj}} = f_d \int_\Omega L_i d\vec{\omega}_i^{\text{proj}} = f_d E_i. \tag{12.17}$$

Τώρα μπορούμε να επιστρέψουμε στην Εξίσωση (12.16) και να αντικαταστήσουμε τη L_r από την Εξίσωση (12.17):

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{L_r dA \int_\Omega d\vec{\omega}_r^{\pi\rho\omega\theta}}{E_i dA} = \frac{f_d E_i dA \int_\Omega d\vec{\omega}_r^{\pi\rho\omega\theta}}{E_i dA} \\ &= f_d \int_\Omega d\vec{\omega}_r^{\pi\rho\omega\theta} = f_d \pi \Leftrightarrow f_d = \frac{1}{\pi}. \end{aligned} \tag{12.18}$$

Στην παραπάνω απόδειξη, είδαμε ότι η λαμπρότητα που σχετίζεται με μια απειροστά μικρή επιφάνεια dA στην περιοχή του σημείου $\mathbf{p}$ είναι ανάλογη του συνημιτόνου της γωνίας θ_i μεταξύ του κανονικού διανύσματος στο $\mathbf{p}$ και της κατεύθυνσης πρόσπτωσης. Αυτό οφείλεται στη ροή ενέργειας μέσα από την προβολή της επιφάνειας dA κάθετα στη διεύθυνση μετάδοσης. Για μια λεπτομερέστερη περιγραφή των αρχών φωτομετρίας ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [Glas95].

12.4 Το μοντέλο φωτισμού Phong

Το κλασικό μοντέλο φωτισμού του Phong [Phon75] είναι ένα εμπειρικό μοντέλο τοπικού φωτισμού, το οποίο δεν λαμβάνει υπόψη την αλληλεπίδραση του φωτός μεταξύ αντικειμένων και χρησιμοποιεί όρους που δεν πηγάζουν αποκλειστικά από φυσικούς νόμους. Παρόλα αυτά δίνει ιδιαίτερα ικανοποιητικά αποτελέσματα με χαμηλό υπολογιστικό κόστος, πράγμα που εξηγεί την ευρεία χρήση του.

Το μοντέλο Phong προτείνει μια απλή ΚΑΑ που συσχετίζει την προσπίπτουσα φωτεινή ένταση από την κατεύθυνση (θ_i, ϕ_i) με την ανακλώμενη φωτεινή ένταση στην κατεύθυνση (θ_r, ϕ_r) για ένα σημείο αντικειμένου $\mathbf{p}$ (Σχήμα 12.5). Υπολογίζει την ορατή ένταση ως άθροισμα τεσσάρων όρων: εκπομπή, ανάκλαση περιβάλλοντος φωτισμού, διάχυτη ανάκλαση και κατοπτρική ανάκλαση:

$$I = I_e + I_g + I_d + I_s. \tag{12.19}$$

Η επίδραση των όρων του μοντέλου Phong φαίνεται στην Εικόνα 15. Ο όρος εκπομπής I_e χρησιμοποιείται για αυτόφωτα αντικείμενα. Ο όρος περιβάλλοντος φωτισμού I_g αντισταθμίζει το γεγονός ότι το μοντέλο Phong δεν λαμβάνει υπόψη την αλληλεπίδραση του φωτός μεταξύ των αντικειμένων. Χωρίς τον όρο I_g μια επιφάνεια που δεν φωτίζεται άμεσα από φωτεινή πηγή θα εμφανιζόνταν εντελώς σκοτεινή. Θεωρείται ότι υπάρχει μια σταθερή τιμή περιβάλλοντος φωτισμού I_a και κάθε αντικείμενο αντανακλά τον φωτισμό αυτό ανάλογα μ' ένα συντελεστή k_a:

$$I_g = I_a k_a \quad (0 \le k_a \le 1). \tag{12.20}$$

Το φως που πέφτει σ' ένα αντικείμενο απευθείας από μια φωτεινή πηγή διαιρείται σε δύο ανακλαστικές συνιστώσες: στη διάχυτη, που κατανέμεται ομοιόμορφα σε όλες τις κατευθύνσεις και στην κατοπτρική, που έχει τη μέγιστη τιμή της στην κατοπτρικά αντίθετη κατεύθυνση από αυτή του φωτισμού. Οι συντελεστές διάχυτης και κατοπτρικής ανάκλασης k_d και k_s εξαρτώνται κυρίως από τα χαρακτηριστικά της επιφάνειας του αντικειμένου. Όσο πιο αδρή είναι η επιφάνεια τόσο περισσότερο φως ανακλάται διάχυτα, ενώ όσο πιο λεία είναι η επιφάνεια τόσο περισσότερο φως ανακλάται κατοπτρικά. Γενικά ισχύει $0 \le k_d, k_s \le 1$ και $k_d + k_s \le 1$. Το άθροισμα των k_d και k_s μπορεί να είναι λίγο μικρότερο από 1, λαμβάνοντας υπόψη το φως που διαδίδεται ή απορροφάται από το αντικείμενο.

Ο διάχυτος όρος υποθέτει επιφάνεια τύπου Lambert (βλέπε Ενότητα 12.3) και κατανέμει το προσπίπτον φως εξίσου σε όλες τις κατευθύνσεις. Συνεπώς δεν εξαρτάται από την κατεύθυνση παρατήρησης. Η τιμή του είναι ανάλογη του φωτισμού E_i που μπορεί να αντικατασταθεί από την ένταση I_i σύμφωνα με το νόμο της φωτομετρίας (Εξίσωση (12.8)). Η απόσταση d αγνοείται, υποθέτοντας ότι η φωτεινή πηγή βρίσκεται στο άπειρο:

$$I_d = I_i k_d \cos\theta = I_i k_d (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{l}}), \quad (0 \le \theta \le \pi/2, \quad 0 \le k_d \le 1) \tag{12.21}$$

όπου I_i η ένταση μιας σημειακής φωτεινής πηγής, θ η γωνία μεταξύ της κατεύθυνσης φωτισμού ($\hat{\mathbf{l}}$) και του κανονικού διανύσματος της επιφάνειας ($\hat{\mathbf{n}}$) (Σχήμα 12.8(α)), και k_d ο συντελεστής διάχυτης ανάκλασης του αντικειμένου. Το k_d, εκτός από την αδρότητα της επιφάνειας, εξαρτάται και από το μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτός. Τα διανύσματα $\hat{\mathbf{l}}$ και $\hat{\mathbf{n}}$ πρέπει να είναι μοναδιαία. Για μια επίπεδη επιφάνεια, η τιμή του I_d είναι σταθερή αφού δεν μεταβάλλονται τα διανύσματα $\hat{\mathbf{n}}$ και $\hat{\mathbf{l}}$ (φωτεινή πηγή στο άπειρο). Στην πράξη εξασφαλίζουμε ότι το $\cos\theta$ δεν παίρνει αρνητικές τιμές:

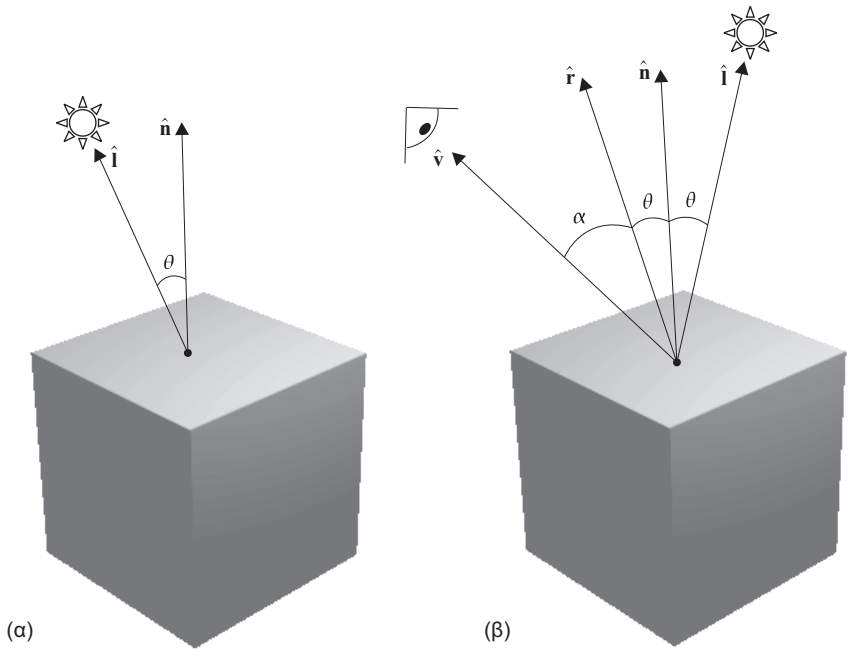
$$I_d = I_i k_d \max(0, \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{l}}).$$

Από μόνος του ο όρος διάχυτου φωτισμού δίνει στα αντικείμενα μη γυαλιστερή (ματ) εμφάνιση. Ο κατοπτρικός όρος ακολουθεί το νόμο του καθρέπτη. Ένας τέλειος καθρέπτης εκτελεί κατοπτρική ανάκλαση μόνο στην κατεύθυνση ανάκλασης $\hat{\mathbf{r}}$ (Σχήμα 12.8(β)). Οι περισσότερες επιφάνειες χαρακτηρίζονται από μια συνάρτηση κατοπτρικής ανάκλασης που παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν η κατεύθυνση παρατήρησης $\hat{\mathbf{v}}$ συμπίπτει με την $\hat{\mathbf{r}}$:

$$I_s = I_i k_s \cos^n \alpha = I_i k_s (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{v}})^n, \tag{12.22}$$

όπου τα $\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\mathbf{v}}$ είναι μοναδιαία διανύσματα και το n μια εμπειρική τιμή που σχετίζεται με το πόσο γυαλιστερή είναι η επιφάνεια.

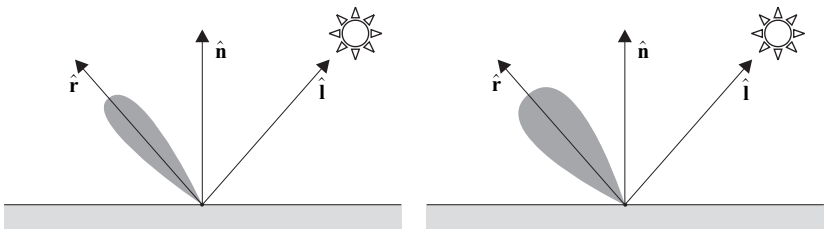
Μια καλύτερη προσέγγιση για τον συντελεστή κατοπτρικής ανάκλασης k_s είναι μια συνάρτηση $w(\theta, \lambda)$ της γωνίας πρόσπτωσης θ και του μήκους κύματος λ. Θεωρώντας ένα κομμάτι γυαλί, όταν $\theta = 0$, δεν έχουμε καθόλου ανάκλαση, ενώ για $\theta = 90$, έχουμε



Σχήμα 12.8: *(α) Τα διανύσματα* $\hat{\mathbf{l}}$ *και* $\hat{\mathbf{n}}$*. (β) Τα διανύσματα* $\hat{\mathbf{v}}$*,* $\hat{\mathbf{r}}$*,* $\hat{\mathbf{n}}$*, και* $\hat{\mathbf{l}}$*.*

μέγιστη ανάκλαση.

Η κατοπτρική ανάκλαση είναι υπεύθυνη για τις *λάμψεις* που εμφανίζονται σε γυαλιστερά αντικείμενα. Ο όρος $\cos^n \alpha$ προσεγγίζει τη χωρική κατανομή του ανακλώμενου φωτός. Το αποτέλεσμα του δείκτη υλικού n και του συντελεστή κατοπτρικής ανάκλασης k_s φαίνεται στο Σχήμα 12.9 και στην Εικόνα 16. Μικρές τιμές του n αντιστοιχούν σε αδρά υλικά, όπου η λάμψη είναι ασαφής και το μέγεθος της σχετικά μεγάλο. Αντίθετα, μεγάλες τιμές του n αντιστοιχούν σε λεία υλικά με μικρή και καλά οριοθετημένη λάμψη. Η κατοπτρική ανάκλαση παίρνει το χρώμα της φωτεινής πηγής. Για παράδειγμα, αν ένα μπλε αντικείμενο φωτίζεται με άσπρο φως, το χρώμα της διάχυτης ανάκλασης θα είναι μπλε ενώ αυτό της κατοπτρικής ανάκλασης θα είναι άσπρο.



Σχήμα 12.9: *Η λάμψη του μοντέλου Phong (εμφανίζεται όταν το* $\hat{\mathbf{v}}$ *βρίσκεται στη σκιασμένη περιοχή) για μεγάλο n (αριστερά) και μικρό n (δεξιά).*

Η τιμή του κατοπτρικού όρου $\cos^n \alpha$ δεν πρέπει να παίρνει αρνητικές τιμές, οπότε μπορούμε να τον αντικαταστήσουμε με το $\max(0, \cos^n \alpha)$.

Έτσι το μοντέλο Phong υπολογίζει τον φωτισμό ως εξής:

$$I = I_e + I_a k_a + I_i(k_d(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{l}}) + k_s(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{v}})^n). \tag{12.23}$$

Για απλοποίηση των υπολογισμών, η φωτεινή πηγή και το σημείο παρατήρησης συχνά τοποθετούνται σε άπειρη απόσταση, δίνοντας σταθερές τιμές στα διανύσματα $\hat{\mathbf{l}}$ και $\hat{\mathbf{v}}$ για επίπεδες επιφάνειες. Μια αποτελεσματική παραλλαγή του υπολογισμού κατοπτρικής ανάκλασης χρησιμοποιεί το *διχοτόμο* διάνυσμα $\hat{\mathbf{h}}$ [Blin77], που είναι ο μέσος όρος των $\hat{\mathbf{l}}$ και $\hat{\mathbf{v}}$ (Σχήμα 12.10):

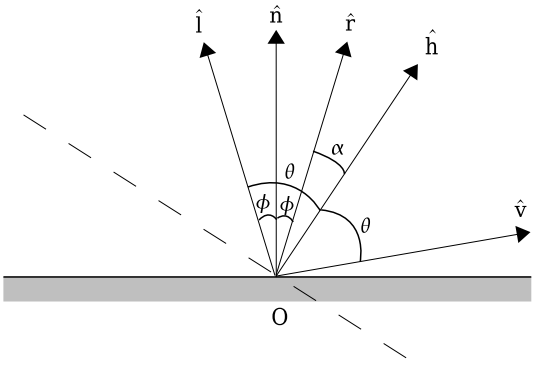
$$\hat{\mathbf{h}} = \frac{(\hat{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{v}})/2}{|(\hat{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{v}})/2|}. \tag{12.24}$$

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 12.10, η γωνία $\widehat{\mathbf{nh}} = \varphi + \alpha$, η γωνία $\widehat{\mathbf{rv}} = \theta + \alpha$ και καθώς $\theta = 2\varphi + \alpha$, συμπεραίνουμε ότι $\widehat{\mathbf{rv}} = 2\widehat{\mathbf{nh}}$· δηλαδή η γωνία που σχηματίζεται από τα $\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\mathbf{v}}$ είναι διπλάσια από τη γωνία μεταξύ των $\hat{\mathbf{n}}$ και $\hat{\mathbf{h}}$. Συνεπώς, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το γινόμενο $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{v}}$ με το $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{h}}$ και να αλλάξουμε κατάλληλα την τιμή του n:

$$I = I_e + I_a k_a + I_i(k_d(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{l}}) + k_s(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{h}})^n). \tag{12.25}$$

Το διάνυσμα $\hat{\mathbf{h}}$ υπολογίζεται πολύ φθηνότερα από το $\hat{\mathbf{r}}$ και αν τα $\hat{\mathbf{l}}$ και $\hat{\mathbf{v}}$ είναι σταθερά (π.χ. για επίπεδα αντικείμενα με την φωτεινή πηγή και το σημείο παρατήρησης στο άπειρο), τότε το διάνυσμα $\hat{\mathbf{h}}$ είναι επίσης σταθερό. Το διάνυσμα $\hat{\mathbf{h}}$ μπορεί να θεωρηθεί ως το κανονικό διάνυσμα του επιπέδου για το οποίο ο παρατηρητής από το $\hat{\mathbf{v}}$ θα έβλεπε τη μέγιστη τιμή της κατοπτρικής ανάκλασης για φωτεινή πηγή από το $\hat{\mathbf{l}}$ (αυτό το επίπεδο αντιστοιχεί στην διακεκομμένη γραμμή στο Σχήμα 12.10).

Ως τώρα υποθέτουμε ότι η φωτεινή πηγή είναι στο άπειρο, η συνεισφορά του κατοπτρικού και του διάχυτου όρου εξαρτάται από την ένταση της φωτεινής πηγής και



Σχήμα 12.10: *Το διχοτόμο διάνυσμα* $\hat{\mathbf{h}}$.

ότι ο όρος περιβάλλοντος φωτισμού είναι σταθερός. Συνεπώς, αντικείμενα με ίδιες ιδιότητες και προσανατολισμό αλλά διαφορετικές αποστάσεις από τη φωτεινή πηγή θα έχουν (λανθασμένα) την ίδια ένταση φωτισμού. Αυτό μπορεί να διορθωθεί μ' έναν παράγοντα που εξαρτάται από την απόσταση του φωτιζόμενου σημείου του αντικειμένου από την φωτεινή πηγή. Ο σωστός υπολογισμός (σύμφωνα με τους νόμους της φυσικής) περιλαμβάνει μείωση της έντασης σύμφωνα με το τετράγωνο της απόστασης d από τη φωτεινή πηγή. Συχνά όμως χρησιμοποιούμε μια πιο ευέλικτη εξίσωση η οποία περιλαμβάνει επίσης ένα γραμμικό και ένα σταθερό όρο, που είναι χρήσιμοι σε ειδικά εφέ:

$$f(d) = 1/(c_1 + c_2 d + c_3 d^2).$$

Έτσι, το μοντέλο γίνεται:

$$I = I_e + I_a k_a + f(d) I_i (k_d(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{l}}) + k_s(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{h}})^n). \tag{12.26}$$

Πολλαπλές φωτεινές πηγές μπορούν να ενσωματωθούν προσθέτοντας τις ανεξάρτητες συνεισφορές τους:

$$I = I_e + I_a k_a + \sum_j (f(d_j) I_{i,j} (k_d(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{l}}_j) + k_s(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{h}}_j)^n)). \tag{12.27}$$

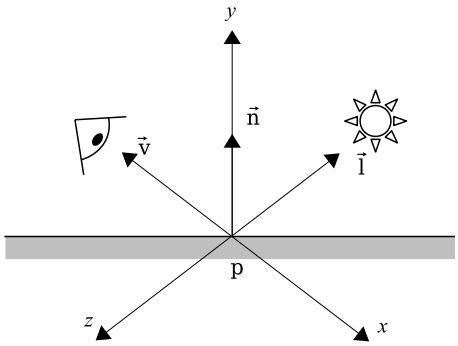
Για μονοχρωματικό φως, η αρχική μονοχρωματική τιμή ν ενός σημείου αντικειμένου $\mathbf{p}$ μετατρέπεται κατά το αποτέλεσμα I του μοντέλου φωτισμού ως εξής: $\nu' = \nu I$.

Το μοντέλο μπορεί να επεκταθεί για έγχρωμο φως δίνοντας το χρώμα της φωτεινής πηγής στην κατοπτρική ανάκλαση. Το χρώμα των όρων περιβάλλοντος και διάχυσης εξαρτάται από τους χρωματικούς συντελεστές του υλικού του αντικειμένου. Έτσι υπολογίζονται τρεις τιμές έντασης, μια για κάθε χρωματική συνιστώσα:

$$\begin{aligned} I_r &= I_{er} + I_a k_{ar} + (f(d) I_i (k_{dr}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{l}}) + k_s(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{h}})^n)), \\ I_g &= I_{eg} + I_a k_{ag} + (f(d) I_i (k_{dg}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{l}}) + k_s(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{h}})^n)), \\ I_b &= I_{eb} + I_a k_{ab} + (f(d) I_i (k_{db}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{l}}) + k_s(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{h}})^n)). \end{aligned} \tag{12.28}$$

Σημειώνουμε ότι η κατοπτρική ανάκλαση συνεισφέρει εξίσου και στις τρεις εξισώσεις, προσομοιώνοντας μια άσπρη φωτεινή πηγή. Έτσι, αν (r, g, b) είναι το αρχικό χρώμα ενός αντικειμένου στο σημείο $\mathbf{p}$ (*λευκαύγεια*: είναι συνήθως το αποτέλεσμα αλγορίθμου απεικόνισης υφής)· αυτό μπορεί να μετατραπεί από το αποτέλεσμα του υπολογισμού χρωματικής έντασης ως εξής: $(r', g', b') = (rI_r, gI_g, bI_b)$.

Αριθμητικό παράδειγμα. Το παράδειγμα αυτό βασίζεται στο βασικό μοντέλο Phong με το διχοτόμο διάνυσμα (Εξίσωση (12.25)). Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή έντασης ενός σημείου $\mathbf{p}$ το οποίο, για διευκόλυνση των υπολογισμών, βρίσκεται στο κέντρο συντεταγμένων $\mathbf{p} = [0, 0, 0]^{\mathrm{T}}$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 12.11. Επίσης, έστω ότι το κανονικό διάνυσμα του αντικειμένου στο $\mathbf{p}$, τα διανύσματα φωτι-



Σχήμα 12.11: *Απλό παράδειγμα Phong.*

σμού και παρατήρησης, αντίστοιχα, είναι

$$\overrightarrow{\mathbf{n}} = [0,2,0]^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{l}} = [1,1,0]^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{v}} = [0,1,1]^{\mathrm{T}}.$$

Οι τιμές της εκπεμπόμενης, της περιβάλλουσας και της προσπίπτουσας (από τη φωτεινή πηγή) έντασης είναι:

$$I_e = 2, \quad I_a = 1, \quad I_i = 12,$$

και οι τιμές των σταθερών είναι:

$$k_a = 0.3, \quad k_d = 0.3, \quad k_s = 0.6, \quad n = 3.$$

Με άλλα λόγια, η φωτεινή πηγή είναι δώδεκα φορές πιο έντονη από τον περιβάλλοντα φωτισμό, ενώ το αντικείμενο είναι αυτόφωτο και έχει δύο φορές την ένταση του περιβάλλοντος. Επίσης, αφού $k_d + k_s = 0.9$, 10% του προσπίπτοντος φωτός απορροφάται από το αντικείμενο. Πριν εφαρμόσουμε την εξίσωση Phong πρέπει να υπολογίσουμε το διχοτόμο διάνυσμα και να κανονικοποιήσουμε όλα τα διανύσματα:

$$\hat{\mathbf{l}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{l}}}{|\overrightarrow{\mathbf{l}}|} = \frac{[1,1,0]^{\mathrm{T}}}{\sqrt{1^2+1^2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{v}}}{|\overrightarrow{\mathbf{v}}|} = \frac{[0,1,1]^{\mathrm{T}}}{\sqrt{1^2+1^2}} = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{h}} = (\hat{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{v}})/2 = \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{\mathbf{h}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{h}}}{|\overrightarrow{\mathbf{h}}|} = \frac{[\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}]^{\mathrm{T}}}{\sqrt{3}/2} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{[0,2,0]^{\mathrm{T}}}{\sqrt{2^2}} = [0,1,0]^{\mathrm{T}}.$$

Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την Εξίσωση (12.25):

$$I = 2 + 1 \cdot 0.3 + 12 \cdot (0.3 \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}) + 0.6 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^3) = 8.76.$$

Αυτή η τελική τιμή έντασης αντιστοιχεί στη δοσμένη οπτική γωνία και στις εντάσεις εισόδου. Σημειώνουμε ότι η γωνία μεταξύ των κατευθύνσεων ανάκλασης και παρατήρησης είναι $\widehat{\mathbf{rv}} = 2\widehat{\mathbf{nh}} = 2\arccos(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}) = 70°$. Αν η κατεύθυνση παρατήρησης συνέπιπτε με την κατεύθυνση ανάκλασης δηλαδή,

$$\hat{\mathbf{v}} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]^{\mathrm{T}},$$

τότε η κατοπτρική ανάκλαση θα είχε τη μέγιστη τιμή της αφού $\widehat{\mathbf{rv}} = 2\widehat{\mathbf{nh}} = 2\arccos(1) = 0°$:

$$\hat{\mathbf{h}} = [0,1,0]^{\mathrm{T}},$$

$$I = 2 + 1 \cdot 0.3 + 12 \cdot (0.3 \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}) + 0.6 \cdot 1^3) = 12.05.$$

12.5 Διανύσματα μοντέλου Phong

Το μοντέλο Phong χρησιμοποιεί κάποια διανύσματα για τον υπολογισμό της τιμής φωτισμού ενός σημείου· συγκεκριμένα τα $\overrightarrow{\mathbf{n}}$, $\overrightarrow{\mathbf{l}}$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ και $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ ή $\overrightarrow{\mathbf{h}}$. Οι υπολογισμοί των διανυσμάτων αυτών πρέπει να γίνονται αποτελεσματικά, καθώς επαναλαμβάνονται για κάθε σημείο που εφαρμόζεται το μοντέλο.

12.5.1 Το κανονικό διάνυσμα

Το *κανονικό διάνυσμα* $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ ορίζεται ως το κάθετο διάνυσμα σε κάποιο σημείο μιας επιφάνειας. Η κατεύθυνσή του ορίζει τον προσανατολισμό της επιφάνειας και είναι πολύ χρήσιμο στα γραφικά. Παραδείγματα χρήσης του εντοπίζονται στον υπολογισμό του φωτισμού και στην περικοπή πίσω όψεων (βλέπε Κεφάλαιο 5).

Κανονικό διάνυσμα για πεπλεγμένες επιφάνειες.

Οι πεπλεγμένες επιφάνειες ορίζονται με μια εξίσωση της μορφής:

$$f(x,y,z) = 0.$$

Το κανονικό διάνυσμα σε ένα σημείο $\mathbf{p} = [a, b, c]^{\mathrm{T}}$ μιας τέτοιας επιφάνειας δίνεται ως το διάνυσμα κλίσης στην περιοχή του $\mathbf{p}$:

$$\overrightarrow{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{bmatrix}.$$

Στην περίπτωση επίπεδης επιφάνειας οριζόμενης ως:

$$f(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0,$$

το κανονικό διάνυσμα, που είναι σταθερό σε ολόκληρη την επιφάνεια, είναι:

$$\overrightarrow{\mathbf{n}} = [a, b, c]^{\mathrm{T}}.$$

Κανονικό διάνυσμα για παραμετρικές επιφάνειες.

Οι επιφάνειες συχνά παριστάνονται παραμετρικά (βλέπε Κεφάλαιο 7). Στις τρεις διαστάσεις, μια επιφάνεια παριστάνεται από τρεις παραμετρικές εξισώσεις δύο παραμέτρων u και v:

$$x = f_x(u, v),$$
$$y = f_y(u, v),$$
$$z = f_z(u, v).$$

Το κανονικό διάνυσμα τότε είναι:

$$\overrightarrow{\mathbf{n}} = \frac{\overrightarrow{\partial \mathbf{f}}}{\partial \mathbf{u}} \times \frac{\overrightarrow{\partial \mathbf{f}}}{\partial \mathbf{v}}, \tag{12.29}$$

όπου:

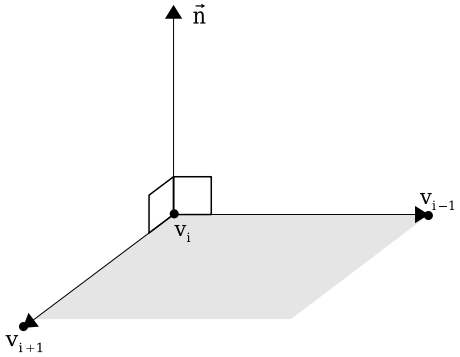
$$\overrightarrow{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}, \quad \frac{\overrightarrow{\partial \mathbf{f}}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \partial f_x/\partial u \\ \partial f_y/\partial u \\ \partial f_z/\partial u \end{bmatrix}, \quad \frac{\overrightarrow{\partial \mathbf{f}}}{\partial \mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \partial f_x/\partial v \\ \partial f_y/\partial v \\ \partial f_z/\partial v \end{bmatrix}.$$

Κανονικό διάνυσμα πολυγώνων.

Τα πολύγωνα, και συγκεκριμένα τα τρίγωνα, είναι τα συνήθη συστατικά για την κατασκευή μοντέλων. Πρακτικά, η εξίσωση του επιπέδου δεν είναι γνωστή και το πολύγωνο ορίζεται ως λίστα κορυφών. Υπάρχουν αρκετοί τρόποι για τον ορισμό του κανονικού διανύσματος στην περίπτωση αυτή.

Δοθέντων τριών διαδοχικών, μη συγγραμμικών κορυφών ενός πολυγώνου $\mathbf{v_{i-1}}$, $\mathbf{v_i}$ και $\mathbf{v_{i+1}}$, μπορούμε να υπολογίσουμε το κανονικό διάνυσμα στο επίπεδο του πολυγώνου ως εξωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων που ορίζονται από τα τρία σημεία:

$$\overrightarrow{\mathbf{n}} = (\mathbf{v_{i+1}} - \mathbf{v_i}) \times (\mathbf{v_{i-1}} - \mathbf{v_i}).$$



Σχήμα 12.12: *Ο κανόνας του δεξιού χεριού.*

Χρειάζεται προσοχή καθώς το εξωτερικό γινόμενο δεν έχει την αντιμεταθετική ιδιότητα. Ο παραπάνω υπολογισμός ακολουθεί τον κανόνα του δεξιού χεριού: αν το πρώτο διάνυσμα είναι ο αντίχειρας και το δεύτερο ο δείκτης, τότε το κανονικό διάνυσμα είναι ο μέσος του δεξιού χεριού (Σχήμα 12.12). Καθώς τα περιβάλλοντα γραφικών, συνήθως, επιτρέπουν τον ορισμό της περιμέτρου πολυγώνων είτε σύμφωνα είτε αντίθετα από την κατεύθυνση των δεικτών του ρολογιού (κοιτάζοντάς το από «έξω»), είναι απαραίτητο να επιλέξουμε τον σωστό ορισμό· αλλιώς οι υπολογισμοί των κανονικών διανυσμάτων θα αντιστραφούν και τα αντικείμενα θα φαίνονται «μέσα-έξω».

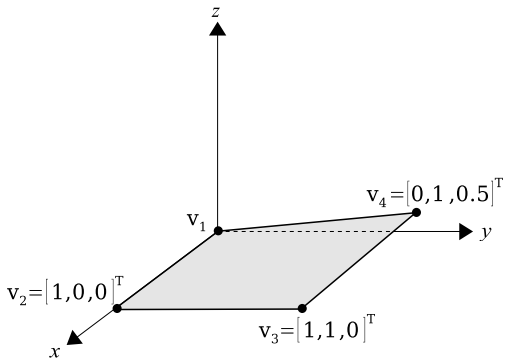
Για πολύγωνα με περισσότερες από τρεις κορυφές είναι πρακτικά πιθανό να μην είναι όλες οι κορυφές συνεπίπεδες, ειδικά στην περίπτωση ψηφιοποιημένων αντικειμένων. Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το κανονικό διάνυσμα ως τον μέσο όρο των κανονικών διανυσμάτων που δίνουν όλα τα ζεύγη των διαδοχικών ακμών του. Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τεχνική των Martin-Newell [Suth74b]: αν $[x_i, y_i, z_i]^{\mathrm{T}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι οι n κορυφές ενός πολυγώνου, τότε οι συντελεστές a, b, c ενός προσεγγιστικού επιπέδου υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i\oplus 1})(z_i + z_{i\oplus 1}), \\ b &= \sum_{i=1}^{n} (z_i - z_{i\oplus 1})(x_i + x_{i\oplus 1}), \\ c &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i\oplus 1})(y_i + y_{i\oplus 1}), \end{aligned} \tag{12.30}$$

όπου $\oplus$ συμβολίζει την πρόσθεση modulo n. Αν απαιτείται και ο (σταθερός) συντελεστής d της εξίσωσης του επιπέδου, αυτός μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες μιας από τις κορυφές του πολυγώνου:

$$d = -(ax_1 + by_1 + cz_1).$$

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του κανονικού διανύσματος χρησιμοποιεί τρείς



Σχήμα 12.13: *Παράδειγμα υπολογισμού κανονικού διανύσματος.*

μη-συγγραμμικές κορυφές του πολυγώνου. Αν $[x_1, y_1, z_1]^{\mathrm{T}}$, $[x_2, y_2, z_2]^{\mathrm{T}}$, και $[x_3, y_3, z_3]^{\mathrm{T}}$ είναι τρία τέτοια σημεία, τότε αυτά πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση του επιπέδου:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = -1,$$
$$ax_2 + by_2 + cz_2 = -1,$$
$$ax_3 + by_3 + cz_3 = -1,$$

ή

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

ή

$$\mathbf{XC} = \mathbf{D}.$$

Οπότε

$$\mathbf{C} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{D}.$$

Αριθμητικό παράδειγμα. Έστω πολύγωνο με κορυφές $\mathbf{v_1} = [0, 0, 0]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{v_2} = [1, 0, 0]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{v_3} = [1, 1, 0]^{\mathrm{T}}$ και $\mathbf{v_4} = [0, 1, 0.5]^{\mathrm{T}}$ (Σχήμα 12.13), του οποίου πρέπει να υπολογίσουμε το κανονικό διάνυσμα. Σημειώνουμε ότι οι κορυφές δεν είναι ακριβώς συνεπίπεδες. Θα χρησιμοποιήσουμε δύο τεχνικές: τον μέσο όρο των κανονικών διανυσμάτων που σχηματίζουν όλα τα ζεύγη διαδοχικών ακμών και την τεχνική Martin-Newell.

Πρώτα υπολογίζουμε τέσσερα κανονικά διανύσματα (ένα για κάθε ζεύγος διαδοχικών ακμών). Κάθε τέτοιο διάνυσμα έχει δείκτη τον δείκτη της κορυφής στην οποία οι ακμές κάθε ζεύγους συμπίπτουν:

$$\vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{v_1}} = [1, 0, 0]^{\mathrm{T}} \times [0, 1, 0.5]^{\mathrm{T}} = [0, -0.5, 1]^{\mathrm{T}},$$
$$\vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{v_2}} = [0, 1, 0]^{\mathrm{T}} \times [-1, 0, 0]^{\mathrm{T}} = [0, 0, 1]^{\mathrm{T}},$$
$$\vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{v_3}} = [-1, 0, 0.5]^{\mathrm{T}} \times [0, -1, 0]^{\mathrm{T}} = [0.5, 0, 1]^{\mathrm{T}},$$
$$\vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{v_4}} = [0, -1, -0.5]^{\mathrm{T}} \times [1, 0, -0.5]^{\mathrm{T}} = [0.25, -0.5, 1]^{\mathrm{T}}.$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το κανονικό διάνυσμα του πολυγώνου ως μέσο όρο των παραπάνω διανυσμάτων. Για να δώσουμε ίσα βάρη σε όλες τις ακμές, κανονικοποιούμε τα διανύσματα πριν το άθροισμα:

$$\overrightarrow{\mathbf{n}} = \frac{\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v}_1} + \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v}_2} + \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v}_3} + \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v}_4}}{4} = [0.17, -0.22, 0.91]^{\mathrm{T}}$$

και

$$\hat{\mathbf{n}} = [0.18, -0.23, 0.96]^{\mathrm{T}}.$$

Με την εξίσωση των Martin-Newell τελικά παίρνουμε:

$$\begin{aligned} a &= 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 = 0.5, \\ b &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-0.5) \cdot 1 + 0.5 \cdot 0 = -0.5, \\ c &= (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0.5 = 2. \end{aligned}$$

Οπότε, $\overrightarrow{\mathbf{n}} = [0.5, -0.5, 2]^{\mathrm{T}}$ και:

$$\hat{\mathbf{n}} = [0.24, -0.24, 0.94]^{\mathrm{T}}.$$

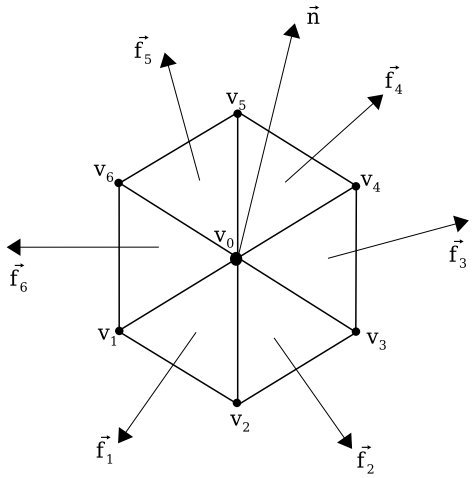
Κανονικό διάνυσμα κορυφής για πολυγωνικά μοντέλα.

Τα πολυγωνικά μοντέλα συχνά παριστάνουν αντικείμενα με ομαλή μεταβολή του κανονικού τους διανύσματος, δηλαδή χωρίς ασυνέχειες (π.χ. σφαίρα). Υποθέτουμε αντικείμενα που αποτελούνται από μία *πολλαπλότητα* (manifold), δηλαδή η κάθε ακμή τους είναι κοινή σε ακριβώς δύο πολύγωνα.

Κατά τη διαδικασία του φωτισμού, αλλά και σε άλλους αλγόριθμους, χρειαζόμαστε το κανονικό διάνυσμα ενός αντικειμένου σ' ένα διακριτό σύνολο σημείων της επιφάνειάς του (π.χ. στο πλέγμα των εικονοστοιχείων). Για το σκοπό αυτό, είναι σύνηθες να υπολογίζουμε το κανονικό διάνυσμα στις κορυφές του πολυγωνικού μοντέλου ως ζυγισμένο μέσο όρο των κανονικών διανυσμάτων των πολυγώνων που μοιράζονται την κάθε κορυφή [Meye03]. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε αυτό το κανονικό διάνυσμα για διγραμμική παρεμβολή κατά μήκος και μεταξύ των ακμών, πάνω στα σημεία του υποκείμενου πλέγματος (π.χ. στα εικονοστοιχεία). Τα πολύγωνα που μοιράζονται μια κορυφή ονομάζονται *1-δακτύλιος* της κορυφής (Σχήμα 12.14). Συνεπώς, το παράδοξο όνομα *κανονικό διάνυσμα κορυφής* αναφέρεται στο ζυγισμένο μέσο όρο των κανονικών διανυσμάτων των πολυγώνων του 1-δακτυλίου.

Υπάρχουν διάφορες τεχνικές για τον υπολογισμό του μοναδιαίου κανονικού διανύσματος $\hat{\mathbf{n}}$ μιας κορυφής και θα περιγράψουμε εδώ τρείς από τις πιο διαδεδομένες [Jirk02]. Πρώτον, τα βάρη μπορούν να τεθούν ίσα. Αυτό ισοδυναμεί με κανονικοποίηση (σε μοναδιαίο μήκος) των κανονικών διανυσμάτων των πολυγώνων $\overrightarrow{\mathbf{f}_\mathbf{i}}$ του 1-δακτυλίου πριν τον υπολογισμό του μέσου όρου:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \hat{\mathbf{f}}_\mathbf{i}}{\left| \sum_{i=1}^{m} \hat{\mathbf{f}}_\mathbf{i} \right|}, \tag{12.31}$$



Σχήμα 12.14: *Ο 1-δακτύλιος μιας κορυφής.*

όπου $\hat{\mathbf{f}}_i = \overrightarrow{\mathbf{f_i}} / |\overrightarrow{\mathbf{f_i}}|$ και m είναι το πλήθος των πολυγώνων του 1-δακτυλίου. Η δεύτερη τεχνική βασίζεται στην θεώρηση ότι μεγαλύτερα πολύγωνα πρέπει να έχουν μεγαλύτερο βάρος στον υπολογισμό. Στην περίπτωση τριγώνων, αυτό μπορεί να επιτευχθεί —απλά— υπολογίζοντας το κανονικό τους διάνυσμα ως εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων που ορίζονται από δύο ακμές κάθε τριγώνου, αφού αυτό το εξωτερικό γινόμενο μας δίνει δύο φορές την επιφάνεια ενός τριγώνου:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \overrightarrow{\mathbf{f_i}}}{|\sum_{i=1}^{m} \overrightarrow{\mathbf{f_i}}|}. \tag{12.32}$$

Τρίτον, οι Thuermer και Wuthrich [Thue98] παρατήρησαν ότι για να είναι τα κανονικά διανύσματα κορυφών ανεξάρτητα από μεταβολές στη δομή του πολυγωνικού μοντέλου, ένα κατάλληλο βάρος είναι η προσπίπτουσα γωνία θ των πολυγώνων του 1-δακτυλίου. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 12.14, η προσπίπτουσα γωνία του πρώτου πολυγώνου είναι $\theta_1 = \widehat{\mathbf{v_1 v_0 v_2}}$. Η γωνία θ μπορεί να υπολογιστεί ως συνημίτονο τόξου (arccos) του εσωτερικού γινομένου των διανυσμάτων που ορίζονται από τις προσπίπτουσες στην κορυφή ακμές του:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \theta_i \hat{\mathbf{f}}_i}{|\sum_{i=1}^{m} \theta_i \hat{\mathbf{f}}_i|}. \tag{12.33}$$

Σημειώνουμε ότι τα κανονικά διανύσματα κορυφών πρέπει να υπολογιστούν πριν από την προοπτική διαίρεση (προβολή).

Παράδειγμα. Θα δώσουμε ένα απλό παράδειγμα για να δείξουμε τους υπολογισμούς του κανονικού διανύσματος κορυφής. Έστω η περίπτωση του Σχήματος 12.14, όπου το m είναι 6 αφού ο 1-δακτύλιος έχει έξι πολύγωνα. Για να υπολογίσουμε τις παραπάνω

εκφράσεις για το κανονικό διάνυσμα κορυφής, πρέπει πρώτα να βρούμε τα $\overrightarrow{\mathbf{f_i}}$, $\hat{\mathbf{f}}_i$ και θ_i. Για το πρώτο τρίγωνο $\mathbf{v_0v_1v_2}$:

$$\overrightarrow{\mathbf{f_1}} = \overrightarrow{\mathbf{v_0v_1}} \times \overrightarrow{\mathbf{v_0v_2}},$$

$$\hat{\mathbf{f}}_1 = \frac{\overrightarrow{\mathbf{f_1}}}{|\overrightarrow{\mathbf{f_1}}|},$$

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{\mathbf{v_0v_1}}}{|\overrightarrow{\mathbf{v_0v_1}}|} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathbf{v_0v_2}}}{|\overrightarrow{\mathbf{v_0v_2}}|}\right).$$

Παρόμοιοι υπολογισμοί γίνονται για τα άλλα πέντε τρίγωνα του 1-δακτυλίου και έτσι μπορούν να υπολογισθούν οι εκφράσεις (12.31)–(12.33).

12.5.2 Το διάνυσμα ανάκλασης

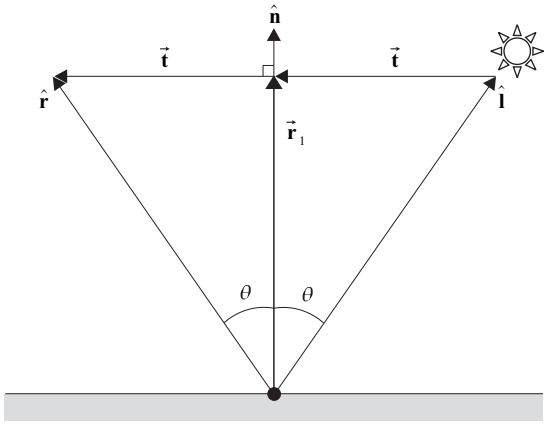
Το *διάνυσμα ανάκλασης* $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ υπολογίζεται παρατηρώντας ότι οι γωνίες μεταξύ των ζευγών διανυσμάτων $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{n}})$ και $(\hat{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathbf{r}})$ είναι ίσες και ότι τα $\hat{\mathbf{l}}$, $\hat{\mathbf{n}}$ και $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ είναι συνεπίπεδα (Σχήμα 12.15).

Έστω $\overrightarrow{\mathbf{r_1}}$ το διάνυσμα που ορίζεται από την προβολή του $\hat{\mathbf{l}}$ στον άξονα του $\hat{\mathbf{n}}$. Έχουμε:

$$|\overrightarrow{\mathbf{r_1}}| = |\hat{\mathbf{l}}| \cos\theta = |\hat{\mathbf{l}}|(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{l}}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{l}},$$

καθώς το $\hat{\mathbf{l}}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα, οπότε:

$$\overrightarrow{\mathbf{r_1}} = \hat{\mathbf{n}}|\overrightarrow{\mathbf{r_1}}| = \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{l}}).$$



Σχήμα 12.15: *Υπολογισμός του διανύσματος ανάκλασης.*

Επίσης έχουμε:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}_1} + \vec{\mathbf{t}} \qquad \vec{\mathbf{t}} = \vec{\mathbf{r}_1} - \hat{\mathbf{l}}.$$

Οπότε:

$$\vec{\mathbf{r}} = 2\vec{\mathbf{r}_1} - \hat{\mathbf{l}} = 2\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{l}}) - \hat{\mathbf{l}}, \tag{12.34}$$

το οποίο απαιτεί έξι πολλαπλασιασμούς και πέντε προσθέσεις. Υπάρχουν ειδικές περιπτώσεις όπου το $\vec{\mathbf{r}}$ μπορεί να υπολογισθεί πιο αποτελεσματικά αλλά δεν θα τις εξετάσουμε εδώ, καθώς όταν απαιτείται απόδοση το διάνυσμα ανάκλασης αντικαθίσταται από το διχοτόμο διάνυσμα κατά την Εξίσωση (12.25).

12.5.3 Τα διανύσματα φωτεινής πηγής και παρατήρησης και το διχοτόμο διάνυσμα

Τα διανύσματα *φωτεινής πηγής* και *παρατήρησης* $\vec{\mathbf{l}}$ και $\vec{\mathbf{v}}$ είτε είναι σταθερά διανύσματα, αν η φωτεινή πηγή και το σημείο παρατήρησης βρίσκονται σε άπειρη απόσταση, είτε υπολογίζονται απλά ως:

$$\vec{\mathbf{l}} = \mathbf{l} - \mathbf{p}, \tag{12.35}$$

$$\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \mathbf{p}, \tag{12.36}$$

όπου $\mathbf{p}$ ένα σημείο του αντικειμένου και $\mathbf{l}$ και $\mathbf{v}$ τα σημεία φωτεινής πηγής και παρατήρησης αντίστοιχα. Το διχοτόμο διάνυσμα $\vec{\mathbf{h}}$, που χρησιμοποιείται στην κατοπτρική ανάκλαση, υπολογίζεται ως μέσος όρος των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{\mathbf{l}}$ και $\vec{\mathbf{v}}$:

$$\vec{\mathbf{h}} = (\hat{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{v}})/2, \tag{12.37}$$

του οποίου η κανονικοποιημένη μορφή δίνεται από την Εξίσωση (12.24).

12.6 Αλγόριθμοι φωτισμού με βάση το μοντέλο Phong

Παραδοσιακά, ο φωτισμός χρησιμοποιείται για την παραγωγή ρεαλιστικών συνθετικών εικόνων. Το 1969 ο Warnock εισήγαγε την έννοια της ελάττωσης της έντασης ανάλογα με το βάθος [Warn69], και τα αντικείμενα φωτίζονταν ανάλογα με την απόστασή τους από τη φωτεινή πηγή (που συχνά συνέπιπτε με το σημείο παρατήρησης). Οι Warnock, Romney και Watkins πρότειναν την παρεμβολή τιμών φωτισμού εντός των πολυγώνων από τιμές φωτισμού που υπολογίζονται στις κορυφές. Το 1971 ο Gouraud [Gour71] ολοκλήρωσε τις εργασίες τους και πρότεινε τον υπολογισμό μοναδικών κανονικών διανυσμάτων στις κοινές κορυφές των πολυγώνων. Στη συνέχεια ο Phong πρότεινε τον υπολογισμό τιμών φωτεινότητας σε κάθε εικονοστοιχείο με γραμμική παρεμβολή των κανονικών διανυσμάτων των κορυφών και με χρήση του μοντέλου που ο ίδιος εισήγαγε το 1975 [Phon75]. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις όπου η γραμμική παρεμβολή των κανονικών διανυσμάτων των κορυφών δεν είναι ικανοποιητική. Ο

Overveld [Over97] πρότεινε ένα τετραγωνικό σχήμα παρεμβολής το 1997.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε αλγόριθμους για τον υπολογισμό των τιμών φωτεινότητας μέσα σ' ένα πολύγωνο. Αυτοί παρέχουν αυξανόμενο ρεαλισμό με αυξανόμενη υπολογιστική πολυπλοκότητα. Η πολυπλοκότητα όμως αντιμετωπίζεται από τους επεξεργαστές γραφικών.

12.6.1 Σταθερή φωτοσκίαση

Ο απλούστερος αλγόριθμος φωτισμού για πολυγωνικά αντικείμενα εφαρμόζει μια σταθερή τιμή φωτεινότητας σε κάθε πολύγωνο. Δεν χρησιμοποιεί κατοπτρική ανάκλαση ούτε ελάττωση της έντασης, ανάλογα με το βάθος. Ενσωματώνει μόνο μια σταθερή τιμή περιβάλλοντος φωτισμού και διάχυτη ανάκλαση. Τα σημεία παρατήρησης και φωτεινής πηγής συμπίπτουν και τοποθετούνται και τα δύο σε άπειρη απόσταση ($\overrightarrow{\mathbf{l}} = \overrightarrow{\mathbf{v}}$)· πράγμα που συνεπάγεται την μη ύπαρξη σκιών και καθιστά τον όρο $(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{l}})$ σταθερό στην επιφάνεια κάθε πολυγώνου. Αν τα σημεία φωτισμού και παρατήρησης βρίσκονται πάνω στον θετικό άξονα z, τότε $\hat{\mathbf{l}} = \hat{\mathbf{v}} = [0,0,1]^{\mathrm{T}}$, και $(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{l}}) = n_z$ για $\hat{\mathbf{n}} = [n_x, n_y, n_z]^{\mathrm{T}}$. Η εξίσωση φωτισμού (12.26) τότε γίνεται

$$I = I_e + I_a k_a + I_i k_d n_z. \tag{12.38}$$

Η τιμή της έντασης I υπολογίζεται μια φορά για κάθε πολύγωνο και χρησιμοποιείται για όλα τα εικονοστοιχεία που αυτό καλύπτει (Εικόνα 17 (αριστερά)).

Δυστυχώς, το ανθρώπινο μάτι είναι πολύ ευαίσθητο σε ασυνέχειες του φωτισμού (Mach-bands) και με τον αλγόριθμο αυτόν είναι εμφανή τα πολυγωνικά όρια, προσδίδοντας στα αντικείμενα μια 'πολυγωνική' μορφή. Το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται λόγω του ότι το πολυγωνικό πλέγμα προσεγγίζει μια κοίλη επιφάνεια με διακριτό τρόπο. Αυξάνοντας την συχνότητα δειγματοληψίας (πλήθος πολυγώνων), η διαφορά μεταξύ της κοίλης επιφάνειας και του πολυγωνικού πλέγματος μικραίνει. Όμως, μεγάλο πλήθος πολυγώνων συνεπάγεται μεγάλο όγκο δεδομένων καθώς και μεγάλη ανάγκη επεξεργαστικής ισχύος. Συνεπώς, είναι προτιμότερο να θεραπευτεί το πρόβλημα της ασυνέχειας του φωτισμού με κάποιο είδος παρεμβολής του.

12.6.2 Φωτοσκίαση Gouraud

Η φωτοσκίαση Gouraud είναι ένας απλός αλγόριθμος παρεμβολής φωτισμού και, αν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι αρκετή, μπορεί να ενσωματώσει τοπικά μέγιστα (λάμψεις) και ελάχιστα της κατανομής του φωτισμού πάνω στο πολυγωνικό πλέγμα.

Ο αλγόριθμος Gouraud υπολογίζει τιμές έντασης για εσωτερικά εικονοστοιχεία πολυγώνων παρεμβάλλοντας τις τιμές έντασης των κορυφών. Οι τιμές έντασης στις κορυφές υπολογίζονται με το μοντέλο του Phong. Καθώς η ένταση είναι βαθμωτή, γίνεται απλή βαθμωτή παρεμβολή μέσα στο πολύγωνο. Υπολογίζονται τα κανονικά διανύσματα στις κορυφές (βλέπε Ενότητα 12.5.1) τα οποία χρησιμοποιούνται για την εύρεση της τιμής της εξίσωσης Phong στις κορυφές. Στη συνέχεια, οι τιμές έντασης των

κορυφών παρεμβάλλονται γραμμικά κατά μήκος των ακμών του πολυγώνου και μεταξύ των ακμών (κατά μήκος των γραμμών σάρωσης). Στο Σχήμα 12.16, οι τιμές έντασης I_1, I_2 και I_3 υπολογίζονται με το μοντέλο Phong ενώ οι $I_{\mathbf{a}}$, $I_{\mathbf{b}}$ και $I_{\mathbf{s}}$ με παρεμβολή:

$$I_{\mathbf{a}} = I_1\frac{y_{\mathbf{s}} - y_2}{y_1 - y_2} + I_2\frac{y_1 - y_{\mathbf{s}}}{y_1 - y_2} = \frac{1}{y_1 - y_2}(I_1(y_{\mathbf{s}} - y_2) + I_2(y_1 - y_{\mathbf{s}})),$$

$$I_{\mathbf{b}} = \frac{1}{y_1 - y_3}(I_1(y_{\mathbf{s}} - y_3) + I_3(y_1 - y_{\mathbf{s}})),$$

$$I_{\mathbf{s}} = \frac{1}{x_{\mathbf{b}} - x_{\mathbf{a}}}(I_{\mathbf{a}}(x_{\mathbf{b}} - x_{\mathbf{s}}) + I_{\mathbf{b}}(x_{\mathbf{s}} - x_{\mathbf{a}})). \tag{12.39}$$

Οι τιμές έντασης σε μια γραμμή σάρωσης υπολογίζονται αυξητικά. Αν $\mathbf{s}_1$ και $\mathbf{s}_2$ είναι δύο εικονοστοιχεία πάνω σε μια γραμμή σάρωσης, τότε:

$$I_{\mathbf{s}_1} = \frac{1}{x_{\mathbf{b}} - x_{\mathbf{a}}}(I_{\mathbf{a}}(x_{\mathbf{b}} - x_{\mathbf{s}_1}) + I_{\mathbf{b}}(x_{\mathbf{s}_1} - x_{\mathbf{a}})),$$

$$I_{\mathbf{s}_2} = \frac{1}{x_{\mathbf{b}} - x_{\mathbf{a}}}(I_{\mathbf{a}}(x_{\mathbf{b}} - x_{\mathbf{s}_2}) + I_{\mathbf{b}}(x_{\mathbf{s}_2} - x_{\mathbf{a}})),$$

και, αφαιρώντας τις παραπάνω εξισώσεις:

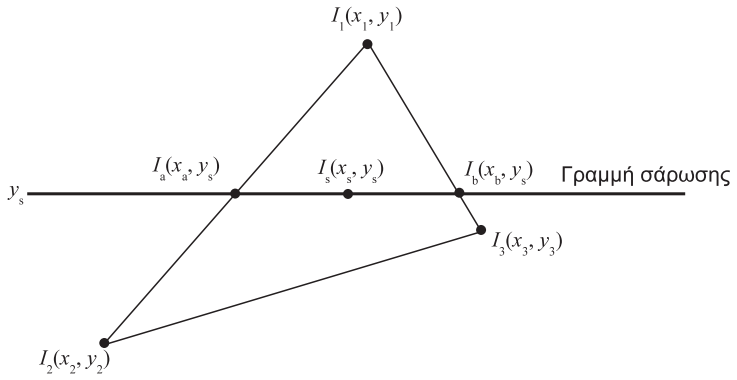
$$\Delta I_{\mathbf{s}} = I_{\mathbf{s}_2} - I_{\mathbf{s}_1} = \frac{x_{\mathbf{s}_2} - x_{\mathbf{s}_1}}{x_{\mathbf{b}} - x_{\mathbf{a}}}(I_{\mathbf{b}} - I_{\mathbf{a}}) = \frac{\Delta x}{x_{\mathbf{b}} - x_{\mathbf{a}}}(I_{\mathbf{b}} - I_{\mathbf{a}}),$$

το οποίο, στην περίπτωση γειτονικών εικονοστοιχείων ($\Delta x = 1$), γίνεται:

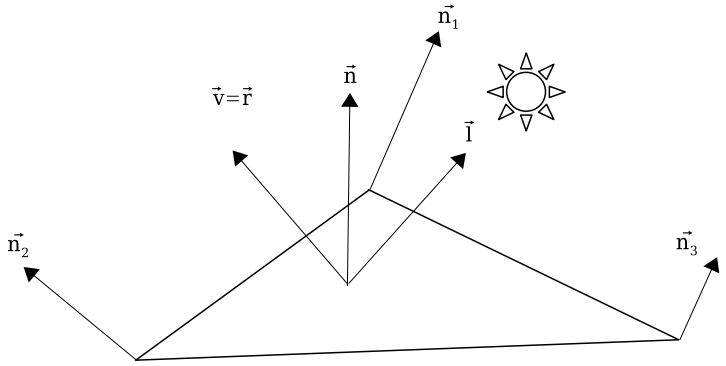
$$\Delta I_{\mathbf{s}} = \frac{I_{\mathbf{b}} - I_{\mathbf{a}}}{x_{\mathbf{b}} - x_{\mathbf{a}}}.$$

Έτσι η ένταση γειτονικών εικονοστοιχείων μπορεί να υπολογιστεί αυξητικά:

$$I_{\mathbf{s},n} = I_{\mathbf{s},n-1} + \Delta I_{\mathbf{s}}.$$



Σχήμα 12.16: *Υπολογισμοί αλγορίθμου Gouraud.*



Σχήμα 12.17: *Σχέση διανυσμάτων λάμψης.*

Το οπτικό αποτέλεσμα της φωτοσκίασης Gouraud είναι πολύ καλύτερο από αυτό της σταθερής φωτοσκίασης (Εικόνα 17 (μέση)).

12.6.3 Φωτοσκίαση κατά Phong

Δυστυχώς η συχνότητα δειγματοληψίας (πλήθος πολυγώνων) σπάνια είναι αρκετή για να δειχθούν οι λάμψεις με τον αλγόριθμο του Gouraud. Αυτές φαίνονται, όταν το διάνυσμα ανάκλασης $\vec{\mathbf{r}}$ είναι (σχεδόν) ίσο με το διάνυσμα παρατήρησης $\vec{\mathbf{v}}$. Με τον αλγόριθμο Gouraud τα διανύσματα δεν παρεμβάλλονται μέσα στο πολύγωνο αλλά χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό τιμών φωτεινής έντασης μόνο στις κορυφές (Σχήμα 12.17). Επιπλέον ο αλγόριθμος Gouraud δεν εξαλείφει τις ασυνέχειες του φωτισμού (Mach-bands), καθώς η γραμμική παρεμβολή των τιμών έντασης διατηρεί ασυνέχειες δευτέρου βαθμού που είναι συχνά ορατές.

Ο αλγόριθμος Phong λύνει τα παραπάνω προβλήματα εφαρμόζοντας το μοντέλο Phong σε κάθε εικονοστοιχείο. Τα απαιτούμενα μοναδιαία κανονικά διανύσματα υπολογίζονται με διγραμμική παρεμβολή από τα μοναδιαία κανονικά διανύσματα των κορυφών (Σχήμα 12.18).

Έχουμε:

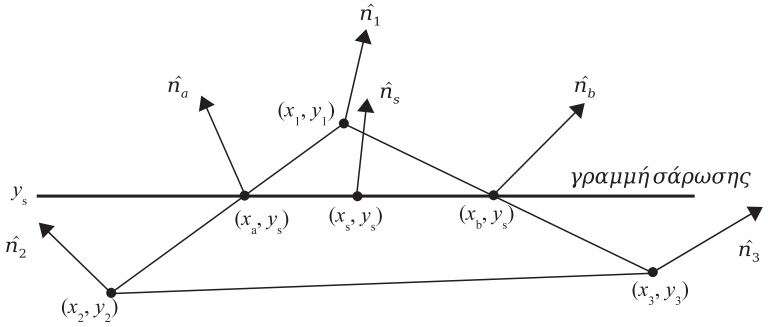
$$\vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{a}} = \frac{1}{y_1 - y_2}(\hat{\mathbf{n}}_1(y_{\mathbf{s}} - y_2) + \hat{\mathbf{n}}_2(y_1 - y_{\mathbf{s}})),$$

$$\vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{b}} = \frac{1}{y_1 - y_3}(\hat{\mathbf{n}}_1(y_{\mathbf{s}} - y_3) + \hat{\mathbf{n}}_3(y_1 - y_{\mathbf{s}})),$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{s}} = \frac{1}{x_{\mathbf{b}} - x_{\mathbf{a}}}(\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{a}}(x_{\mathbf{b}} - x_{\mathbf{s}}) + \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{b}}(x_{\mathbf{s}} - x_{\mathbf{a}})). \tag{12.40}$$

Οι ακόλουθες σχέσεις ισχύουν για γειτονικά εικονοστοιχεία πάνω στην ίδια γραμμή σάρωσης και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για αυξητικό υπολογισμό [3]:

[3] $\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{s}} = [n_{\mathbf{s}x}, n_{\mathbf{s}y}, n_{\mathbf{s}z}]^{\mathrm{T}}$, $\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{a}} = [n_{\mathbf{a}x}, n_{\mathbf{a}y}, n_{\mathbf{a}z}]^{\mathrm{T}}$, και $\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{b}} = [n_{\mathbf{b}x}, n_{\mathbf{b}y}, n_{\mathbf{b}z}]^{\mathrm{T}}$.



Σχήμα 12.18: *Υπολογισμοί αλγορίθμου Phong.*

$$n_{\mathbf{s}x,n} = n_{\mathbf{s}x,n-1} + \Delta n_{\mathbf{s}x},$$
$$n_{\mathbf{s}y,n} = n_{\mathbf{s}y,n-1} + \Delta n_{\mathbf{s}y},$$
$$n_{\mathbf{s}z,n} = n_{\mathbf{s}z,n-1} + \Delta n_{\mathbf{s}z},$$

όπου:

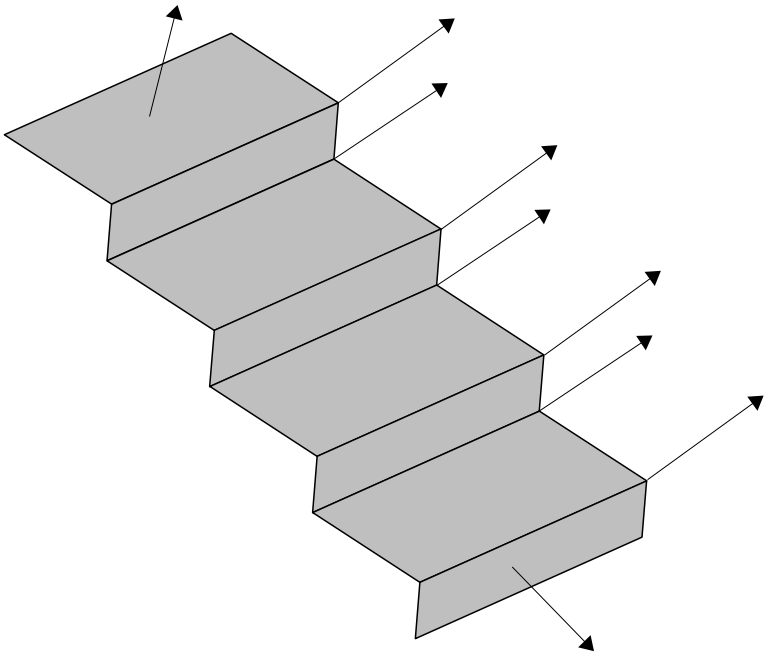
$$\Delta n_{\mathbf{s}x} = \frac{n_{\mathbf{b}x} - n_{\mathbf{a}x}}{x_{\mathbf{b}} - x_{\mathbf{a}}},$$
$$\Delta n_{\mathbf{s}y} = \frac{n_{\mathbf{b}y} - n_{\mathbf{a}y}}{x_{\mathbf{b}} - x_{\mathbf{a}}},$$
$$\Delta n_{\mathbf{s}z} = \frac{n_{\mathbf{b}z} - n_{\mathbf{a}z}}{x_{\mathbf{b}} - x_{\mathbf{a}}}.$$

Το αποτέλεσμα του αλγορίθμου Phong είναι πολύ καλύτερο του Gouraud [Εικόνα 17 (δεξιά)] αλλά είναι και δαπανηρότερο υπολογιστικά, καθώς η εξίσωση φωτισμού υπολογίζεται σε κάθε εικονοστοιχείο. Το τελευταίο δεν είναι πλέον σημαντικό πρόβλημα αφού ο αλγόριθμος Phong έχει υλοποιηθεί στους περισσότερους επεξεργαστές γραφικών.

12.6.4 Τετραγωνική παρεμβολή κανονικών διανυσμάτων κορυφών

Ο αλγόριθμος Phong παράγει εικόνες ικανοποιητικής ποιότητας, όταν το πολυγωνικό πλέγμα είναι αρκετά πυκνό. Σε μεγάλα πολύγωνα, όπου ο ρυθμός αλλαγής των κανονικών τους διανυσμάτων μπορεί να είναι υψηλός, συχνά παρουσιάζονται προβλήματα. Το *πρόβλημα των ακμών περιγράμματος* είναι ίσως το πιο σημαντικό. Στο Σχήμα 12.19, τα κανονικά διανύσματα (που υπολογίστηκαν με γραμμική παρεμβολή από τα κανονικά διανύσματα κορυφών) δεν μεταβάλλονται καθόλου πάνω στην επιφάνεια με αποτέλεσμα την σταθερή ένταση φωτισμού, η οποία έρχεται σε αντίθεση με το περίγραμμα.

Η παρεμβολή κανονικών διανυσμάτων κορυφών ουσιαστικά στοχεύει στην ανακατασκευή μιας επιφάνειας από διακριτά δείγματα. Η ανακατασκευή δεν μπορεί να προσθέσει πληροφορία, αλλά μπορεί τουλάχιστον η επιφάνεια ανακατασκευής να είναι συμβατή με τα δείγματα, δηλαδή να παρεμβάλει τα κανονικά διανύσματα των κο-



Σχήμα 12.19: *Το πρόβλημα των ακμών περιγράμματος.*

ρυφών και ταυτόχρονα να είναι κάθετη στα κανονικά διανύσματα. Η γραμμική παρεμβολή των κανονικών διανυσμάτων κορυφών του αλγορίθμου Phong δεν είναι ικανοποιητική ως προς αυτό, όπως φαίνεται στο Σχήμα 12.19.

Οι Overveld και Wyvill [Over97] έδειξαν ότι η τετραγωνική παρεμβολή των κανονικών διανυσμάτων έχει καλύτερα αποτελέσματα. Αν $\hat{\mathbf{n}}_0$ και $\hat{\mathbf{n}}_1$ είναι κανονικά διανύσματα προς παρεμβολή και $\overrightarrow{\delta}$ το διάνυσμα που ορίζεται από το αρχικό και τελικό σημείο παρεμβολής (το $\overrightarrow{\delta}$ αντιστοιχεί σε ακμή πολυγώνου ή τμήμα γραμμής σάρωσης), τότε το διάνυσμα παρεμβολής $\overrightarrow{\mathbf{n}}(s)$ υπολογίζεται ως εξής:

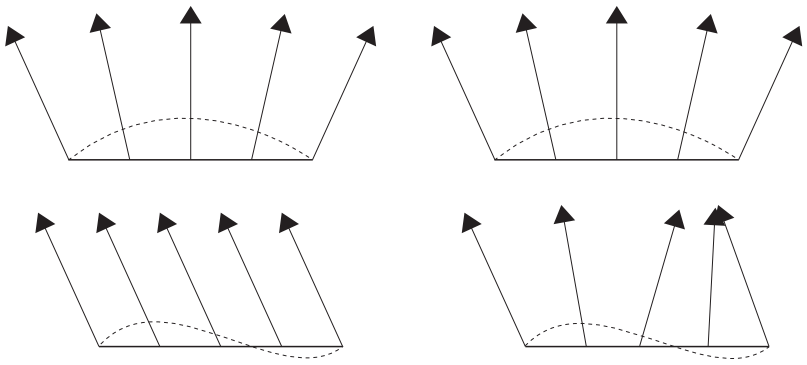
$$\overrightarrow{\mathbf{n}}(s) = \hat{\mathbf{n}}_0 + s\overrightarrow{\mathbf{a}} + s^2\overrightarrow{\mathbf{b}}, \tag{12.41}$$

με $s \in [0,1]$ και:

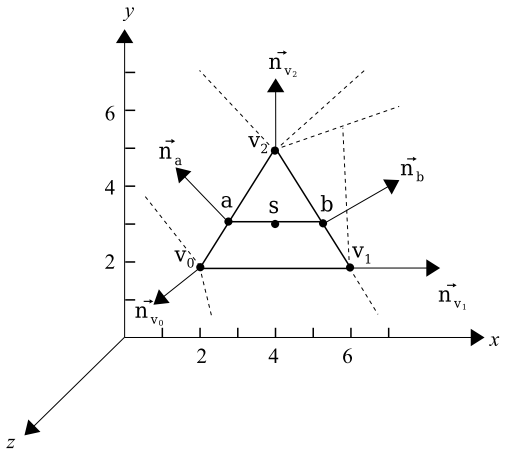
$$\overrightarrow{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{n}}_1 - \hat{\mathbf{n}}_0 - \overrightarrow{\mathbf{b}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{b}} = 3\left(\frac{(\hat{\mathbf{n}}_0 + \hat{\mathbf{n}}_1)\cdot\overrightarrow{\delta}}{\overrightarrow{\delta}^2}\right)\overrightarrow{\delta}.$$

Όπως αναμένεται, $\overrightarrow{\mathbf{n}}(0) = \hat{\mathbf{n}}_0$ και $\overrightarrow{\mathbf{n}}(1) = \hat{\mathbf{n}}_1$. Αυτό το τετραγωνικό σχήμα παρεμβολής μπορεί να υλοποιηθεί αποτελεσματικά με τις έμπροσθεν διαφορές της τετραγωνικής συνάρτησης με κόστος δύο διανυσματικών προσθέσεων ανά εικονοστοιχείο (η γραμμική παρεμβολή απαιτεί 1 διανυσματική πρόσθεση ανά εικονοστοιχείο).



Σχήμα 12.20: *Γραμμική (αριστερά) και τετραγωνική (δεξιά) διανυσματική παρεμβολή: η διακεκομμένη γραμμή παριστάνει την επιφάνεια ανακατασκευής (από το [Over97]).*



Σχήμα 12.21: *Απλό πλέγμα τριγώνων.*

Το Σχήμα 12.20 δείχνει το αποτέλεσμα του παραπάνω τετραγωνικού σχήματος παρεμβολής και η Εικόνα 18 αναδεικνύει το πλεονέκτημά του, ειδικά όταν η συχνότητα δειγματοληψίας (πλήθος πολυγώνων) είναι σχετικά χαμηλή.

Αριθμητικό παράδειγμα. Έστω το πλέγμα τριγώνων του Σχήματος 12.21 με:

$$\begin{aligned} \mathbf{v_0} &= [2,2,1]^{\mathrm{T}}, & \mathbf{v_1} &= [6,2,1]^{\mathrm{T}}, & \mathbf{v_2} &= [4,5,1]^{\mathrm{T}}, \\ \overrightarrow{\mathbf{n}_{\mathbf{v_0}}} &= [-1,-1,1]^{\mathrm{T}}, & \overrightarrow{\mathbf{n}_{\mathbf{v_1}}} &= [1,0,0]^{\mathrm{T}}, & \overrightarrow{\mathbf{n}_{\mathbf{v_2}}} &= [0,1,1]^{\mathrm{T}}, \\ \mathbf{a} &= [2.66,3,1]^{\mathrm{T}}, & \mathbf{b} &= [5.33,3,1]^{\mathrm{T}}, & \mathbf{s} &= [4,3,1]^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε, όπως στο αριθμητικό παράδειγμα της Ενότητας 12.4, ότι οι τιμές της εκπεμπόμενης, της περιβάλλουσας και της προσπίπτουσας (από τη φωτεινή πηγή) έντασης είναι:

$$I_e = 2, \quad I_a = 1, \quad I_i = 12,$$

και ότι οι τιμές των σταθερών είναι:

$$k_a = 0.3, \quad k_d = 0.3, \quad k_s = 0.6, \quad n = 3.$$

Επιπλέον, για απλοποίηση των υπολογισμών, έστω ότι τα σημεία παρατήρησης και φωτεινής πηγής είναι πάνω στον θετικό άξονα z σε άπειρη απόσταση:

$$\hat{\mathbf{l}} = \hat{\mathbf{v}} = [0, 0, 1]^{\mathrm{T}}.$$

Σταθερή φωτοσκίαση. Υπολογίζουμε το κανονικό διάνυσμα πολυγώνου:

$$\overrightarrow{\mathbf{n}} = (\mathbf{v_1} - \mathbf{v_0}) \times (\mathbf{v_2} - \mathbf{v_0}) = [0, 0, 12]^{\mathrm{T}}$$

ή

$$\hat{\mathbf{n}} = [0, 0, 1]^{\mathrm{T}},$$

και από την Εξίσωση (12.38),

$$I = 2 + 1 \cdot 0.3 + 12 \cdot 0.3 \cdot 1 = \mathbf{5.9}.$$

Φωτοσκίαση Gouraud. Πρώτα βρίσκουμε τις μοναδιαίες τιμές των κανονικών διανυσμάτων κορυφών:

$$\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v_0}} = [-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}]^{\mathrm{T}}, \quad \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v_1}} = [1, 0, 0]^{\mathrm{T}}, \quad \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v_2}} = [0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}]^{\mathrm{T}}.$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το μοντέλο Phong για τον υπολογισμό των τιμών έντασης στις κορυφές:

$$\begin{aligned}
I_{\mathbf{v_0}} &= 2 + 1 \cdot 0.3 + 12(0.3(\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v_0}} \cdot \hat{\mathbf{l}}) + 0.6(\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v_0}} \cdot \hat{\mathbf{h}})^3) = 5.76, \\
I_{\mathbf{v_1}} &= 2 + 1 \cdot 0.3 + 12(0.3(\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v_1}} \cdot \hat{\mathbf{l}}) + 0.6(\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v_1}} \cdot \hat{\mathbf{h}})^3) = 2.3, \\
I_{\mathbf{v_2}} &= 2 + 1 \cdot 0.3 + 12(0.3(\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v_2}} \cdot \hat{\mathbf{l}}) + 0.6(\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v_2}} \cdot \hat{\mathbf{h}})^3) = 7.39,
\end{aligned}$$

και με χρήση της Εξίσωσης (12.39):

$$\begin{aligned}
I_{\mathbf{a}} &= \frac{1}{3}(1 \cdot I_{\mathbf{v_2}} + 2 \cdot I_{\mathbf{v_0}}) = 6.3, \\
I_{\mathbf{b}} &= \frac{1}{3}(1 \cdot I_{\mathbf{v_2}} + 2 \cdot I_{\mathbf{v_1}}) = 4.0, \\
I_{\mathbf{s}} &= \frac{1}{2.67}(1.33 \cdot I_{\mathbf{a}} + 1.33 \cdot I_{\mathbf{b}}) = \mathbf{5.13}.
\end{aligned}$$

Φωτοσκίαση κατά Phong. Με γραμμική παρεμβολή υπολογίζουμε τα κανονικά διανύ-

σματα στα σημεία ακμών **a** και **b** από τα μοναδιαία κανονικά διανύσματα κορυφών:

$$\overrightarrow{\mathbf{n_a}} = \frac{1}{3}(1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v_2}} + 2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v_0}}) = [-0.39, 0.15, 0.62]^{\mathrm{T}},$$
$$\overrightarrow{\mathbf{n_b}} = \frac{1}{3}(1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v_2}} + 2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v_1}}) = [0.67, 0.71, 0.71]^{\mathrm{T}}.$$

Στη συνέχεια τα μετατρέπουμε σε μοναδιαία:

$$\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{a}} = [-0.52, 0.2, 0.83]^{\mathrm{T}},$$
$$\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{b}} = [0.55, 0.59, 0.59]^{\mathrm{T}},$$

και υπολογίζουμε το μοναδιαίο κανονικό διάνυσμα στο σημείο **s** της γραμμής σάρωσης:

$$\overrightarrow{\mathbf{n_s}} = \frac{1}{2.67}(1.33 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{a}} + 1.33 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{b}}) = [0.02, 0.4, 0.71]^{\mathrm{T}},$$
$$\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{s}} = [0.02, 0.49, 0.87]^{\mathrm{T}}.$$

Τελικά η ένταση στο **s** υπολογίζεται με το μοντέλο Phong χρησιμοποιώντας το μοναδιαίο κανονικό διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{s}}$:

$$I_{\mathbf{s}} = 2 + 1 \cdot 0.3 + 12(0.3(\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{l}}) + 0.6(\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{h}})^3) = \mathbf{10.25}.$$

Παρατηρήστε την σημαντικά υψηλότερη τιμή έντασης που δίνει η φωτοσκίαση κατά Phong σε σχέση με τη σταθερή φωτοσκίαση ή τη φωτοσκίαση Gouraud. Αυτό συμβαίνει λόγω της ύπαρξης λάμψης στο **s**.

Το τετραγωνικό σχήμα παρεμβολής υπολογίζει την ένταση $I_{\mathbf{s}}$ με τρόπο παρόμοιο με την φωτοσκίαση κατά Phong. Η μόνη διαφορά είναι οι τετραγωνικές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των $\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{b}}$ και $\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{s}}$.

12.7 Το μοντέλο φωτισμού Cook–Torrance®

Παρότι το μοντέλο Phong παράγει πειστικά αποτελέσματα για διάφορα είδη γυαλιστερών υλικών, ή για ματ αλλά όχι ιδιαίτερα τραχείες επιφάνειες, τα αντικείμενα που σχεδιάζονται με αυτό το μοντέλο συχνά μοιάζουν πολύ «πλαστικά». Η λαμπρότητα των μετάλλων ή οι γυαλάδες εκτός κατεύθυνσης τέλειας ανάκλασης δεν μοντελοποιούνται σωστά για αρκετά από τα πραγματικά υλικά που απαντάμε στον κόσμο μας. Επιπλέον, στο μοντέλο Phong, η επίδραση των γεωμετρικών ανωμαλιών μιας τραχείας επιφάνειας στην κατανομή του ανακλώμενου και του σκεδαζόμενου φωτός δεν λαμβάνεται υπόψη.

Οι Cook και Torrance [Cook82] επέκτειναν το μοντέλο του Phong, καθώς και το μοντέλο που πρότεινε ο Blinn [Blin77], προκειμένου να παρουσιάσουν ένα γενικευμένο μοντέλο φωτισμού για τραχείες επιφάνειες, το οποίο να λαμβάνει υπόψη του την κατευθυντική κατανομή και το μήκος κύματος του ανακλώμενου φωτός.

Όπως ο Phong, έτσι και οι Cook και Torrance διέκριναν το συνολικό ανακλώμενο φως σε τρεις συνιστώσες: το φωτισμό περιβάλλοντος (ambient), το φωτισμό διάχυσης λόγω σκέδασης (diffuse), και τον κατοπτρικό φωτισμό (specular). Αντί όμως να χρησιμοποιήσουν τον απλουστευτικό κανόνα του συνημιτόνου για τις συνιστώσες διάχυσης και κατοπτρικής ανάκλασης, δίνουν μια φυσική μοντελοποίηση και παραμετροποίηση της BRDF f_r ενός υλικού.[4] Πιο συγκεκριμένα, η f_r θεωρείται ότι συντίθεται από το γραμμικό συνδυασμό δύο διακριτών όρων, έναν καθαρό όρο διάχυσης και έναν όρο κατοπτρικής ανάκλασης:

$$f_r = k_d f_d + k_s f_s, \qquad k_d + k_s = 1. \tag{12.42}$$

Η παραπάνω θεώρηση μπορεί βέβαια να μην ισχύει για ορισμένα σύνθετα υλικά [Glas95]. Το μοντέλο ανακλαστικότητας Cook–Torrance για N_L πηγές φωτός περιγράφεται από τη σχέση

$$I_r = I_a f_a + \sum_{l=1}^{N_L} I_i^{(l)} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{l}}^{(l)}) \ \ [k_s f_s + k_d f_d] \ \ d\vec{\omega}_i^{(l)}, \tag{12.43}$$

όπου $I_i^{(l)}$ είναι η ένταση του προσπίπτοντος φωτός μέσα από τη στερεά γωνία $\vec{\omega}_i^{(l)}$ από την πηγή l, η οποία είναι τοποθετημένη στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{l}}^{(l)}$ αναφορικά με το φωτιζόμενο σημείο, και $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το κανονικό διάνυσμα του σημείου της επιφάνειας.

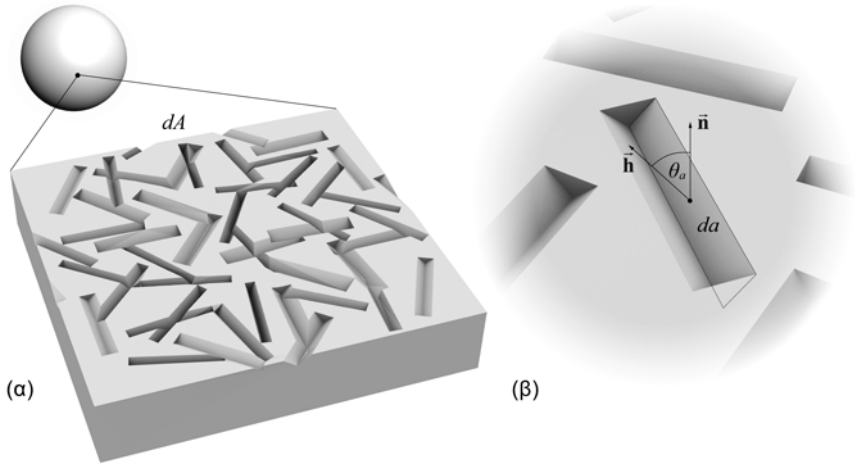
Η ποσότητα $I_a f_a$ είναι ο όρος του φωτισμού από το περιβάλλον και η I_a μπορεί να θεωρηθεί σταθερή, όπως και στο μοντέλο Phong. Στο πρωτότυπο άρθρο που περιγράφει το μοντέλο, αυτός ο όρος πολλαπλασιαζόταν μ' ένα συντελεστή ορατότητας f, ο οποίος εξέφραζε το ποσοστό του εισερχόμενου φωτός που δεν παρεμποδίζεται από την περιβάλλουσα γεωμετρία. Ένα μακρινό και ομοιόμορφα φωτεινό ημισφαίριο (το οποίο εκφράζει τον έμμεσο φωτισμό από άλλες επιφάνειες) θεωρείται πως εκπέμπει φως προς το σημείο $\mathbf{p}$. Το ποσοστό του φωτός που τελικά φτάνει στην επιφάνεια γύρω από το σημείο εξαρτάται από το λόγο της στερεάς γωνίας προς το ημισφαίριο της ανοιχτής περιοχής πάνω από το σημείο, δηλαδή της περιοχής του ημισφαιρίου που δεν εμποδίζεται από άλλη γεωμετρία. Αν εισάγουμε μια δίτιμη συνάρτηση ορατότητας $V(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{l}})$ που παίρνει την τιμή 1 όταν το σημείο $\mathbf{p}$ «βλέπει» το μακρινό φωτεινό ημισφαίριο προς την κατεύθυνση $\hat{\mathbf{l}}$, αυτός ο όρος γίνεται:

$$f = \int_{\text{ανεμπόδιστο } \Omega} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{l}}) d\vec{\omega} = \int_{\Omega} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{l}}) V(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{l}}) d\vec{\omega}. \tag{12.44}$$

Αυτήν την ιδέα εκμεταλλεύτηκαν αργότερα και οι Zhukov et al. [Zhuk98b], προκειμένου να εξάγουν ένα εμπειρικό μοντέλο για την προσομοίωση του διάχυτου ολικού φωτισμού (περισσότερα για τον ολικό φωτισμό θα βρείτε στο Κεφάλαιο 16).

Στο μοντέλο ανακλαστικότητας της Εξίσωσης (12.43), η f_d είναι η BRDF του φωτισμού διάχυσης μιας Lambertian επιφάνειας (βλ. Εξίσωση (12.18))· Η f_a χρησιμοποιεί την ίδια κατανομή με την f_d. Ο όρος κατοπτρικής ανακλαστικότητας της BRDF εξαρ-

[4] Η BRDF f_r εκφράζει εδώ τη μεταφορά ενέργειας μεταξύ μιας διαφορικής στερεάς γωνίας εισόδου και μιας διαφορικής στερεάς γωνίας πρόσπτωσης (μετάδοση από κατεύθυνση σε κατεύθυνση): $d\vec{\omega}_i \rightarrow d\vec{\omega}_r$.



Σχήμα 12.22: *Η μοντελοποίηση μιας αδρής επιφάνειας κατά Torrance–Sparrow. (α) Μια επιφάνεια αποτελείται από αυλακώσεις σε σχήμα V με τυχαίο προσανατολισμό. (β) Μεγέθυνση μιας αύλακας.*

τάται από τη σχετική θέση του παρατηρητή ως προς την επιφάνεια και τις ιδιότητες του υλικού.

Για τον υπολογισμό της f_s, οι Cook και Torrance βασίστηκαν στο μοντέλο των μικρο-επιφανειών των Torrance και Sparrow [Torr67]. Σε αυτό το ευρέως διαδεδομένο μοντέλο για αδρές επιφάνειες, μια επιφάνεια θεωρείται ότι αποτελείται από επιμήκεις συμμετρικές αυλακώσεις σε σχήμα V. Καθεμία από αυτές τις αυλακώσεις απαρτίζεται από δύο επίπεδες πλευρές (Σχήμα 12.22(α)) με ίση κατά μέτρο, αλλά αντίθετη κλίση σε σχέση με το κανονικό διάνυσμα της dA. Για τον υπολογισμό της κατοπτρικής ανακλαστικότητας της επιφάνειας, οι πλευρές των αυλακώσεων θεωρούνται τέλειοι καθρέπτες (ιδανικοί ανακλαστήρες), οι οποίες επομένως ανακλούν το φως μόνο στην κατεύθυνση τέλειας ανάκλασης. Η κλίση των πλευρών θ_a, καθώς και ο προσανατολισμός των αυλακώσεων (αζιμούθιο) φ_a καθορίζονται από μια στατιστική κατανομή που χαρακτηρίζει το υλικό (Σχήμα 12.22(β)).

Για να ισχύει το μοντέλο Torrance–Sparrow, το εμβαδόν da των μικρο-επιφανειών θεωρείται μικρό συγκριτικά με την περιοχή της επιφάνειας dA που μελετάμε· στην οποία και υπολογίζουμε την ανακλαστικότητα. Επίσης, το μήκος κύματος λ του προσπίπτοντος φωτός θεωρείται κατά πολύ μικρότερο των διαστάσεων των πλευρών των αυλακώσεων, προκειμένου να αποφύγουμε φαινόμενα παρεμβολής και να μπορούμε να εργαστούμε μόνο με την οπτική, μη λαμβάνοντας υπόψη την κυματική φύση του φωτός.

Σύμφωνα με την τροποποίηση του μοντέλου Phong από τον Blinn [Blin77], επιτυγχάνεται τέλεια ανάκλαση όταν το κανονικό διάνυσμα μιας πλευράς συμπίπτει με τη μεσοκάθετο $\hat{\mathbf{h}}$ (βλ. Εξίσωση (12.24)). Το σχήμα και η γωνιακή εξάρτηση της έκλαμψης λόγω κατοπτρικής ανάκλασης καθορίζεται από τη συνισταμένη συνεισφορά του

ιδανικά ανακλώμενου φωτός από όλες τις μικρο-επιφάνειες. Επειδή όμως κάθε μικρο-επιφάνεια είναι ένας τέλειος καθρέπτης, η συνεισφορά της είναι δικατάστατη, δηλαδή, είτε ανακλά πλήρως το φως από την κατεύθυνση $\hat{\mathbf{l}}$ στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{v}}$, είτε καθόλου. Επομένως, το ποσοστό D των μικρο-επιφανειών που είναι προσανατολισμένες προς την κατεύθυνση $\hat{\mathbf{h}}$ καθορίζει το ποσοστό του προσπίπτοντος φωτός το οποίο μπορεί να ανακλαστεί στο περιβάλλον προς την κατεύθυνση παρατήρησης. Για τη συνάρτηση κατανομής των μικρο-επιφανειών έχουν προταθεί πολλά μοντέλα. Οι Cook και Torrance ξεχώρισαν δύο από αυτά: την κατανομή Gauss [Blin77] (Torrance–Sparrow) και την κατανομή Beckmann [Beck63]. Η πρώτη έχει ευκολότερους υπολογισμούς, ενώ η δεύτερη είναι πιο σωστή από φυσικής άποψης, αφού δεν εξαρτάται από μη φυσικές παραμέτρους και καταλήγει σε απόλυτες τιμές ανακλαστικότητας. Οι δύο κατανομές είναι:

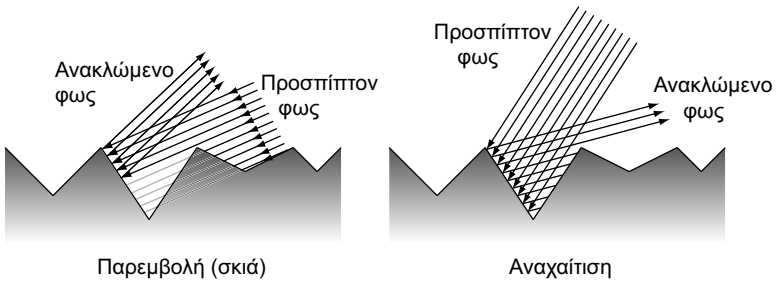
$$\begin{aligned} D_{(\text{Gaussian})} &= c \cdot e^{-(\theta_a/m)^2}, \\ D_{(\text{Beckmann})} &= \frac{1}{m^2 \cos^4 \theta_a} \cdot e^{-(\tan \theta_a/m)^2}, \end{aligned} \tag{12.45}$$

όπου m είναι η τιμή RMS για την κατανομή της κλίσης των μικρο-επιφανειών και θ_a είναι η γωνία μεταξύ του κανονικού διανύσματος $\hat{\mathbf{n}}$ της επιφάνειας dA και του διανύσματος $\hat{\mathbf{h}}$. Όσο μεγαλύτερη είναι η μέση κλίση m, τόσο πιο τραχεία είναι η επιφάνεια, και η κατοπτρική λάμψη απλώνεται. Μικρές τιμές της m σημαίνουν πως έχουμε μικρο-επιφάνειες με κανονικά διανύσματα κοντά στο μέσο κανονικό διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$ της επιφάνειας· οπότε έχουμε μια σχεδόν λεία επιφάνεια με στενό λοβό έκλαμψης και γυαλιστερή όψη.

Αλλά η κατανομή D δεν είναι ο μοναδικός παράγοντας που επιδρά στην κατοπτρικά ανακλώμενη ενέργεια πάνω στην επιφάνεια dA. Με δεδομένο ότι οι μικρο-επιφάνειες είναι διευθετημένες σε αυλακώσεις σχήματος V, ορισμένο ποσοστό από την εξερχόμενη ακτινοβολία προς την κατεύθυνση $\vec{\mathbf{v}}$ αποσβένει εξαιτίας της αναχαίτισης του φωτός που φεύγει από μία μικρο-επιφάνεια από την απέναντί της πλευρά της αύλακας (Σχήμα 12.23). Το ποσοστό της παρεμπόδισης του φωτός εξαρτάται από την κατεύθυνση εξόδου και την κλίση της μικρο-επιφάνειας (οπότε από το διάνυσμα $\hat{\mathbf{h}}$ που χαρακτηρίζει τη μικρο-επιφάνεια), σε σχέση με το συνολικό κανονικό διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$ της περιοχής. Ο Blinn [Blin77] υπολόγισε το ποσοστό του φωτός που παρεμποδίζεται εξαιτίας της πρόσκρουσής του στις απέναντι μικρο-επιφάνειες $G_{\text{intercept}} \in [0,1]$ ως:

$$G_{\text{intercept}} = \frac{2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{h}})(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{v}})}{\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{h}}}. \tag{12.46}$$

Όπως παρουσιάζεται και στο Σχήμα 12.23, μέρος του φωτός που εκπέμπεται από μια κατεύθυνση $\hat{\mathbf{l}}$ προς μια μικρο-επιφάνεια da αποκόπτεται πριν φτάσει στη da από την απέναντι πλευρά της αυλάκωσης, αφήνοντας το χαμηλότερο τμήμα της πλευράς αυτής στη σκιά. Γεωμετρικά, αυτό είναι το αντίστροφο φαινόμενο σε σχέση με την αναχαίτιση του φωτός που περιγράφηκε προηγουμένως. Ο συντελεστής απόσβεσης G_{shadow} προκύπτει με εναλλαγή των ρόλων των $\hat{\mathbf{l}}$ και $\hat{\mathbf{v}}$ στην Εξίσωση (12.46) και χρήση



Σχήμα 12.23: *Απόσβεση του φωτός στο μοντέλο Cook–Torrance εξαιτίας της αναχαίτισης του προσπίπτοντος και εξερχόμενου φωτός από τις μικρο-επιφάνειες.*

του ορισμού του $\hat{\mathbf{h}}$:

$$G_{\text{shadow}} = \frac{2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{h}})(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{l}})}{\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{h}}} = \frac{2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{h}})(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{l}})}{\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{h}}}. \tag{12.47}$$

Συνδυάζοντας τις Εξισώσεις (12.46) και (12.47) σ' έναν ενιαίο *συντελεστή γεωμετρικής απόσβεσης* G και λαμβάνοντας υπόψη ότι υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες δεν παρεμποδίζεται ούτε το προσπίπτον ούτε το εξερχόμενο φως (μηδενική γεωμετρική απόσβεση), ο συντελεστής G μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$G = \min\left\{1, \frac{2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{h}})(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{v}})}{\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{h}}}, \frac{2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{h}})(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{l}})}{\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{h}}}\right\}. \tag{12.48}$$

Γενικά, η ανακλώμενη ενέργεια από το περιβάλλον, την κατοπτρική ανάκλαση και τη διάχυση εξαρτάται από το μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτός, μεταβάλλοντας τόσο το ποσοστό όσο και το χρώμα του ανακλώμενου φωτός. Για να πάρει κανείς το φάσμα του ανακλώμενου φωτός, πρέπει να πολλαπλασιάσει το φάσμα του προσπίπτοντος φωτός με τη συνάρτηση μεταφοράς του υλικού (φάσμα ανακλαστικότητας), δηλαδή τη μετρούμενη ανακλαστικότητα σε κάθε μήκος κύματος. Επιπλέον, το φάσμα της ανακλαστικότητας εξαρτάται από τη γωνία πρόσπτωσης του φωτός στην επιφάνεια. Αυτό καθιστά αρκετά πολύπλοκη τη μέτρηση και μοντελοποίηση της ανακλαστικότητας. Συνεπώς, στις περισσότερες περιπτώσεις, η εξάρτηση της ανακλαστικότητας των υλικών σε συνάρτηση με το μήκος κύματος, μετράται μόνο για την κατεύθυνση κάθετης πρόσπτωσης φωτός: $(\theta_a = 0)$.

Το μοντέλο Cook–Torrance απλοποιεί τη φασματική εξάρτηση των όρων της κατανομής ανακλαστικότητας, επιτρέποντας η BRDF του φωτισμού διάχυσης να είναι σταθερή και ίση με την ανακλαστικότητα στην κατεύθυνση κάθετης πρόσπτωσης, καθώς η τελευταία μεταβάλλεται ελάχιστα για ένα εύρος αποκλίσεων 70° από το κανονικό διάνυσμα. Από την άλλη, το κατοπτρικό μέρος της BRDF σχετίζεται με τη γωνία πρόσπτωσης, καθώς προκαλείται χρωματική ολίσθηση όταν οι κατευθύνσεις πρόσπτωσης φωτός και παρατήρησης τείνουν να γίνουν αντιπαράλληλες (βλ. παρακάτω). Αυτό το φαινόμενο γίνεται ιδιαίτερα αισθητό στα μέταλλα.

Η φασματική συνάρτηση μεταφοράς του υλικού εξαρτάται από το σχετικό δείκτη διάθλασης του υλικού n_{12}, ή απλά n, και το συντελεστή εξασθένισης k. Ο k σχετίζεται με το βάθος μέσα στο σώμα του αντικειμένου στο οποίο διεισδύει ένα κύμα, με μήκος κύματος λ, μέχρι να αποσβεστεί πλήρως. Στο μοντέλο Cook–Torrance, η εξάρτηση της ανακλαστικότητας από τον n και τον k εισάγεται με τη χρήση του όρου Fresnel F. Αυτός είναι ο τρίτος παράγοντας που ρυθμίζει την ανακλαστικότητα, μαζί με την κατανομή D και τη γεωμετρική απόσβεση G και περιγράφει το πώς η κάθε μικρο-επιφάνεια αντανακλά το φως. Να σημειωθεί πως, στη γενική περίπτωση, και ο n και ο k μεταβάλλονται ως συνάρτηση του μήκους κύματος του προσπίπτοντος φωτός. Για $k = 0$ και μη πολωμένο φως, η εξίσωση Fresnel είναι:

$$F = \frac{1}{2}\frac{(g-c)^2}{(g+c)^2}\left(1+\frac{[c(g+c)-1]^2}{[c(g-c)+1]^2}\right), \tag{12.49}$$

όπου:

$$c = \hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{h}},$$
$$g = \sqrt{n^2+c^2-1}.$$

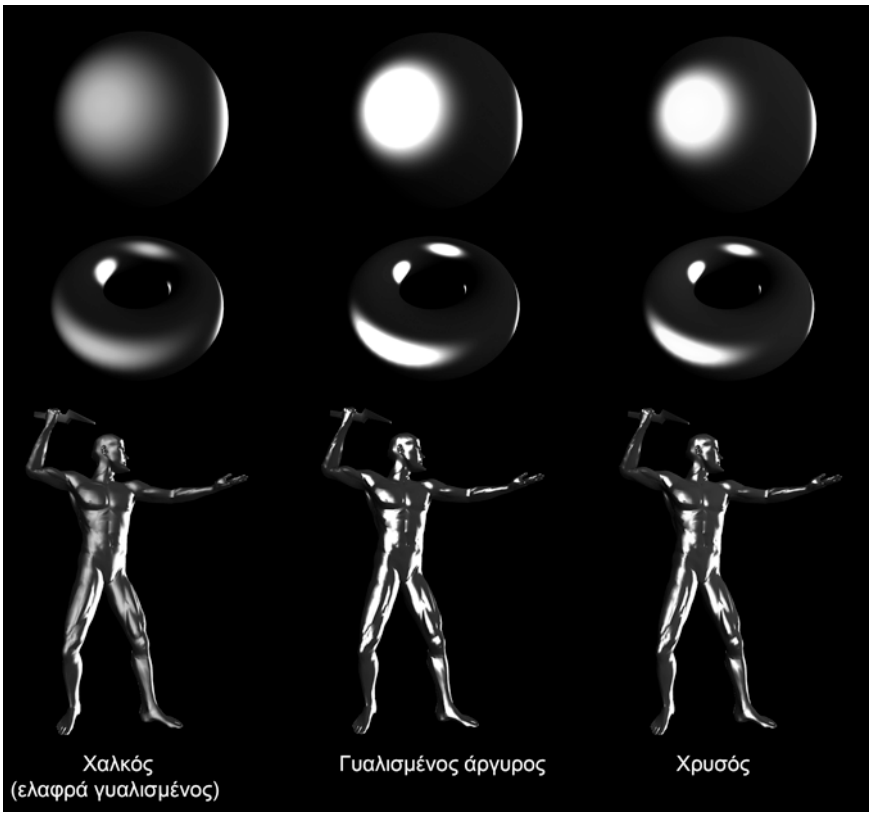
Από την Εξίσωση (12.49), βλέπουμε ότι όταν κοιτάζουμε προς την κατεύθυνση του εισερχόμενου φωτός από μια αρκετά χαμηλή γωνία κοντά στην επιφάνεια, η γωνία μεταξύ του $\hat{\mathbf{v}}$ και του $\hat{\mathbf{h}}$ τείνει στο $\pi/2$ και επομένως, $F \to 1$, ανεξάρτητα από τις εξαρτώμενες από το μήκος κύματος τιμές των n και k. Αυτό σημαίνει πως για τέτοιες γωνίες, το φάσμα του ανακλώμενου φωτός είναι το ίδιο με το φάσμα του προσπίπτοντος φωτός. Στη γενική περίπτωση, $F \neq 1$ για άλλες γωνίες.

Η υπόθεση $k = 0$, είναι αληθής κυρίως για μη μεταλλικά υλικά. Παρά το γεγονός αυτό, η Εξίσωση (12.49) παράγει και για μέταλλα μια καλή προσέγγιση της γωνιακής εξάρτησης του F, αφού ο όρος Fresnel εξαρτάται μόνο ανεπαίσθητα από τον k.

Συγκεντρώνοντας τον όρο της κατανομής των μικρο-επιφανειών D, το συντελεστή γεωμετρικής απόσβεσης G και τον όρο Fresnel F σε μια κοινή έκφραση, το κατοπτρικό μέρος της BRDF είναι:

$$f_s = \frac{1}{\pi}\frac{DGF}{(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{l}})(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{v}})}. \tag{12.50}$$

Ο όρος $(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{l}})(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{v}})$ μεγιστοποιεί την κατοπτρική λάμψη όταν βλέπουμε το φως απέναντί μας. Επειδή ο υπολογισμός του εξαρτώμενου από το μήκος κύματος όρου Fresnel είναι ακριβός, οι Cook και Torrance πρότειναν την ακόλουθη προσέγγιση. Αρχικά, μπορεί κανείς να υπολογίσει από την εξίσωση Fresnel (αν τα $n(\lambda)$, $k(\lambda)$ είναι γνωστά), ή να μετρήσει, το ανακλώμενο χρώμα στην κατεύθυνση κάθετης πρόσπτωσης F_0. Στη συνέχεια, με δεδομένο ότι η F για κατευθύνσεις παρατήρησης αντιπαράλληλες με την κατεύθυνση φωτισμού είναι πάντα 1 για όλα τα μήκη κύματος ($F_{\frac{\pi}{2}} = 1$), οι χρωματικές συνιστώσες (R, G, B) του ανακλώμενου φωτός είναι ίσες με τις αντίστοιχες του προσπίπτοντος φωτός. Οπότε, το κατοπτρικά ανακλώμενο φως για οποιαδήποτε ενδιάμεση γωνία $\theta = \widehat{\mathbf{vh}}$ μπορεί, κατά προσέγγιση, να δοθεί με παρεμβολή μεταξύ των ακραίων τιμών:



Σχήμα 12.24: *Προσομοίωση διαφόρων υλικών με το μοντέλο Cook–Torrance χρησιμοποιώντας την OpenGL Shading Language. Όλες οι επιφάνειες φωτίζονται από δύο πηγές, μια κοντά στην κατεύθυνση κάθετης πρόσπτωσης ως προς τον παρατηρητή και μία αντιδιαμετρικά με αυτόν (βλ. ακόμα την Εικόνα 20.)*

$$c_i = c_{i,0} + (c_{i,\frac{\pi}{2}} - c_{i,0})\frac{\max(0, F_\theta(\lambda) - F_0(\lambda))}{F_{\frac{\pi}{2}} - F_0(\lambda)}, \tag{12.51}$$

όπου c_i, $c_{i,\frac{\pi}{2}}$, $c_{i,0}$ είναι αντίστοιχα οι χρωματικές συνιστώσες (i=κόκκινο, πράσινο, μπλε) του τελικού χρώματος, του χρώματος του υλικού —όταν φωτίζεται κάθετα στην επιφάνεια— και του προσπίπτοντος φωτός. Η παρουσία του όρου F με μορφή συνάρτησης, $F(\lambda)$, επισημαίνει την έμμεση εξάρτησή του από το μήκος κύματος λ μέσα από την αλλαγή του δείκτη διάθλασης. Το τελικό χρώμα c_i παράγεται με πολλαπλασιασμό της Εξίσωσης (12.50) με την Εξίσωση (12.51):

$$c_i = \frac{1}{\pi}\left[c_{i,0} + (c_{i,\frac{\pi}{2}} - c_{i,0})\frac{\max(0, F_\theta(\lambda) - F_0(\lambda))}{F_{\frac{\pi}{2}} - F_0(\lambda)}\right]\frac{DGF_\theta(\lambda)}{(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{l}})(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{v}})}. \tag{12.52}$$

Το Σχήμα 12.24 (βλ. επίσης την Εικόνα 20) επιδεικνύει τη συμπεριφορά του μοντέ-

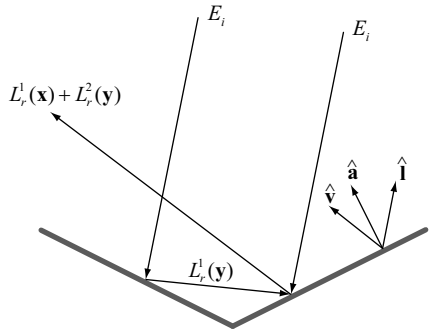
λου Cook–Torrance για διάφορα υλικά. Για την παραγωγή των εικόνων χρησιμοποιήθηκαν οι shaders πραγματικού χρόνου σε GLSL που παρατίθενται στην Ενότητα 12.12.

12.8 Το μοντέλο φωτισμού Oren–Nayar⊛

Σε όλα τα μοντέλα φωτισμού που είδαμε μέχρι τώρα, η συνιστώσα σκέδασης του φωτός ακολουθούσε το μοντέλο Lambert, το οποίο θεωρεί ότι η επιφάνεια φαίνεται εξίσου λαμπρή από όλες τις κατευθύνσεις παρατήρησης (βλ. Ενότητα 12.2). Στη φύση όμως, υπάρχουν πολλές κοινές περιπτώσεις αδρών επιφανειών των οποίων η ανακλαστικότητα δεν μπορεί να εξηγηθεί και άρα να παρασταθεί με το μοντέλο Lambert. Ένα ενδιαφέρον τέτοιο παράδειγμα είναι η πανσέληνος. Η Σελήνη, όντας ένα σφαιρικό σώμα και ανακλώντας το φως από ένα μακρινό και μη αμελητέου πλάτους εκπομπό, τον Ήλιο, θα έπρεπε να φαίνεται από τη Γη πολύ λαμπρή στο κέντρο (ή στο σημείο κάθετης πρόσπτωσης του φωτός γενικά), ενώ το ανακλώμενο φως θα έπρεπε να μειώνεται σταδιακά προς τα άκρα του ορατού κυκλικού δίσκου. Στην πράξη όμως δε συμβαίνει αυτό· το φως που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής στην επιφάνεια της Γης δίνει την αίσθηση ενός πιο ομοιόμορφου φωτισμού πάνω σε όλο τον ορατό δίσκο της Σελήνης. Επομένως, σε μακροσκοπικό επίπεδο, η αδρή και γεμάτη κρατήρες και ρωγμές επιφάνεια της Σελήνης σαφώς δεν είναι Lambertian. Άλλες αδρές επιφάνειες φτιαγμένες από υλικά όπως, πηλό, τσιμέντο, ή άμμο επίσης αποκλίνουν από το μοντέλο Lambert. Πώς όμως δικαιολογείται αυτή η διαφοροποίηση;

Για ομαλές επιφάνειες, το μοντέλο Lambert δουλεύει καλά. Μια αδρή επιφάνεια εμφανίζει μεν φαινόμενα, όπως παρεμπόδιση και σκίαση παρόμοια με αυτά που είδαμε στο μοντέλο Torrance–Sparrow (βλ. Ενότητα 12.3), αλλά επιπλέον εκπέμπει φως λόγω δευτερευουσών ανακλάσεων στα τοιχώματα των ακανόνιστων γεωμετρικών της δομών. Αυτό οδηγεί σε αύξηση της ανακλώμενης ακτινοβολίας όσο η κατεύθυνση παρατήρησης πλησιάζει την κατεύθυνση πρόσπτωσης του φωτός. Οι Oren και Nayar μελέτησαν αυτά τα φαινόμενα και πρότειναν ένα διεξοδικό μοντέλο που λαμβάνει υπόψη αυτούς τους παράγοντες και προσεγγίζει με αρκετή πιστότητα τη συμπεριφορά αδρών επιφανειών [Oren92, Oren94]. Επειδή μια πλήρης ανάλυση της απόδειξης του μοντέλου Oren–Nayar είναι αρκετά πολύπλοκη και ξεφεύγει από τους διδακτικούς στόχους αυτού του βιβλίου, στις επόμενες παραγράφους θα παρουσιαστούν μόνον οι αρχές και η πρακτική, απλοποιημένη, μορφή του μοντέλου.

Στο μοντέλο φωτισμού διάχυσης Oren–Nayar, υιοθετείται και πάλι η μοντελοποίηση ενός υλικού με μικρο-επιφάνειες από τη θεωρία Torrance–Sparrow. Μια αδρή επιφάνεια αποτελείται από μακριές —συγκριτικά με το πλάτος τους— αυλακώσεις σε σχήμα V. Αντίθετα με τα μοντέλα των Blinn και Cook–Torrance, όπου οι μικρο-επιφάνειες ήταν τέλειοι καθρέπτες (και τα δύο μοντέλα αποσκοπούν στον υπολογισμό της κατοπτρικής συνιστώσας της BRDF), στο μοντέλο Oren–Nayar οι πλευρές των αυλακώσεων είναι Lambertian επιφάνειες. Αυτό που κάνει το μοντέλο ενδιαφέρον είναι το γεγονός ότι, ενώ χρησιμοποιεί την ίδια μοντελοποίηση επιφανειών με τα άλλα μοντέλα, η αλλαγή της BRDF των μικρο-επιφανειών αλλάζει εντελώς τους μηχανισμούς



Σχήμα 12.25: *Η πρώτης και δεύτερης τάξης ανάκλαση ενέργειας πάνω σε Lambertian μικρο-επιφάνειες αποτελούν το θεωρούμενο εξερχόμενο φωτισμό στο μοντέλο Oren–Nayar.*

αλληλεπίδρασης του φωτός μεταξύ των στοιχειωδών αυτών πλευρών.

Το ανακλώμενο φως σε μια κατεύθυνση (θ_r, ϕ_r), με δεδομένη μια κατεύθυνση πρόσπτωσης $\hat{\mathbf{l}}$ υπολογίζεται σε δύο μέρη: την ανακλώμενη λαμπρότητα πρώτης και δεύτερης τάξης, $L_r^1(\theta_r, \phi_r, \theta_i, \phi_i)$ και $L_r^2(\theta_r, \phi_r, \theta_i, \phi_i)$ αντίστοιχα. Αυτές οι συνιστώσες αντιστοιχούν σε φως που φεύγει κατευθείαν με ανάκλαση προς την κατεύθυνση παρατήρησης $\hat{\mathbf{v}}$ από μια μικρο-επιφάνεια, όπως επίσης και στο φως που ανακλάται προς την ίδια κατεύθυνση εξόδου, ερχόμενο όμως από την απέναντι πλευρά της αυλάκωσης (Σχήμα 12.25).

Το μοντέλο Torrance–Sparrow χρησιμοποιεί μια κατανομή D των μικρο-επιφανειών που είναι προσανατολισμένες προς την ίδια κατεύθυνση $\hat{\mathbf{h}}$, δηλαδή την κατεύθυνση που θα έπρεπε να έχει μια μικρο-επιφάνεια για να ανακλά τέλεια το φως από την κατεύθυνση $\hat{\mathbf{l}}$ προς την $\hat{\mathbf{v}}$. Δεδομένου ότι ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε την εξερχόμενη ενέργεια από μια μικρή επιφάνεια dA στη γειτονία του φωτοσκιαζόμενου σημείου, μια βολικότερη κατανομή θα ήταν μία που να μετράει το ποσοστό των μικρο-επιφανειών που είναι προσανατολισμένες με μια τυχαία κατεύθυνση $\hat{\mathbf{a}}$ (δηλαδή όχι απαραίτητα την $\hat{\mathbf{h}}$): $P(\theta_a, \phi_a)$. Οι Oren και Nayar χρησιμοποίησαν μια απλή κατανομή με αυλακώσεις που δεν αλλάζουν βάθος και άρα δεν αλλάζουν κλίση οι πλευρές τους, παρά μόνο προσανατολισμό με βάση μια ισοτροπική Gauss κατανομή.

Ας υπολογίσουμε τη συνεισφορά μιας πλευράς αυλάκωσης με κλίση θ_a (αναφορικά με το επίπεδο της ολικής επιφάνειας), στη λαμπρότητα που παρατηρούμε από την επιφάνεια. Χρειάζεται να συνυπολογίσουμε εκείνη τη συνεισφορά φωτισμού που αντιστοιχεί στην προβολή της μικρο-επιφάνειας πάνω στη στοιχειώδη επιφάνεια dA: $da \cos\theta_a$, αντί για την αρχική επιφάνειά της da. Η αντίστοιχη συνεισφορά της μικρο-επιφάνειας στη λαμπρότητα της περιοχής dA είναι η *προβαλλόμενη λαμπρότητα* $L_{rp}(\theta_a, \phi_a)$:

$$L_{rp}(\theta_a, \phi_a) = \frac{d\Phi_r(\theta_a, \phi_a)}{(da \cos\theta_a) \cos\theta_r d\vec{\omega}_r}. \tag{12.53}$$

Από τη σχέση μεταξύ φωτισμού (irradiance) και λαμπρότητας (radiance), καθώς

και από τον ορισμό της ισχύος της εκπομπής:

$$\left.\begin{array}{l} dE_r(\theta_r,\phi_r) = L_r(\theta_r,\phi_r)\cos\theta_r d\vec{\omega}_r = L_r(\theta_r,\phi_r)(\hat{\mathbf{a}}\cdot\hat{\mathbf{v}})d\vec{\omega}_r \\ d\Phi_r(\theta_r,\phi_r) = dE_r(\theta_r,\phi_r)da \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$d\Phi_r(\theta_r,\phi_r) = L_r(\theta_r,\phi_r)(\hat{\mathbf{a}}\cdot\hat{\mathbf{v}})d\vec{\omega}_r da. \quad (12.54)$$

Αντικαθιστώντας την ισχύ της Εξίσωσης (12.53), η προβαλλόμενη λαμπρότητα γίνεται:

$$L_{rp}(\theta_a,\phi_a) = \frac{L_r(\theta_r,\phi_r)(\hat{\mathbf{a}}\cdot\hat{\mathbf{v}})d\vec{\omega}_r da}{(da\cos\theta_a)\cos\theta_r d\vec{\omega}_r} = \frac{L_r(\theta_r,\phi_r)(\hat{\mathbf{a}}\cdot\hat{\mathbf{v}})}{(\hat{\mathbf{a}}\cdot\hat{\mathbf{n}})(\hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{n}})}. \quad (12.55)$$

Αφού έχουμε υποθέσει Lambertian κατανομή ανακλαστικότητας για τις μικρο-επιφάνειες, η BRDF καθεμίας είναι ίση με $\frac{1}{\pi}$ (Εξίσωση (12.18)). Θεωρώντας ότι μέρος της ενέργειας απορροφάται σύμφωνα με τη λευκαύγεια (albedo) ρ του υλικού, από τον ορισμό της BRDF παίρνουμε:

$$L_r(\theta_r,\phi_r) = \rho f_d E_i(\theta_i,\phi_i) = \rho f_d E_0\cos\theta_i = \rho f_d E_0(\hat{\mathbf{l}}\cdot\hat{\mathbf{a}}) = \frac{\rho}{\pi}E_0(\hat{\mathbf{l}}\cdot\hat{\mathbf{a}}), \quad (12.56)$$

όπου E_0 είναι ο φωτισμός, έχοντας τοποθετήσει τη φωτεινή πηγή στην κατεύθυνση κάθετης πρόσπτωσης (δηλαδή στο κανονικό διάνυσμα). Αντικαθιστώντας τη λαμπρότητα στην Εξίσωση (12.55):

$$L_{rp}(\theta_a,\phi_a) = \frac{\rho}{\pi}E_0\frac{(\hat{\mathbf{l}}\cdot\hat{\mathbf{a}})(\hat{\mathbf{a}}\cdot\hat{\mathbf{v}})}{(\hat{\mathbf{a}}\cdot\hat{\mathbf{n}})(\hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{n}})}. \quad (12.57)$$

Η λαμπρότητα η οποία κατευθύνεται άμεσα προς τον παρατηρητή, χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη μας οποιαδήποτε εξασθένιση εξαιτίας παρεμπόδισης ή σκίασης, υπολογίζεται ολοκληρώνοντας τη συνεισφορά της προβαλλόμενης λαμπρότητας της Εξίσωσης (12.57) πάνω σε όλες τις δυνατές κατευθύνσεις προσανατολισμού των μικρο-επιφανειών. Η συνεισφορά όλων των μικρο-επιφανειών που είναι προσανατολισμένες προς την κατεύθυνση $\hat{\mathbf{a}}$ προκύπτει από το ποσοστό της συνολικής επιφάνειας dA που καταλαμβάνει αυτή η ομάδα μικρο-επιφανειών, δηλαδή $P(\theta_a,\phi_a)$:

$$L_r^1(\theta_r,\phi_r,\theta_i,\phi_i) = \int_{\theta_a=0}^{\pi/2}\int_{\phi_a=0}^{2\pi} P(\theta_a,\phi_a)L_{rp}^1(\theta_a,\phi_a)\sin\theta_a d\phi_a d\theta_a. \quad (12.58)$$

Επιπρόσθετα, η σκίαση και η παρεμπόδιση του εξερχόμενου και εισερχόμενου φωτός αντίστοιχα, εξαιτίας της παρουσίας των απέναντι πλευρών των αυλακώσεων, έχουν ως αποτέλεσμα την απώλεια λαμπρότητας κατά έναν παράγοντα. Ο γεωμετρικός συντελεστής εξασθένισης GAF του μοντέλου Oren–Nayar είναι μια γενικευμένη εκδοχή του συντελεστή G του μοντέλου Cook–Torrance/Blinn και ισχύει για οποιοδήποτε κανονικό διάνυσμα προσανατολισμού μικρο-επιφανειών $\hat{\mathbf{a}}$ και όχι απαραίτητα για την

κατεύθυνση $\hat{\mathbf{h}}$ της μεσοκαθέτου μεταξύ κατεύθυνσης παρατήρησης και πρόσπτωσης:

$$GAF = \min\left\{1, \max\left\{0, \frac{2(\hat{\mathbf{l}}\cdot\hat{\mathbf{n}})(\hat{\mathbf{a}}\cdot\hat{\mathbf{n}})}{\hat{\mathbf{l}}\cdot\hat{\mathbf{a}}}, \frac{2(\hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{n}})(\hat{\mathbf{a}}\cdot\hat{\mathbf{n}})}{\hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{a}}}\right\}\right\}. \quad (12.59)$$

Η προβαλλόμενη εξερχόμενη λαμπρότητα πολλαπλασιάζεται με τον GAF, για κάθε ομάδα μικρο-επιφανειών μέσα στην επιφάνεια dA που κοιτάζουν προς την κατεύθυνση $\hat{\mathbf{a}}$· συνεπώς, συνυπολογίζοντας το φως που παρεμποδίζεται, η Εξίσωση (12.58) γίνεται:

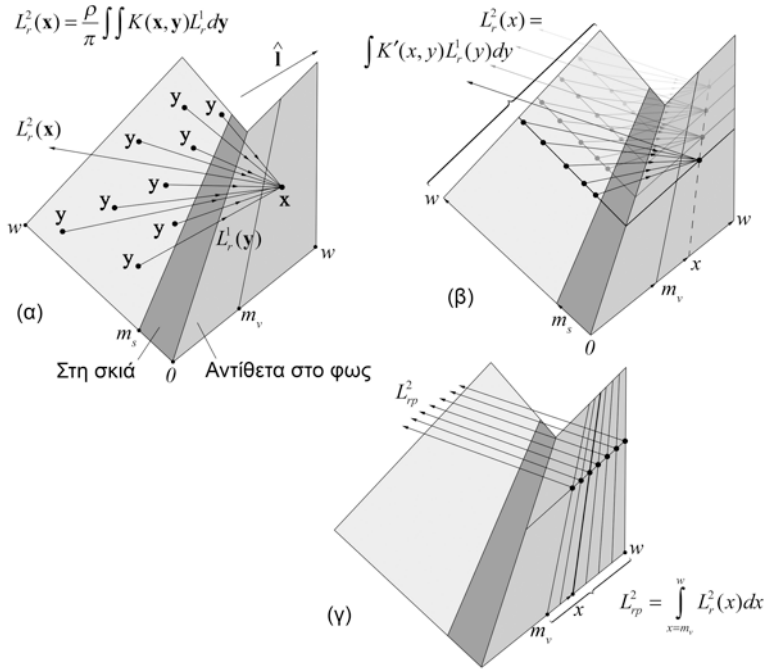
$$L_r^1(\theta_r, \phi_r, \theta_i, \phi_i) = \int_{\theta_a=0}^{\pi/2}\int_{\phi_a=0}^{2\pi} P(\theta_a, \phi_a) L_{rp}^1(\theta_a, \phi_a) GAF \sin\theta_a d\phi_a d\theta_a. \quad (12.60)$$

Ο υπολογισμός της ανταλλαγής ενέργειας μεταξύ αντικριστών μικρο-επιφανειών είναι σημαντικά δυσκολότερος· θα παραθέσουμε εδώ μόνο κάποια βασικά στοιχεία για αυτόν, καθώς και τα αποτελέσματα της ανάλυσης. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει για τις λεπτομέρειες της μεθόδου στην αρχική εργασία των Nayar και Oren στην [Oren92] και στην [Fors89].

Καθώς οι μικρο-επιφάνειες είναι τέλειοι σκεδαστές και, συνεπώς, δεν εκπέμπουν φως πολύ έντονα προς κάποια συγκεκριμένη κατεύθυνση, η ενέργεια που μεταδίδεται μέσω δευτερευουσών ανακλάσεων πάνω στις μικρο-επιφάνειες μειώνεται ραγδαία. Επιπλέον, η συνεισφορά ενέργειας από μία μικρο-επιφάνεια σε μία άλλη, μειώνεται ακόμα περισσότερο λόγω της πλάγιας σχετικής τοποθέτησής τους. Αυτό σημαίνει ότι η αθροιστική συνεισφορά περισσότερων από δύο αναπηδήσεων φωτός είναι ασήμαντη και δεν υπάρχει λόγος να λαμβάνεται υπόψη. Έτσι, το μοντέλο Oren–Nayar δεν ασχολείται με της τρίτης και άνω τάξης ανακλάσεων διάχυσης φωτός.

Για τον υπολογισμό της λαμπρότητας που προκύπτει από το φως που προσπίπτει από μια κατεύθυνση (θ_i, ϕ_i), ανακλάται πάνω σε μία μικρο-επιφάνεια (L_r^1) και φεύγει προς την κατεύθυνση παρατήρησης (L_r^2) από την απέναντι πλευρά της αυλάκωσης που υποδέχεται το φως, χρειαζόμαστε μια εκτίμηση: α) του τμήματος της δεύτερης μικρο-επιφάνειας το οποίο είναι ορατό από τον παρατηρητή, και β) του τμήματος της πρώτης μικρο-επιφάνειας στο οποίο φτάνει το εισερχόμενο φως και δεν παρεμποδίζεται από τη δεύτερη (απέναντι) μικρο-επιφάνεια (Σχήμα 12.26(α)).

Εκμεταλλευόμενοι την ομοιότητα όλων των διατομών σε σχήμα V μιας αυλάκωσης, ο υπολογισμός της ολικής προβαλλόμενης λαμπρότητας μπορεί να σπάσει σε δύο διαδοχικά αθροίσματα. Για όλα τα σημεία σε μια γραμμή παράλληλη με το μήκος της αυλάκωσης, συναθροίζεται η λαμπρότητα που φτάνει από όλα τα σημεία της απέναντι πλευράς. Η σταθερή διατομή της αυλάκωσης μας βοηθά ώστε να θεωρήσουμε πανομοιότυπη τη συνεισφορά όλων των σημείων πάνω στη γραμμή αυτή (Σχήμα 12.26(β)). Η ολική λαμπρότητα που φεύγει από τη διατομή της απέναντι (δεύτερης) πλευράς προς την κατεύθυνση παρατήρησης $\hat{\mathbf{v}}$ υπολογίζεται ολοκληρώνοντας τη λαμπρότητα που αποδίδουν όλες οι παράλληλες γραμμές κατά μήκος της αυλάκωσης, οι οποίες βρίσκονται πάνω από το όριο παρεμπόδισης m_v (Σχήμα 12.26(γ)).



Σχήμα 12.26: *Λαμπρότητα από ανακλάσεις δεύτερης τάξης. (α) Όλα τα σημεία* **y** *στην απέναντι πλευρά της αύλακας που δεν βρίσκονται σε σκιά, ανακλούν το φως προς ένα σημείο* **x** *στην πλευρά που λαμβάνει την ενέργεια. Ο K είναι ένας γεωμετρικός πυρήνας που καθορίζει την απολαβή μεταξύ των δύο επιφανειών. (β) Εκφράζοντας την L_r ως προς την απόσταση του x από τον πυθμένα της αυλάκωσης, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλα τα σημεία που ισαπέχουν από τον πυθμένα λαμβάνουν την ίδια λαμπρότητα. (γ) Η συνολική λαμπρότητα που εξέρχεται από την μικρο-επιφάνεια (δευτερεύουσα ανάκλαση) είναι το άθροισμα όλων των συνεισφορών από εκείνα τα σημεία των οποίων η γραμμή προς τον παρατηρητή δεν τέμνεται με την απέναντι πλευρά.*

Η ολική λαμπρότητα που φεύγει από την επιφάνεια dA προς την κατεύθυνση $\hat{\mathbf{v}}(\theta_r, \phi_r)$ είναι το άθροισμα δύο όρων:

$$L_r(\theta_r, \phi_r, \theta_i, \phi_i) = L_r^1(\theta_r, \phi_r, \theta_i, \phi_i) + L_r^2(\theta_r, \phi_r, \theta_i, \phi_i). \tag{12.61}$$

Με βάση την παραπάνω ανάλυση, οι Oren και Nayar κατέληξαν σ' ένα λεπτομερές αναλυτικό μοντέλο για την ανακλαστικότητα αδρών επιφανειών, το οποίο όμως δεν παρατίθεται εδώ εξαιτίας της πολυπλοκότητάς του και της εξάρτησής του από παραμέτρους που δεν έχουν φυσική ερμηνεία. Ευτυχώς, πραγματοποιώντας κάποιες απλοποιήσεις, τροποποίησαν τις αρχικές εξισώσεις, παρέχοντας έτσι ένα μοντέλο που εξαρτάτια μόνο από τις γωνίες πρόσπτωσης και εξόδου καθώς και από μια παράμετρο που καθορίζει την τραχύτητα της επιφάνειας. Χρησιμοποιώντας Gaussian κατανομή

$P(\theta_a, \phi_a)$ για τις μικρο-επιφάνειες, με μηδενική μέση τιμή και τυπική απόκλιση σ, οι εξισώσεις του μοντέλου είναι:

$$L_r^1(\theta_r, \phi_r, \theta_i, \phi_i) = \frac{\rho}{\pi} E_0 \cos\theta_i [C_1 + \cos(\phi_r - \phi_i) C_2 \tan\beta + (1 - |\cos(\phi_r - \phi_i)|) C_3 \tan(\frac{\alpha + \beta}{2})], \tag{12.62}$$

$$L_r^2(\theta_r, \phi_r, \theta_i, \phi_i) = 0.17 \frac{\rho}{\pi} E_0 \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.13} \cos\theta_i [1 - (\frac{2\beta}{\pi})^2 \cos(\phi_r - \phi_i)], \tag{12.63}$$

όπου:

$$C_1 = 1 - 0.5 \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.3},$$

$$C_2 = \begin{cases} 0.45 \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.09} \sin\alpha, & \cos(\phi_r - \phi_i) \geq 0, \\ 0.45 \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.09} (\sin\alpha - (\frac{2\beta}{\pi})^3), & \text{διαφορετικά}, \end{cases}$$

$$C_3 = 0.125 \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.09} (\frac{4\alpha\beta}{\pi^2})^2,$$

$$\alpha = \max(\theta_r, \theta_i), \quad \beta = \min(\theta_r, \theta_i).$$

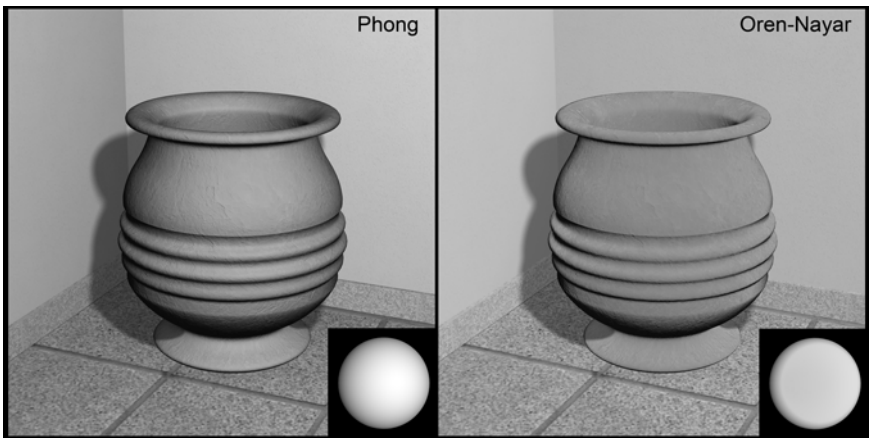
Η BRDF του μοντέλου Oren–Nayar προκύπτει εύκολα εφαρμόζοντας τον ορισμό της Εξίσωσης (12.61). Ο φωτισμός απαλείφεται και ο τελικός τύπος εξαρτάται μόνο από τους σταθερούς όρους του μοντέλου και τις γωνίες πρόσπτωσης και εξόδου του φωτός:

$$f_{\text{Oren–Nayar}} = \frac{L(\theta_r, \phi_r, \theta_i, \phi_i)}{E_i} = \frac{L(\theta_r, \phi_r, \theta_i, \phi_i)}{E_0 \cos\theta_i} = \frac{L_r^1(\theta_r, \phi_r, \theta_i, \phi_i) + L_r^2(\theta_r, \phi_r, \theta_i, \phi_i)}{E_0 \cos\theta_i} \tag{12.64}$$

Στο Σχήμα 12.27 απεικονίζεται η σύγκριση μεταξύ των μοντέλων Oren–Nayar και Phong. Τα ίδια μοντέλα με την ίδια παραμετροποίηση υλικών έχουν χρησιμοποιηθεί και στις δύο ένθετες εικόνες. Η χαρακτηριστική πτώση της λαμπρότητας με βάση το νόμο του Lambert που χρησιμοποιεί το μοντέλο Phong δεν παράγει πολύ πειστική εικόνα για την όψη των αδρών επιφανειών. Η γρήγορη γωνιακή απόσβεση του μοντέλου Phong είναι πολύ εμφανής· ειδικά στη γωνία του τοίχου και στο περίγραμμα και στους δακτυλίους του πήλινου πιθαριού.

12.9 Το μοντέλο φωτισμού Strauss®

Τα μοντέλα φωτισμού που βασίζονται στη γεωμετρική οπτική, όπως του Blinn, των Cook–Torrance, και των Oren–Nayar, παράγουν πολύ ρεαλιστική φωτοσκίαση. Πα-



Σχήμα 12.27: *Σύγκριση των μοντέλων Phong και Oren–Nayar.*

ρουσιάζουν όμως και ένα εγγενές πρόβλημα, το οποίο καθιστά δύσκολο το χειρισμό τους: χρησιμοποιούν παραμέτρους που χρησιμοποιούνται στη μηχανική υλικών, εκφρασμένες σε πραγματικές μονάδες, οι οποίες συνήθως πρέπει να μετρηθούν και είναι εν γένει δύσχρηστες από καλλιτέχνες. Από την άλλη πλευρά, το απλούστερο συγκριτικά μοντέλο Phong, δε μπορεί να αποδώσει σωστά την όψη των μεταλλικών επιφανειών και πάσχει επίσης και από ένα μικρό αλλά πολλές φορές ενοχλητικό ζήτημα: ο εκθέτης της κατοπτρικής ανάκλασης είναι ένας μη φραγμένος θετικός αριθμός. Συνεπώς, δεν είναι πολύ εύχρηστος για να αποδώσει κανείς μια ζυγισμένη λαμπρότητα μεταξύ μιας αδρής και μιας γυαλιστερής επιφάνειας, επιλέγοντας μια τιμή μεταξύ δύο ακραίων καταστάσεων του υλικού. Η ρύθμιση της γυαλάδας δυσκολεύει περισσότερο εξαιτίας του γεγονότος ότι δύο φαινομενικά ασυσχέτιστες παράμετροι, ο εκθέτης και ο συντελεστής κατοπτρικής ανάκλασης, ελέγχουν το ίδιο χαρακτηριστικό του υλικού (την ένταση της λάμψης).

Ο Strauss [Stra90] πρότεινε ένα μοντέλο φωτισμού το οποίο δανείζεται πολλούς από τους υπολογισμούς φωτισμού του μοντέλου Phong, αλλά επιπλέον ενσωματώνει χαρακτηριστικά όπως η μεταλλική όψη, κατοπτρικές ανακλάσεις εκτός ιδανικής κατεύθυνσης ανάκλασης και έναν ενοποιημένο έλεγχο για τη γυαλάδα, χρησιμοποιώντας κατανοητές και απλές παραμέτρους. Πρόκειται για ένα εμπειρικό μοντέλο που σχεδιάστηκε με στόχο την απλότητα εφαρμογής, ενώ απευθύνεται κυρίως σε καλλιτέχνες τριδιάστατων παραγωγών.

Στο μοντέλο αυτό, οι βασικές παράμετροι που ελέγχουν την όψη του υλικού είναι τρεις και είναι όλες κανονικοποιημένες: Το *χρώμα* του υλικού $\mathbf{c} = (r, g, b)$, το οποίο παριστάνει τη λευκαύγεια της επιφάνειας, η *ομαλότητα* s, με τιμές από το 0 (αδρή επιφάνεια) μέχρι το 1 (τέλειος καθρέπτης), και η *μεταλλικότητα* m, με τιμές επίσης μεταξύ 0 και 1 (η τιμή 1 αντιστοιχεί σε μεταλλική επιφάνεια). Η ομαλότητα ελέγχει τόσο την ισορροπία μεταξύ κατοπτρικής ανάκλασης και φωτισμού διάχυσης, όσο και το μέγεθος της λάμψης. Η μεταλλικότητα επηρεάζει το χρώμα του κατοπτρικά ανακλώμενου φω-

τός, το οποίο —όπως είδαμε στο μοντέλο Cook–Torrance— τείνει προς το χρώμα της επιφάνειας, εκτός από τις γωνίες παρατήρησης που τείνουν να είναι αντιπαράλληλες με το φωτισμό και στις οποίες η λάμψη παίρνει το χρώμα της πηγής.

Η ένταση του ανακλώμενου φωτός ανά κανάλι χρώματος c_r υπολογίζεται ως η αντίστοιχη προσπίπτουσα συνιστώσα του φωτός c_i πολλαπλασιασμένη (φιλτραρισμένη) με τους συντελεστές διάχυτου φωτισμού, κατοπτρικής ανάκλασης και φωτισμού από το περιβάλλον του μοντέλου Strauss (Q_d, Q_s, και Q_a, αντίστοιχα):

$$c_r = c_i(Q_d + Q_s + Q_a). \tag{12.65}$$

Το ποσοστό του φωτισμού διάχυσης Q_d που συνεισφέρει στο τελικό χρώμα, εξαρτάται από την ομαλότητα της επιφάνειας s. Όσο πιο γυαλιστερή είναι μια επιφάνεια, τόσο περισσότερο αποκλίνει από τη συμπεριφορά της Lambertian διάχυσης. Επιπλέον, η συνιστώσα διάχυσης μειώνεται καθώς η επιφάνεια γίνεται ολοένα και πιο μεταλλική, με την αύξηση της τιμής της μεταλλικότητας m. Οι συντελεστές διάχυσης και περιβάλλοντος φωτισμού για το μοντέλο Strauss είναι:

$$\begin{aligned} Q_d &= (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{l}}) r_d d c, \\ Q_a &= r_d c, \\ r_d &= (1 - s^3)(1 - t), \\ d &= (1 - ms), \end{aligned} \tag{12.66}$$

όπου t είναι η διαφάνεια της επιφάνειας στο διάστημα [0,1] (0 = πλήρως αδιαφανής) και c είναι μία από τις τρεις συνιστώσες του χρώματος της επιφανείας (R, G, B). Ο παράγοντας $(1 - s^3)$ έχει επιλεγεί πειραματικά για τη γραμμικότερη (όπως την αντιλαμβανόμαστε στο μάτι μας) μετάπτωση από μια τελείως αδρή σε μια τελείως γυαλιστερή επιφάνεια, με αντίστοιχη γραμμική μεταβολή της παραμέτρου s.

Η συνιστώσα κατοπτρικής ανάκλασης Q_s είναι το γινόμενο δύο όρων, της κατοπτρικής ανακλαστικότητας r_s η οποία καθορίζει το σχήμα της λάμψης, και του χρώματος του κατοπτρικά ανακλώμενου φωτός c_s, το οποίο, για μεταλλικές επιφάνειες, προκύπτει από παρεμβολή μεταξύ του χρώματος της επιφάνειας και του χρώματος του εισερχόμενου φωτός, παρόμοια με το μοντέλο Cook–Torrance (βλ. επίσης την υλοποίηση του Strauss shader στην Ενότητα 12.12):

$$Q_s = r_s c_s. \tag{12.67}$$

Όπως και στο μοντέλο Phong, η ανακλαστικότητα εξαρτάται από το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ της κατεύθυνσης τέλειας ανάκλασης και του διανύσματος προς τον παρατηρητή, υψωμένου σε μια δύναμη που καθορίζει τη συγκέντρωση της λάμψης:

$$\begin{aligned} r_s &= (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{v}})^h \; r_j, \\ h &= \frac{3}{1 - s}. \end{aligned} \tag{12.68}$$

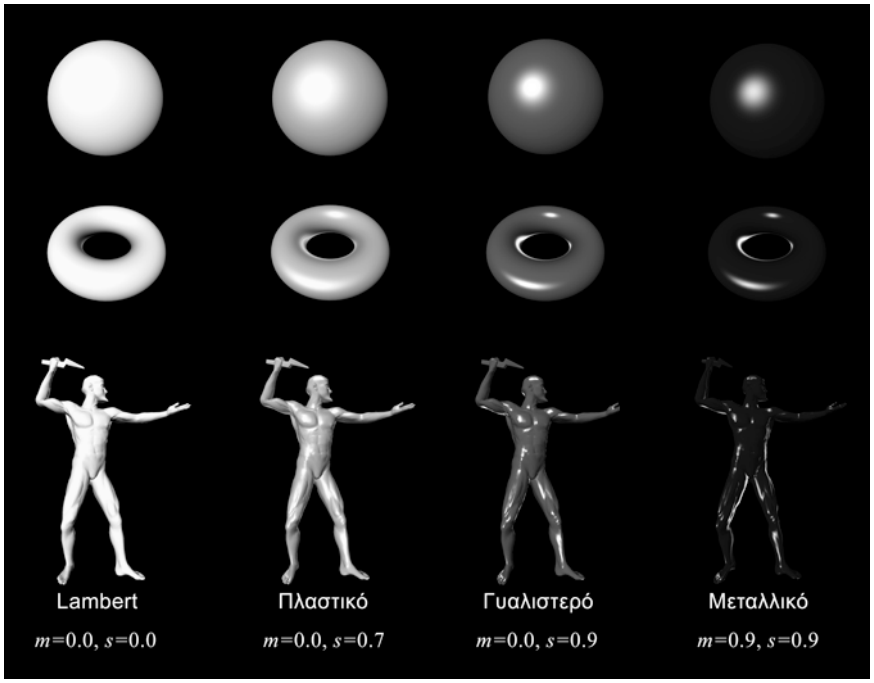
Η τιμή r_j είναι η προσαρμοσμένη ανακλαστικότητα και περιλαμβάνει την κατοπτρική απόσβεση λόγω του όρου Fresnel και του όρου της γεωμετρικής εξασθένισης (βλ. Ενότητα 12.7). Η r_j εξαρτάται από την ανακλαστικότητα της επιφάνειας όταν το φως προσπίπτει κάθετα σε αυτή, $r_n = 1 - t - r_d$, δίνοντας:

$$r_j = \min[1,\ r_n + (r_n + k_j)F(\theta_i)G(\theta_i)G(\theta_r)]. \tag{12.69}$$

Η συνάρτηση $F(x)$ είναι μια εμπειρική συνάρτηση που μοιάζει με τον όρο Fresnel, και η $G(x)$ είναι ο συντελεστής γεωμετρικής εξασθένισης. Οι δύο αυτοί συντελεστές ορίζονται ως:

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[\frac{1}{(x-k_f)^2} - \frac{1}{k_f^2}\right] \Big/ \left[\frac{1}{(1-k_f)^2} - \frac{1}{k_f^2}\right], \\ G(x) &= \left[\frac{1}{(1-k_g)^2} - \frac{1}{(x-k_g)^2}\right] \Big/ \left[\frac{1}{(1-k_g)^2} - \frac{1}{k_g^2}\right]. \end{aligned} \tag{12.70}$$

Οι σταθερές k_j, k_f και k_g επιλέγονται πειραματικά, αλλά ο Strauss προτείνει τις τιμές 0.1, 1.12 και 1.01, αντίστοιχα. Ουσιαστικά, με βάση τις παραμέτρους αυτές, η προσαρμοσμένη ανακλαστικότητα δημιουργεί μια αύξηση στην κατοπτρική ανάκλαση όταν ο παρατηρητής είναι τοποθετημένος αντικριστά με το φως, ενώ ο συντελεστής



Σχήμα 12.28: *Αποτελέσματα φωτισμού με το μοντέλο Strauss (βλ. επίσης και την έγχρωμη Εικόνα 21.)*

γεωμετρικής εξασθένισης αντισταθμίζει αυτήν την αύξηση όταν είτε η γωνία παρατήρησης είτε η γωνία φωτισμού πλησιάζει το $\pi/2$.

Ένας shader σε GLSL για το μοντέλο Strauss παρατίθεται στην Ενότητα 12.12. Στο Σχήμα 12.28 και στην Εικόνα 21 φαίνονται μερικά αποτελέσματα από το shader αυτό για διάφορες τιμές των παραμέτρων m, s, και c. Να σημειωθεί πως ο shader χρησιμοποιεί τις συμβάσεις του αρχικού άρθρου του Strauss, ο οποίος καθορίζει τα διανύσματα $\hat{\mathbf{v}}$ και $\hat{\mathbf{l}}$ να δείχνουν προς το σημείο $\mathbf{p}$.[5]

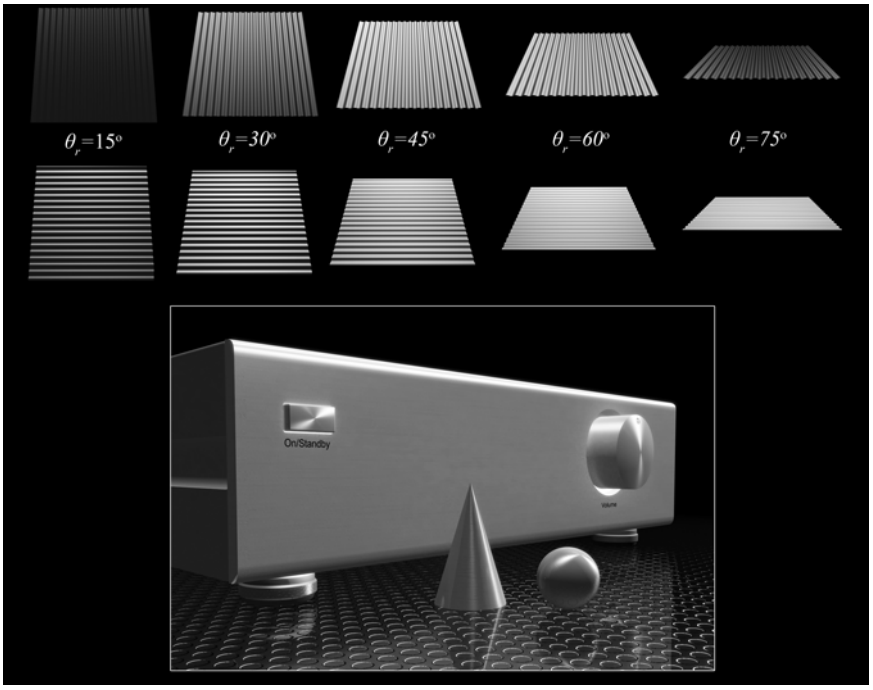
12.10 Ανισοτροπική ανακλαστικότητα

Η BRDF όλων των μοντέλων που είδαμε μέχρι τώρα, ήταν ισοτροπική, με την έννοια ότι το ανακλώμενο φως δεν εξαρτώταν από το αζιμούθιο της κατεύθυνσης πρόσπτωσης ϕ_i. Ωστόσο, πολλά πραγματικά υλικά και επεξεργασμένες επιφάνειες εμφανίζουν μια σαφή κατευθυντικότητα, δηλαδή η έκλαμψη της κατοπτρικής ανάκλασης φαίνεται πιο έντονη ή πιο μεγάλη σε συγκεκριμένες κατευθύνσεις. Η ανισοτροπική κατοπτρική ανάκλαση προκαλείται από τις μικροσκοπικές δομές της επιφάνειας των αντικειμένων. Τα περισσότερα ανισοτροπικά υλικά διαθέτουν επιμήκεις ανάγλυφες δομές (ραβδώσεις) ή αυλακώσεις οι οποίες είναι τοπικά σχεδόν παράλληλες με κάποια διεύθυνση. Τυπικό παράδειγμα περίπτωσης που έχουμε ανισοτροπικά υλικά είναι τα γυαλισμένα μέταλλα (όπως το στυλβωμένο αλουμίνιο – βλ. Σχήμα 12.29 και Εικόνα 19)· το βερνικωμένο ξύλο και οι δίσκοι βινυλίου.

Στο Σχήμα 12.29 φαίνεται ένα προσομοιωμένο πείραμα με μια επιφάνεια αποτελούμενη από παράλληλες αυλακώσεις, η οποία φωτίζεται από δύο διαφορετικές κατευθύνσεις: μία παράλληλη και μία κάθετη ως προς τη φορά των αυλακώσεων. Και οι δύο περιπτώσεις φωτισμού εξετάζονται με τον παρατηρητή να βλέπει την επιφάνεια υπό γωνία θ_r η οποία κυμαίνεται από 15 έως 75 μοίρες. Παρατηρήστε ότι η μέση ανακλαστικότητα στην περίπτωση των κάθετων αυλακώσεων είναι διαφορετική από αυτή των οριζοντίων.

Ας μοντελοποιήσουμε την επιφάνεια με βάση το μοντέλο των μικρο-επιφανειών και ας υποθέσουμε ότι οι ραβδώσεις κείνται προς τη διεύθυνση με γωνία ϕ_g. Η κατανομή των μικρο-επιφανειών da, αναφορικά με την κλίση της επιφάνειας $\hat{\mathbf{a}} = (\theta_a, \phi_a)$, είναι σαφώς κατευθυντική, με την θ_a να είναι ίση με μηδέν, όταν $\phi_a = \phi_g, \phi_g + \pi$, και μεταξύ των τιμών $-\theta_s$ και θ_s, όταν $\phi_a = \phi_g \pm \pi/2$, όπου θ_s είναι η μέγιστη κλίση. Ας παρατηρήσουμε τώρα την επιφάνεια σε μακροσκοπικό επίπεδο, με το φως να προσπίπτει από μια κατεύθυνση (θ_i, ϕ_i). Στην ακραία περίπτωση που όλες οι αυλακώσεις είναι ιδανικά προσανατολισμένες παράλληλα με τη ϕ_g, η επιφάνεια γίνεται ένας τέλειος καθρέπτης όταν $\phi_i = \phi_g, \phi_g + \pi$, ενώ η λάμψη εξαπλώνεται όταν το ϕ_i τείνει στο $\phi_g \pm \pi/2$ (μέγιστη ανισοτροπία). Αν η ϕ_a επιτρέπεται να διαφοροποιείται σύμφωνα με κάποια κατανομή, για παράδειγμα μια κατανομή Gauss με μέσο αζιμούθιο ϕ_g και τυπική απόκλιση σ_g, η ανισοτροπική ανακλαστικότητα μετριάζεται όσο η σ_g μεγαλώνει.

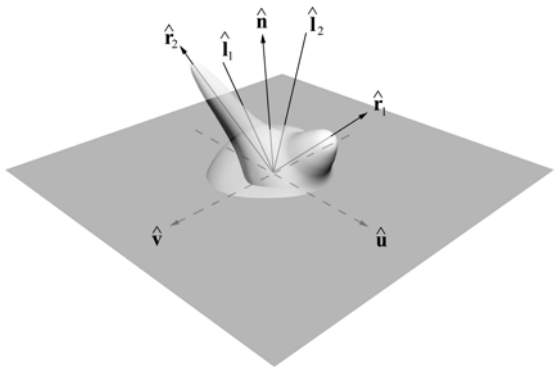
[5] Για τον όρο Fresnel, στην $F(x)$ χρησιμοποιείται η γωνία μεταξύ της διχοτόμου της $\widehat{\mathbf{vl}}$ και του $\hat{\mathbf{l}}$: $F((\theta_i + \theta_r)/2)$.



Σχήμα 12.29: *Ανισοτροπική ανακλαστικότητα. Μικροσκοπικές παράλληλες αυλακώσεις σε κατοπτρικά ανακλαστικές επιφάνειες, ανακλούν το φως με διαφορετικό τρόπο, ανάλογα με τη γωνία μεταξύ του επιπέδου ανάκλασης του φωτός και του προσανατολισμού των αυλακώσεων. Πάνω: Μεγέθυνση μιας περιοχής στιλβωμένου μετάλλου. Το ανακλώμενο φως υπολογίστηκε για διάφορες κατευθύνσεις παρατήρησης και για κάθετο ή οριζόντιο προσανατολισμό των αυλακώσεων αναφορικά με το επίπεδο ανάκλασης. Κάτω: Απεικόνιση αντικειμένων με γυαλισμένο αλουμίνιο (πρόσοψη ενισχυτή, ρυθμιστικό έντασης, διακόπτης, κώνος και σφαίρα - βλ. ακόμα Εικόνα 19.)*

Για τη μοντελοποίηση της ανισοτροπικής ανακλαστικότητας έχουν προταθεί αρκετά μοντέλα, όπως το μοντέλο Kajiya [Kaji85], το οποίο χρησιμοποιεί τη θεωρία περίθλασης του Kirchoff για την προσομοίωση του φαινομένου, την προσέγγιση των Poulin–Fournier [Poul90], η οποία θεωρεί ένα μοντέλο μικρο-ραβδώσεων με παράλληλους κυλίνδρους που αποτελούν εξοχές ή βυθίσματα στην επιφάνεια, ή τέλος το εμπειρικό, με βάση την παρατήρηση, μοντέλο Ward [Ward92].

Η κατεύθυνση μέγιστης/ελάχιστης ανακλαστικότητας, η οποία εξαρτάται από τη γωνία σχηματισμού των ραβδώσεων ϕ_g, είναι μια ιδιότητα των ανισοτροπικών υλικών που είναι δύσκολο να προσδιοριστεί για τυχαία σχήματα και πολυγωνικά μοντέλα. Αυτή η κατεύθυνση είναι τοπικό χαρακτηριστικό της επιφάνειας και δεν μπορεί στη γενική περίπτωση να εκφραστεί με συντεταγμένες κόσμου ή αντικειμένου (π.χ., παράλληλη με τον άξονα x). Οι περισσότερες υλοποιήσεις βασίζονται στον τοπικό χώρο εφαπτόμενων διανυσμάτων και προσανατολίζουν τη γωνία ϕ_g αναφορικά με το σύστημα συντεταγμένων $(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$ (Σχήμα 12.30). Ένας βολικός τρόπος να ορίσουμε το εφαπτόμενο και συνεφαπτόμενο διάνυσμα σε κάθε σημείο μιας επιφάνειας είναι μέσω



Σχήμα 12.30: *Λοβοί κατανομής της ανακλαστικότητας για ένα ανισοτροπικό ανακλαστικό μέσο. Η κατευθυντική εξάρτηση της κατανομής ως προς την κατεύθυνση εισόδου μπορεί να προσδιοριστεί ευκολότερα στον τοπικό χώρο των εφαπτόμενων διανυσμάτων.*

των συντεταγμένων υφής. Μπορείτε να ανατρέξετε στην Ενότητα 14.7.5, όπου γίνεται η ανάλυση γι' αυτόν το μηχανισμό.

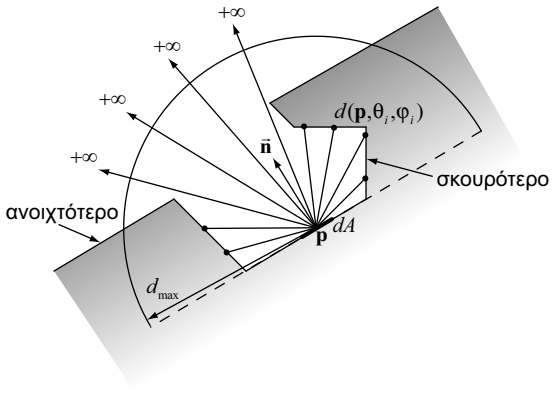
12.11 Παρεμπόδιση διάχυτου φωτισμού (Ambient Occlusion)

Τα περισσότερα τοπικά μοντέλα φωτισμού θεωρούν πως το εισερχόμενο από το περιβάλλον φως είναι σταθερό. Η συνιστώσα του φωτισμού περιβάλλοντος είναι η αθροιστική συνεισφορά του φωτός που εκπέμπεται ή ανακλάται από διάφορες επιφάνειες στο χώρο και προσπίπτει σε μια επιφάνεια dA, λαμβάνοντας υπόψη την ικανότητα ανταλλαγής ενέργειας μεταξύ της dA και των άλλων επιφανειών. Το να υποθέτουμε ότι αυτή η συνεισφορά είναι σταθερή, για όλες τις επιφάνειες και όλες τις γωνίες πρόσπτωσης, είναι μια κακή προσέγγιση. Ακόμα και απλές σκηνές, όπως ένα άδειο δωμάτιο ή δύο κουτιά το ένα πάνω στο άλλο, απαρτίζονται από επιφάνειες που ανταλλάσσουν φωτισμό με διαφορετικό τρόπο, ανάλογα με το σχετικό τους προσανατολισμό και τη θέση τους αναφορικά με τις γειτονικές τους επιφάνειες. Το φως από το περιβάλλον συχνά δε φτάνει σε κρυφά ή «κλειστά» σημεία, ή φτάνει αρκετά μειωμένο, όπως για παράδειγμα κάτω από ένα τραπέζι, σε μια γωνία ή κάτω από ένα αυτοκίνητο στο δρόμο. Η ανταλλαγή ενέργειας σε ένα κλειστό περιβάλλον προσομοιώνεται με τεχνικές *ολικού φωτισμού*, οι οποίες είναι και το αντικείμενο του Κεφαλαίου 16. Ένα τμήμα όμως του συνολικού αποτελέσματος που επηρεάζει το φωτισμό περιβάλλοντος τοπικά σε μια επιφάνεια dA, μπορεί να υπολογιστεί χωριστά και να αποδοθεί στην dA, ανεξάρτητα από την προσομοίωση του ολικού φωτισμού. Αυτό είναι το σκοτείνιασμα που παρατηρείται στις δυσπρόσιτες περιοχές της σκηνής, δηλαδή τμήματα επιφανειών, όπου το προσπίπτον φως από το περιβάλλον δεν μπορεί να φτάσει εξαιτίας παρεμπό-

δισής του από την ενδιάμεση παρουσία άλλων επιφανειών.

Οι Zhukov et al. [Zhuk98b, Zhuk98a, Ione03] πρότειναν ένα μοντέλο φωτισμού περιβάλλοντος, το οποίο, θεωρώντας έναν ομοιόμορφο, μακρινό (από το «περιβάλλον») φωτισμό από κάθε κατεύθυνση, υπολογίζει το ποσοστό αυτού που τελικά φτάνει σε μια μικρή επιφάνεια dA. Η κατάσταση που περιγράφει το μοντέλο αυτό είναι ισοδύναμη με τον υπολογισμό της ορατότητας μιας στοιχειώδους επιφάνειας εξαιτίας της παρουσίας της υπόλοιπης γεωμετρίας, δηλαδή, το ποσοστό των κατευθύνσεων επί της ημισφαιρικής στερεάς γωνίας πάνω από την dA, από τις οποίες η dA είναι ορατή. Αντίστροφα, η *σκοτεινότητα* (obscurance) μιας επιφάνειας dA είναι το ποσοστό του ημισφαιρίου πάνω από την επιφάνεια που αντιστοιχεί σε παρεμπόδιση από άλλη γεωμετρία (Σχήμα 12.31). Όσο μεγαλύτερη η σκοτεινότητα, τόσο λιγότερο φωτισμένη φαίνεται η επιφάνεια, γιατί το φως εμποδίζεται να φτάσει στην dA από πολλές κατευθύνσεις. Στο αρχικό άρθρο των Zhukov et al. [Zhuk98b], ο όρος «σκοτεινότητα» $w(\mathbf{p})$ χρησιμοποιούνταν για να εκφράσει την ορατότητα της επιφάνειας ή αλλιώς την «*ανοιχτότητα*» της στοιχειώδους επιφάνειας dA, η οποία είναι κεντραρισμένη στο σημείο $\mathbf{p}$ (δηλαδή το συζυγές φαινόμενο).

Ένα σημαντικό όφελος της σύνδεσης του φωτισμού μιας επιφάνειας από το περιβάλλον με την ορατότητά της (σκοτεινότητα), είναι ότι η τελευταία είναι μια καθαρά γεωμετρική ιδιότητα, η οποία δεν εξαρτάται από το φωτισμό και τη γωνία παρατήρησης. Η σκοτεινότητα συνήθως προϋπολογίζεται και αποθηκεύεται ως πληροφορία χρώματος στις κορυφές των πολυγώνων ή σε μια εικόνα υφής, η οποία στη συνέχεια σε πραγματικό χρόνο αποτυπώνεται στην επιφάνεια (βλ. επίσης τις τεχνικές απόδοσης υφής και δημιουργίας ενός άτλαντα υφής στο Κεφάλαιο 14). Η σκοτεινότητα $w(\mathbf{p})$ μπορεί να πολλαπλασιαστεί με τον σταθερό όρο περιβάλλοντος φωτισμού που έχει οριστεί για το υλικό της επιφάνειας, και να δώσει μια πειστική εντύπωση της πρόσπτωσης φωτισμού από το περιβάλλον στην επιφάνεια. Πρέπει να σημειωθεί όμως, ότι η φωτοσκίαση με σκοτεινότητα ή αλλιώς με *παρεμπόδιση διάχυτου φωτισμού* (*ambient*



Σχήμα 12.31: *Ο υπολογισμός της συνάρτησης σκοτεινότητας στην παρεμπόδιση διάχυτου φωτισμού.*

occlusion) δεν προσομοιώνει την ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ επιφανειών και δεν υπολογίζει τον ολικό φωτισμό. Δεν προσθέτει ενέργεια λόγω αναπήδησης του φωτός σε επιφάνειες (δεύτερης τάξης και άνω ανακλάσεις διάχυσης) και θεωρεί την εισερχόμενη ενέργεια από το περιβάλλον σταθερή για κάθε κατεύθυνση πριν το σκοτείνιασμά της.

Ας υποθέσουμε ότι δεν έχουμε ορίσει συγκεκριμένες πηγές φωτός στο περιβάλλον. Η ομοιόμορφη προσπίπτουσα ακτινοβολία από το περιβάλλον μπορεί να μοντελοποιηθεί ως διάχυτος φωτισμός που εισρέει από όλες τις κατευθύνσεις προς το dA. Μια ακόμα σημαντική υπόθεση είναι ότι το φως δεν εκπέμπεται από κάπου μακριά από τη σκηνή, αλλά η γεωμετρία φωτίζεται σαν να είναι βυθισμένη μέσα σε ομοιογενές σύννεφο που εκπέμπει φως από κάθε του σωματίδιο χωρίς να το απορροφά (χωρίς απώλειες μέσα σε αυτό δηλαδή). Γιατί όμως χρειαζόμαστε αυτού του είδους τη θεώρηση; Εξαιτίας της προσέγγισης της διαδικασίας ανταλλαγής ενέργειας μεταξύ επιφανειών, ακόμα και αν το φως από την κατεύθυνση μιας μακρινής πηγής (περιβάλλον) αναχαιτίζεται και δεν προσπίπτει στην dA απευθείας, μέρος αυτής θα ανακλαστεί στη γύρω γεωμετρία και τελικά θα φτάσει στην dA έμμεσα. Θεωρώντας ότι όλος ο ανοιχτός χώρος πάνω από την επιφάνεια dA καταλαμβάνεται από σωματίδια, ο φωτισμός που συλλέγουμε από αυτά προσομοιώνει την ενέργεια που θα αναπηδούσε στις γειτονικές επιφάνειες.

Έστω $d(\mathbf{p}, \theta_i, \phi_i)$ η απόσταση μεταξύ $\mathbf{p}$ και του πλησιέστερου στο $\mathbf{p}$ σημείου επιφάνειας προς την κατεύθυνση (θ_i, ϕ_i) μέσα στο ημισφαίριο (Σχήμα 12.31). Αν δε συναντάμε κανένα σημείο πάνω σε αυτή την ημιευθεία, η $d(\mathbf{p}, \theta_i, \phi_i)$ γίνεται άπειρη:

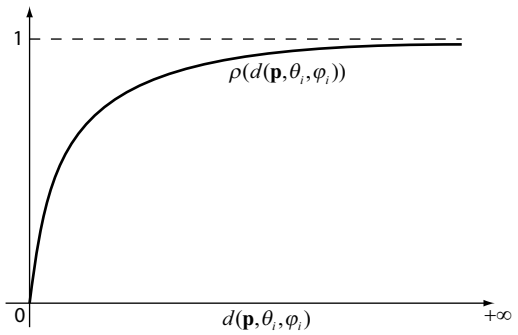
$$d(\mathbf{p}, \theta_i, \phi_i) = \begin{cases} |\mathbf{c} - \mathbf{p}|, & \mathbf{c}\text{: το πρώτο σημείο τομής στην κατεύθυνση } (\theta_i, \phi_i), \\ +\infty, & \text{καμία τομή με επιφάνεια στην κατεύθυνση } (\theta_i, \phi_i). \end{cases} \tag{12.71}$$

Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, όσο πιο μακριά βρίσκεται το σημείο τομής από το $\mathbf{p}$, τόσο πιο πολύ φως φτάνει στην επιφάνεια dA. Αν το ημισφαίριο πάνω από την επιφάνεια είναι όλο ανοιχτό μέχρι μια απόσταση $d_{\max}$, η ορατότητα $w(\mathbf{p})$ γίνεται ίση με 1. Για να γίνει μηδενική η ορατότητα, πρέπει δύο επιφάνειες να εφάπτονται εντελώς στην περιοχή dA. Η απόσταση $d_{\max}$ είναι η απόσταση πέρα από την οποία θεωρείται ότι το σκοτείνιασμα από την περιβάλλουσα γεωμετρία έχει αμελητέα τιμή και παίρνει εμπειρικά διαφορετική τιμή για κάθε σκηνή, ανάλογα με την κλίμακά της.

Επομένως, η ένταση του ανακλώμενου φωτός από μια στοιχειώδη επιφάνεια dA με κέντρο το $\mathbf{p}$ εξαιτίας του φωτισμού περιβάλλοντος από το ημισφαίριο Ω πάνω από την dA μπορεί να προσεγγιστεί ως:

$$\begin{aligned} I_a(\mathbf{p}) &= k_a I_a w(\mathbf{p}), \\ w(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \mu(d(\mathbf{p}, \theta_i, \phi_i)) \cos\theta_i \, d\vec{\omega}, \end{aligned} \tag{12.72}$$

όπου $\mu(x)$ είναι μια συνάρτηση που απεικονίζει την απόσταση $x = d(\mathbf{p}, \theta_i, \phi_i)$ σ' έναν κανονικοποιημένο συντελεστή σκοτεινότητας ο οποίος παριστάνει την ενέργεια



Σχήμα 12.32: *Συνάρτηση απεικόνισης απόστασης σε ορατότητα (ανοιχτότητα) πάνω σε μια κατεύθυνση.*

που εκπέμπεται από όλα τα σωματίδια στην ευθεία από το σημείο **p** ως το κοντινότερο σημείο τομής με άλλη γεωμετρία στην κατεύθυνση (θ_i, ϕ_i). Η $\mu(x)$ πρέπει να πληρεί τις ακόλουθες προϋποθέσεις: να είναι μονότονα αύξουσα και ομαλή (μεγαλύτερη απόσταση να αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη συνεισφορά περιβάλλοντος φωτισμού), να μηδενίζεται για απόσταση ίση με το μηδέν και να γίνεται 1 στο άπειρο, όπως επίσης η κλίση της να είναι φθίνουσα (Σχήμα 12.32). Συνοπτικά, αυτοί οι περιορισμοί είναι:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x = +\infty \end{cases} \qquad \frac{d\mu(x)}{dx} = \begin{cases} 0, & x = +\infty, \\ > 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases} \qquad \frac{d^2\mu(x)}{dx^2} < 0. \quad (12.73)$$

Μια οικογένεια συναρτήσεων που πληρεί τις παραπάνω προϋποθέσεις είναι η:

$$\mu(x) = 1 - e^{-\tau x}. \quad (12.74)$$

Η παράμετρος τ ρυθμίζει την έκταση της σκιαζόμενης περιοχής. Στο αρχικό άρθρο, η τ τίθεται πειραματικά στην τιμή 1. Καθώς η $d_{\max}$ ορίζει μια ακτίνα από το **p** πέρα από την οποία δεν λαμβάνεται υπόψη καμία επιφάνεια, η $\mu(x)$ πρέπει να προσαρμοστεί ώστε να λαμβάνει τις οριακές της τιμές σε αυτό το εύρος.

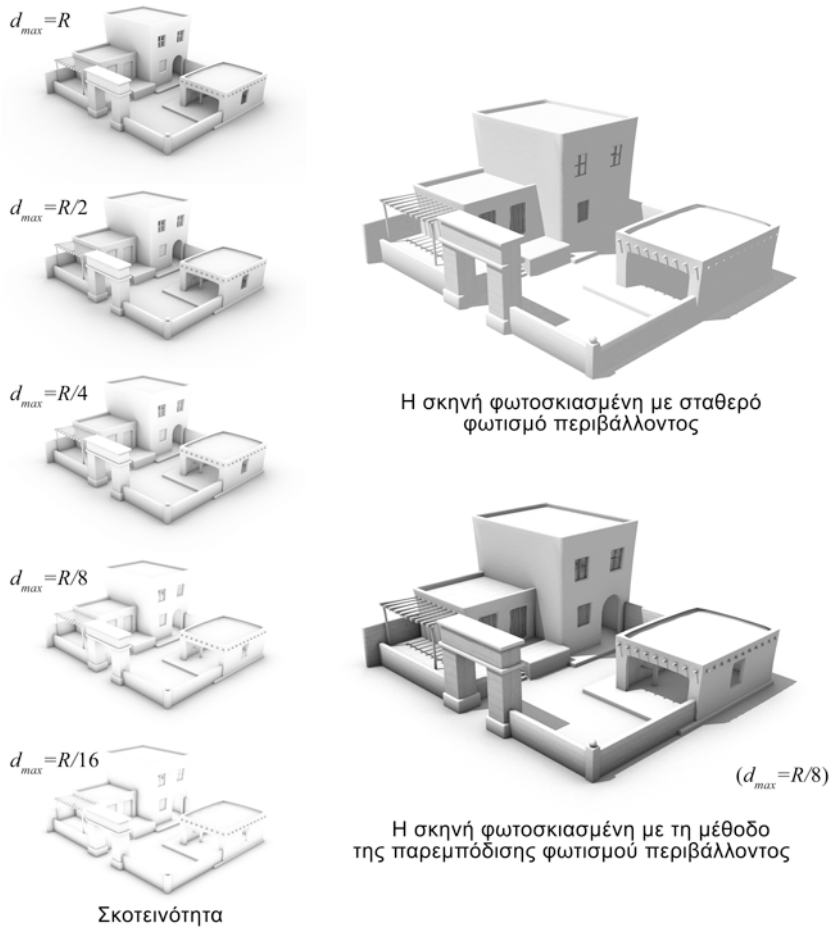
Ας εισάγουμε τώρα N_L πηγές φωτός στη σκηνή με ένταση $I_L(j), j = 1 \ldots N_L$, απόσταση d_j από τη στοιχειώδη επιφάνεια dA και κατεύθυνση πρόσπτωσης φωτός σε αυτή $\hat{\mathbf{l}}_j$, αντίστοιχα. Υποθέτοντας ότι έχουμε Lambertian επιφάνειες, οι πηγές συνεισφέρουν τόσο στο φωτισμό διάχυσης όσο και στο φωτισμό από το περιβάλλον. Η παρεμπόδιση του διάχυτου φωτισμού μπορεί να εφαρμοστεί και στα δύο είδη φωτισμού· το αποτέλεσμα για το φωτισμό του σημείου **p** θα έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{p}) &= [k_a I_a + k_d I_d(\mathbf{p})] w(\mathbf{p}) + I_d(\mathbf{p}), \\ I_d(\mathbf{p}) &= \sum_{j=1}^{N_L} \delta(\mathbf{p}, j) \frac{I_L(j)}{d_j^2} (\hat{\mathbf{l}}_j \cdot \hat{\mathbf{n}}), \end{aligned} \quad (12.75)$$

όπου $\delta(\mathbf{p}, j)$ είναι ένας παράγοντας ορατότητας που γίνεται 1 αν η j-στή πηγή προσ-

δίδει φως άμεσα στο σημείο και 0 αν το **p** βρίσκεται στη σκιά.

Το Σχήμα 12.33 δείχνει ένα παράδειγμα της εφαρμογής του μοντέλου παρεμπόδισης διάχυτου φωτισμού για διάφορες τιμές του τ και της $d_{\max}$, καθώς επίσης και τα τελικά αποτελέσματα του συνδυασμού της υπολογισμένης ορατότητας με τους όρους φωτισμού διάχυσης και περιβάλλοντος της Εξίσωσης (12.75).



Σχήμα 12.33: *Παράδειγμα υπολογισμού ορατότητας για διάφορες τιμές του ορίου απόστασης (αριστερά). Η R είναι η ακτίνα της σκηνής. Η ίδια σκηνή σχεδιάστηκε με σταθερό φωτισμό περιβάλλοντος (πάνω δεξιά) και με φωτισμό περιβάλλοντος και διάχυσης βεβαρυμένο με την ορατότητα (παρεμπόδιση διάχυτου φωτισμού - κάτω δεξιά).*

12.12 Πηγαίος κώδικας shaders

12.12.1 Cook–Torrance Shader

```
//#################### Μοντέλο Cook-Torrance ####################//
//#################### Vertex program ############################//
varying vec3 N,P;

void main()
{
    gl_Position = gl_ModelViewProjectionMatrix * gl_Vertex;
    N = normalize ( gl_NormalMatrix * gl_Normal );
    P = vec3 (gl_Position) / gl_Position.w;
}

//#################### Μοντέλο Cook-Torrance ####################//
//#################### Fragment program ##########################//

varying vec3 N, P;
const float pi = 3.1415936;
const float e=2.718282;
const int numLights = 2;
uniform float Ka, Kd, Ks, // Συντελεστές ανακλαστικότητας
              m;          // RMS κλίση μικρο-επιφανειών
uniform vec3  n;          // συντελεστής διάθλασης n(630nm) n(530nm) n(465nm)
                          // σε κάθε κανάλι χρώματος για κάθετη πρόσπτωση
uniform vec3  color;      // Το χρώμα του υλικού

// Η συνάρτηση κατανομής Beckmann
float Beckmann ( in float a )
{
   float tana = tan(a)/m;
   float cosa = cos(a);
   cosa *= cosa;
   return pow ( e, -tana*tana ) / (m*m*cosa*cosa);
}

// Ο όρος Fresnel
float Fresnel( in float n, in float c )
{
    float g, gc, F;
    g = clamp ( n*n+c*c-1, 0.000001, 1.0);
    g = sqrt(g);
    gc = g+c;
    F = (g-c)*(g-c)/(2*gc*gc);
    return F * ( 1 + (c*gc-1)*(c*gc-1)/( (c*gc+1)*(c*gc+1) ) );
}
```

```
// Το μοντέλο κατοπτρικής ανάκλασης Cook-Torrance
void CookTorrance ( in vec3 L,      // Κατεύθυνση φωτισμού
                    in vec3 V,      // Κατεύθυνση παρατήρησης
                    in vec3 H,      // Κατεύθυνση διχοτόμου
                    in float a,     // Η γωνία ( N, H )
                    in vec3 Il,     // Προσπίπτουσα ένταση φωτός
                    in vec3 C0,     // Χρώμα του υλικού
                    out vec3 Is_I   // Αποτέλεσμα ανακλώμενου χρώματος
                  )
{
    float NL, NV, VH, NH; // Εσωτερικά γινόμενα
    float D, G;           // Οι όροι D, G
    vec3 F0, F;           // Οι τρι-χρωματικοί όροι Fresnel
                          // (F0: για την κάθετη πρόσπτωση φωτός)
    NL = dot(N,L);
    NV = dot(N,V);
    VH = dot(V,H);
    NH = dot(N,H);

    D = Beckmann(a);
    G = min ( 1, min( 2*NH*NV/VH, 2*NH*NL/VH ) );

    F0.r = Fresnel(n.r,1);
    F0.g = Fresnel(n.g,1);
    F0.b = Fresnel(n.b,1);
    F.r = Fresnel(n.r,VH);
    F.g = Fresnel(n.g,VH);
    F.b = Fresnel(n.b,VH);

    Is_i = (C0 + (Il-C0)*(max(F-F0,0)/(1.0-F0)) ) *
           ( (F.r+F.g+F.b)/3 )*D*G/(pi*NL*NV);
}

void main()
{
    vec3 Pl;                    // Θέση φωτός
    vec3 L, H, V;               // Μοναδιαία διανύσματα κατευθύνσεων
    vec3 Ia, Id, Is, Is_i, Il;  // Τιμές έντασης
    int i;
    float NL, a;

    V = vec3 (0.0, 0.0, 1.0);  // Κατεύθυνση παρατήρησης

    Ia = vec3 (0.0, 0.0, 0.0); // Αρχικές τιμές έντασης
    Id = vec3 (0.0, 0.0, 0.0);
    Is = vec3 (0.0, 0.0, 0.0);
```

```
    // Αθροιστική συνεισφορά όλων των φώτων...
    for ( i = 0; i< numLights; i++ )
    {
        // Φωτισμός διάχυσης
        Pl = vec3 (gl_LightSource[i].position);
        L = normalize( Pl - P );
        H = normalize( L + V );
        NL = dot (N,L);

        // Φωτισμός κατοπτρικής ανάκλασης
        Id +=  gl_LightSource[i].diffuse * NL;
        a = acos( dot(N,H) );
        Il = vec3 (gl_LightSource[i].diffuse);
        CookTorrance ( L, V, H, a, Il, color, Is_i );
        Is += Is_i;
   }

   // Φωτισμός περιβάλλοντος
   Ia = Ka * gl_FrontLightModelProduct.sceneColor;

   gl_FragColor = vec4(Ia,1) +
                  Kd * vec4(Id,1) * vec4(color,1) +
                  Ks * vec4(Is,1);
}
```

12.12.2 Strauss Shader

```
//#################### Το μοντέλο Strauss Model ########################//
//#################### Vertex program ##########################//

varying vec3 N; varying vec3 P;

void main()
{
    gl_Position = gl_ModelViewProjectionMatrix * gl_Vertex;
    N = normalize ( gl_NormalMatrix * gl_Normal );
    P = vec3 (gl_Position) / gl_Position.w;
}

//#################### Το μοντέλο Strauss Model ########################//
//#################### Fragment program ########################//

varying vec3 N, P;
const float pi = 3.1415936;
const int numLights = 2;
uniform float m;  // Μεταλλικότητα
```

```
uniform float s;  // Γυαλάδα
uniform float t;  // Διαφάνεια
uniform vec3 C;   // Λευκαύγεια επιφάνειας

//--------------------------- Ο όρος Fresnel -------------
float F ( in float x )
{
    const float kf = 1.12f;
    const float kf2 = kf*kf;
    const float denom = ( 1.0/((1.0-kf)*(1.0-kf)) - 1.0/kf2 );
    return ( ( 1.0/((x-kf)*(x-kf)) - 1.0/kf2 ) / denom);
}

//--------------------------- Η γεωμετρική εξασθένιση ------
float G ( in float x )
{
    const float kg = 1.01f;
    const float kg2 = kg*kg;
    const float denom = ( 1.0/((1.0-kg)*(1.0-kg)) - 1.0/kg2 );
    return ( 1.0/((1.0-kg)*(1.0-kg)) - 1.0/((x-kg)*(x-kg)) )/denom;
}

void main()
{
    vec3 Pl, L, V, H;
    vec3 Qa, Qd, Qs, Ir, Cs;
    int i;
    float NL, NV, f;
    float theta_i, theta_r;
    float rn, rj, rd, rs, d;
    const float kj = 0.1;

    // Οι συμβάσεις των κατευθύνσεων διαφέρουν από τις συνηθισμένες:
    // Τα L, V έχουν φορά προς το σημείο P

    // Κατεύθυνση παρατήρησης
    V = -normalize(P);
    NV = dot(N,V);

    Ir = vec3 (0.0, 0.0, 0.0);

    for ( i = 0; i< numLights; i++ )
    {
        Pl = vec3 (gl_LightSource[i].position);
        L = normalize( P - Pl );
        NL = dot(N,L);
        H = normalize( L-2*NL*N );
```

```
        theta_i = 2*acos(abs(NL))/pi;
        theta_r = 2*acos(abs(NV))/pi;
        rd = (1-s*s*s)*(1-t);
        d  = 1-m*s;
        rn = 1-t-rd;
        f = F((theta_i+theta_r)/2);
        rj = min (1, rn+(rn+kj)*f*G(theta_i)*G(theta_r));
        rs = pow(-dot(H,V),3/(1.0001-s))*rj;
        Cs = 1 + m*(1-f)*(C-1);

        Qd = clamp (-NL*d*rd*C,0,1);
        Qs = clamp (rs*Cs,0,1);

        Ir +=  gl_LightSource[i].diffuse * (Qd+Qs) +
               gl_LightSource[i].ambient * Qa;
    }
    gl_FragColor = vec4(Ir,1-t);
}
```

12.13 Ασκήσεις

1. Με βάση την απόδειξη για την ΚΑΑ Lambert, εξηγήστε με δικά σας λόγια γιατί μια Lambertian επιφάνεια φαίνεται το ίδιο φωτεινή από όλες τις κατευθύνσεις.

2. Θεωρήστε ένα πολυγωνικό μοντέλο μιας σφαίρας, την οποία φωτίζει μια σημειακή πηγή φωτός από την κατεύθυνση παρατήρησης ($\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{l}}$). Γράψτε ένα πρόγραμμα για το φωτισμό της σφαίρας με το μοντέλο και αλγόριθμο Phong (Εξίσωση (12.26)), δίνοντας στο χρήστη τη δυνατότητα να πειραματισθεί με τις τιμές του μοντέλου (k_a, k_d, k_s, d, n) και να δει τα αποτελέσματα πάνω στη σφαίρα.

3. Όπως η Άσκηση 2, αλλά αντί για τον αλγόριθμο Phong χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο Gouraud.

4. Επεκτείνετε την Άσκηση 2 έτσι, ώστε να περιλαμβάνει πολλαπλές σημειακές πηγές φωτός (Εξίσωση (12.27)) και δώστε τη δυνατότητα στο χρήστη να τις μετακινεί ανεξάρτητα.

5. Επεκτείνετε την Άσκηση 2 δίνοντας τη δυνατότητα στο χρήστη να αλλάζει το χρώμα της πηγής φωτός (θα χρειαστεί να χωρίσετε την ένταση του φωτός I_i της Εξίσωσης (12.28) στις τρεις συνιστώσες του).

6. Υλοποιήστε την τετραγωνική παρεμβολή των κανονικών διανυσμάτων κορυφών (Ενότητα 12.6.4) και συγκρίνετε τα αποτελέσματά της με το γραμμικό μοντέλο χρησιμοποιώντας ως παράδειγμα ένα πολυγωνικό μοντέλο που έχει τη δομή «κλίμακας». Για τον φωτισμό χρησιμοποιήστε το μοντέλο και τον αλγόριθμο Phong.

7. Πώς διαφέρει η μοντελοποίηση των επιφανειών μεταξύ των μοντέλων Cook–Torrance και Oren–Nayar; Πώς αυτές οι διαφορές επηρεάζουν το υπολογιζόμενο φως που μεταδίδεται προς τον παρατηρητή;

8. Γράψτε έναν shader σε OpenGL Shading Language που να υλοποιεί το μοντέλο Oren–Nayar.

9. Χρησιμοποιώντας το μοντέλο Strauss, επιλέξτε τις κατάλληλες τιμές για τις παραμέτρους του ώστε να προσομοιώσετε ένα γυαλιστερό, πλαστικό υλικό. Συγκρίνετε την τελική μορφή της εξίσωσης με αυτή του μοντέλου Phong.

10. Συγκρίνετε τα αποτελέσματα της τεχνικής παρεμπόδισης διάχυτου φωτισμού με τα αντίστοιχα μιας μεθόδου ολικού φωτισμού (βλ. Κεφάλαιο 16), θεωρώντας μια ομοιόμορφη ημισφαιρική πηγή πάνω από τη σκηνή (skylight). Πιο συγκεκριμένα, μελετήστε τις ακόλουθες περιπτώσεις για να βρείτε ομοιότητες και διαφορές μεταξύ των δύο μοντέλων, και σχολιάστε ως προς την αληθοφάνεια του αποτελέσματος:

    - Εξωτερικές επιφάνειες κτιρίων που είναι πολύ κοντά τοποθετημένα το ένα στο άλλο σε μια εξωτερική σκηνή (ανοιχτή από πάνω) με το έδαφος να εκτείνεται στο άπειρο,
    - Επιφάνειες στο εσωτερικό αραιά τοποθετημένων κτιρίων με ανοίγματα (μεγάλα παράθυρα κλπ),
    - Επιφάνειες στο εσωτερικό ενός μοναδικού κοίλου αντικειμένου με ένα πολύ μικρό άνοιγμα.

13

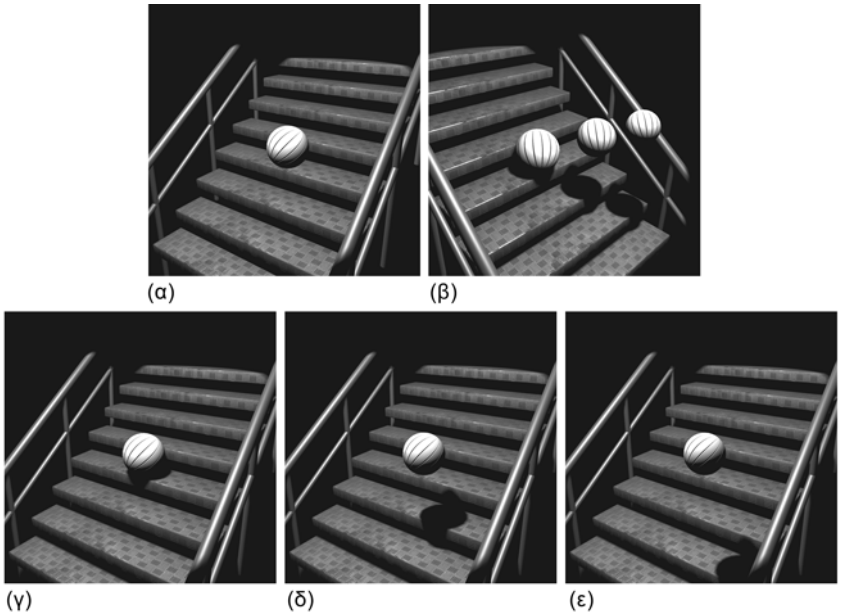
Σκιές

Όπου υπάρχει πολύ φως, θα βρεις και έντονες σκιές.
—Johann Wolfgang von Goethe

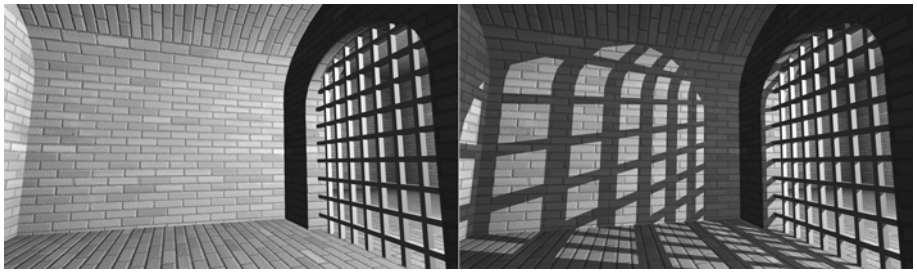
13.1 Εισαγωγή

Όπου υπάρχει φως, υπάρχει σκιά και αυτό ακριβώς είναι που περιμένουμε να δούμε όταν παρατηρούμε ένα τριδιάστατο περιβάλλον. Όμως οι σκιές δεν αποτελούν απλά άλλο ένα φωτορεαλιστικό στοιχείο για τη βελτίωση της πειστικότητας μιας συνθετικής εικόνας. Οι σκιές βοηθούν την όρασή μας να τοποθετήσει τα αντικείμενα στο χώρο σε σχέση με το περιβάλλον τους, προσδιορίζουν την κατεύθυνση του φωτισμού και παρέχουν στοιχεία για το σχήμα και το βάθος των τριδιάστατων αντικειμένων. Ειδικά στην περίπτωση μονοσκοπικών και στατικών εικόνων, το τελευταίο είναι πολύ σημαντικό. Το σύστημα όρασης του ανθρώπου είναι στερεοσκοπικό, το οποίο σημαίνει ότι εξάγει πληροφορία για το βάθος της παρατηρούμενης σκηνής από τις ελαφρώς διαφορετικές εικόνες που καταγράφονται στο αριστερό και δεξί μάτι. Όταν σχεδιάζεται μια μεμονωμένη εικόνα, η πληροφορία αυτή χάνεται, όμως οι σκιές βοηθάνε στην αποσαφήνιση των αποστάσεων. Από μόνη της, η προοπτική δε μας δίνει αρκετά στοιχεία, ειδικά όταν η σχετική κλίμακα των αντικειμένων δεν είναι γνωστή.

Ας εξετάσουμε το παράδειγμα του Σχήματος 13.1. Στην ένθετη εικόνα 13.1(α), μια σκάλα φωτίζεται από μια μεμονωμένη πηγή φωτός, η οποία δε δημιουργεί σκιές, ενώ, σε πρώτο πλάνο, απεικονίζεται μια μπάλα. Παρά το γεγονός ότι η μπάλα δεν κρύβεται από κάποιο εμπόδιο, δεν είναι δυνατό να αποφανθούμε για το αν αυτή ακουμπάει σε κάποιο σκαλί ή αιωρείται. Η εικόνα δε μας δίνει κανένα στοιχείο για τη σχετική θέση της μπάλας και της σκάλας. Το μόνο στοιχείο που έχουμε εξαιτίας κεκτημένης γνώσης, είναι ότι η μπάλα δεν μπορεί να είναι τόσο μικρή ώστε να βρίσκεται πιο κοντά στον παρατηρητή απ' ότι στη σκάλα, να μεγεθύνεται δηλαδή λόγω προοπτικής παραμόρφωσης. Στο Σχήμα 13.1(β) φαίνονται τρεις ισοδύναμες περιπτώσεις σχέσης μεγέθους/απόστασης, από τις οποίες θα μπορούσε να προκύψει το ίδιο τελικό αποτέλεσμα από την κοινή θέση του παρατηρητή. Αν τώρα προσθέσουμε και σκιές, το σύνολο των οπτικών περιορισμών που χρειάζεται ο εγκέφαλός μας για να εξάγει τις σχετικές αποστάσεις των αντικειμένων, είναι πλήρες. Τα αποτελέσματα από την απεικόνιση των τριών εκδοχών για το μέγεθος και την απόσταση της μπάλας του Σχήματος 13.1(β) φαίνονται στις αντίστοιχες εικόνες του Σχήματος 13.1(γ)–(ε).



Σχήμα 13.1: *Εξαγωγή στοιχείων από τις σκιές για το μέγεθος και το βάθος των αντικειμένων. (α) Μια φωτισμένη σκηνή που παριστάνει μια μπάλα μπροστά από μια σκάλα. (β) Ασάφεια μεγέθους/απόστασης, όταν παρατηρούμε τη σκηνή από την οπτική γωνία του (α). (γ)–(ε) Οι τρεις διαφορετικές περιπτώσεις σχέσεων μεγέθους/απόστασης της μπάλας. Οι εικόνες έχουν σχεδιαστεί από την οπτική γωνία του (α) και η μπάλα δείχνει ολόιδια σε όλες. Οι σκιές βοηθάνε στο σχετικό προσδιορισμό του αντικειμένου αναφορικά με το περιβάλλον του.*



Σχήμα 13.2: *Οι σκιές καθιστούν πιο ενδιαφέρουσες ακόμα και τις πιο απλοϊκές σκηνές.*

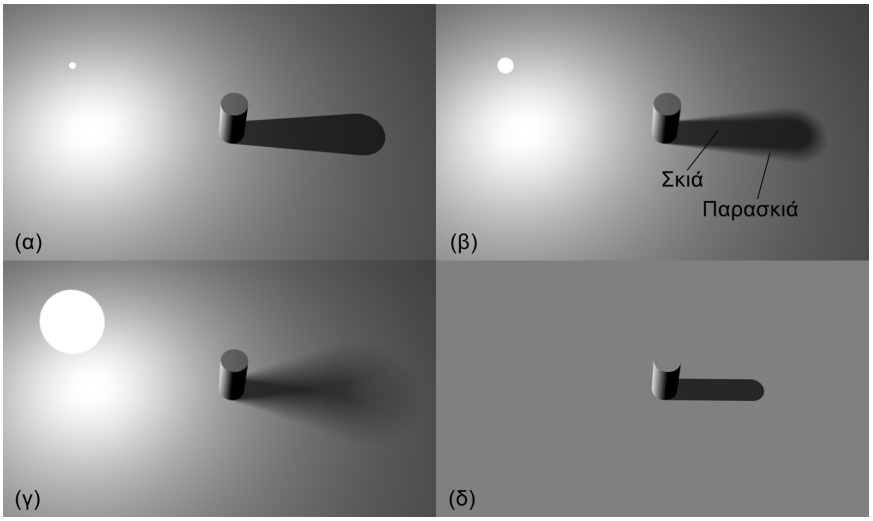
Σε εφαρμογές γραφικών πραγματικού χρόνου, όπως είναι τα παιχνίδια, οι αλγόριθμοι παραγωγής σκιών χρησιμεύουν στην ενίσχυση της φαινόμενης πολυπλοκότητας των — κατά τα άλλα απλών γεωμετρικά — επιφανειών, προσθέτοντας δραματικό φωτισμό με μεγάλη αντίθεση (βλ. για παράδειγμα τη σκηνή του Σχήματος 13.2). Οι απότομες μεταπτώσεις του φωτισμού βοηθούν το οπτικό μας σύστημα να αντισταθμίσει την έλλειψη αντίθεσης που θα προέκυπτε από την ύπαρξη λεπτομέρειας και βελτιώνουν την ανίχνευση κίνησης και τον προσδιορισμό του σχήματος των αντικειμένων και των χώρων.

13.2 Σκιές και πηγές φωτός

Οι σκιές εμφανίζονται πάνω σε μια επιφάνεια (αποδέκτης) εξαιτίας της παρεμπόδισης του φωτός από τμήματα αντικειμένων (εμπόδια) που παρεμβάλλονται μεταξύ των πηγών φωτός και της επιφάνειας. Παρά το γεγονός ότι ο έμμεσος φωτισμός (βλ. Κεφάλαιο 16) συνεισφέρει στη φωτεινότητα της περιοχής υπό σκιά, η ένταση της εξερχόμενης ακτινοβολίας από αυτή είναι γενικά πολύ χαμηλότερη από κάποια άλλη επιφάνεια που φωτίζεται απευθείας από μια ή περισσότερες πηγές.

Η ακριβής μορφή του περιγράμματος της σκιάς επηρεάζεται από την εγγύτητα της πηγής φωτός στα εμπόδια, καθώς επίσης και από το μέγεθος της επιφάνειας εκπομπής φωτονίων. Η σκίαση μιας επιφάνειας αποτελείται από δύο ζώνες: Τη *σκιά* (*umbra*), όπου υπάρχει πλήρης αποκλεισμός του φωτός από τα εμπόδια που παρεμβάλλονται, και την *παρασκιά* (*penumbra*), δηλαδή την περιοχή όπου το φως της πηγής παρεμποδίζεται κατά ένα ποσοστό. Για να είναι κάποιο σημείο μερικώς υπό σκιά, η πηγή πρέπει να είναι μη αμελητέου μεγέθους συγκριτικά με τις διαστάσεις των αντικειμένων (μη σημειακή). Πιο συγκεκριμένα, δεδομένου ότι η απόσταση επηρεάζει το φαινομενικό μέγεθος των αντικειμένων, η προβολή της επιφάνειας της πηγής στην επιφάνεια του εμποδίου κατά τη διεύθυνση φωτισμού πρέπει να μην είναι αμελητέα προκειμένου να δημιουργηθεί παρασκιά. Οι σκιές που προκαλούνται από μη σημειακές πηγές αποκαλούνται *απαλές σκιές* (*soft shadows*, Σχήμα 13.3(β) και (γ)). Αντίθετα, οι *καθαρές σκιές* (*hard shadows*) δεν εμφανίζουν παρασκιά και προκαλούνται από σημειακές (αμελητέου μεγέθους) πηγές φωτός και πηγές στο «άπειρο» (Σχήμα 13.3(α) και (δ)).

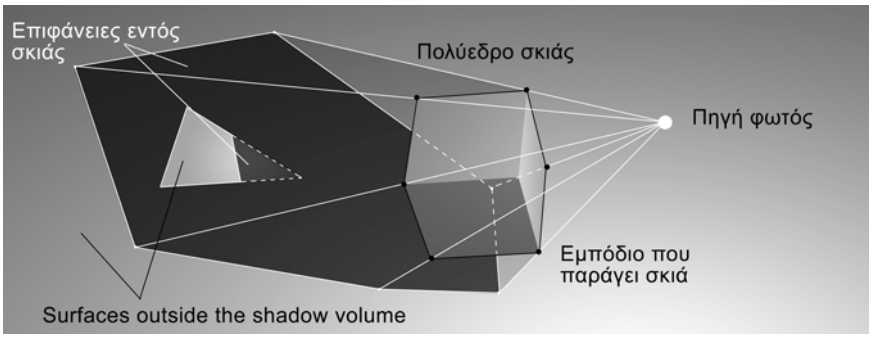
Στη γενική περίπτωση, ο συνδυασμός μιας σημειακής πηγής φωτός και ενός τυχαί-



Σχήμα 13.3: *Η οξύτητα και το σχήμα της σκιάς εξαρτώνται από το μέγεθος και την απόσταση της πηγής φωτός. (α) Σημειακή πηγή φωτός. (β) μικρή πηγή μη αμελητέου πάχους. (γ) Μεγάλη, μη σημειακή πηγή. (δ) Πηγή φωτός στο άπειρο (κατευθυντική).*

ου εμποδίου παράγει ένα *φρεάτιο σκιάς* σε μορφή πυραμίδας κομμένης στα όρια του εμποδίου, δηλαδή ένα τμήμα του τριδιάστατου χώρου όπου δε μπορεί να φτάσει το φως (Σχήμα 13.4). Ο όγκος που αντιστοιχεί στον αφώτιστο χώρο αποκαλείται *πολύεδρο σκιάς* (*shadow volume*). Φυσιολογικά, ένα πολύεδρο σκιάς εκτείνεται στο άπειρο, εκτός και αν η πηγή φωτός έχει τοπική εμβέλεια λόγω απόσβεσης. Στη δεύτερη περίπτωση, το πολύεδρο σκιάς εκτείνεται μέχρι την απόσταση επίδρασης της πηγής φωτός. Για ένα κατευθυντικό φως, δηλαδή φως που είναι τοποθετημένο σε άπειρη απόσταση και εκπέμπει παράλληλες ακτίνες φωτός προς τη σκηνή, το φρεάτιο σκιάς είναι πρισματικός όγκος με παράλληλες πλευρές και το αντίστοιχο πολύεδρο ούτε αποκλίνει ούτε συγκλίνει αναφορικά με την πηγή (Σχήμα 13.3(δ)).

Υπάρχουν πολλές προσεγγίσεις για τη δημιουργία σκιών· κυρίως διακρίνονται με βάση το αν είναι κατάλληλες για απεικόνιση σε πραγματικό χρόνο. Για φωτορεαλιστική απεικόνιση (όχι πραγματικού χρόνου), η δημιουργία σκιών είναι συνήθως εγγενές χαρακτηριστικό του αλγόριθμου παρακολούθησης ακτίνων ή της μεθόδου ολικού φωτισμού που χρησιμοποιείται για φωτοσκίαση και σύνθεση εικόνας (βλ. Κεφάλαια 15 και 16). Στα γραφικά πραγματικού χρόνου, δύο είναι οι επικρατέστεροι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία σκιών. Η πρώτη τεχνική, *ο αλγόριθμος πολυεδρικών σκιών*, δουλεύει στο χώρο των αντικειμένων και είναι ιδανικός για τη απεικόνιση καθαρών σκιών ακριβείας σε πολυγωνικά περιβάλλοντα. Η δεύτερη, η μέθοδος *εικόνας σκιάς*, δουλεύει στο χώρο των εικόνων υφής και, παρότι δεν παράγει ακριβείς, καθαρές σκιές, μπορεί να εφαρμοστεί σ' ένα μεγάλο εύρος διαφορετικών αναπαραστάσεων γεωμετρικών δεδομένων (όχι μόνο σε πολύγωνα) και να χειριστεί ημιδιαφανείς και διάτρητες επιφάνειες. Ο αλγόριθμος των πολυεδρικών σκιών θα αναλυθεί πρώτος, καθώς συνδέεται πιο στενά με τις γεωμετρικές πτυχές της δημιουργίας σκιών. Ακολούθως, θα δούμε τη μέθοδο των εικόνων σκιάς.



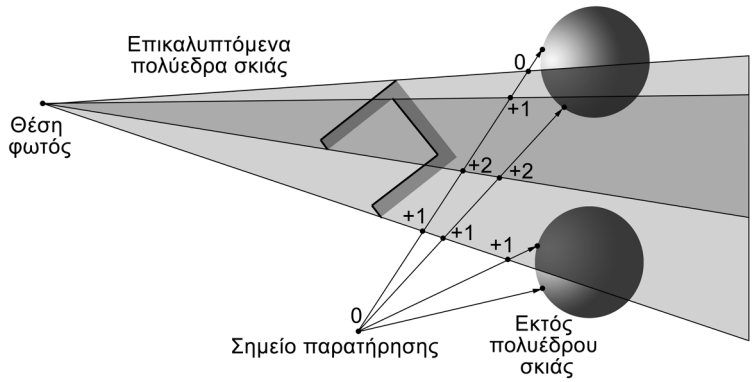
Σχήμα 13.4: *Πολύεδρο σκιάς. Το φως παρεμποδίζεται στο εσωτερικό του και όποιο τμήμα επιφάνειας τέμνεται με αυτό, βρίσκεται στη σκιά.*

13.3 Ο αλγόριθμος πολυεδρικών σκιών

Ο *αλγόριθμος πολυεδρικών σκιών* (*shadow volumes algorithm*), ο οποίος πρωτοεμφανίστηκε στα τέλη του εβδομήντα [Crow77], έχει υποστεί αρκετές αλλαγές και βελτιώσεις. Όπως δηλώνει και η ονομασία του, επιχειρεί να κατασκευάσει στο χώρο των αντικειμένων τα φρεάτια σκιάς που σχηματίζονται για κάθε συνδυασμό πηγής φωτός και επιφάνειας που παρεμποδίζει το φως (*παρεμποδιστής – occluder*). Στη συνέχεια, κάθε εικονοστοιχείο επιφάνειας που είναι ορατό στην τελική εικόνα, εξετάζεται για να διαπιστωθεί αν περιλαμβάνεται μέσα σε κάποιο πολύεδρο σκιάς και αποφασίζεται ανάλογα η σκίαση ή ο πλήρης φωτισμός του. Ο αλγόριθμος πολυεδρικών σκιών απαιτεί, τουλάχιστον, οι παρεμποδιστές να είναι πολυγωνικές επιφάνειες. Ακόμα, για την αποδοτική παραλλαγή του αλγόριθμου που θα δούμε στη συνέχεια, θεωρείται ότι είναι διαθέσιμη και η πληροφορία γειτονίας των πολυγώνων (ή μπορεί να υπολογιστεί σ' ένα στάδιο προ-επεξεργασίας).

13.3.1 Πολυεδρικές σκιές με χρήση μάσκας

Ο έλεγχος για το αν ένα σημείο επιφάνειας βρίσκεται στη σκιά, δηλαδή μέσα σε κάποιο πολύεδρο σκιάς, μπορεί να μετασχηματιστεί σ' έναν απλό έλεγχο ενός μετρητή, αν κάνουμε την ακόλουθη παρατήρηση (Σχήμα 13.5): έστω μια ακτίνα που φεύγει από το σημείο παρατήρησης και κατευθύνεται προς το σημείο της επιφάνειας που ελέγχουμε. Κάθε φορά που η ακτίνα εισέρχεται σ' ένα πολύεδρο σκιάς, ένας μετρητής αυξάνεται και, όταν η ακτίνα εξέρχεται από αυτό, ο μετρητής μειώνεται. Αν το σημείο της επιφάνειας βρίσκεται ανάμεσα στο πολύεδρο σκιάς και τον παρατηρητή, δηλαδή εκτός σκιάς, το πολύεδρο σκιάς δεν είναι ορατό σε αυτή την κατεύθυνση και η πρώ-



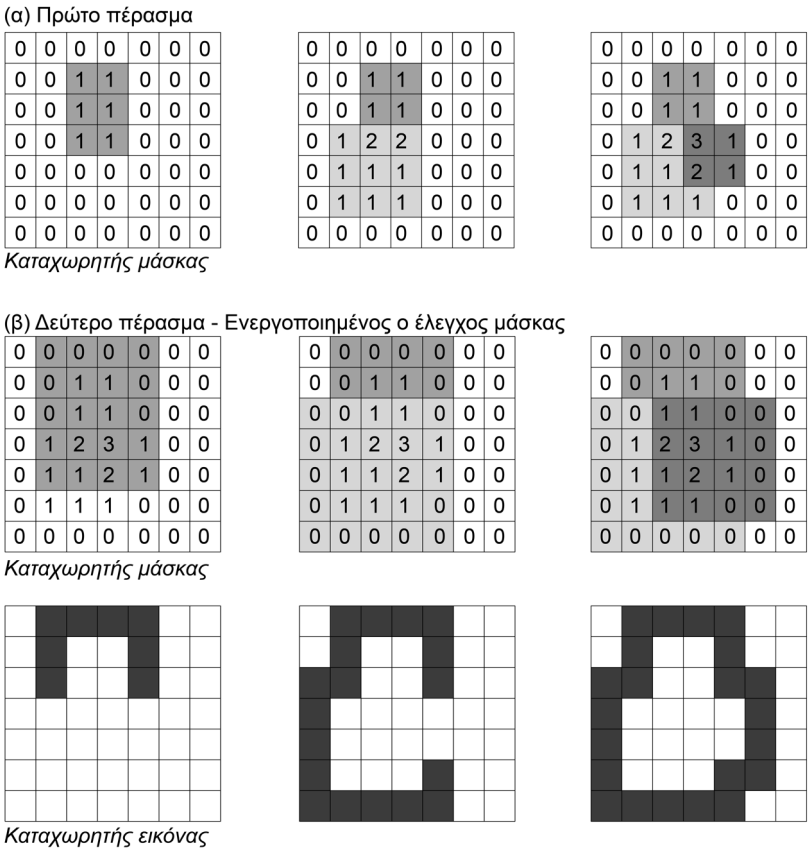
Σχήμα 13.5: *Έλεγχος σκίασης επιφάνειας στο βασικό αλγόριθμο πολυεδρικών σκιών. Ένας μετρητής αυξάνεται κάθε φορά που η γραμμή από τον παρατηρητή προς το τρέχον fragment της επιφάνειας εισέρχεται σ' ένα πολύεδρο σκιάς και αντίστοιχα μειώνεται όταν εξέρχεται από αυτό. Αν η τελική τιμή του μετρητή είναι διάφορη του μηδενός, το σημείο της επιφάνειας βρίσκεται στη σκιά.*

τη τομή της ακτίνας γίνεται με την προς σχεδίαση επιφάνεια. Επομένως, σε αυτή την περίπτωση, δεν θα πρέπει να επιχειρηθεί η σχεδίαση σκιάς. Όταν το σημείο της ορατής επιφάνειας βρίσκεται μακρύτερα από κάθε πολύεδρο σκιάς, η ακτίνα εισέρχεται σε και εξέρχεται από τα πολύεδρα σκιάς ίδιο αριθμό φορών πριν συναντήσει την επιφάνεια. Αυτό σημαίνει πως όταν ο μετρητής είναι μηδενισμένος, (n είσοδοι σημαίνουν n αυξήσεις του μετρητή και n έξοδοι έχουν ως αποτέλεσμα τη μείωσή του n φορές), η επιφάνεια δε βρίσκεται σε σκιά. Αν το απεικονιζόμενο σημείο βρίσκεται εντός κάποιου πολυέδρου σκιάς, η ακτίνα θα βρει την επιφάνεια πριν εξέλθει από ένα ή περισσότερα επικαλυπτόμενα πολύεδρα σκιάς, αφήνοντας το μετρητή να περιέχει μια τιμή μεγαλύτερη του μηδενός. Αυτή η διαδικασία ελέγχου μπορεί να υποστηριχτεί από το hardware γραφικών, αν ο μετρητής υλοποιηθεί μέσω του καταχωρητή μάσκας.

Ο *καταχωρητής μάσκας* (*stencil buffer*) είναι ένας βοηθητικός καταχωρητής που δεσμεύεται συνήθως στη μνήμη του hardware γραφικών (ανάλογα με την υλοποίηση και την εφαρμογή) και παρέχει τη λειτουργικότητα ενός απαριθμητή και μονάδας συγκρίσεων πάνω στο αποτέλεσμα που αποθηκεύει για κάθε εικονοστοιχείο. Οι διαστάσεις του καταχωρητή μάσκας είναι ίσες με αυτές του καταχωρητή εικόνας και συνήθως έχει ευκρίνεια οκτώ bits ανά εικονοστοιχείο (τιμές στο διάστημα $[0, 255]$). Κατά αντιστοιχία με την τεχνική ζωγραφικής stencil, από όπου έχει πάρει και το όνομά του, τα αποτελέσματα που κρατάει σε κάθε χρονική στιγμή ο καταχωρητής μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μάσκα απόφασης για το αν θα σχεδιαστεί κάτι στον καταχωρητή εικόνας στο αντίστοιχο εικονοστοιχείο. Η πιο κοινή πρακτική χρήσης αυτού του ειδικού καταχωρητή είναι η ακόλουθη: διεξάγεται ένα ή περισσότερα περάσματα σχεδίασης που αλλάζουν τις τιμές καταμέτρησης σε αυτόν για κάθε εικονοστοιχείο. Στη συνέχεια, η εκτελείται ένα πέρασμα, το οποίο ελέγχει αυτές τις τιμές και σχεδιάζει υπό συνθήκη στον καταχωρητή εικόνας. Τα περιεχόμενα του καταχωρητή μάσκας συγκρίνονται με μια τιμή αναφοράς και ανάλογα με τον επιλεγμένο *τελεστή σύγκρισης μάσκας*, τα εισερχόμενα fragments προς σχεδίαση απορρίπτονται ή εγγράφονται στον καταχωρητή εικόνας. Ο τελεστής σύγκρισης μάσκας παίρνει τις ακόλουθες τιμές: πάντα, ποτέ, $\neq$, $=$, $\geq$, $\leq$, $>$, $<$.

Εντελώς όμοια με τον καταχωρητή βάθους, και ο καταχωρητής μάσκας μπορεί να ενημερωθεί υπό συνθήκη· μπορούμε να ορίσουμε ποια πράξη να εφαρμοστεί στις υπάρχουσες τιμές στην περίπτωση επιτυχούς και ανεπιτυχούς σύγκρισης βάθους (στον καταχωρητή βάθους) ή του αντίστοιχου αποτελέσματος σύγκρισης της τιμής του καταχωρητή μάσκας με μια τιμή αναφοράς. Οι τελεστές σύγκρισης είναι οι ίδιοι με αυτούς που είδαμε παραπάνω για τη χρήση της μάσκας. Οι πράξεις που μπορούμε να εφαρμόσουμε στον καταχωρητή μάσκας για να αλλάξουμε τα περιεχόμενά του περιλαμβάνουν την αντικατάσταση, ανάθεση, διατήρηση, αύξηση, μείωση και αντιστροφή των υπαρχουσών τιμών. Το Σχήμα 13.6 απεικονίζει ένα παράδειγμα χρήσης του καταχωρητή μάσκας για τη σχεδίαση του περιγράμματος μιας ομάδας πολυγώνων, χρησιμοποιώντας άνευ όρου αύξηση των τιμών του καταχωρητή μάσκας (πάντα αύξηση κατά 1, ανεξάρτητα από την προηγούμενη τιμή) και έλεγχο ισότητας ως τελεστή σύγκρισης μάσκας.

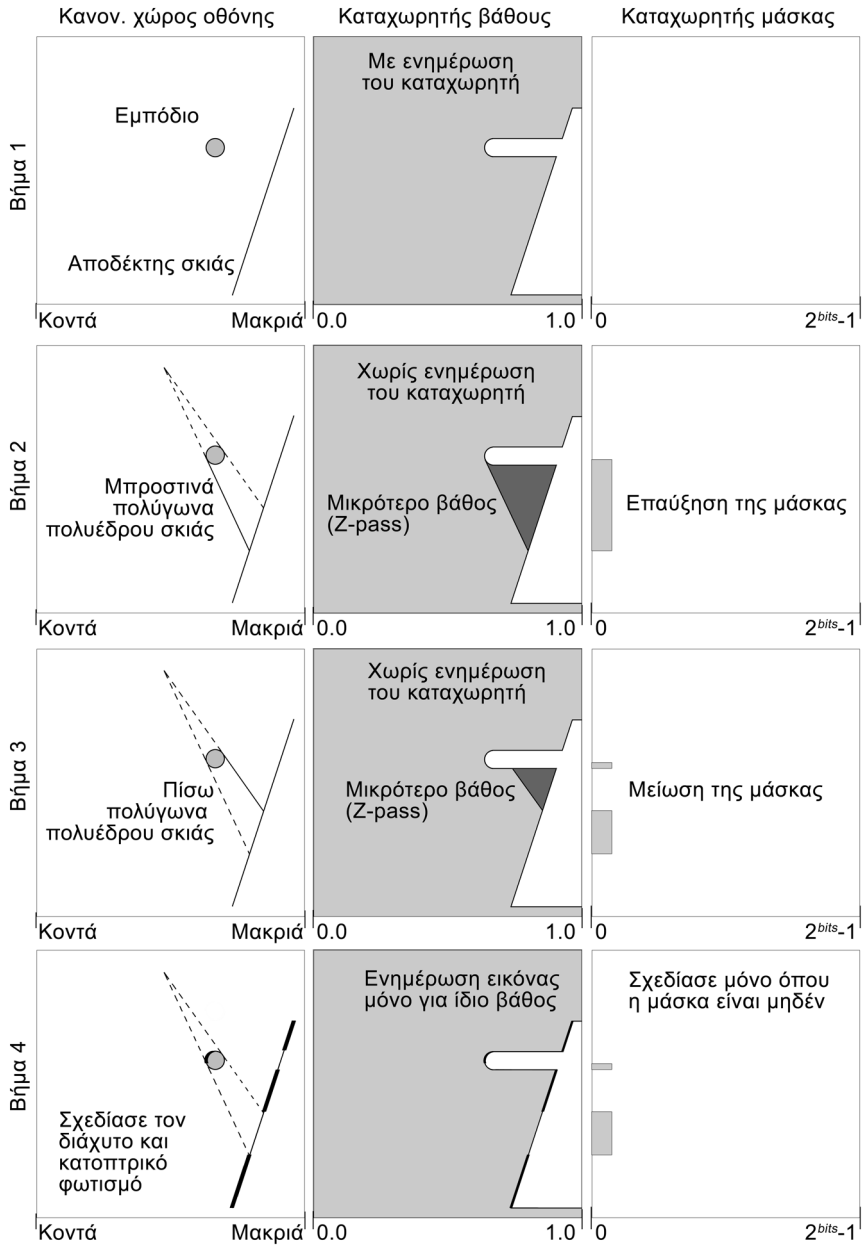
Ο βασικός αλγόριθμος *πολυεδρικών σκιών με χρήση μάσκας* (*stenciled shadow vo-*



Σχήμα 13.6: *Παράδειγμα χρήσης του καταχωρητή μάσκας. (α) Πέρασμα ενημέρωσης του καταχωρητή μάσκας: η εγγραφή στον καταχωρητή εικόνας είναι απενεργοποιημένη και η πράξη που έχει οριστεί για τις τιμές της μάσκας είναι «πάντα αύξηση». (β) Σχεδίαση υπό συνθήκη στον καταχωρητή εικόνας: τα fragments σχεδιάζονται μόνο όταν οι αντίστοιχες τιμές του καταχωρητή μάσκας είναι μηδενικές.*

lumes algorithm), ο οποίος προτάθηκε στην [Heid91] και βελτιώθηκε αργότερα στο άρθρο [Kilg00], παράγει επιταχυνόμενες από το hardware σκιές σε εφαρμογές πραγματικού χρόνου σύμφωνα με τα ακόλουθα βήματα (Σχήμα 13.7):

1. Αρχικοποίηση: καθάρισε τους καταχωρητές βάθους, εικόνας και μάσκας και απενεργοποίησε τον έλεγχο μάσκας.
2. Σχεδίασε τη γεωμετρία χρησιμοποιώντας μόνο τον έμμεσο φωτισμό (Σχήμα 13.7, Βήμα 1). Οι επιφάνειες επηρεάζονται μόνον από το διάχυτο (ambient) φως, την εκπομπή φωτός από τις ίδιες τις επιφάνειες και οποιονδήποτε φωτισμό έχει καταγραφεί και εφαρμοστεί πάνω τους προσθετικά ως υφή (εικόνες φωτισμού – lightmaps – που παριστάνουν στατικό, έμμεσο φωτισμό, βλ. Κεφάλαιο 14). Η πιο κοινή πρακτική γι' αυτό το στάδιο είναι να σχεδιάζονται τα αντικείμενα μό-



Σχήμα 13.7: *Τα διαδοχικά βήματα του αλγόριθμου πολυεδρικών σκιών με χρήση μάσκας. Για μία πηγή φωτός, απαιτούνται δύο περάσματα για τη σχεδίαση της ορατής γεωμετρίας (σκιά και διάχυτα/ανακλαστικά φωτισμένες επιφάνειες – βήματα 1 και 4) συν δύο περάσματα για τα πολύεδρα σκιάς (μπροστινές και πίσω πλευρές – βήματα 2 και 3 αντίστοιχα).*

νο με τον προκαθορισμένο διάχυτο φωτισμό που προσδιορίζεται από το υλικό τους, σβήνοντας όλες τις πηγές φωτός.

3. Για κάθε παρεμποδιστή, κατασκεύασε και σχεδίασε το πολύεδρο σκιάς:

   (α) Κατασκεύασε ένα κλειστό πολύεδρο σκιάς εξωθώντας τα πολύγωνα του παρεμποδιστή που «κοιτάζουν» προς την πηγή στην αντίθετη κατεύθυνση από αυτή, σε απόσταση αντίστοιχη με την εμβέλεια της πηγής. Το κλείσιμο του εξωθημένου άκρου του πολυέδρου επιτυγχάνεται με αντιγραφή και αντιστροφή των εξωθημένων πολυγώνων. Περισσότερες λεπτομέρειες για την κατασκευή και τη βελτιστοποίηση των πολυέδρων σκιάς δίνονται στην Ενότητα 13.3.2.

   (β) Σχεδίασε τα μπροστινά (ως προς τον παρατηρητή) πολύγωνα των πολυέδρων σκιάς χωρίς να ενημερώνεται ούτε ο καταχωρητής βάθους ούτε ο καταχωρητής εικόνας (Σχήμα 13.7, Βήμα 2). Αυτός είναι ο αποκαλούμενος έλεγχος *Z-pass*, καθώς αφήνει να προωθηθούν για περαιτέρω επεξεργασία μόνο fragments που απεικονίζονται μπροστά από την ήδη σχεδιασμένη γεωμετρία. Αυτό το βήμα εκτελεί μόνο τον έλεγχο βάθους, καθώς τα σημεία των πολυέδρων σκιάς που γίνονται αποδεκτά, δε σχεδιάζονται, αφού τίποτα δε γράφεται στους καταχωρητές βάθους και εικόνας. Αντιθέτως, κάθε φορά που ένα fragment περνάει τον έλεγχο βάθους, ο καταχωρητής μάσκας αυξάνεται κατά 1.

   (γ) Στη συνέχεια σχεδίασε τα πίσω (ως προς τον παρατηρητή) πολύγωνα των πολυέδρων σκιάς και, όπως και στο προηγούμενο βήμα, ενημέρωσε μόνο τον καταχωρητή μάσκας όταν ένα fragment πολυέδρου σκιάς περνάει τον έλεγχο βάθους. Αυτή τη φορά όμως, ελάττωσε την αντίστοιχη τιμή στη μάσκα κατά 1 αντί να την αυξήσεις (Σχήμα 13.7, Βήμα 3). Μαζί τα βήματα (β) και (γ) υλοποιούν την καταμέτρηση εισόδων/εξόδων στα πολύεδρα σκιάς της ακτίνας από το σημείο παρατήρησης προς την επιφάνεια των αντικειμένων.

4. Σχεδίασε τη φωτισμένη γεωμετρία: Ενεργοποίησε όλες τις συνιστώσες άμεσου φωτισμού και την πηγή που παράγει τη σκιά και σχεδίασε τη γεωμετρία πάνω από το πρώτο πέρασμα. Σχεδιάζονται μόνο όσα fragments έχουν ίδιο βάθος με αυτό που έχει ήδη καταγραφεί στον καταχωρητή βάθους (στο Βήμα 1) και των οποίων οι αντίστοιχες τιμές μάσκας είναι μηδενικές (Σχήμα 13.7, Βήμα 4).

Για τη δημιουργία σκιών από πολλαπλές πηγές φωτός, επαναλαμβάνουμε τα Βήματα 3 και 4 για κάθε μία από αυτές. Προκειμένου να αναμιχθεί σωστά ο φωτισμός στις σκιασμένες περιοχές και να αποφευχθεί ο υπερφωτισμός των φωτισμένων επιφανειών, το αποτέλεσμα του Βήματος 4 για κάθε πηγή πρέπει να αναμιγνύεται προσθετικά με τον ήδη καταγεγραμμένο φωτισμό σε κάθε επανάληψη. Ακόμα, ο διάχυτος φωτισμός πρέπει να είναι εντελώς απενεργοποιημένος, γιατί η συνεισφορά του έχει συνυπολογιστεί στο Βήμα 2 [Ever02].

13.3.2 Κατασκευή του πολυέδρου σκιάς

Ο ευκολότερος τρόπος να κατασκευαστούν τα πολύεδρα σκιάς για έναν παρεμποδιστή είναι να επιλεγούν όλα τα πολύγωνα που είναι προσανατολισμένα προς την πηγή φωτός και να εξωθηθούν ένα προς ένα προς την αντίθετη κατεύθυνση από το διάνυσμα προς την πηγή φωτός. Αυτό θα δημιουργήσει ένα φρεάτιο σκιάς για κάθε πολύγωνο, οπότε το πολύεδρο σκιάς για ολόκληρο το αντικείμενο θα είναι η ένωση αυτών των κόλουρων πυραμίδων (Σχήμα 13.8(δ) και (στ)). Στην περίπτωση του αλγόριθμου πολυεδρικών σκιών με μάσκα, τα (επικαλυπτόμενα) πολύεδρα σκιάς, που δημιουργούνται ανά τρίγωνο, σχεδιάζονται ανεξάρτητα στον καταχωρητή μάσκας και όλες οι κοινές εσωτερικές πλευρές της ένωσής τους τελικά αλληλοαναιρούνται στο μέτρημα.

Έστω τώρα ένα τρίγωνο $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3$ το οποίο είναι ορατό από το φως. Το πολύεδρο σκιάς που δημιουργεί, πρέπει να εκτείνεται προς την αντίθετη κατεύθυνση από το φως για κάθε κορυφή του. Ας υποθέσουμε ότι η πηγή φωτός βρίσκεται στο σημείο $\mathbf{p}_L$ και έχει εμβέλεια απόσβεσης r_L. Στην περίπτωση μιας πηγής με άπειρη εμβέλεια, η r_L επιλέγεται κατάλληλα ώστε να είναι σημαντικά μεγαλύτερη από την έκταση της σκηνής. Για κάθε σημείο του τριγώνου $\mathbf{p}_i$, το αντίστοιχο εξωθημένο σημείο $\mathbf{p'}_i$ δίνεται από:

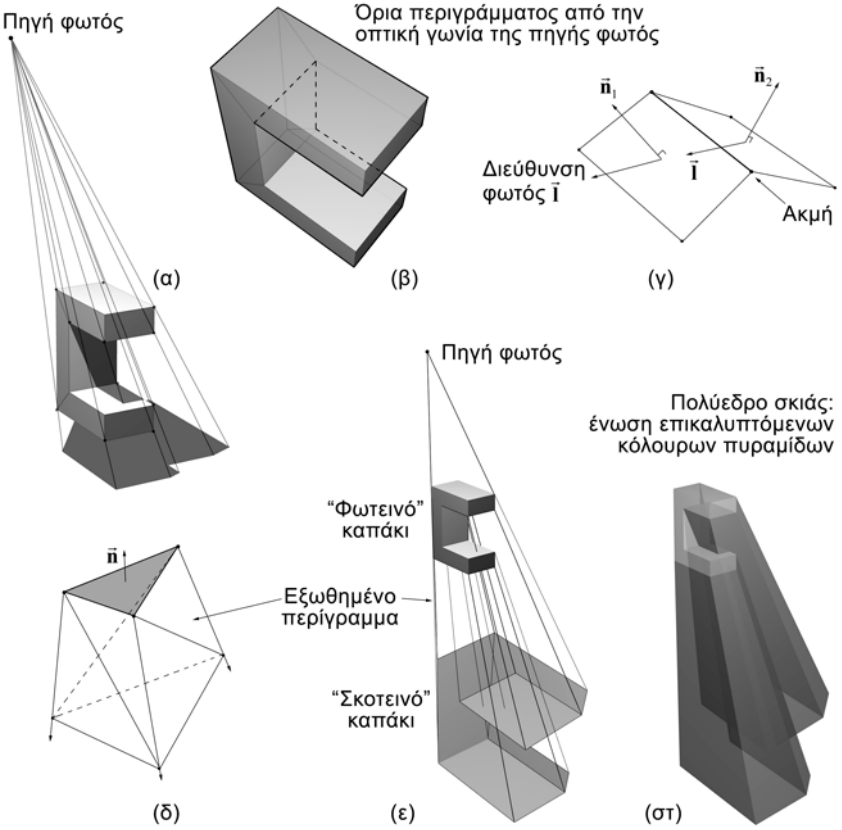
$$\mathbf{p'}_i = \mathbf{p}_i + (r_L - |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_L|) \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_L)/|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_L|. \tag{13.1}$$

Πολλές φορές, οι πηγές φωτός θεωρούνται σε άπειρη απόσταση συγκριτικά με το μέγεθος της σκηνής, οπότε οι πλευρές του φρεατίου σκιάς είναι πολύ μακριές και δε χρειάζεται να προσαρμοστεί το μήκος τους ανάλογα με την απόσταση εμποδίου – πηγής, όπως στην περίπτωση της Εξίσωσης (13.1). Αυτό προφανώς απλουστεύει πολύ τον υπολογισμό της θέσης των εξωθημένων σημείων, δεδομένου ότι $r_L >> |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_L|$:

$$\mathbf{p'}_i = \mathbf{p}_i + r_L \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_L)/|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_L|. \tag{13.2}$$

Προφανώς, για κατευθυντικά φώτα (στο άπειρο), για τα οποία οι ακτίνες εκπέμπονται παράλληλα προς μια κατεύθυνση $\hat{\mathbf{l}}$, η Εξίσωση (13.2) απλοποιείται σε $\mathbf{p'}_i = \mathbf{p}_i + r_L \cdot \hat{\mathbf{l}}$ για όλα τα σημεία των εμποδίων.

Αυτή η τεχνική είναι πολύ απλή και δεν προσθέτει κάποιο επιπλέον υπολογιστικό κόστος, εκτός αυτού που απαιτείται για την κατασκευή των φρεατίων σκιάς. Από την άλλη, δεν εκμεταλλεύεται καθόλου το γεγονός ότι τα τρίγωνα του παρεμποδιστή έχουν κοινές ακμές μεταξύ τους· όταν αυτές εξωθούνται για να σχηματίσουν τις πλευρές των φρεατίων των μεμονωμένων τριγώνων, οι τελευταίες αλληλοαναιρούνται κατά την καταμέτρηση. Για να ενημερώσουν όμως τον καταχωρητή μάσκας, πρέπει τα κοινά πολύγωνά τους να μετασχηματιστούν και να σχεδιαστούν κανονικά, έστω και αν δεν πρόκειται να συνεισφέρουν στο τελικό αποτέλεσμα. Επιπρόσθετα, όταν χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο πολυεδρικών σκιών με χρήση μάσκας, σχεδιάζουμε πρώτα όλες μαζί τις μπροστινές πλευρές των φρεατίων σε ένα πέρασμα και μετά όλες τις πίσω, οπότε διατρέχουμε τον κίνδυνο να υπερχειλίσει ο καταχωρητής μάσκας λόγω της πεπερασμένης χωρητικότητάς του. Εναλλακτικά, μπορούμε να εφαρμόσουμε μια δια-



Σχήμα 13.8: *Κατασκευή πολυέδρου σκιάς με χρήση μεμονωμένων τριγώνων και εξώθηση περιγράμματος εμποδίου. (α) Τα εμπόδια δεν απαιτείται να είναι κυρτά και δύνανται να σκιάζουν τον εαυτό τους. (β) Οι ακμές του περιγράμματος του εμποδίου όπως αυτό φαίνεται από τη θέση του φωτός. (γ) Εντοπισμός των ακμών του περιγράμματος. (δ) Η εξώθηση των ακμών του τριγώνου ή του περιγράμματος του εμποδίου δημιουργεί πλευρές δύο τριγώνων η καθεμία. (ε) Το «φωτισμένο» και το «σκοτεινό» (μακρινό) καπάκι του πολυέδρου είναι εκείνα τα τρίγωνα του παρεμποδιστή που είναι αντίστοιχα προσανατολισμένα προς το φως και αντίθετα από αυτό. (στ). Το τελικό, κλειστό πολύεδρο σκιάς.*

φορετική μεθοδολογία, η οποία περιλαμβάνει ένα πιο πολύπλοκο στάδιο δημιουργίας πολυέδρου σκιάς, αλλά τελικά χρησιμοποιεί πολύ λιγότερα πολύγωνα. Οι επιπρόσθετοι υπολογισμοί που απαιτούνται μπορούν να υποβιβάσουν σημαντικά την απόδοση της απεικόνισης σκιών στην περίπτωση δυναμικά φωτιζόμενων σκηνών με πολλά πολύγωνα. Συνεπώς, η εναλλακτική μεθοδολογία, την οποία θα δούμε στη συνέχεια, ενδείκνυται είτε για στατικά φώτα και εμπόδια (η κατασκευή των πολυέδρων σκιάς γίνεται ως στάδιο προεπεξεργασίας και όχι σε κάθε καρέ) είτε για μοντέλα με λίγα τρίγωνα.

Τα ζεύγη των πλευρών των τριγωνικών φρεατίων, τα οποία αλληλοαναιρούνται,

μπορούν να απομακρυνθούν αποδοτικά πριν σχηματιστούν τα φρεάτια εάν, αντί να εξωθήσουμε το περίγραμμα κάθε μεμονωμένου τριγώνου του παρεμποδιστή, εξωθήσουμε το περίγραμμα (*silhouette*) της ένωσης των τριγώνων που βλέπουν προς το φως. Αυτό το σύνολο τριγώνων σχηματίζει επίσης το «κοντινό» (φωτισμένο) καπάκι του πολυέδρου σκιάς.

Η παραπάνω θεώρηση, οδηγεί στο χωρισμό της διαδικασίας δημιουργίας του πολυέδρου σκιάς σε ένα στάδιο καθορισμού του περιγράμματος και στο στάδιο εξώθησης ακμών, το οποίο είναι παρόμοιο με αυτό των τριγωνικών φρεατίων.

Το περίγραμμα μιας πολυγωνικής επιφάνειας ως προς ένα σημείο αναφοράς στο χώρο (εδώ τη θέση της πηγής φωτός) είναι το σύνολο όλων των ορατών ακμών που χωρίζουν τουλάχιστον ένα πολύγωνο που βλέπει προς το σημείο αναφοράς και ένα πολύγωνο που είναι προσανατολισμένο αντίθετα από το σημείο αναφοράς (Σχήμα 13.8(β)). Για ανοικτά πολυγωνικά σχήματα το σύνολο επεκτείνεται έτσι, ώστε να περιλαμβάνει και όλες τις ανοικτές ακμές.

Καθώς αντικείμενα και φώτα κινούνται, τα πολύγωνα του κάθε εμποδίου αλλάζουν προσανατολισμό ως προς τις πηγές· επομένως το περίγραμμα για την κατασκευή του πολυέδρου σκιάς πρέπει να υπολογίζεται δυναμικά. Η αναζήτηση των ακμών που απαρτίζουν το περίγραμμα σημαίνει ότι το καθένα από τα πολύγωνα του εμποδίου θα συγκριθεί με όλα τα υπόλοιπα έτσι ώστε να εντοπιστούν οι ακμές μεταξύ των αντίθετα και ομόρροπα προσανατολισμένων πολυγώνων i και j ως προς την κατεύθυνση του φωτός. Αν θεωρήσουμε ένα άτακτο σύνολο από πολύγωνα, χωρίς καμία πληροφορία συνδεσμολογίας μεταξύ τους, θα πρέπει να εντοπίσουμε για κάθε πολύγωνο τους γείτονές του και να μαρκάρουμε τις κοινές ακμές μεταξύ τους, σε ένα στάδιο προεπεξεργασίας. Για μια τυπική τριγωνοποιημένη επιφάνεια της οποίας κάθε ακμή μοιράζονται δύο τρίγωνα, η βασική δομή αποθήκευσης της γεωμετρικής πληροφορίας για τις κορυφές των τριγώνων και τα κανονικά διανύσματα (δεικτοδοτημένη ή απλή) μπορεί να εμπλουτιστεί με δεδομένα για τη συνδεσμολογία, σύμφωνα με τον παρακάτω κώδικα:

```
typedef struct
{
  Point3f v[3]; Vector3f n[3];
  Vector3f facenormal;
  long neighbor[3]; // <-- init: -1;
} Triangle;

int CommonEdge(Point3f a1, Point3f a2, Point3f b1, Point3f b2)
{
  extern float weld_thres_squared;
  Vector3f d1 = PointSubtract(a1-b1);
  Vector3f d2 = PointSubtract(a2-b2);
  return ( DotProduct(d1,d1)<weld_thres_squared &&
           DotProduct(d2,d2)<weld_thres_squared )
}
```

```
void FindConnectivity(Triangle *tri, long numOfTris)
{
  long i,j; int k,n;
  for (i=0;i<numOfTris-1;i++)
    for (j=i+1;j<numOfTris;j++)
      for (k=0;k<3;k++)
        for (n=0;n<3;n++)
          if ( CommonEdge(tri[i].v[k], tri[i].v[(k+1)%3]
                          tri[j].v[n], tri[j].v[(n+1)%3])
          {
            tri[i].neighbor[k] = j;
            // Μαρκάρουμε τη γειτονία μόνο στο ένα τρίγωνο για να
            // αποφύγουμε τις διπλές ακμές στο περίγραμμα.
            tri[j].neighbor[n] = -1;
            break;
          }
}
```

Κάθε φορά που απαιτείται η ενημέρωση του περιγράμματος, χρησιμοποιείται η προϋπολογισμένη συνδεσμολογία του πλεγματικού μοντέλου. Αν για δύο πολύγωνα i και j ισχύει $\left[\hat{\mathbf{n}}_i \cdot (\mathbf{p}_L - \mathbf{p}_{i0})\right] \cdot \left[\hat{\mathbf{n}}_j \cdot \left(\mathbf{p}_L - \mathbf{p}_{j0}\right)\right] < 0$, η κοινή τους ακμή ανήκει στη λίστα ακμών του περιγράμματος (Σχήμα 13.8(γ)). Στο παράδειγμα κώδικα που έχουμε ξεκινήσει να βλέπουμε, η παραπάνω ταξινόμηση των ακμών στο περίγραμμα του φρεατίου σκιάς γίνεται με την ακόλουθη ρουτίνα:

```
typedef struct
{ Point3f * edgeVertex;
  int numOfEdges;
} edgeList;

edgeList* FindSilhouette( Triangle * tri, long numOfTris, Vector3f
                          light, boolean infinite)
{
  long i,j, edges=0; int k;
  Vector3f L, ni, nj;
  float visi, visj;
  Point3f * endpts =
      (Point3f*)malloc(sizeof(Point3f)*numOfTris*3*2);
  for (i=0; i<numOfTris; i++)
    for (k=0; k<3; k++)
    {
      j = tri[i].neighbor[k];
      if (j!=-1)
      {
        ni = tri[i].facenormal;
        L = infinite? VectorInvert(light):
```

```
            VectorNorm(PointSubtract(light,tri[i].v[0]);
          visi = DotProduct(ni,L);
          nj = tri[j].facenormal;
          L = infinite? VectorInvert(light):
              VectorNorm(PointSubtract(light,tri[j].v[0]);
          visj = DotProduct(nj,L);
          if (visi*visj<0)
          {
            PointCopy(endpts[2*edges+0],tri[i].v[k];
            PointCopy(endpts[2*edges+1],tri[i].v[(k+1)%3];
            edges++;
          }
        }
      }
    edgeList * list = (edgeList*)malloc(sizeof(edgeList));
    list->numOfEdges = edges;
    list->edgeVertex = (Point3f*)malloc(sizeof(Point3f)*2*edges);
    for (i=0;i<2*edges;i++)
      PointCopy(list->edgeVertex[i],endpts[i]);
    free(endpts);
    return(list);
  }
```

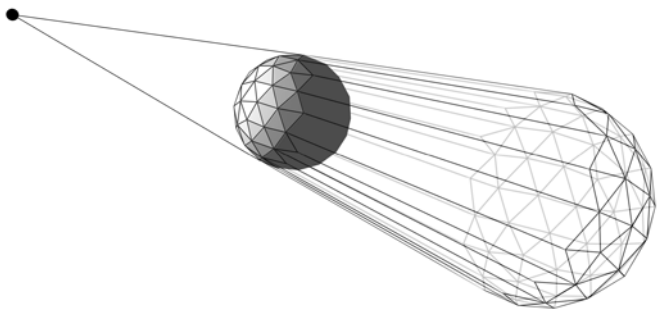
Τα πολύεδρα σκιάς που προέρχονται από τις ακμές περιγράμματος του παρεμποδιστή δημιουργούνται πανομοιότυπα με αυτά των μεμονωμένων τριγώνων. Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση που ισχύει για κλειστές πολυγωνικές επιφάνειες είναι ότι το κοντινό (φωτεινό) καπάκι του πολυέδρου αποτελείται από όλα τα τρίγωνα που είναι προσανατολισμένα προς το φως (τα οποία έχουμε ήδη εντοπίσει στον παραπάνω αλγόριθμο). Το μακρινό (σκοτεινό) καπάκι απαρτίζεται από τα υπόλοιπα τρίγωνα, αφού εξωθήσουμε τις κορυφές τους σύμφωνα με τις Εξισώσεις 13.1 και 13.2 (Σχήμα 13.9). Οι πλευρές του πολυέδρου σκιάς είναι το εξωθημένο περίγραμμα.

Μια μικρή παρενέργεια του αλγόριθμου που σχετίζεται με τη γεωμετρική κατασκευή του πολυέδρου σκιάς είναι η *αυτο-σκίαση* (self-shadowing) των πολυγώνων του φωτεινού καπακιού. Στην πράξη, επειδή τα πολύγωνα του καπακιού αυτού ανήκουν στον ίδιο τον παρεμποδιστή και επομένως η γεωμετρία που ρίχνει τη σκιά συμπίπτει με τη γεωμετρία που τη δέχεται, το φωτεινό καπάκι μπορεί να εμφανίσει έντονα ψεγάδια κατά την απεικόνιση του δεύτερου περάσματος εξαιτίας ανεπαρκούς ακρίβειας σύγκρισης τιμών βάθους. Τα τρίγωνα του πολυέδρου σκιάς θα έχουν ακριβώς τις ίδιες συντεταγμένες με την απεικονιζόμενη γεωμετρία του παρεμποδιστή και αυτό πιθανότατα θα προκαλέσει λανθασμένη ενημέρωση του καταχωρητή μάσκας καθώς μία φορά θα περνάνε τον έλεγχο βάθους fragments του πολυέδρου σκιάς και μία άλλη fragments της επιφάνειας του παρεμποδιστή (*Z-fighting*). Ένας εύκολος τρόπος να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα είναι να εξωθήσουμε και το κοντινό καπάκι λίγο αντίθετα από την πηγή φωτός, χρησιμοποιώντας την ίδια κατεύθυνση με αυτή των σημείων του σκοτεινού καπακιού.

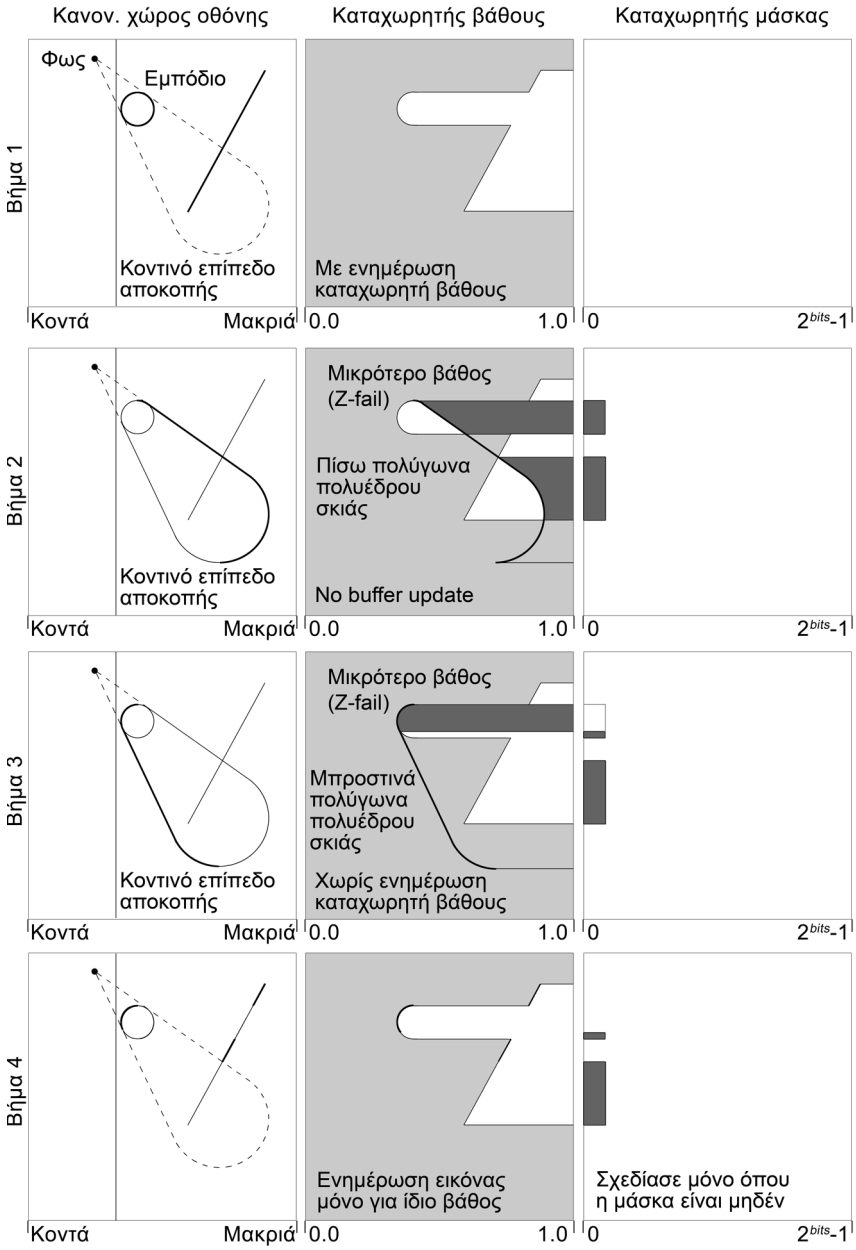
13.3.3 Παγίδες και βελτιώσεις

Ο Z-pass αλγόριθμος πολυεδρικών σκιών με χρήση μάσκας είναι αποτελεσματικός και με χαμηλή πολυπλοκότητα. Δυστυχώς όμως θεωρεί ότι το κοντινό επίπεδο αποκοπής δεν τέμνει κάποιο πολύεδρο σκιάς, συμπεριλαμβανομένης και της περίπτωσης που ο παρατηρητής βρίσκεται εξολοκλήρου μέσα στο πολύεδρο. Όπως αναφέρεται και στο [Horn05], δεν αρκεί να αποφανθούμε αν ο παρατηρητής βρίσκεται μέσα στο πολύεδρο σκιάς και να χειριστούμε κατάλληλα την περίπτωση. Συχνά μπορεί να παρουσιαστούν περιστατικά στα οποία το κοντινό επίπεδο αποκοπής βρίσκεται ολόκληρο υπό σκιά ενώ η θέση του παρατηρητή βρίσκεται εκτός του πολυέδρου και αντίστροφα. Στην προσπάθεια να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα, προτάθηκαν διάφορες λύσεις που επιχειρούν να αποκόψουν το πολύεδρο σκιάς πάνω στο κοντινό επίπεδο αποκοπής του παρατηρητή ή να συμπληρώσουν τη γεωμετρική πληροφορία του πολυέδρου σκιάς που έχει αποκοπεί [Bata99, Dief96]. Όμως αποδείχτηκε ότι μια τέτοια τακτική δεν μπορεί να εγγυηθεί ένα ακριβές αποτέλεσμα σε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς τοποθέτησης πολυέδρου σκιάς και πυραμίδας προβολής [Ever02].

Ο Carmack [Carm00] και οι Bilodeau και Songy [Bilo99], σε ανεξάρτητες εργασίες τους, πρότειναν μια αλλαγή στον αλγόριθμο Z-pass που λύνει με παρόμοιο τρόπο το παραπάνω πρόβλημα αντιστρέφοντας τους ελέγχους και την απαρίθμηση. Η δημοφιλής παραλλαγή του αλγορίθμου, *Z-fail*, από τον John Carmack (αποκαλείται επίσης *ο αντίστροφος αλγόριθμος σκιών του Carmack*), αποφεύγει το πρόβλημα στο κοντινό επίπεδο αποκοπής, μεταφέροντάς το στο μακρινό επίπεδο. Ευτυχώς όμως, είναι ευκολότερο να διασφαλισθεί ότι το μακρινό επίπεδο αποκοπής δεν τέμνει τα πολύεδρα σκιάς, είτε φροντίζοντας πάντα το βάθος εξώθησης των πολυγώνων του φρεατίου σκιάς να είναι αρκετά μικρό ώστε να χωράει μέσα στον όγκο παρατήρησης, είτε μεταφέροντας το μακρινό επίπεδο αποκοπής του παρατηρητή στο άπειρο με τροποποίηση του προοπτικού μετασχηματισμού. Ας δούμε όμως πως μεταβάλλεται ο αλγόριθμος πολυεδρικών σκιών με μάσκα στη Z-fail εκδοχή του:



Σχήμα 13.9: *Πολύεδρο σκιάς που χρησιμοποιεί ως κοντινό και μακρινό καπάκι του εξωθημένου περιγράμματος πολύγωνα που είναι προσανατολισμένα προς και αντίθετα από τη φωτεινή πηγή αντίστοιχα.*



Σχήμα 13.10: *Διαδοχικά βήματα εκτέλεσης του αλγόριθμου πολυεδρικών σκιών Z-fail με χρήση μάσκας.*

1. Αρχικοποίηση: καθάρισε τους καταχωρητές βάθους, εικόνας και μάσκας και αγνόησε (απενεργοποίησε) τον έλεγχο μάσκας

2. Σχεδίασε τη γεωμετρία χρησιμοποιώντας μόνο τον έμμεσο φωτισμό και το χρώμα εκπομπής των αυτόφωτων επιφανειών (Σχήμα 13.10, Βήμα 1).

3. Για κάθε παρεμποδιστή (αντικείμενο που ρίχνει σκιά), ετοίμασε και σχεδίασε το πολύεδρο σκιάς του:

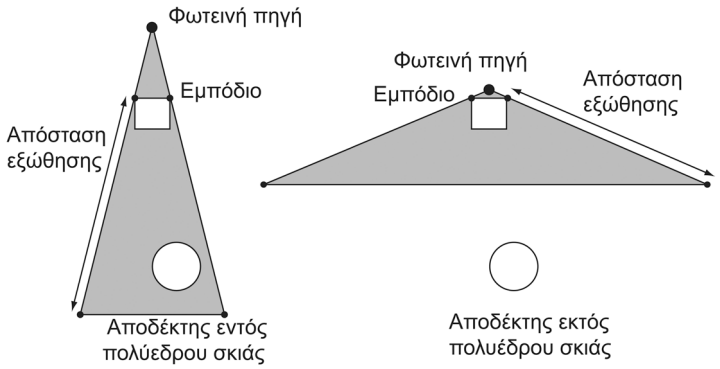
   (α) Κατασκεύασε ένα κλειστό όγκο σκιάς επιλέγοντας τα πολύγωνα του παρεμποδιστή που είναι προσανατολισμένα προς τη φωτεινή πηγή και εξωθώντας τα προς την αντίθετη κατεύθυνση από αυτή που βρίσκεται η πηγή, σε απόσταση αντίστοιχη με την εμβέλεια της πηγής. Το κλείσιμο του εξωθημένου άκρου του πολυέδρου επιτυγχάνεται με αντιγραφή και αντιστροφή των εξωθημένων πολυγώνων.

   (β) Σχεδίασε τα πίσω (ως προς τον παρατηρητή) πολύγωνα των πολυέδρων σκιάς χωρίς να ενημερώνεται ούτε ο καταχωρητής βάθους ούτε ο καταχωρητής εικόνας (Σχήμα 13.10, Βήμα 2). Τώρα γίνεται ο αποκαλούμενος έλεγχος *Z-fail*, ο οποίος κάθε φορά που ένα fragment απορρίπτεται από τον έλεγχο βάθους γιατί βρίσκεται μακρύτερα από ήδη σχεδιασμένη γεωμετρία, ο καταχωρητής μάσκας αυξάνεται κατά 1. Αυτό το βήμα εκτελεί μόνο τον έλεγχο βάθους, καθώς τα σημεία των πολυέδρων σκιάς που γίνονται αποδεκτά, δε σχεδιάζονται, αφού τίποτα δε γράφεται στους καταχωρητές βάθους και εικόνας.

   (γ) Στη συνέχεια, σχεδίασε τα μπροστινά (ως προς τον παρατηρητή) πολύγωνα των πολυέδρων σκιάς και, όπως και στο προηγούμενο βήμα, ενημέρωσε τον καταχωρητή μάσκας μόνο όταν ένα fragment πολυέδρου σκιάς δεν περνάει τον έλεγχο βάθους. Αυτή τη φορά όμως, ελάττωσε την αντίστοιχη τιμή στη μάσκα κατά 1 αντί να την αυξήσεις (Σχήμα 13.10, Βήμα 3).

4. Σχεδίασε τη φωτισμένη γεωμετρία: Ενεργοποίησε όλες τις συνιστώσες άμεσου φωτισμού και την πηγή που παράγει τη σκιά και σχεδίασε τη γεωμετρία πάνω από το πρώτο πέρασμα. Σχεδιάζονται μόνο όσα fragments έχουν ίδιο βάθος με αυτό που έχει ήδη καταγραφεί στον καταχωρητή βάθους (στο Βήμα 1) και των οποίων οι αντίστοιχες τιμές μάσκας είναι μηδενικές (Σχήμα 13.10, Βήμα 4).

Όπως ήδη αναφέρθηκε, ο αλγόριθμος πολυεδρικών σκιών με χρήση μάσκας τύπου Z-fail μεταθέτει το πρόβλημα της τομής του κοντινού επιπέδου αποκοπής με το πολύεδρο σκιάς στο μακρινό επίπεδο αποκοπής. Αντί να μετράμε εισόδους και εξόδους από το πολύεδρο σκιάς πάνω στην ευθεία που διέρχεται από το τρέχον pixel με σημείο εκκίνησης τον παρατηρητή και τερματισμό στην κοντινότερη επιφάνεια, ο αλγόριθμος Z-fail μετράει τις εισόδους και εξόδους από το πολύεδρο σκιάς, από το άπειρο μέχρι την κοντινότερη επιφάνεια. Αυτό σημαίνει ότι αν αποτύχει η σχεδίαση της μπροστινής πλευράς ενός πολυέδρου σκιάς επειδή αποκόπτεται από το κοντινό επίπεδο αποκοπής του παρατηρητή, αυτό θα έχει το ίδιο αποτέλεσμα στην καταμέτρηση με το να



Σχήμα 13.11: *Αναποτελεσματικές σκιές εξαιτίας πεπερασμένου μήκους πολυέδρου σκιάς. Όταν η πηγή βρίσκεται κοντά στον παρεμποδιστή, η απόσταση μεταξύ του κοντινού και μακρινού καπακιού του πολυέδρου μικραίνει, αφήνοντας έξω από το πολύεδρο σκιάς επιφάνειες που κανονικά θα έπρεπε να σκιάζονται.*

παρεμβάλλεται φυσιολογικά αυτή η πλευρά του πολυέδρου σκιάς μεταξύ παρατηρητή και της κοντινότερης ορατής επιφάνειας, χωρίς να αποκόπτεται. Συνεπώς, η αποκοπή του πολυέδρου σκιάς στο κοντινό επίπεδο παρατήρησης δεν έχει καμία επίπτωση στις σκιές.

Αντίθετα, δεδομένου ότι η καταμέτρηση ξεκινάει από πίσω (άπειρο) προς τα εμπρός, όλες οι πίσω (κρυφές) πλευρές του πολυέδρου σκιάς πρέπει να βρίσκονται πιο κοντά στον παρατηρητή απ' ότι το μακρινό επίπεδο αποκοπής, έτσι ώστε να ληφθούν υπόψη. Σε διαφορετική περίπτωση, ο καταχωρητής μάσκας ενδέχεται να περιέχει εσφαλμένες τιμές. Αν φροντίζουμε να κλείνουμε πάντα το μακρινό άκρο του πολυέδρου σκιάς πριν ή ακριβώς πάνω στο επίπεδο αποκοπής, εξασφαλίζουμε ότι η μακρινότερη ορατή τιμή είναι πάντα έξω από τα όρια του πολυέδρου σκιάς. Στην πιο απλή περίπτωση, αυτό επιτυγχάνεται με την επιλογή των πολυγώνων της σκοτεινής πλευράς του παρεμποδιστή και της εξώθησής τους σε μια ασφαλή απόσταση προς τη διεύθυνση φωτισμού, πολύ μικρότερη από το εύρος της πυραμίδας αποκοπής του παρατηρητή.

Παρότι το σωστό κλείσιμο του πολυέδρου σκιάς σε ελεγχόμενη απόσταση από τη φωτεινή πηγή λύνει το πρόβλημα της αποκοπής στο μακρινό επίπεδο, η εξώθηση των πολυγώνων σε μια σταθερή απόσταση μπορεί ακόμα να δημιουργήσει προβλήματα, όταν η φωτεινή πηγή πλησιάζει κοντά σε έναν παρεμποδιστή, συγκριτικά με το μέγεθός του. (Σχήμα 13.11). Καθώς η θέση της πηγής πλησιάζει τη γεωμετρία του εμποδίου, η στερεά γωνία που σχηματίζεται από την πηγή και τα όρια του εμποδίου αυξάνει, ενώ η απόσταση εξώθησης παραμένει σταθερή. Αυτό σημαίνει ότι το μακρινό καπάκι του πολυέδρου σκιάς μετακινείται προς τη μεριά της φωτεινής πηγής και — πιθανόν — αφήνει τμήματα της σκηνής εκτός του πολυέδρου. Μια ολοκληρωμένη λύση , η οποία λαμβάνει αυτό το ενδεχόμενο υπόψη, δόθηκε από τους Everitt και Kilgard [Ever02]. Πρότειναν τη χρήση του αλγόριθμου μάσκας Z-fail αλλά θέτοντας το μακρινό επίπεδο αποκοπής στο «άπειρο» και κατασκευάζοντας έναν απείρου μήκους πολύεδρο σκιάς.

Η τοποθέτηση του μακρινού επιπέδου αποκοπής στο άπειρο επιτυγχάνεται αλλά-

ζοντας τον τυπικό πίνακα προοπτικής προβολής (βλ. Κεφάλαιο 4) και ειδικότερα, υπολογίζοντας το όριο του πίνακα καθώς η απόσταση του μακρινού επιπέδου αποκοπής τείνει στο άπειρο. Ας δούμε πως μεταβάλλεται ο πίνακα προοπτικής προβολής του OpenGL γι' αυτό το σκοπό:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{13.3}$$

Στην παραπάνω πολύ διαδεδομένη μορφή του πίνακα προοπτικής προβολής, n είναι η απόσταση του κοντινού επιπέδου αποκοπής, f είναι η απόσταση του μακρινού επιπέδου αποκοπής και l, r, t, και b είναι τα όρια της κόλουρης πυραμίδας στο κοντινό επίπεδο. Για να βρούμε τον τύπο για τον πίνακα προβολής όταν η απόσταση f τείνει στο άπειρο, πρέπει να υπολογίσουμε το όριο της σχέσης (13.3). Παρατηρώντας ότι μόνο η τρίτη γραμμή του πίνακα επηρεάζεται από το όριο και δεδομένου ότι $\lim_{x\to\infty}(x \pm a/x \pm b) = 1$, παίρνουμε:

$$\mathbf{P}_{\text{inf}} = \lim_{f\to\infty}(\mathbf{P}) = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2n \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{13.4}$$

Η παραλλαγή Z-fail μπορεί να γίνει πιο αργή από τη Z-pass, ανάλογα με την *πολυπλοκότητα βάθους* της σκηνής (αριθμός επικαλυπτόμενων επιφανειών στη διεύθυνση Z). Όμως, οι δύο μέθοδοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν εναλλάξ, με κριτήριο το αν τέμνεται το πεδίο παράστασης με το πολύεδρο σκιάς ή όχι· έτσι η μέθοδος Z-fail μπορεί να εφαρμόζεται μόνο όταν είναι απαραίτητο.

Ένα άλλο θέμα που μπορεί να προκύψει με τις πολυεδρικές σκιές με χρήση μάσκας είναι ότι διαδοχικές αυξήσεις ή ελαττώσεις του καταχωρητή μάσκας μπορούν να προκαλέσουν σε αυτόν υπερχείλιση τιμών. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν η πολυπλοκότητα βάθους των επικαλυπτόμενων πολυέδρων σκιάς υπερβαίνει την ακρίβεια bits του καταχωρητή μάσκας [McGu03]. Με απλά λόγια, για έναν καταχωρητή μάσκας των 8 bits, υπάρχει δυνατότητα καταγραφής μόνο 255 επικαλυπτόμενων πολυέδρων σκιάς, διότι μόνο τόσες φορές μπορούμε να αυξήσουμε τις τιμές του καταχωρητή. Μια λύση που αντιμετωπίζει τουλάχιστον εν μέρει το πρόβλημα είναι η κυκλική επανέναρξη της μέτρησης από το μηδέν όταν υπερχειλίζει ο καταχωρητής, μια λειτουργία που υποστηρίζεται από το σύγχρονο hardware γραφικών. Ομοίως, όταν μειώνονται οι τιμές στον καταχωρητή μάσκας και κατέβουν κάτω από το μηδέν, αναδιπλώνονται στην τιμή 2^{bits}-1.

Υπάρχουν πολλές βελτιστοποιήσεις που μπορούν να γίνουν στο βασικό αλγόριθμο πολυεδρικών σκιών, προκειμένου να αυξηθεί η απόδοσή του. Για στατικά εμπόδια και φώτα, τα πολύεδρα σκιάς χρειάζεται να υπολογιστούν μόνο μια φορά. Μετά τον

προσδιορισμό των πολυέδρων σκιάς και την κατασκευή της αντίστοιχης γεωμετρίας, οι όγκοι σκιάς συνεχίζουν να είναι σωστοί εφόσον ούτε τα φώτα ούτε οι παρεμποδιστές κινηθούν. Αυτή η γνώση μπορεί να επιταχύνει αρκετά τον αλγόριθμο, καθώς ένα σημαντικό μέρος του κόστους υπολογισμού του είναι ο προσδιορισμός των περιγραμμάτων των παρεμποδιστών και η κατασκευή των αντίστοιχων πολυέδρων σκιάς που προκύπτουν.

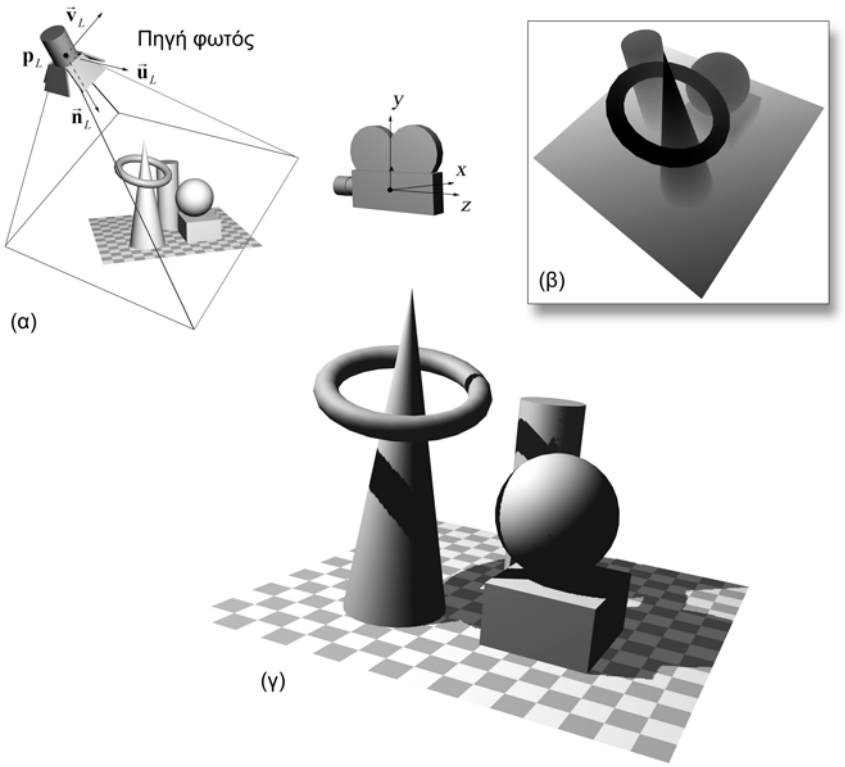
13.4 Εικόνες σκιών

Σε αντίθεση με τον αλγόριθμο πολυεδρικών σκιών, ο οποίος βασίζεται στη σύνθεση γεωμετρίας, οι εικόνες σκιών δουλεύουν στο χώρο της παραγόμενης συνθετικής εικόνας και χρησιμοποιούν τον καταχωρητή βάθους για να ταξινομήσουν τις επιφάνειες ως προς την ορατότητά τους από τη φωτεινή πηγή. Αυτή η τεχνική παραγωγής σκιών πρωτοεμφανίστηκε το 1978 από τον Williams [Will78], και οι παραλλαγές της χρησιμοποιούνται πολύ εκτεταμένα και σήμερα, τόσο σε λογισμικό φωτορεαλιστικής σύνθεσης εικόνας, όσο και σε εφαρμογές πραγματικού χρόνου, όπως είναι τα παιχνίδια υπολογιστών.

Η βασική ιδέα του αλγόριθμου είναι ότι η γεωμετρία προβάλλεται μια φορά από την οπτική γωνία της φωτεινής πηγής για να καταγράψουμε ποια τμήματα των επιφανειών έχουν οπτική επαφή με τη φωτεινή πηγή (κι επομένως φωτίζονται από αυτή άμεσα). Στη συνέχεια, η σκηνή προβάλλεται κανονικά στον παρατηρητή και το κάθε fragment που παράγεται, μετασχηματίζεται στο σύστημα αναφοράς της φωτεινής πηγής, όπου η τιμή βάθους του συγκρίνεται με την τιμή απόστασης που είναι καταγεγραμμένη στον καταχωρητή βάθους του φωτός. Αν το βάθος του μετασχηματισμένου στο σύστημα αναφοράς του φωτός fragment είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο αποθηκευμένο βάθος στον καταχωρητή, τότε το fragment είναι κρυμμένο από την οπτική γωνία του φωτός και επομένως βρίσκεται στη σκιά.

Έστω ένας προβολέας με εμβέλεια φωτισμού r_L ο οποίος είναι τοποθετημένος στη σκηνή στο σημείο $\mathbf{p}_L$ και δείχνει προς τη διεύθυνση $\hat{\mathbf{n}}_L$ (Σχήμα 13.12(α)). Μπορούμε να ορίσουμε ένα τοπικό (δεξιόστροφο) σύστημα συντεταγμένων γι αυτόν, διαλέγοντας αυθαίρετα ένα συνδυασμό αμοιβαία κάθετων διανυσμάτων, τα οποία μαζί με την κατεύθυνση φωτισμού να αποτελούν μια ορθοκανονική βάση στο χώρο $(\hat{\mathbf{u}}_L, \hat{\mathbf{v}}_L, -\hat{\mathbf{n}}_L)$. Ακόμα, έστω ότι ο $\mathbf{M}_L$ και ο $\mathbf{P}_L$ είναι ο γεωμετρικός μετασχηματισμός τοποθέτησης και ο μετασχηματισμός προβολής αντίστοιχα για τη φωτεινή πηγή. Ο πίνακας προβολής αυτός μπορεί να οριστεί από τη συμμετρική πυραμίδα που σχηματίζεται με άξονα προβολής τη διεύθυνση φωτισμού $\hat{\mathbf{n}}_L$, με κοντινό επίπεδο αποκοπής σε μια μικρή επιλεγμένη απόσταση από την πηγή n και με μακρινό επίπεδο αποκοπής τοποθετημένο σε απόσταση r_L. Το πάνω, κάτω, δεξιό και αριστερό όριο της πυραμίδας εξαρτώνται από το άνοιγμα της δέσμης του προβολέα θ_a: $l = r = t = b = n \cdot \tan(\theta_a/2)$. Ο ίδιος ο έλεγχος σκίασης είναι πολύ απλός και χωρίζεται σε δύο βήματα:

- Σχεδίασε τη σκηνή προβάλλοντας τα αντικείμενα ως προς το σύστημα αναφοράς της φωτεινής πηγής $(\mathbf{p}_L, \hat{\mathbf{u}}_L, \hat{\mathbf{v}}_L, -\hat{\mathbf{n}}_L)$, μετασχηματίζοντας σε πρώτη φάση



Σχήμα 13.12: *Ο αλγόριθμος εικόνας σκιών. (α) Η διαρρύθμιση της φωτεινής πηγής μέσα στη σκηνή για την καταγραφή της εικόνας σκιών. (β) Η καταγραφή της εικόνας βάθους από τη θέση της φωτεινής πηγής. (γ) Τελικό πέρασμα. Ελέγχεται για το κάθε fragment η ορατότητά του ως προς το καταγεγραμμένο βάθος στο χώρο της φωτεινής πηγής.*

όλα τα αντικείμενα κατά $\mathbf{M}_L^{-1}$ και στη συνέχεια προβάλλοντάς τα με χρήση του μετασχηματισμού $\mathbf{P}_L$ (Σχήμα 13.12(β)). Αποθήκευσε τον αντίστοιχο καταχωρητή βάθους Z_L (*εικόνα σκιών - shadow map*).

- Σχεδίασε τώρα τη σκηνή από την οπτική γωνία του παρατηρητή (Σχήμα 13.12(γ)). Ένα σημείο $\mathbf{p} = (x, y, z)$ σε μια επιφάνεια βρίσκεται στη σκιά αν είναι τοποθετημένο σε μεγαλύτερη απόσταση από τη φωτεινή πηγή από την αποθηκευμένη απόσταση στην εικόνα σκιών Z_L, όταν το $\mathbf{p}$ είναι εκφρασμένο σε συντεταγμένες φωτός: $\mathbf{p}' = (x', y', z') = \mathbf{P}_L \cdot \mathbf{M}_L^{-1} \cdot \mathbf{p}$, δηλαδή αν $z' > Z_L(x', y')$. Όταν το z' είναι εκτός του διαστήματος $[n, r_L]$, το $\mathbf{\pi}$ θεωρείται ότι βρίσκεται στη σκιά (εκτός φωτεινής δέσμης).

Για να εφαρμοστεί αυτή η μέθοδος σε μη κατευθυντικά φώτα, πρέπει να συνδυαστούν πολλαπλές εικόνες σκιάς προς διαφορετικές κατευθύνσεις γύρω από τη σημειακή φωτεινή πηγή. Η συνολική τους κάλυψη θα πρέπει να επιτρέπει τη δεικτοδότηση οποιασδήποτε μοναδιαίας κατεύθυνσης γύρω από το $\mathbf{p}_L$ μέσα σε κάποια από τις απο-

θηκευμένες εικόνες. Αν συμμετέχουν πολλαπλές πηγές φωτός στη σκηνή, η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται για καθεμία από αυτές.

Πρέπει να σημειωθεί πως, όπως και στην περίπτωση των πολυεδρικών σκιών, η πληροφορία για τις σκιές (εδώ η εικόνα σκιάς) δε χρειάζεται να επανυπολογίζεται σε κάθε καρέ, παρά μόνο όταν το φωτισμένο περιβάλλον αλλάζει ή η φωτεινή πηγή που προκαλεί τις σκιές μετακινείται. Στο βασικό αλγόριθμο, οι αλλαγές στο μετασχηματισμό παρατήρησης της κάμερας δεν έχουν καμία επίπτωση στην εικόνα σκιάς, οπότε η τελευταία δε χρειάζεται να επανασχεδιάζεται σε απλή πλοήγηση μέσα στο (στατικό) περιβάλλον.

Το σύγχρονο hardware γραφικών μπορεί να εκτελέσει αποδοτικά προβολικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων υφής [Sega92] και σύνθετες πράξεις με τα περιεχόμενα των εικόνων υφής [Sega04] προκειμένου να παρέχει υψηλής ποιότητας σκιές σε πραγματικό χρόνο [Wrig04], ακόμα και για μεγάλους αριθμούς πολυγώνων.

Η απεικόνιση σκιών με τη μέθοδο των εικόνων σκιών και επιτάχυνση με χρήση του hardware γραφικών και καθιερωμένα API, απαιτεί έναν αριθμό απλών βημάτων. Πρώτα απ' όλα όμως, είναι απαραίτητο να συνειδητοποιήσουμε ότι εργαζόμαστε στο χώρο της τελικής εικόνας, πάνω στα fragments που δημιουργούνται με τη σάρωση κατά γραμμές. Πρέπει να μετασχηματίσουμε αυτές τις συντεταγμένες από τον κανονικοποιημένο χώρο οθόνης (CSS) πίσω σε σύστημα συντεταγμένων κόσμου και από εκεί στο κανονικοποιημένο τοπικό σύστημα συντεταγμένων της πηγής φωτός (light clip space – Σχήμα 13.13):

$$\mathbf{p'}_{\text{frag}} = (x'_{\text{frag}}, y'_{\text{frag}}, z'_{\text{frag}}) = \mathbf{P}_L \cdot \mathbf{M}_L^{-1} \cdot \mathbf{M}_C \mathbf{P}_C^{-1} \cdot \mathbf{p}_{\text{frag}}, \tag{13.5}$$

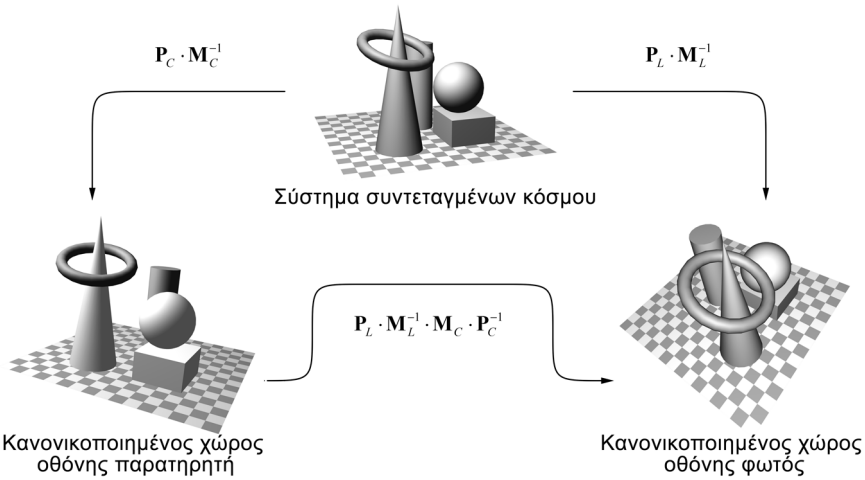
όπου $\mathbf{M}_C$ είναι ο παραμορφωτικός μετασχηματισμός ο οποίος τοποθετεί τον παρατηρητή στον τριδιάστατο κόσμο και $\mathbf{P}_C$ είναι ο πίνακας προβολής. Τα τρία βήματα που απαιτούνται είναι τα ακόλουθα (Σχήμα 13.13):

- Αν χρειάζεται, υπολόγισε την εικόνα σκιών για ένα ή περισσότερα φώτα, απεικονίζοντας τον κόσμο από την οπτική γωνία της πηγής φωτός. Αποθήκευσε το γεωμετρικό μετασχηματισμό παρατήρησης και τον πίνακα προβολής που χρησιμοποιήθηκαν.

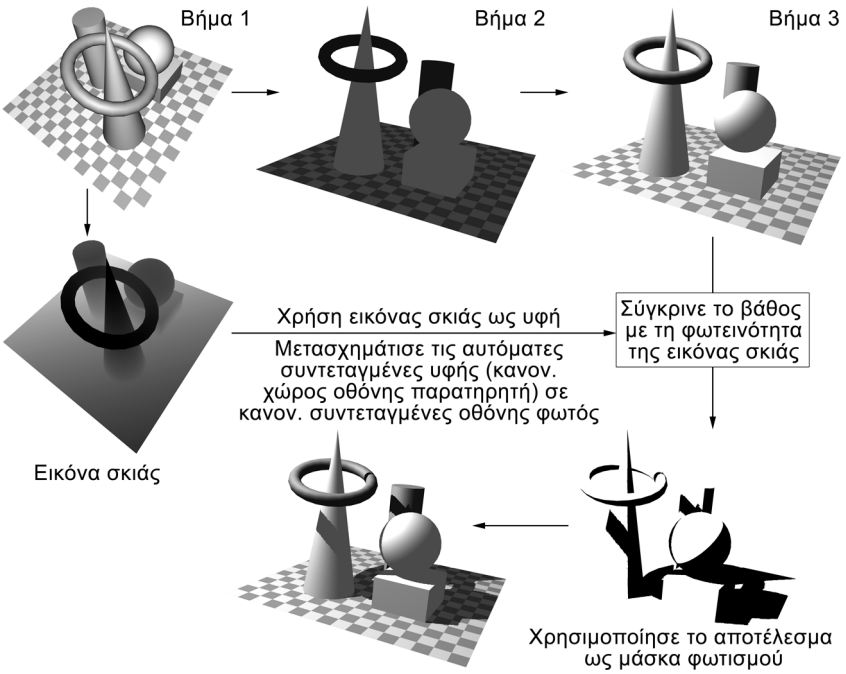
- Απεικόνισε τον αφώτιστο κόσμο από την οπτική γωνία του παρατηρητή μέσα στον καταχωρητή εικόνας. Σε αυτό το στάδιο, ο καταγεγραμμένος φωτισμός πρέπει να αναπαριστά τη φαινόμενη ένταση στις σκοτεινές (σκιασμένες) περιοχές. Ο μετασχηματισμός από ΣΣΚ σε ΣΣΠ αυτού του περάσματος (π.χ. πίνακας modelview στο OpenGL) πρέπει να αντιστραφεί και να αποθηκευτεί (βλ. Εξίσωση (13.5)). Αν δεν υλοποιείται σε κάποιο shader ο αλγόριθμος σκιών, συχνά χρησιμοποιούμε ως συντεταγμένες των fragments τις αυτόματα παραγόμενες συντεταγμένες υφής με βάση τη θέση του fragment στην οθόνη. Σε αυτή την περίπτωση, η αντιστροφή του πίνακα δε χρειάζεται, καθώς γίνεται έμμεσα, μετασχηματίζοντας τις αυτόματες ΣΣΠ συντεταγμένες υφής μαζί με τη γεωμετρία [Wrig04].

- Εκτέλεσε το πέρασμα σύγκρισης με την εικόνα σκιάς και φώτισε όσες επιφάνειες περνούν τον έλεγχο. Αυτό το βήμα απαιτεί όλες οι συντεταγμένες των fragments (ή οι αντίστοιχες ΣΣΠ συντεταγμένες υφής) να μετασχηματιστούν στον κανονικοποιημένο χώρο της πηγής φωτός. Οι μετασχηματισμοί που προαποθηκεύσαμε γι' αυτό το σκοπό εφαρμόζονται στα fragments σύμφωνα με την Εξίσωση (13.5). Για να απεικονίσουμε τώρα τις μετασχηματισμένες συντεταγμένες από το χώρο της πηγής φωτός σε συντεταγμένες υφής της εικόνας σκιών (παραμετρικό διάστημα [0,1]), τους αλλάζουμε κλίμακα και τις μετατοπίζουμε, έτσι ώστε το ζεύγος $(x'_{\text{frag}}, y'_{\text{frag}})$ να αντιστοιχεί στις συντεταγμένες υφής (u, v) της εικόνας σκιών. Μετά την προσαρμογή αυτή, η συντεταγμένη z'_{frag} συγκρίνεται με την αποθηκευμένη στην εικόνα τιμή απόστασης από την πηγή φωτός. Για το σκοπό αυτό, το hardware γραφικών μας επιτρέπει πια να συγκρίνουμε την τρίτη συντεταγμένη υφής (κανονικοποιημένη z'_{frag}) με την τιμή που αντλείται από μια εικόνα υφής που αποθηκεύει βάθος. Το αποτέλεσμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μάσκα στο τρέχον πέρασμα, το οποίο και γράφει στον καταχωρητή εικόνας τα τμήματα της σκηνής που φωτίζονται, έχοντας ενεργοποιήσει πια το φωτισμό για τη συγκεκριμένη πηγή (Σχήμα 13.14). Το αποτέλεσμα της σύγκρισης λαμβάνεται ως συνιστώσα διαφάνειας (alpha channel), οπότε η ήδη γραμμένη εικόνα (σκοτεινή – πρώτο πέρασμα) αναμιγνύεται με τα εικονοστοιχεία αυτού του περάσματος.

Να σημειωθεί ότι με τη χρήση κατάλληλων shaders ή συναρτήσεων που θέτουν το hardware σε ειδική κατάσταση χρωματισμού επιφανειών, οι σκιές απαιτούν ένα μόνο πέρασμα για να αποδοθούν με αυτό τον αλγόριθμο, εφόσον έχει καταγραφεί μια εικόνα σκιών.



Σχήμα 13.13: *Ο μετασχηματισμός των fragments από το χώρο της οθόνης στο χώρο της πηγής φωτός προκειμένου να συγκριθούν με τις τιμές βάθους στην εικόνα σκιών.*



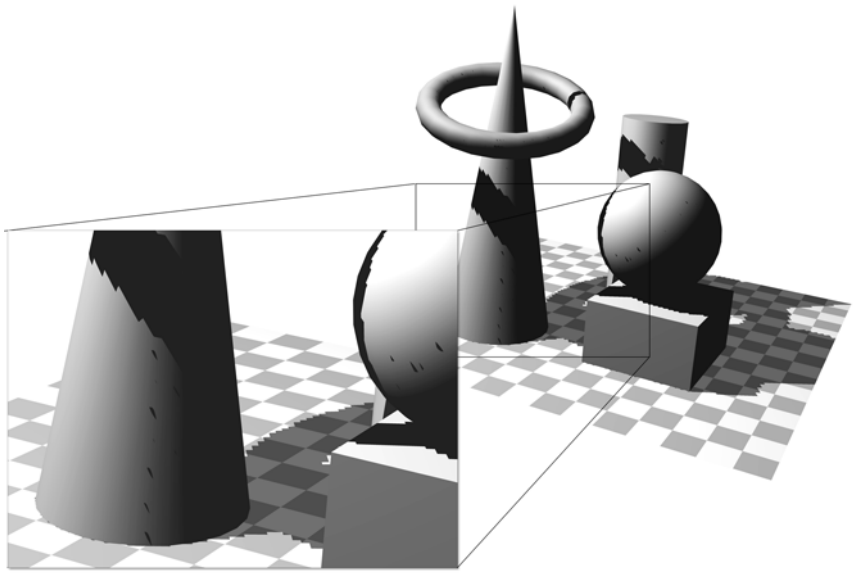
Σχήμα 13.14: *Εικόνες σκιών στο hardware. Η σκιασμένη γεωμετρία απεικονίζεται το πολύ σε τρία στάδια:. Βήμα 1: Δημιουργία της εικόνας σκιών. Βήμα 2: Σχεδίαση της γεωμετρίας ως σκιασμένης. Βήμα 3: Σχεδίαση φωτισμένων επιφανειών.*

13.4.1 Πλεονεκτήματα και προβλήματα των εικόνων σκιών

Το μεγαλύτερο πλεονέκτημα του αλγόριθμου εικόνων σκιών είναι η απλότητά του και η εκμετάλλευση ενός πολύ διαδεδομένου και υποστηριζόμενου από το hardware αλγόριθμου (Z-buffer). Η μέθοδος δεν εξαρτάται άμεσα από την πολυπλοκότητα της σκηνής και επηρεάζεται μόνο από τον αριθμό των συγκρίσεων στο χώρο της εικόνας και το χρόνο σχεδίασης και καταγραφής του καταχωρητή βάθους.

Για σύνθετα, δυναμικά περιβάλλοντα, οι εικόνες σκιών θεωρούνται καταλληλότερες. Βασισμένες στον πολύ γενικό αλγόριθμο Z-buffer, οι εικόνες σκιών μπορούν να χρησιμοποιηθούν με οποιαδήποτε απεικονιζόμενη μορφή, από πολύγωνα μέχρι δεδομένα όγκου και αναλυτικές επιφάνειες· αρκεί κατά τη σχεδίαση των στοιχείων αυτών να γεμίζει ο καταχωρητής βάθους.

Εκτός αυτού, οι εικόνες σκιών επιτρέπουν τη δημιουργία σκιών από διαφανείς επιφάνειες γιατί ο αλγόριθμος εργάζεται σε επίπεδο fragments. Αν ένα fragment έχει υποστεί αποκοπή λόγω διαφάνειας (*alpha-culling* – το fragment απορρίπτεται αν η διαφάνειά του είναι μικρότερη από κάποιο προκαθορισμένο κατώφλι) στο πέρασμα καταγραφής της εικόνας σκιών δε θα προκαλέσει σκιά. Αυτό το γεγονός το εκμεταλλευόμαστε για να σχεδιάσουμε πολύπλοκες σκιές από απλή γεωμετρία, όπως πολύγωνα με διαφανή υφή που παριστάνουν φυλλώματα δένδρων ή δίχτυα.



Σχήμα 13.15: *Προβλήματα ταύτισης του αλγόριθμου εικόνας σκιών εξαιτίας ανεπαρκούς ανάλυσης και ανακρίβειας στις συγκρίσεις βάθους.*

Από την άλλη πλευρά, το κυριότερο πρόβλημα του βασικού αλγόριθμου εικόνων σκιών είναι η ταύτιση (aliasing), η οποία εμφανίζεται στο αποτέλεσμα με διάφορες μορφές. Μια εικόνα βάθους, ως πίνακας που είναι, έχει πεπερασμένη ανάλυση, η οποία χρησιμοποιείται στο πέρασμα που καταγράφει την εικόνα σκιών και δειγματοληπτεί το χώρο που απεικονίζεται στο οπτικό πεδίο του φωτός. Με αυτή τη θεώρηση, είναι σαν κάθε κελί της εικόνας σκιών να αναπαριστά μια κεκλιμένη πυραμίδα που φεύγει από το κοντινό επίπεδο αποκοπής του χώρου προβολής του φωτός και εκτείνεται προς τη σκηνή. Ως εκ τούτου, το μέγεθος του αποτυπώματος s_{shadow} του αντίστοιχου texel σκιάς πάνω σε μια επιφάνεια μεταβάλλεται ανάλογα με την απόσταση και την κλίση που έχει η επιφάνεια σε σχέση με την πηγή. Αν το s_{shadow} είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο αποτύπωμα του pixel της τελικής εικόνας στο ίδιο σημείο, η εικόνα σκιών υπερδειγματοληπτείται, προκαλώντας ταύτιση λόγω μεγέθυνσης, η οποία εκδηλώνεται με τη μορφή οδόντωσης στα όρια των σκιών (Σχήμα 13.15). Αν το s_{shadow} είναι σημαντικά μικρότερο από το αντίστοιχο αποτύπωμα του pixel, η εικόνα σκιών υποδειγματοληπτείται και μπορεί να εμφανιστεί θόρυβος. Οι Stamminger και Drettakis αποκαλούν αυτού του είδους τα προβλήματα ταύτισης *προοπτική ταύτιση* (*perspective aliasing*) [Stam02]. Για την αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων μπορείτε να ανατρέξετε στην Ενότητα 13.4.2.

Μια άλλη μορφή ταύτισης, η *προβολική ταύτιση* (*projection aliasing*), συμβαίνει όταν το φως από την πηγή προσπίπτει στην επιφάνεια σχεδόν παράλληλα με αυτή· τότε αντίστοιχα το αποτύπωμα του texel σκιάς προβάλλεται πλαγίως στην επιφάνεια και φαίνεται επιμηκυμένο. Με αύξηση της ανάλυσης της εικόνας υφής και άρα του

χρόνου σχεδίασης του βάθους μέσα σε αυτή, αντιμετωπίζεται μερικώς μόνο αυτό το πρόβλημα.

Η κβάντιση των τιμών που καταγράφονται στον καταχωρητή βάθους μπορεί να προκαλέσει σοβαρά προβλήματα αλλοίωσης του αποτελέσματος, ειδικά όταν τα όρια αποκοπής του πεδίου παρατήρησης της πηγής είναι πολύ διαφορετικής κλίμακας ή ο κώνος προβολής είναι πολύ ανοιχτός. Φέρνοντας το κοντινό επίπεδο αποκοπής πολύ κοντά στη θέση της πηγής συγκριτικά με το μακρινό επίπεδο, μπορεί να ελαττωθεί δραματικά η ακρίβεια βάθους στις μεσαίες και μακρινές αποστάσεις. Όταν τα fragments μετασχηματίζονται από το χώρο της εικόνας στο χώρο της πηγής φωτός (ΚΣΟ), οι συγκρίσεις βάθους γίνονται επιρρεπείς σε αριθμητικά σφάλματα εξαιτίας της ανεπαρκούς κβάντισης των αποθηκευμένων τιμών z στην εικόνα σκιών. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να εμφανίζονται λάθος τοποθετημένα όρια σκιών. Το πρόβλημα αυτό είναι ιδιαίτερα εμφανές στην περίπτωση σκίασης των αντικειμένων από τον εαυτό τους, όπου η ίδια επιφάνεια σχεδιάζεται και στην εικόνα σκιάς και στον κανονικό καταχωρητή εικόνας του παρατηρητή και συγκρίνεται με τον εαυτό της. Στο Σχήμα 13.15 μπορούμε να παρατηρήσουμε το σφάλμα αυτό στα σημεία που εμφανίζονται μαύρα στίγματα πάνω στις επιφάνειες εξαιτίας λανθασμένης σύγκρισης βάθους. Μια λύση που ακολουθείται συχνά σε αυτό το πρόβλημα είναι να μετατοπίσουμε λίγο τις τιμές βάθους της εικόνας σκιών προς το μακρινό επίπεδο αποκοπής σύμφωνα με κάποιο αναμενόμενο σφάλμα κβάντισης αποστάσεων. Αυτή η μεροληψία στη σύγκριση βάθους εισάγει ένα κατώφλι ασφαλείας για τις περιπτώσεις όπου μια επιφάνεια είναι παρεμποδιστής και αποδέκτης της σκιάς ταυτόχρονα. Παράλληλα όμως προκαλεί την εμφανή σε πολλές περιπτώσεις μετακίνηση όλων των σκιών μακριά από την πηγή φωτός, κάνοντάς τις να μοιάζουν αποκομμένες από τα αντικείμενα που τις προκαλούν.

Όταν εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο εικόνων σκιών, υπάρχει πάντα μια ισορροπία μεταξύ απόστασης σκίασης και ακρίβειας. Συνεπώς, αναζητούμε έξυπνους τρόπους να μεταβάλλουμε διαρκώς τα όρια αποκοπής του πεδίου παρατήρησης της φωτεινής πηγής, κυρίως ανιχνεύοντας τα μακρινότερα αντικείμενα που προκαλούν και δέχονται σκιές προς την κατεύθυνση φωτισμού. Γι' αυτό το σκοπό χρησιμοποιούνται τεχνικές με περιβάλλοντες όγκους και εκμετάλλευση πληροφορίας από το γράφο σκηνής, αυξάνοντας όμως το φόρτο της κεντρικής μονάδας επεξεργασίας του υπολογιστή.

Ο αλγόριθμος εικόνων σκιών δουλεύει μόνο για κατευθυντικά φώτα (προβολείς) και με άνοιγμα κώνου μικρότερο από 180 μοίρες. Για να μπορέσουμε να τον εφαρμόσουμε και σε σημειακές πηγές, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε πολλαπλές εικόνες σκιάς για να καλυφθούν όλες οι κατευθύνσεις γύρω από τη θέση της πηγής. Αυτές οι εικόνες συνήθως οργανώνονται σε κυβική διάταξη με το φως στο κέντρο του κύβου, αφού μ' αυτό τον τρόπο υλοποιείται εύκολα ο αλγόριθμος με τις τυπικές βιβλιοθήκες γραφικών και υποστήριξη από το hardware (cube maps). Η παραμόρφωση δε του οπτικού πεδίου παραμένει σε λογικά επίπεδα καθώς το άνοιγμα του καθενός από τα έξι πεδία παρατήρησης που σχηματίζονται είναι 90 μοίρες. Προφανώς, μια τέτοια τεχνική έχει ως αποτέλεσμα να απαιτούνται μέχρι και έξι περάσματα σχεδίασης της σκηνής μόνο και μόνο για την καταγραφή των εικόνων σκιών.

Τέλος, πρέπει να αναφερθεί ότι οι εικόνες σκιών παράγουν εγγενώς απαλές σκιές·

κυρίως ως μέρος της επίλυσης του προβλήματος της ταύτισης. Στην πράξη μάλιστα, είναι αδύνατο να αποφύγουμε τη σχεδίαση παρασκιάς αν προσπαθήσουμε να εξουδετερώσουμε την οδόντωση.

13.4.2 Αντιμετωπίζοντας τα προβλήματα ταύτισης των εικόνων σκιών⊛

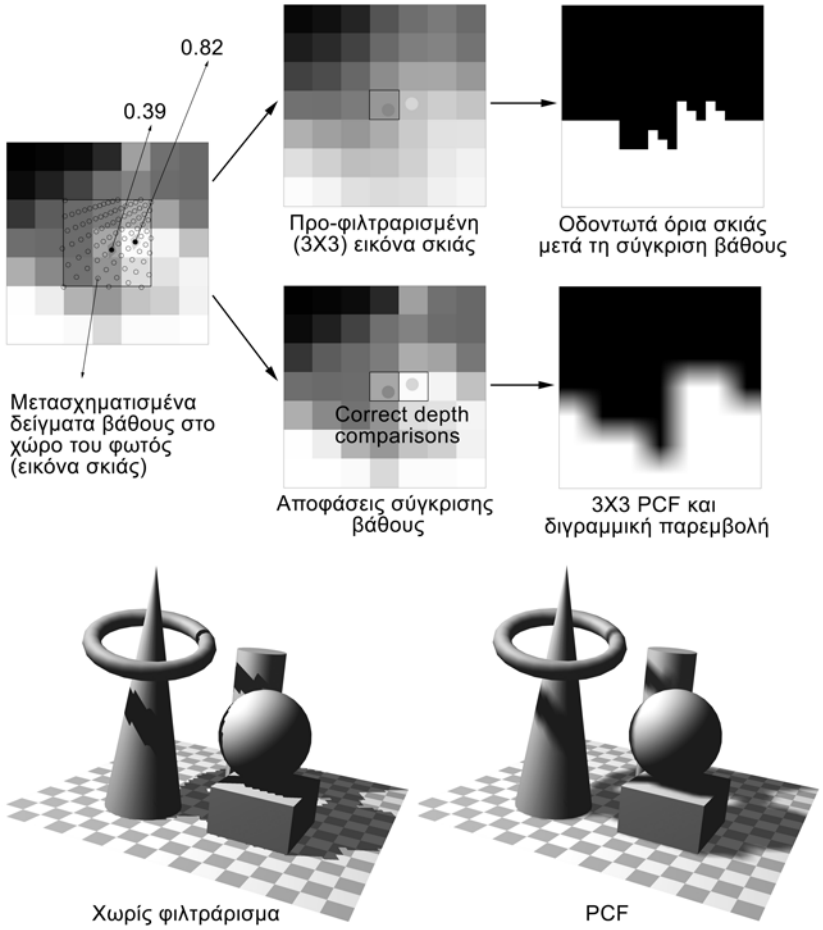
Όπως θα αναλυθεί στο Κεφάλαιο 14, για να εξομαλύνουμε την οδόντωση στη δειγματοληψία των εικόνων υφής, μπορούμε να διαβάσουμε την τιμή της υφής φιλτράροντας τα texels της εικόνας σε μια γειτονιά δειγμάτων αντί να επιλέγουμε το κοντινότερο στοιχείο που αντιστοιχεί στην τρέχουσα θέση δειγματοληψίας. Το πρόβλημα είναι ότι το φιλτράρισμα της πληροφορίας βάθους της εικόνας υφής με διγραμμική παρεμβολή ή κάποια άλλη μέθοδο εξομάλυνσης δε θα απομάκρυνε την οδόντωση στην περίπτωση του αλγόριθμου εικόνων σκιών· μετά την ανάκτηση μιας μέσης (φιλτραρισμένης) τιμής βάθους από την εικόνα σκιών, έτσι κι αλλιώς θα γινόταν μία σύγκριση με το βάθος του fragment και πάλι θα παίρναμε ένα δυαδικό αποτέλεσμα (φωτισμένο ή όχι).

Αυτό φυσικά, καθιστά τη σχεδίαση ομαλών ορίων για τις σκιές αδύνατο και — όπως αναφέρεται στην [Reev87] — οι (φιλτραρισμένες) τιμές βάθους στα όρια των αντικειμένων που δειγματοληπτούνται από την εικόνα σκιών δεν θα αντιστοιχούν στο πραγματικό βάθος των επιφανειών, καθώς θα ανακτούμε ένα μέσο όρο για γειτονικές κοντινές και μακρινές τιμές βάθους. Αυτό επιδεικνύεται στο Σχήμα 13.16, όπου ένα φίλτρο εξομάλυνσης περιοχής 3×3 εφαρμόστηκε στην εικόνα σκιών πριν συγκρίνουμε τα μετασχηματισμένα fragments (τα οποία φαίνονται σαν μικροί κύκλοι) με τις τιμές βάθους από την εικόνα. Ο μέσος όρος βάθους προκάλεσε τη σημαντική μείωση του βάθους σ' ένα texel. Μετά τη σύγκριση της συγκεκριμένης τιμής βάθους με το προς έλεγχο fragment προκύπτει ότι το fragment δε σκιάζεται, ενώ στην πραγματικότητα πρέπει να βρίσκεται στη σκιά.

Αλλάζοντας τη σειρά που γίνεται το φιλτράρισμα της εικόνας σκιών και η σύγκριση βάθους, παίρνουμε το *ποσοστιαίο φιλτράρισμα* (*percentage closer filtering - PCF*) [Reev87]. Με την PCF, οι τιμές σκιάς δεν είναι πλέον δικατάστατες (σκιά/όχι σκιά). Συγκρίνουμε έναν αριθμό από δείγματα βάθους κατανεμημένα στη γειτονιά του fragment που δείχνουμε με τις αφιλτράριστες αντίστοιχες τιμές της εικόνας σκιών. Στη συνέχεια, παίρνουμε το μέσο όρο των δικατάστατων μερικών αποτελεσμάτων των ελέγχων αυτών και έτσι η τελική τιμή σκιάς είναι το ποσοστό των δειγμάτων στην περιοχή του fragment που βρίσκονται στη σκιά. Στο στάδιο της ολοκλήρωσης των τιμών σκιάς, μπορούν να εφαρμοστούν διάφορες τεχνικές δειγματοληψίας και παρεμβολής καθώς και διαφορετικά βάρη ανά δείγμα, προκειμένου να πάρουμε εντονότερη ή ελαφρότερη εξομάλυνση των σκιών. Η τεχνική PCF υλοποιείται στα περισσότερα πακέτα λογισμικού σύνθεσης εικόνας και έχει προσαρμοστεί να δουλεύει στους σύγχρονους επεξεργαστές γραφικών [Bunn04]. Ο αρχικός αλγόριθμος των Reeves et al. [Reev87] απεικόνιζε τις επιφάνειες υποδιαιρώντας αυτές σε πολύ μικρά συνεπίπεδα πολύγωνα. Δείγματα πάνω στην επιφάνεια μπορούσαν να παραχθούν με στοχαστική δειγματοληψία. Τα δείγματα αυτά στη συνέχεια μετασχηματίζονταν στο σύστημα συντεταγμένων

της πηγής φωτός όπου και συγκρίνονταν με τις τιμές βάθους από την εικόνα σκιών. Στους αλγόριθμους σάρωσης πολυγώνων, τα σειριακά παραγόμενα fragments δε μπορούν να δειγματοληπτηθούν με μεταβλητό σχήμα και μέγεθος πυρήνα δειγματοληψίας, όπως στην περίπτωση των μικρο-πολυγώνων. Παρόλα αυτά, μπορεί να υλοποιηθεί ο αλγόριθμος με ικανοποιητικά αποτελέσματα χρησιμοποιώντας προσεγγιστικές μεθόδους, όπως δειγματοληψία της τελικής εικόνας βάθους αντί για τα παραγόμενα fragments σε απεικόνιση με υστέρηση (deferred rendering).

Το μετα-φιλτράρισμα των δειγμάτων σκιών που είδαμε, παράγει αναγκαστικά ομαλά όρια σκιών. Παρά το γεγονός ότι αυτό μπορεί να είναι ένα επιθυμητό χαρακτηριστικό σε ορισμένες περιπτώσεις, οι οδοντώσεις της εφαρμογής της εικόνας σκιών στη



Σχήμα 13.16: *Σύγκριση ποσοστιαίου φιλτραρίσματος (PCF) και προ-φιλτραρίσματος των εικόνων σκιών. Ο μέσος όρος των δειγμάτων βάθους μπορεί να προκαλέσει σφάλματα σύγκρισης με το βάθος του fragment και δεν μπορεί να αποτρέψει τη δημιουργία οδόντωσης. Η μέθοδος PCF φιλτράρει τα αποτελέσματα των συγκρίσεων βάθους παράγοντας ένα ομαλό αποτέλεσμα.*

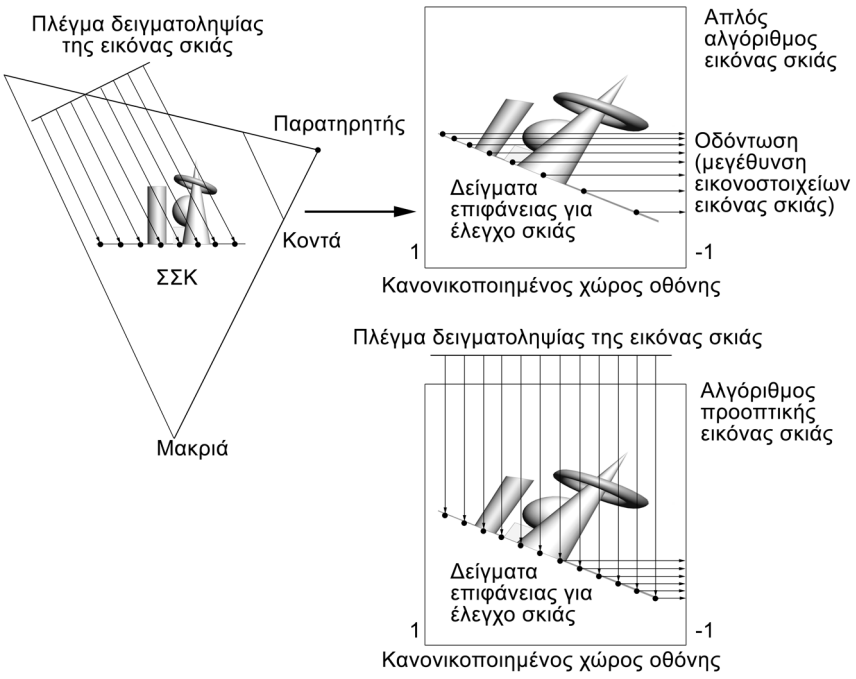
σκηνή μπορούν ακόμα να διακρίνονται· ειδικά σε εφαρμογές πραγματικού χρόνου του αλγορίθμου, όπου η PCF δεν είναι βέλτιστα υλοποιημένη ή δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Ένας εναλλακτικός τρόπος να αντιμετωπισθεί η ταύτιση στο χώρο των σκιών, χωρίς μάλιστα να έχουμε αισθητή απώλεια οξύτητας στα όριά τους, είναι να δειγματοληπτήσουμε το χώρο των αντικειμένων για την παραγωγή των εικόνων σκιών πάνω σε ένα πλέγμα του οποίου η κατανομή των σημείων πλησιάζει αυτή που βλέπει ο παρατηρητής (ΚΧΟ). Μέχρι τώρα, θεωρήσαμε ότι οι εικόνες σκιών είναι μια μέθοδος που δεν εξαρτάται από τη γωνία παρατήρησης. Παρότι αυτό είναι κατά βάση αληθές, η ποιότητα των σκιών εξαρτάται από τη σχέση του οπτικού πεδίου του παρατηρητή και της φωτεινής πηγής.

Οι Stamminger και Drettakis [Stam02] πρότειναν μια τροποποίηση του αλγόριθμου εικόνων σκιών, η οποία προσαρμόζει την ανάλυση της εικόνας σκιάς ανάλογα με τη γωνία παρατήρησης. Αντί να μετασχηματίζει και να προβάλλει τη γεωμετρία όπως είναι εκφρασμένη σε συντεταγμένες κόσμου, η μέθοδός τους με την ονομασία *perspective shadow maps* – PSM (προοπτικές εικόνες σκιών), παράγει τις εικόνες σκιών αφού πρώτα μετασχηματίσει τόσο τη γεωμετρία όσο και τις φωτεινές πηγές στο κανονικοποιημένο χώρο οθόνης. Όπως εξηγούν οι εμπνευστές της μεθόδου, η προοπτική ταύτιση μειώνεται σημαντικά, επειδή η καταγεγραμμένη εικόνα σκιών «βλέπει» τη σκηνή *μετά* την προβολή της στην οθόνη και επομένως με τις ίδιες παραμορφώσεις που τη βλέπει και ο παρατηρητής.

Όταν προβάλουμε προοπτικά τη γεωμετρία της σκηνής για να τη σχεδιάσουμε στο παράθυρο, η πυραμίδα αποκοπής – και μαζί της η γεωμετρία που περιλαμβάνει – μετασχηματίζεται παραμορφωτικά σε κύβο, ο οποίος στη συνέχεια απεικονίζεται ορθογραφικά στο παράθυρο (βλ. Ενότητα 4.4.2). Αυτή η προβολική απεικόνιση μεγεθύνει στοιχεία που βρίσκονται κοντά στο σημείο παρατήρησης, ενώ συρρικνώνει αντικείμενα που βρίσκονται μακριά του. Ωστόσο, την ίδια επίδραση έχει και στα ίχνη της εικόνας σκιών πάνω στις επιφάνειες (Σχήμα 13.17). Τα δείγματα βάθους (εικονοστοιχεία) που είναι αποθηκευμένα στην εικόνα σκιών αντιστοιχούν σε μια ομοιόμορφη διαμέριση του επιπέδου προβολής του φωτός. Όταν το σύστημα συντεταγμένων του φωτός υφίσταται μη παραμορφωτικό γεωμετρικό μετασχηματισμό αναφορικά με το σύστημα συντεταγμένων κόσμου της σκηνής, η τελευταία δειγματοληπτείται ομοιόμορφα από την οπτική γωνία του φωτός. Αλλά όταν αυτά τα δείγματα προβάλλονται στο επίπεδο παρατήρησης της κάμερας, υφίστανται την ίδια προβολική παραμόρφωση που εφαρμόζεται και στην προβαλλόμενη γεωμετρία, προκαλώντας την οδόντωση που περιγράφεται στην Ενότητα 13.4.1.

Με την PSM, η εικόνα σκιών δειγματοληπτεί ομοιόμορφα τη γεωμετρία, αφού όμως η τελευταία έχει παραμορφωθεί από τον προβολικό μετασχηματισμό (Σχήμα 13.17, κάτω). Επομένως, σε επιφάνειες κοντά στον παρατηρητή, υπάρχει μεγαλύτερη λεπτομέρεια στην εικόνα σκιών καθώς αυτές φαίνονται μεγαλύτερες στον ΚΧΟ. Όταν τα fragments από την οπτική γωνία του παρατηρητή μετασχηματίζονται στο χώρο της εικόνας σκιών, η αντιστοίχισή τους με την εικόνα είναι πιο ομοιόμορφη, μιας και δε μεσολαβεί η αντιστροφή της προβολής του παρατηρητή.

Το προφανές μειονέκτημα της μεθόδου PSM είναι η ανάγκη για ενημέρωση της

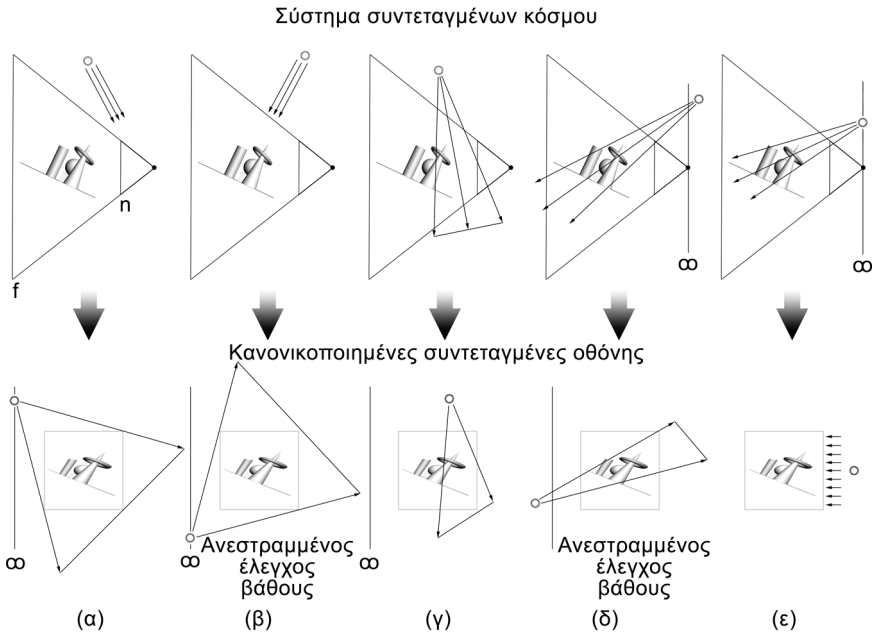


Σχήμα 13.17: *Οι προοπτικές εικόνες σκιών καταγράφουν τον καταχωρητή βάθους του φωτός αφού πρώτα τόσο η γεωμετρία όσο και η φωτεινή πηγή έχουν μετασχηματιστεί στον κανονικοποιημένο χώρο οθόνης. Φαινόμενα ταύτισης (οδόντωση) εξαιτίας της προοπτικής μεγέθυνσης ελαττώνονται σημαντικά.*

εικόνας σκιών όταν αλλάξει σημαντικά η θέση του παρατηρητή, έστω και αν δεν κινείται ούτε το φως ούτε η γεωμετρία. Στην πράξη όμως, σε εφαρμογές πραγματικού χρόνου σπάνια συναντάμε αποκλειστικά στατικά περιβάλλοντα· οπότε έτσι κι αλλιώς θα χρειαστεί να ενημερώνουμε συχνά τις εικόνες σκιών.

Τα οφέλη από τη χρήση των προοπτικών εικόνων σκιών έχουν το αντίτιμό τους. Η μέθοδος PSM είναι πολύ πιο περίπλοκος αλγόριθμος από την κλασική μέθοδο εικόνων σκιών. Η επιπρόσθετη πολυπλοκότητα προκύπτει από την ανάγκη να εξετάζουμε ως ξεχωριστή περίπτωση την κάθε σχετική τοποθέτηση φωτεινής πηγής ως προς τον παρατηρητή, διαφοροποιώντας δε το τι συμβαίνει ανάλογα με το αν έχουμε σημειακή ή κατευθυντική πηγή (Σχήμα 13.18) [Stam02].

Όταν μετασχηματίζουμε την πυραμίδα αποκοπής της φωτεινής πηγής από συντεταγμένες κόσμου σε ΚΧΟ, οι παράλληλες ακτίνες μιας πηγής στο άπειρο μετατρέπονται σε αποκλίνουσες ή συγκλίνουσες. Στον ΚΧΟ, οι ακτίνες αποκλίνουν από ένα σημείο στο επίπεδο στο «άπειρο», όταν έχουμε κατευθυντική πηγή κόντρα στη διεύθυνση παρατήρησης. Στο σημείο αυτό τοποθετείται μια σημειακή πηγή που αντικαθιστά την κατευθυντική (Σχήμα 13.18(α)). Όταν η κατευθυντική πηγή είναι ομόρροπη με τη διεύθυνση παρατήρησης, οι ακτίνες της πηγής συγκλίνουν σ' ένα σημείο στο επίπε-

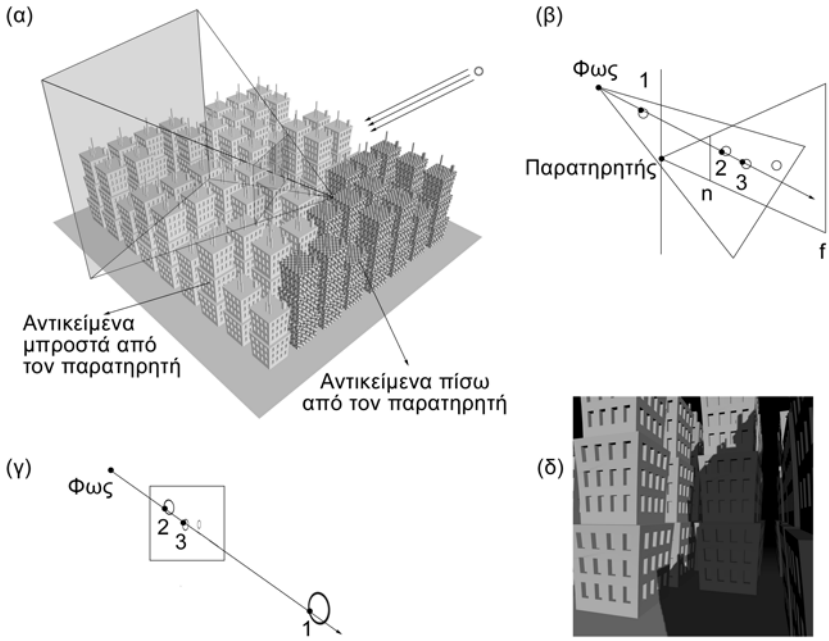


Σχήμα 13.18: *Διαφορετικές διατάξεις για τη φωτεινή πηγή στον ΚΧΟ για τον αλγόριθμο προοπτικών εικόνων σκιών. (α) Κατευθυντική πηγή απέναντι από τον παρατηρητή. (β) Κατευθυντική πηγή ομόροπη με τη διεύθυνση παρατήρησης. (γ) Σημειακή πηγή μπροστά από τον παρατηρητή. (δ) Σημειακή πηγή πίσω από τον παρατηρητή. (ε) Σημειακή πηγή στο «άπειρο» (επίπεδο $z = 0$ στο σύστημα συντεταγμένων του παρατηρητή).*

δο στο άπειρο στον ΚΧΟ (Σχήμα 13.18(β)). Από τεχνικής πλευράς, αυτό επιτυγχάνεται με την τοποθέτηση μιας σημειακής πηγής στο σημείο σύγκλισης και την αντιστροφή του εύρους τιμών βάθους της εικόνας σκιών.

Μια παρόμοια διαφοροποίηση συμβαίνει όταν έχουμε να δείξουμε σκιές από σημειακές πηγές. Σημειακές πηγές μπροστά από τον παρατηρητή παραμένουν ως έχουν (Σχήμα 13.18(γ)), ενώ φώτα πίσω από το επίπεδο παρατήρησης αντιστρέφονται και απεικονίζονται στο επίπεδο στο άπειρο (Σχήμα 13.18(δ)). Τέλος, φώτα ακριβώς πάνω στο επίπεδο παρατήρησης γίνονται φώτα στο άπειρο στον ΚΧΟ (Σχήμα 13.18(ε)).

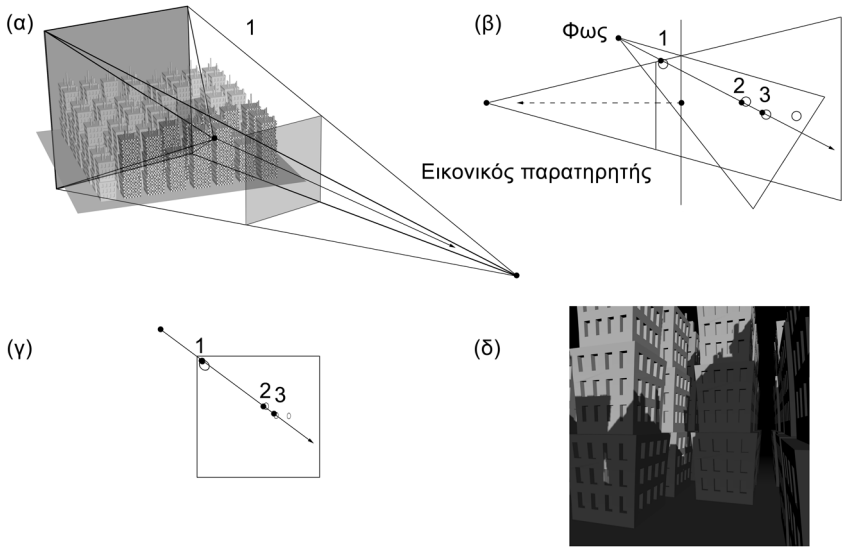
Ο προοπτικός μετασχηματισμός του κόσμου ως προς τον παρατηρητή πριν καταγραφεί η εικόνα σκιών έχει μια παρενέργεια. Αντικείμενα που βρίσκονται μέσα στο πεδίο παρατήρησης του φωτός και δρουν ως παρεμποδιστές αλλά βρίσκονται πίσω από το πεδίο παρατήρησης της κάμερας, θα μεταφερθούν μετά τον προοπτικό μετασχηματισμό «πέρα από το επίπεδο στο άπειρο» (Σχήμα 13.19). Σε ΚΧΟ πια, θα αντιμετατεθεί



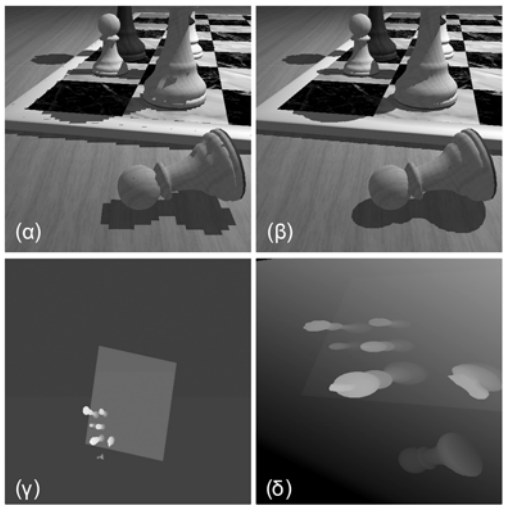
Σχήμα 13.19: *Προβλήματα διάταξης της μεθόδου PSM στον ΚΧΟ. (α) Κάποιοι παρεμποδιστές μπορεί να βρίσκονται πίσω από το επίπεδο παρατήρησης. (β) Η επιθυμητή ταξινόμηση των παρεμποδιστών και σκιαζόμενων επιφανειών — συμπεριλαμβανόμενων και των αντικειμένων πίσω από τον παρατηρητή. (γ) Τα αντικείμενα πίσω από τον παρατηρητή οδηγούνται «πέρα από το επίπεδο στο άπειρο» στον ΚΧΟ και ταξινομούνται με λανθασμένη σειρά ως προς τον παρατηρητή. (δ) Απώλεια σκιών εξαιτίας λανθασμένης ταξινόμησης βάθους των παρεμποδιστών.*

έτσι η σειρά τους ως προς τα αντικείμενα μπροστά από την κάμερα (Σχήμα 13.19(γ)), προκαλώντας απώλεια ή κακή τοποθέτηση σκιών (Σχήμα 13.19(δ)).

Στο πρωτότυπο άρθρο [Stam02], οι συγγραφείς προτείνουν να μετακινηθεί προς τα πίσω το σημείο παρατήρησης έτσι ώστε το πεδίο παρατήρησης να περιλαμβάνει όλους τους παρεμποδιστές (εικονική κάμερα) (Σχήμα 13.20). Η αλλαγή αυτή επιδρά προφανώς μόνο στον υπολογισμό της εικόνας σκιών και όχι στην κανονική σχεδίαση επί της οθόνης. Αυτή η πράξη επιβαρύνει τον αλγόριθμο με το κόστος του υπολογισμού των ορίων των παρεμποδιστών και του νέου όγκου αποκοπής. Επιπλέον, η μετακίνηση του παρατηρητή προς τα πίσω, μειώνει την προοπτική παραμόρφωση, η οποία πια δεν ανταποκρίνεται ακριβώς σε αυτή που θα δούμε τελικά και υποβιβάζει την αποτελεσματικότητα της μεθόδου. Ο Kozlov [Kozl04] προτείνει μια πιο πρακτική υλοποίηση του αλγόριθμου PSM, στην οποία η μετακίνηση της κάμερας αντικαθίσταται από έναν ειδικό πίνακα προοπτικής προβολής, ο οποίος διασφαλίζει τη σωστή διάταξη των αντικειμένων. Στο Σχήμα 13.21 παρουσιάζονται συγκριτικά αποτελέσματα μεταξύ της τυπικής μεθόδου εικόνων σκιών και της PSM.



Σχήμα 13.20: *Η εικονική κάμερα της τροποποιημένης μεθόδου PSM. (α), (β) Ο παρατηρητής μετακινείται προς τα πίσω στον ΚΧΟ ώστε η πυραμίδα αποκοπής να περιλαμβάνει όλους τους παρεμποδιστές μπροστά του. (γ) Η ταξινόμηση βάθους για όλα τα αντικείμενα γίνεται σωστά. (δ) Διορθωμένες σκιές.*



Σχήμα 13.21: *Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ της κανονικής μεθόδου εικόνων σκιών και της μεθόδου προοπτικών εικόνων σκιών. (α) Τελική εικόνα με εικόνες σκιών. (β) Τελική εικόνα με PSM. (γ) Τυπική εικόνα σκιών. (δ) PSM. (Οι εικόνες παραχωρήθηκαν από τους M. Stamminger και G. Drettakis).*

13.5 Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο μάσκας σκιών Z-fail, υλοποιείστε μια επέκτασή του η οποία να υποστηρίζει φωτεινές πηγές μη αμελητέου εμβαδού (σφαιρικές και παραλληλόγραμμες). *Βοήθεια:* Επιλέξτε κατάλληλα σημεία πάνω στη φωτεινή πηγή και χρησιμοποιείστε τα ως πολλαπλές πηγές. Πώς πρέπει να ρυθμιστεί η φωτεινότητά τους; Πώς πρέπει να αναμιχθούν τα διαδοχικά περάσματα του αλγόριθμου ώστε να δημιουργήσουν παρασκιά;

2. Ποιόν αλγόριθμο παραγωγής σκιών θα χρησιμοποιούσατε για να σχεδιάσετε ένα πυκνό δάσος και γιατί; Από τι είδους ειδικές βελτιώσεις μπορεί να επωφεληθεί η περίπτωση αυτή;

3. Αν οι σκιές συνοδεύονταν από ογκομετρικά φώτα (π.χ. ηλιαχτίδες που περνούν ανάμεσα από τα σύννεφα), ποιόν αλγόριθμο θα χρησιμοποιούσατε και πώς θα συνδυάζατε τα δύο αποτελέσματα σ' έναν ενοποιημένο αλγόριθμο για οικονομία;

4. Αν για μια σκηνή με πολύ μεγάλη λεπτομέρεια στα αντικείμενα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε χαμηλής ακρίβειας αόρατους αντικαταστάτες (proxy objects) ειδικά για την εκπομπή σκιών, αντί για την κανονική γεωμετρία, ποια προβλήματα θα προέκυπταν και πως θα μπορούσαν να αντιμετωπιστούν; *Βοήθεια:* Τι συμβαίνει στις σκιές μεταξύ αντικαταστάτη και κανονικής γεωμετρίας για το ίδιο αντικείμενο στην περίπτωση της πρόκλησης σκιών στον εαυτό του;

5. Υλοποιείστε έναν αλγόριθμο εικόνας σκιών για σημειακές (πανκατευθυντικές) πηγές φωτός.

14

Υφή

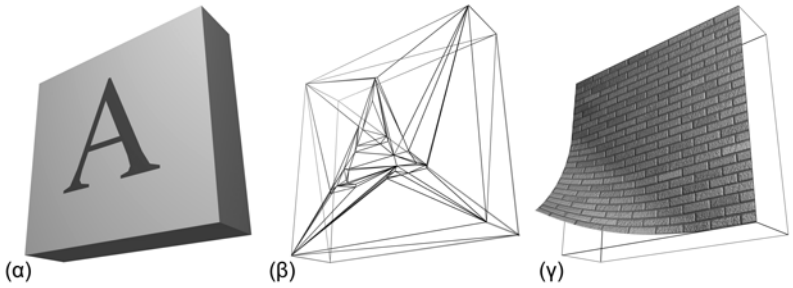
Η εικόνα αποκτά γοητεία όταν κάθε χρώμα
είναι διαφορετικό από κάθε διπλανό του.
—Leon Battista Alberti

14.1 Εισαγωγή

Έως εδώ, ορίσαμε τις ιδιότητες του υλικού μιας επιφάνειας και είδαμε ότι είναι δυνατό να αναθέσουμε πληροφορία χρώματος ξεχωριστά σε κάθε κορυφή των πολυγώνων που την απαρτίζουν. Ακόμη, ανακαλύψαμε ένα μηχανισμό για τη διαμόρφωση του παρεμβλημένου χρώματος — σύμφωνα με κάποιο μοντέλο φωτισμού και την ορατότητα του φωτός — έτσι ώστε να πάρουμε μια φυσιολογικά φωτισμένη, τριδιάστατη εικόνα για την απεικονιζόμενη σκηνή. Το χρώμα και οι υπόλοιπες ιδιότητες του υλικού ανατίθενται στις κορυφές πολυγώνων και παρεμβάλλονται σε ολόκληρη την επιφάνειά τους κατά τη σάρωση. Δυστυχώς όμως σε ένα πραγματικό περιβάλλον, είναι σχεδόν απίθανο να συναντήσουμε επιφάνειες με τέτοια αργή μεταβολή των χαρακτηριστικών του υλικού. Στην πράξη, μπορούμε να εντοπίσουμε λεπτομέρειες, μοτίβα ή ατέλειες σε οποιαδήποτε φυσική επιφάνεια, από την πλέον λεία και αδιάφορη, μέχρι την πιο περίπλοκη. Ο εντοπισμός και η αντίληψη αυτών των χρωματικών παραλλαγών πάνω σε αντικείμενα και υλικά μας βοηθάει να ξεχωρίσουμε τις φυσικές ιδιότητες τους και να τα αναγνωρίσουμε.

Συχνά, ασυνέχειες και μεταβάσεις στην εμφάνιση των επιφανειών είναι δυνατό να αναπαρασταθούν ως μεταβολές στη δομή της γεωμετρίας ή των ιδιοτήτων των κορυφών των πολυγώνων. Πολλές φορές μάλιστα, στην περίπτωση απλών και ευδιάκριτων σχεδίων, αυτός είναι ο πιο αποδοτικός και ακριβής τρόπος διαμόρφωσης της όψης μιας επιφάνειας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 14.1(α). Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, ένα παραλληλόγραμμο κόβεται στα όρια ενός εμφυτευμένου γεωμετρικού σχεδίου σε σχήμα «Α» διαφορετικού χρώματος (Σχήμα 14.1(β)). Αλλά πώς θα αντιμετωπίσουμε την περίπτωση ενός πιο άμορφου και περίπλοκου μοτίβου, όπως το υλικό του Σχήματος 14.1(γ); Είναι σαφές ότι χρειαζόμαστε μια διαφορετική προσέγγιση για να διαμορφώσουμε την τοπική συμπεριφορά ενός υλικού σε κάθε σημείο μιας επιφάνειας.

Η *απόδοση υφής* είναι ο μηχανισμός της χωρικής διαμόρφωσης των χαρακτηριστικών του υλικού μιας επιφάνειας με προκαθορισμένο τρόπο, χωρίς καμία επίδραση στην ίδια τη γεωμετρία της (Σχήμα 14.1(γ)). Αυτά τα χαρακτηριστικά μπορούν να είναι



Σχήμα 14.1: *Διαμόρφωση της εμφάνισης μιας επιφάνειας. Ένα απλό μοτίβο (α) μπορεί να προσεγγισθεί με αναδόμηση της γεωμετρίας (β). Σύνθετα μοτίβα όμως δε μπορούν να παρασταθούν με αυτό τον τρόπο. Χρησιμοποιώντας απεικόνιση υφής (γ), ένα πολύπλοκο σχέδιο μπορεί να αποτυπωθεί στην επιφάνεια χωρίς να πειραχθεί η γεωμετρία της.*

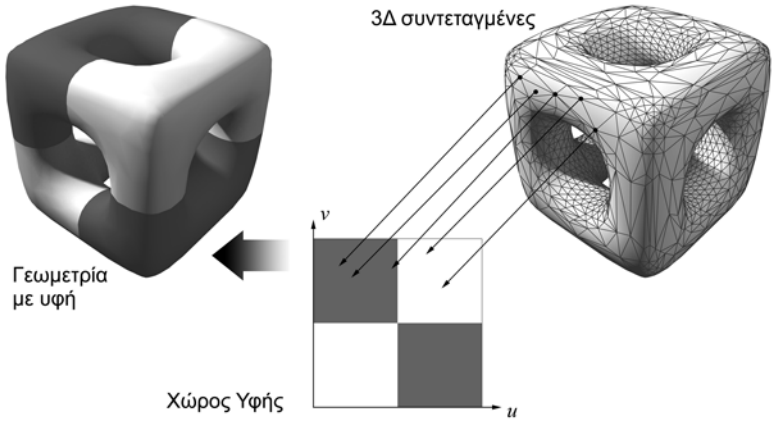
οποιαδήποτε, από χρώμα και διαφάνεια, μέχρι το κανονικό διάνυσμα και την ανακλαστικότητα σε κάθε σημείο. Ο συσχετισμός μεταξύ ενός δεδομένου σημείου μιας επιφάνειας $\mathbf{p}$ (ή κάποιας από τις τοπικές του ιδιότητες όπως το κανονικό του διάνυσμα) και μιας τιμής για το υλικό από το χώρο της υφής (δηλαδή το πεδίο ορισμού του μοτίβου) πραγματοποιείται μέσω μιας *συνάρτησης απεικόνισης υφής* $f_{\text{tex}}(\mathbf{p})$.

Το μοτίβο αυτό καθαυτό μπορεί να παριστάνεται ως ψηφιακή εικόνα μίας, δύο ή τριών διαστάσεων (*εικόνα υφής*) ή ως ένα αλγοριθμικά ορισμένο σχέδιο. Ανάλογα με το ποιο χαρακτηριστικό του υλικού επηρεάζει η απεικόνιση υφής, το αποτέλεσμα μπορεί να είναι βαθμωτό (όπως στην περίπτωση της διαμόρφωσης της διαφάνειας ή του συντελεστή κατοπτρικής ανακλαστικότητας) ή διανυσματικό, χρησιμεύοντας ως συνιστώσα χρώματος (RGB), κανονικό διάνυσμα, κλπ. Σε μια επιφάνεια μπορούν να εφαρμοστούν πολλαπλές εικόνες υφής, προκειμένου να διαμορφωθούν χωριστά περισσότερες από μία παράμετροι του υλικού της. Αντίστοιχα, διαφορετικές συναρτήσεις και εικόνες υφής μπορούν να συνδυαστούν για να παράγουν το αποτέλεσμα για ένα διαμορφούμενο χαρακτηριστικό, χρησιμοποιώντας ιεραρχίες υφής . Για λεπτομέρειες σχετικά με αυτό το θέμα, μπορείτε να ανατρέξετε στην Ενότητα 14.9.

14.2 Παραμετρική απεικόνιση υφής

Όταν το μοτίβο για ένα χαρακτηριστικό του υλικού είναι μια προκαθορισμένη ψηφιακή εικόνα, η διαδικασία της απεικόνισης υφής ονομάζεται *απόδοση εικόνων υφής* (*texture mapping*). Οι εικόνες υφής (textures), μπορούν να είναι μονοδιάστατες, διδιάστατες ή τριδιάστατες και υλοποιούνται ως καταχωρητές εικόνας με προϋπολογισμένα δεδομένα· τους καταχωρητές αυτούς τους διευθυνσιοδοτεί η συνάρτηση απεικόνισης για να πάρει μια τιμή για την υφή.

Στην *παραμετρική απεικόνιση υφής*, η συνάρτηση απεικόνισης χωρίζεται σε δύο μέρη: ένα που συσχετίζει τις τριδιάστατες Καρτεσιανές συντεταγμένες με τον παραμετρικό χώρο της ψηφιακής εικόνας υφής και ένα που προσδιορίζει την τελική τιμή για το χαρακτηριστικό του υλικού (βαθμωτό ή διανυσματικό), σύμφωνα με τη χρωματι-



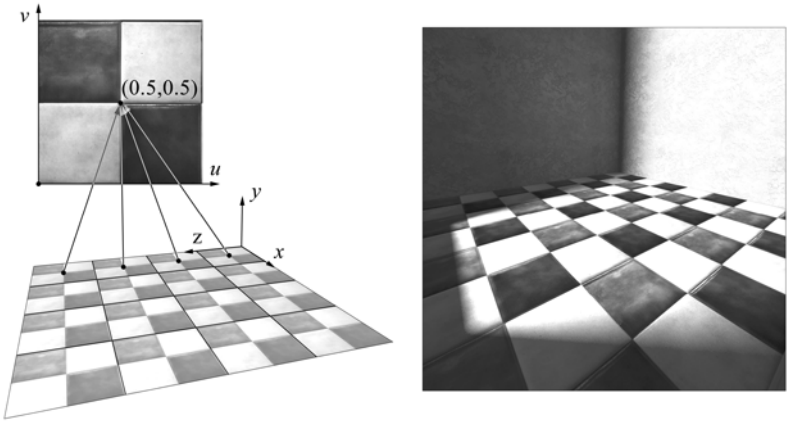
Σχήμα 14.2: *Παραμετρική απεικόνιση υφής. Οι Καρτεσιανές συντεταγμένες απεικονίζονται σε συντεταγμένες υφής και στη συνέχεια η τιμή ενός χαρακτηριστικού του υλικού υπολογίζεται από τις διακριτές τιμές των texels και εφαρμόζεται στο αντίστοιχο σημείο της επιφάνειας.*

κή ένταση του εικονοστοιχείου που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο ζεύγος παραμέτρων (Σχήμα 14.2). Τα διακριτά κελιά της εικόνας υφής (εικονοστοιχεία στην περίπτωση 2Δ ψηφιακής εικόνας) αποκαλούνται *texels*. Το πεδίο ορισμού για την υφή είναι συνήθως ένας κανονικοποιημένος υποχώρος T^D, του παραμετρικού D-διάστατου χώρου του σχεδίου ($D = 2$ για τις συνήθεις διδιάστατες εικόνες). Οι συνεχείς κανονικοποιημένες παράμετροι αποκαλούνται *συντεταγμένες υφής* (*texture coordinates*). Η απεικόνιση των τριδιάστατων συντεταγμένων στο χώρο της υφής αποδίδει συντεταγμένες, οι οποίες είναι περιορισμένες στο διάστημα [0,1] είτε με αποκοπή είτε με αναδίπλωση. Για λόγους απλότητας περιγραφής στο υπόλοιπο κείμενο, όπου αναφέρεται εικόνα υφής, θα εννοείται ένα διδιάστατο μοτίβο με παραμέτρους υφής $u, v \in [0, 1]$.

Ένα σημαντικό στοιχείο για την απεικόνιση υφής είναι ότι ένα ζεύγος συντεταγμένων υφής δεν είναι απαραίτητα συσχετισμένο αμφιμονοσήμαντα με ένα αντίστοιχο σημείο επιφάνειας. Αυτό καθιστά οικονομικότερη και ευκολότερη την εφαρμογή ενός περιοδικού μοτίβου καθώς η υφή μπορεί να επαναλαμβάνεται, αντιστοιχίζοντας το ίδιο εύρος παραμέτρων (u, v) σε πολλαπλά τμήματα επιφάνειας (*texture tiling*). Η παραπάνω ιδέα επιδεικνύεται στο Σχήμα 14.3.

Όταν εξασφαλίζουμε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από ολόκληρη την επιφάνεια ενός αντικειμένου σε μια εικόνα υφής, τότε το αποτέλεσμα της απεικόνισης και η ίδια η εικόνα υφής αποκαλούνται *άτλαντας υφής*. Αυτή η ειδική περίπτωση, κατά την οποία είναι εφικτή η αντίστροφη απεικόνιση από το χώρο της υφής σε καρτεσιανές συντεταγμένες, έχει πολλές χρήσιμες εφαρμογές οι οποίες θα συζητηθούν μαζί με τον τρόπο κατασκευής ενός άτλαντα υφής στην Ενότητα 14.8.

Ο υπολογισμός της τελικής παραμέτρου της υφής από τις αντίστοιχες τιμές των διακριτών texels με βάση τις συνεχείς συντεταγμένες υφής, πραγματοποιείται με συνήθεις μεθόδους, όπως η αποκοπή δεκαδικών ψηφίων, η στρογγυλοποίηση και η παρεμβολή, οι οποίες και υλοποιούνται πλήρως με πολύ γρήγορα κυκλώματα στους σύγ-



Σχήμα 14.3: *Επαναλαμβανόμενη υφή. Πολλαπλά σημεία πάνω στην επιφάνεια αντιστοιχίζονται περιοδικά με τις ίδιες παραμέτρους υφής, έχοντας ως αποτέλεσμα την αποδοτική κάλυψη μιας μεγάλης περιοχής μ' ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο.*

χρονους επεξεργαστές γραφικών.

14.2.1 Υπολογισμός τιμής υφής

Έστω μια εικόνα υφής διαστάσεων $N_x \times N_y$ texels, η οποία δειγματοληπτείται σ' ένα τυχαίο παραμετρικό σημείο (u, v) και $I(u, v)$ η αντίστοιχη τιμή – μονοχρωματικής – έντασης. Η ένταση $I(u, v)$ μπορεί να υπολογιστεί με διγραμμική παρεμβολή σύμφωνα με τη διαδικασία που ακολουθεί.

Η ζητούμενη ένταση εξάγεται από τα πλησιέστερα τέσσερα texels στο ζεύγος παραμέτρων εισόδου (Σχήμα 14.4). Οι μη ακέραιες συντεταγμένες σε μονάδες texels x και y, οι οποίες αντιστοιχούν στο ζεύγος παραμέτρων (u, v), δίνονται από τη σχέση:

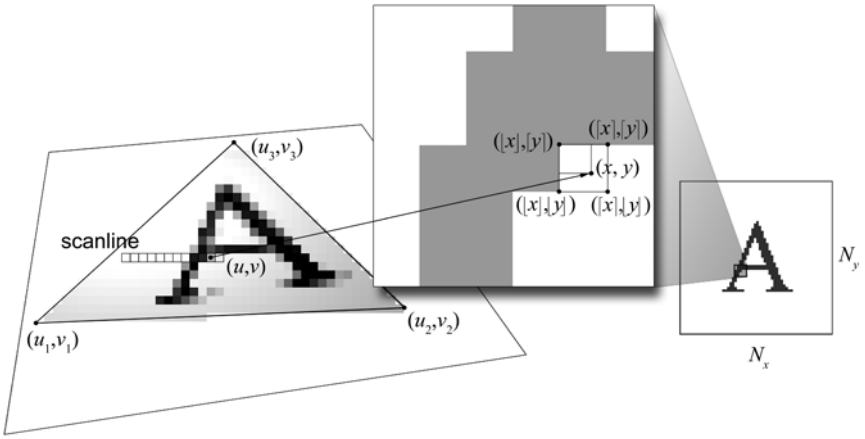
$$\begin{aligned} x &= u \cdot N_x, \\ y &= v \cdot N_y. \end{aligned} \tag{14.1}$$

Οι συντελεστές για την κατά γραμμές και την κατά στήλες παρεμβολή μεταξύ texels είναι αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} u' &= x - \lfloor x \rfloor, \\ v' &= y - \lfloor y \rfloor, \end{aligned} \tag{14.2}$$

όπου $(\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor)$ είναι το κοντινότερο, κάτω αριστερό κέντρο texel ως προς το σημείο (x, y) πάνω στην εικόνα. Η παράμετρος u' τείνει προς το 0 ή το 1 ανάλογα με το αν το x πλησιάζει αντίστοιχα προς το $\lfloor x \rfloor$ ή το $\lceil x \rceil$. Το ίδιο ισχύει και για τη σχέση που έχει η παράμετρος v' και το y.

Η τελική ένταση $I(u, v)$ από τη διγραμμική παρεμβολή κατά γραμμές και στήλες της έντασης στα τέσσερα κέντρα των γειτονικών texels $(\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor)$, $(\lceil x \rceil, \lfloor y \rfloor)$,



Σχήμα 14.4: *Υπολογισμός τιμής υφής για ένα τυχαίο ζεύγος παραμέτρων (u, v). Κατά τη σχεδίαση πολυγώνων, οι συντεταγμένες υφής παρεμβάλλονται από τις αντίστοιχες παραμέτρους που είναι αποθηκευμένες στις κορυφές τους.*

$(\lceil x \rceil, \lceil y \rceil)$ και $(\lfloor x \rfloor, \lceil y \rceil)$ είναι:

$$I_{\text{bot}} = I(\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor) \cdot (1 - u') + I(\lceil x \rceil, \lfloor y \rfloor) \cdot u',$$

$$I_{\text{top}} = I(\lfloor x \rfloor, \lceil y \rceil) \cdot (1 - u') + I(\lceil x \rceil, \lceil y \rceil) \cdot u',$$

$$I(u, v) = I_{\text{bot}} \cdot (1 - v') + I_{\text{top}} \cdot v'. \tag{14.3}$$

14.2.2 Εφαρμογή υφής σε πολυγωνικές επιφάνειες

Η συνήθης πρακτική, τουλάχιστον για την απεικόνιση πολυγωνικών επιφανειών, είναι το να εκτελείται το πρώτο στάδιο της διαδικασίας απεικόνισης υφής· δηλαδή ο προσδιορισμός των παραμέτρων (u, v) πριν την ίδια τη σχεδίαση των πολυγώνων. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, σε ένα πολύγωνο οι διάφορες ιδιότητες του υλικού αποθηκεύονται ως πληροφορία σε καθεμία κορυφή του. Το ίδιο ισχύει και για τις συντεταγμένες υφής, οι οποίες ανατίθενται στις κορυφές πριν ξεκινήσει η σχεδίαση των πολυγώνων. Κατά τη σάρωση των τριγώνων κατά γραμμές, οι συντεταγμένες υφής σε κάθε δειγματοληπτημένο εσωτερικό σημείο του τριγώνου παρεμβάλλονται από την πληροφορία των κορυφών, με μόνη εξαίρεση την περίπτωση της συναρτησιακής υφής και το δυναμικό υπολογισμό συντεταγμένων υφής. Στην τελευταία περίπτωση, οι συντεταγμένες υφής προσδιορίζονται από τα τοπικά χαρακτηριστικά σχεδίασης, όπως το κανονικό διάνυσμα και η κατεύθυνση φωτισμού, τα οποία υπολογίζονται με παρεμβολή τιμών από τις κορυφές.

Η διγραμμική παρεμβολή για τον υπολογισμό των παραμέτρων (u, v) εκτελείται κατά τη σάρωση των πολυγώνων, ανάλογα με τον υπολογισμό του τοπικού χρώματος και του βάθους σε κάθε fragment από το χρώμα και το βάθος των μετασχηματισμένων σημείων (βλ. Κεφάλαια 12 και 5). Δυστυχώς, η απευθείας παρεμβολή των συντεταγ-

μένων υφής μεταξύ των κορυφών (διγραμμική απεικόνιση) δεν λαμβάνει υπόψη τον προοπτικό μετασχηματισμό που υφίστανται οι γεωμετρικές συντεταγμένες των κορυφών. Οι παράμετροι υφής ανατίθενται μεν στις κορυφές των πολυγώνων, αλλά δε μετασχηματίζονται όταν τα πολύγωνα προβάλλονται. Στη συνέχεια, κατά τη σάρωση των πολυγώνων, οι ορθά (προοπτικά) μετασχηματισμένες κορυφές παρεμβάλλονται γραμμικά και χρησιμοποιώντας τους ίδιους συντελεστές παρεμβολής παρεμβάλλονται και οι συντεταγμένες υφής. Όμως, αντίθετα με τις απαιτήσεις ενός προοπτικού μετασχηματισμού, οι τελευταίες δε διαιρούνται με την τιμή βάθους. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να προκύπτει ασυνεπής απεικόνιση υφής (διγραμμική-προοπτική έναντι απλής διγραμμικής απεικόνισης), η οποία και εμφανίζεται με τη μορφή τραβήγματος, σκισίματος ή αιώρησης της υφής πάνω στη γεωμετρία [Heck89].

Ένας τρόπος να σχεδιαστούν σωστά οι εικόνες υφής από πλευράς προοπτικής είναι η παρεμβολή των συντεταγμένων (u, v) μετά τη διαίρεσή τους με την τιμή του βάθους z στο ίδιο σημείο. Η ποσότητα $1/z$ παρεμβάλλεται κι αυτή κατά τη σάρωση των προβεβλημένων τριγώνων. Έτσι, στη συνέχεια, οι προοπτικά ορθές συντεταγμένες υφής υπολογίζονται διαιρώντας τις u/z και v/z παραμέτρους εκ παρεμβολής με το $1/z$. Η ίδια τακτική μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλα χαρακτηριστικά των κορυφών του τριγώνου στα οποία δεν επιδρά άμεσα ο προοπτικός μετασχηματισμός, όπως στο χρώμα και στο κανονικό διάνυσμα, παρότι η παραμόρφωση είναι εμφανέστερη στην περίπτωση των συντεταγμένων υφής.

Αφού βρεθεί το ζεύγος (u, v) για το τρέχον σημείο σάρωσης του πολυγώνου, η τιμή της υφής καθορίζεται από τη μέθοδο δειγματοληψίας της εικόνας που έχουμε επιλέξει. Το Σχήμα 14.4 απεικονίζει την όλη διαδικασία εξαγωγής των συντεταγμένων υφής κατά τη σάρωση πολυγώνων και την διγραμμική παρεμβολή για την ανάκτηση της τιμής υφής. Στις σύγχρονες προγραμματιζόμενες GPUs, τα προγράμματα χρωματισμού των fragments μπορούν να προσπελάσουν και να τροποποιήσουν τις συντεταγμένες υφής οι οποίες προκύπτουν από τη σάρωση των πολυγώνων. Έτσι έχουμε τη δυνατότητα να υλοποιήσουμε οποιονδήποτε δικό μας τρόπο δειγματοληψίας του χώρου της υφής [Rost04].

Η διγραμμική παρεμβολή των συντεταγμένων υφής είναι εφικτή μόνο όταν πραγματοποιούμε προοδευτική σάρωση της επιφάνειας των πολυγώνων με ομοιόμορφο τρόπο ή όταν διαθέτουμε κάποια παραμετροποίηση των σημείων της επιφάνειας και αυτή συμπίπτει με την παραμετροποίηση της υφής. Αν πρέπει να υπολογιστεί ένα μεμονωμένο δείγμα υφής σε μια τυχαία θέση πάνω σ' ένα τρίγωνο, όπως για παράδειγμα συμβαίνει όταν στέλνουμε ακτίνες πάνω σε γεωμετρία και ανιχνεύουμε τομές, ο παραπάνω τυπικός μηχανισμός παρεμβολής δεν είναι βολικός. Στη θέση του, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την αναπαράσταση ενός τριγώνου με *βαρυκεντρικές συντεταγμένες*, η οποία απευθείας συσχετίζει οποιοδήποτε σημείο μέσα σ' ένα τρίγωνο με τις τρεις κορυφές του.

Έστω ότι $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ και $\mathbf{p}_3$ είναι οι τρεις κορυφές του τριγώνου $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3$. Οποιοδήποτε σημείο $\mathbf{p}$ στο επίπεδο του τριγώνου μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένας συσχετισμένος συνδυασμός αυτών των τριών σημείων βάσης:

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{p}_1 + \lambda_2 \mathbf{p}_2 + \lambda_3 \mathbf{p}_3, \tag{14.4}$$

με τον επιπρόσθετο περιορισμό,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1. \tag{14.5}$$

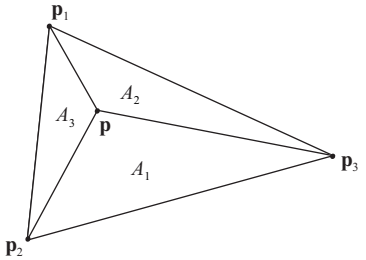
Σύμφωνα με την (14.5), το παραμετρικό διάστημα είναι ένα επίπεδο εμφυτευμένο στον $\mathbb{R}^3$, καθώς η μία παράμετρος εξαρτάται από τις άλλες δύο. Περιορίζοντας τα λ_1, λ_2 και λ_3 στο $[0,1]$, η *βαρυκεντρική μορφή του τριγώνου* της Εξίσωσης (14.4) γίνεται μια συνάρτηση που απεικονίζει ένα ισόπλευρο τρίγωνο του παραμετρικού χώρου ακριβώς στο εσωτερικό του τριγώνου $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3$ [Schn03].

Εξ ορισμού, από τις ιδιότητες (14.4) και (14.5) προκύπτει πως οι τρεις βαρυκεντρικές συντεταγμένες σχετίζονται απευθείας με τους λόγους του εμβαδού των εσωτερικών τριγώνων που σχηματίζονται από το σημείο $\mathbf{p}$ προς το ολικό εμβαδό του τριγώνου (Σχήμα 14.5):

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{A_1}{A} = \frac{A(\mathbf{p}p_2\mathbf{p}_3)}{A(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3)}, \\
\lambda_2 &= \frac{A_2}{A} = \frac{A(\mathbf{p}_1\mathbf{p}p_3)}{A(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3)}, \\
\lambda_3 &= 1 - \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{A_3}{A} = \frac{A(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p})}{A(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3)},
\end{aligned} \tag{14.6}$$

όπου $A(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3$.

Η παραπάνω ιδιότητα εξηγείται παραστατικά με το παράδειγμα που ακολουθεί. Ας πάρουμε όλα τα σημεία $\mathbf{p}$ πάνω σε μία ακμή του τριγώνου, έστω την $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$. Το σημείο $\mathbf{p}$ μπορεί να προκύψει με γραμμική παρεμβολή μεταξύ των δύο κορυφών της ακμής $\mathbf{p}_1$ και $\mathbf{p}_2$, ανεξάρτητα από το που είναι τοποθετημένη η τρίτη κορυφή $\mathbf{p}_3$. Αυτό σημαίνει αντίστοιχα ότι η βαρυκεντρική παράμετρος λ_3 πρέπει να είναι μηδενική. Και πράγματι, το εμβαδόν $A(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p})$ είναι μηδενικό, καθώς τα $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, και $\mathbf{p}$ είναι συγγραμμικά. Αντίστοιχα, όταν το $\mathbf{p}$ συμπίπτει με οποιαδήποτε από τις κορυφές $\mathbf{p}_i$, τότε το $A_i = A \Leftrightarrow \lambda_j = 0, j \neq i$.



Σχήμα 14.5: *Υπολογισμός των βαρυκεντρικών συντεταγμένων σημείου επί τριγώνου από τους λόγους των εμβαδών των εσωτερικών τριγώνων.*

Δεδομένου ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ανάλογο του μέτρου του εξωτερικού γινομένου δύο πλευρών του και πιο συγκεκριμένα, $A(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3) = \left|\overrightarrow{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2} \times \overrightarrow{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3}\right|/2$, οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες μπορούν να υπολογιστούν πιο βολικά, μετασχηματίζοντας την Εξίσωση (14.6) στην:

$$\lambda_1 = \frac{\left|\overrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{p}_2} \times \overrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{p}_3}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2} \times \overrightarrow{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_3}\right|}, \qquad \lambda_2 = \frac{\left|\overrightarrow{\mathbf{p}_1\mathbf{p}} \times \overrightarrow{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_3}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2} \times \overrightarrow{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_3}\right|}, \qquad \lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2. \tag{14.7}$$

Αφού υπολογίσουμε τις τρεις βαρυκεντρικές συντεταγμένες σε κάποιο τυχαίο σημείο από την Εξίσωση (14.7), οι συντεταγμένες υφής του (u, v) μπορούν να παρεμβληθούν από τις αποθηκευμένες συντεταγμένες υφής (u_i, v_i), $i = 1 \ldots 3$ στα δεδομένα των κορυφών $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3$:

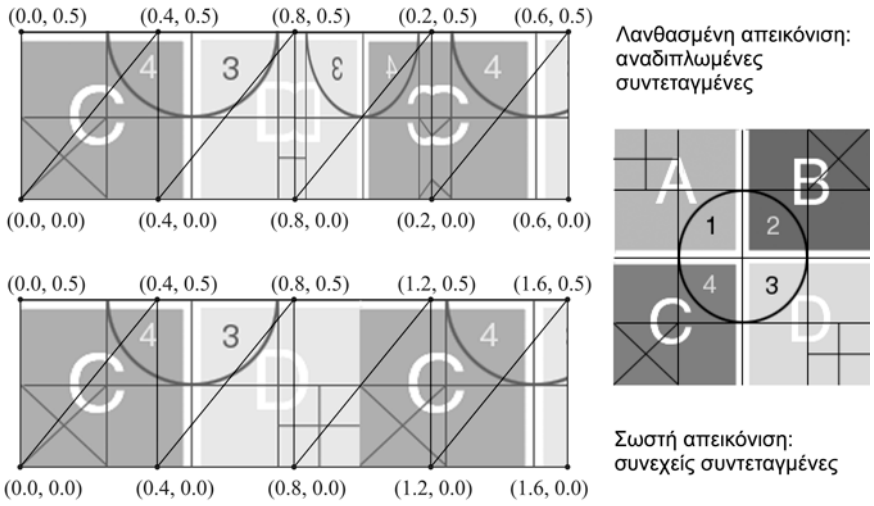
$$\begin{aligned} u &= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3, \\ v &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3. \end{aligned} \tag{14.8}$$

Ο αναγνώστης θα πρέπει να έχει υπόψη του πως, παρότι αυτή η μέθοδος υπολογισμού παραμέτρων είναι πολύ γενικότερη από τη διγραμμική παρεμβολή της σάρωσης κατά γραμμές, εντούτοις είναι πιο δαπανηρή και πρέπει να εφαρμόζεται όταν χειριζόμαστε μεμονωμένα σημεία, ή γενικά όταν δεν έχουμε στη διάθεσή μας κάποιον αλγόριθμο προοδευτικής σάρωσης της επιφάνειας του τριγώνου.

14.3 Δημιουργία συντεταγμένων υφής

Στην προηγούμενη ενότητα, παρουσιάστηκαν δύο μέθοδοι για τη δειγματοληψία και ανάκτηση των παραμέτρων υφής σ' ένα σημείο στο εσωτερικό ενός τριγώνου, δεδομένων των προϋπολογισμένων και αποθηκευμένων συντεταγμένων υφής στις τρεις κορυφές του. Οι συντεταγμένες υφής (u, v) μπορούν να αποδοθούν στις κορυφές είτε δυναμικά είτε με ανάθεση κατά το διάβασμα των δεδομένων του μοντέλου από ένα αρχείο. Εξαιρώντας την περίπτωση απευθείας εισαγωγής των τιμών για τις συντεταγμένες από το χρήστη, και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις οι παράμετροι u και v υπολογίζονται από το μοναδικό αντικειμενικό χαρακτηριστικό των κορυφών, τις Καρτεσιανές συντεταγμένες τους, με τη βοήθεια μιας *συνάρτησης απεικόνισης υφής*.

Μια συνάρτηση απεικόνισης υφής παρέχει έναν απλό μετασχηματισμό από το χώρο των Καρτεσιανών συντεταγμένων στο φραγμένο κανονικοποιημένο διάστημα του χώρου της υφής. Οι πιο διαδεδομένες συναρτήσεις απεικόνισης εκτελούν τη διαδικασία σε δύο βήματα. Σε πρώτη φάση, οι Καρτεσιανές συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου απεικονίζονται πάνω σε μια προκαθορισμένη βοηθητική επιφάνεια εμφυτευμένη στο χώρο, της οποίας το σχήμα καθορίζεται παραμετρικά. Μετά την απεικόνιση αυτή, οι νέες παράμετροι κανονικοποιούνται έτσι ώστε να αναπαριστούν συντεταγμένες υφής. Σε πιο αφαιρετική απόδοση, η ενδιάμεση παραμετρική επιφάνεια καθορίζει τον τρόπο που ένα επίπεδο «σεντόνι» τυλίγεται γύρω από το αρχικό αντικείμενο προκειμένου να αποτυπωθεί η εικόνα πάνω στην επιφάνειά του.



Σχήμα 14.6: *Λανθασμένη επανάληψη εικόνας υφής πάνω σε πολύγωνα. Η αναδίπλωση των συντεταγμένων υφής στο διάστημα [0,1] πριν την παρεμβολή μπορεί να προκαλέσει αντιστροφή της εικονιζόμενης μορφής κατά τη μετάβαση από συντεταγμένες υφής με μεγάλη τιμή σε αντίστοιχες με μικρή.*

Όταν έχουμε επαναληπτικότητα στην απεικόνιση του μοτίβου, ο τρόπος που παράγονται οι συντεταγμένες υφής αποτελεί κρίσιμο ζήτημα. Υπό φυσιολογικές συνθήκες, μια συνάρτηση απεικόνισης υφής αντιστοιχίζει ένα σημείο του χώρου στο φραγμένο παραμετρικό διάστημα της εικόνας $(u, v) : u \in [0,1], v \in [0,1]$. Η μαθηματική αναπαράσταση των μετασχηματισμών απεικόνισης υφής που παρατίθενται στο κεφάλαιο αυτό, περιλαμβάνει τον μηχανισμό αναδίπλωσης των συντεταγμένων όταν οι τελευταίες ξεπεράσουν την τιμή 1 σε οποιονδήποτε άξονα. Όταν οι συντεταγμένες που παράγονται, χρησιμοποιούνται μέσω παρεμβολής πάνω στις επιφάνειες, όπως στην περίπτωση της σάρωσης πολυγώνων, η αναδίπλωση στο φραγμένο διάστημα πρέπει να διεξάγεται *μετά* την παρεμβολή των συντεταγμένων υφής και όχι όταν ανατίθενται οι παράμετροι (u, v) στις κορυφές των πολυγώνων. Όταν μια παράμετρος αναδιπλώνεται στο διάστημα [0,1] πριν ανατεθεί σε μια κορυφή, η παρεμβλημένη τιμή της μεταξύ δύο κορυφών μπορεί να τύχει να αντιστραφεί, όπως επιδεικνύεται στο Σχήμα 14.6. Το πρόβλημα αυτό διορθώνεται αν αφήνουμε τις παραμέτρους u και v να λαμβάνουν τιμές έξω από το διάστημα [0,1]. Όπως θα δούμε και όταν μελετάμε ορισμένες συναρτήσεις απεικόνισης υφής, η επανάληψη μιας εικόνας επιτυγχάνεται πολύ απλά πολλαπλασιάζοντας το αποτέλεσμα της συνάρτησης με έναν παράγοντα που δηλώνει πόσες φορές εμφανίζεται το μοτίβο κατά μία διεύθυνση του παραμετρικού χώρου.

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε διεξοδικά κάποιες από τις συχνότερα χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις απεικόνισης συντεταγμένων υφής. Τα δύο πιο κοινά τοπικά χαρακτηριστικά μιας επιφάνειας, με βάση τα οποία παράγονται οι συντεταγμένες υφής, είναι το διάνυσμα θέσης και το κανονικό διάνυσμα σ' ένα σημείο. Φυσικά, κι άλλα τοπικά χαρακτηριστικά, όπως είναι η διεύθυνση πρόσπτωσης του φωτός, μπορούν να

αντιστοιχηθούν με τις παραμέτρους του χώρου της υφής. Αυτά χρησιμοποιούνται με παρόμοιο τρόπο με τις Καρτεσιανές συντεταγμένες σημείων επιφανείας και τα κανονικά διανύσματα.

14.3.1 Απεικόνιση σε επίπεδο

Πρόκειται για την απλούστερη συνάρτηση αντιστοίχισης σημείων σε συντεταγμένες (u, v). Φανταστείτε πως μια εικόνα προβάλλεται παράλληλα πάνω σε ένα αντικείμενο, στέλνοντας παράλληλες μεταξύ τους ακτίνες από έναν προβολέα που δείχνει την εικόνα υφής και οι οποίες διαπερνούν τις επιφάνειές του και φωτίζουν όλα τα σημεία με τα οποία τέμνονται. Όπως δηλώνει και το όνομά της, *η απεικόνιση σε επίπεδο* (*planar mapping*) χρησιμοποιεί ένα επίπεδο στο χώρο ως ενδιάμεση παραμετρική επιφάνεια. Οι Καρτεσιανές συντεταγμένες προβάλλονται παράλληλα πάνω στο επίπεδο και η παραμετρική αναπαράσταση των προβεβλημένων σημείων χρησιμοποιείται απευθείας ως ζεύγος παραμέτρων υφής. Παρότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοδήποτε επίπεδο στο χώρο, η επιλογή ενός επιπέδου προβολής που να είναι προσανατολισμένο με τους κύριους άξονες διευκολύνει σημαντικά τους υπολογισμούς. Προκειμένου τώρα να πετύχουμε μια προβολή προς ένα τυχαίο επίπεδο, είναι πιο αποδοτικό και κατανοητό διαισθητικά να ευθυγραμμίσουμε την προσανατολισμένη προς τους άξονες προβολή με το τυχαίο επίπεδο που θέλουμε, μετασχηματίζοντας τις Καρτεσιανές συντεταγμένες πριν τις προβάλουμε. Οι μετασχηματισμοί στο χώρο της υφής αναλύονται διεξοδικότερα στην Ενότητα 14.6.

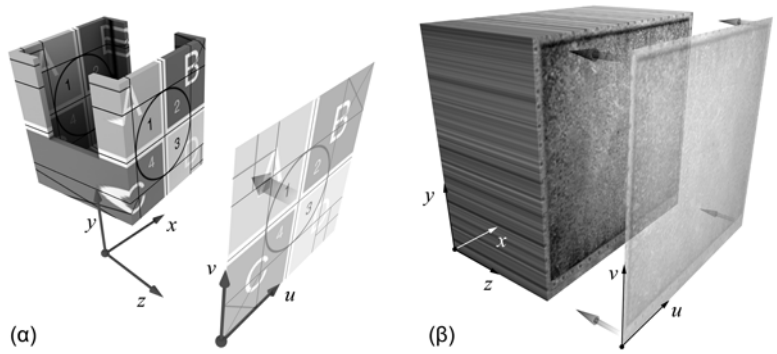
Προς το παρόν, ας θεωρήσουμε μια από τις τρεις απεικονίσεις πάνω σ' ένα από τα κύρια επίπεδα του χώρου και συγκεκριμένα την περίπτωση του επιπέδου xy που φαίνεται στο Σχήμα 14.7(α). Η συνάρτηση απεικόνισης των συντεταγμένων υφής είναι στην ουσία ένας γραμμικός μετασχηματισμός των Καρτεσιανών συντεταγμένων, καταργώντας τη z συνιστώσα και αναδιπλώνοντας τα αποτελέσματα στο διάστημα $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} u &= x' - \lfloor x' \rfloor \qquad & x' &= a \cdot x + \text{offset}_x \\ v &= y' - \lfloor y' \rfloor \qquad & y' &= b \cdot y + \text{offset}_y \end{aligned} \tag{14.9}$$

Στην Εξίσωση (14.9), οι a και b είναι αντίστοιχα οι πολλαπλασιαστές οριζόντιας και κάθετης επανάληψης, ενώ $(\text{offset}_x, \text{offset}_y)$ είναι η αρχή της εικόνας υφής σε σχέση με το σύστημα αξόνων του χώρου υφής. Οι πολλαπλασιαστές επανάληψης καθορίζουν πόσες φορές θα επαναληφθεί το μοτίβο μέσα σε μια μονάδα του ΣΣΚ σε κάθε άξονα. Με άλλα λόγια, οι διαστάσεις του παραλληλογράμμου της εικόνας υφής εκφρασμένες στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων είναι $(1/a, 1/b)$. Για την ανάθεση των συντεταγμένων υφής σε πολύγωνα, λαμβάνοντας υπόψη τα προβλήματα αναδίπλωσης που αναφέρθηκαν παραπάνω, θεωρούμε απλά:

$(u, v) = (x', y')$.

Η απεικόνιση σε επίπεδο είναι πολύ χρήσιμη στην απόδοση υφής σε πεπλατυσμένες και σχετικά επίπεδες περιοχές γεωμετρίας ή σε γεωμετρία που μπορεί να παρασταθεί με μορφή συνάρτησης: $z = f(x, y)$. Όσο πιο παράλληλη είναι μια γεωμετρική



Σχήμα 14.7: *Απεικόνιση σε επίπεδο χρησιμοποιώντας το επίπεδο xy. (α) Η παραμετροποίηση των συντεταγμένων υφής. (β) Απεικόνιση υφής στο επίπεδο για ένα κουτί προσανατολισμένο προς τους κύριους άξονες. Όλα τα σημεία με ίδιες συντεταγμένες x και y απεικονίζονται στην ίδια θέση πάνω στην εικόνα υφής.*

περιοχή στο επίπεδο προβολής, τόσο λιγότερο παραμορφώνεται το προβαλλόμενο μοτίβο. Στο Σχήμα 14.7(β), οι πλαϊνές πλευρές του κουτιού είναι κάθετες στο επίπεδο προβολής της υφής. Συνεπώς, όλα τα σημεία με ίδιες συντεταγμένες x και y απεικονίζονται στο ίδιο ζεύγος συντεταγμένων υφής. Στην πράξη, όταν ένας καλλιτέχνης μοντελοποιεί πολύπλοκα αντικείμενα, προσπαθεί να κατακερματίσει τις επιφάνειές τους σε ομάδες σχεδόν συνεπίπεδων περιοχών, έτσι ώστε να μπορέσει να εφαρμόσει μια απεικόνιση σε επίπεδο ξεχωριστά σε καθεμία. Η ίδια φιλοσοφία ακολουθείται και σε μία από τις τεχνικές αυτόματου κατακερματισμού επιφανειών για τη δημιουργία άτλαντα υφής, η οποία αναλύεται παρακάτω. Αντί για επιμέρους απεικονίσεις σε επίπεδο, μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια από τις εναλλακτικές συναρτήσεις απεικόνισης υφής που περιγράφονται στη συνέχεια.

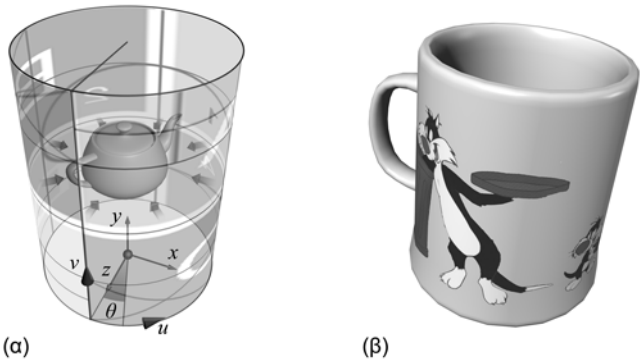
14.3.2 Απεικόνιση σε κύλινδρο

Σε αυτή την απεικόνιση, οι συντεταγμένες υφής υπολογίζονται με βάση τις κυλινδρικές συντεταγμένες ενός σημείου στο χώρο. Δεδομένου ενός σημείου $\mathbf{p} = (x, y, z)$, μια μορφή για τις κυλινδρικές συντεταγμένες είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1}(x/z), \\ h &= y, \\ r &= \sqrt{(x^2 + z^2)}, \end{aligned} \tag{14.10}$$

όπου θ είναι η δεξιόστροφη γωνία από τον άξονα z προς τον άξονα x, με $-\pi < \theta \leq \pi$, h είναι η κατακόρυφη απόσταση του σημείου από το επίπεδο xz και r είναι η ακτίνα ή απόσταση του $\mathbf{p}$ από τον άξονα y.

Το ζεύγος παραμέτρων (u, v) μπορεί να συσχετιστεί με οποιεσδήποτε δύο από τις κυλινδρικές συντεταγμένες της Εξίσωσης (14.10), όμως συνήθως, η u προκύπτει από



Σχήμα 14.8: *Απεικόνιση σε κύλινδρο κατά τον άξονα y. (α) Η παραμετροποίηση των συντεταγμένων υφής. (β) Ένα παράδειγμα κυλινδρικής απεικόνισης υφής.*

τη γωνία θ και η v υπολογίζεται από το ύψος h. Το αποτέλεσμα της απεικόνισης σε κύλινδρο μοιάζει σαν να τυλίγουμε μια φωτογραφία γύρω από έναν πολύ μακρύ σωλήνα (Σχήμα 14.8). Να σημειωθεί πως όλα τα σημεία με τον ίδιο προσανατολισμό και το ίδιο ύψος απεικονίζονται στο ίδιο σημείο στο χώρο της υφής, για οποιοδήποτε $r \in [0, \infty)$. Οι κυλινδρικές συντεταγμένες της Εξίσωσης (14.10) μετατρέπονται εύκολα σε συντεταγμένες υφής, με βάση τον ακόλουθο τύπο (Σχήμα 14.8(α)):

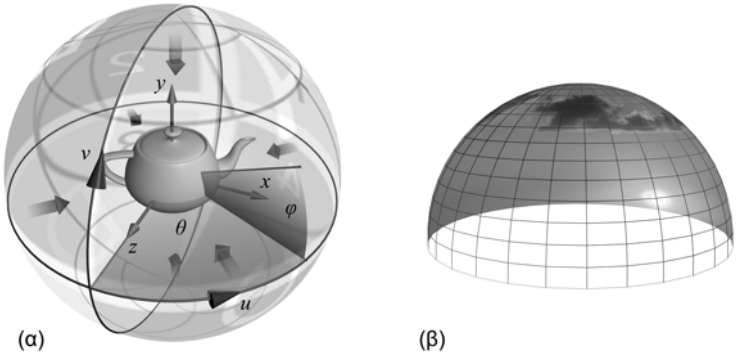
$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} + \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2} + \frac{\tan^{-1}(x/z)}{2\pi}, \\ v &= h = y. \end{aligned} \tag{14.11}$$

Η παραπάνω αναπαράσταση για τις συντεταγμένες (u, v) μπορεί να επαυξηθεί έτσι ώστε να περιλαμβάνει και τους πολλαπλασιαστές επανάληψης a και b αντίστοιχα γύρω από τον άξονα y και κατά μήκος αυτού:

$$\begin{aligned} u &= \frac{a\,(\theta + \pi)}{2\pi} - \left\lfloor \frac{a(\theta + \pi)}{2\pi} \right\rfloor, \\ v &= by - \lfloor by \rfloor\,. \end{aligned} \tag{14.12}$$

14.3.3 Απεικόνιση σε σφαίρα

Κατ' αναλογία με την κυλινδρική απεικόνιση, η συνάρτηση παραγωγής σφαιρικών συντεταγμένων υφής εξαρτάται από μια εναλλακτική αναπαράσταση συντεταγμένων ενός σημείου στο χώρο· συγκεκριμένα, από τις σφαιρικές συντεταγμένες του, (θ, φ, r). Αντίστοιχα με τις κυλινδρικές συντεταγμένες της Εξίσωσης (14.10), θ είναι ο οριζόντιος προσανατολισμός του σημείου, ενώ φ και r είναι η απόκλιση από το οριζόντιο επίπεδο και η απόσταση από το κέντρο των αξόνων. Οι σφαιρικές συντεταγμένες ενός σημείου $\mathbf{p} = (x, y, z)$ δίνονται από τη σχέση:



Σχήμα 14.9: *Απεικόνιση σε σφαίρα. (α) Η παραμετροποίηση των συντεταγμένων υφής. (β) Η χρήση συντεταγμένων υφής με απεικόνιση σε σφαίρα και μιας εικόνας απογευματινού ουρανού για απόδοση χρωματισμού πάνω σε έναν ουράνιο θόλο.*

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{x}{z}\right) && -\pi < \theta \leq \pi \\ \varphi &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}\right) && -\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \end{aligned} \tag{14.13}$$

Η παραγωγή συντεταγμένων υφής με απεικόνιση σε σφαίρα συνήθως αντιστοιχεί τις παραμέτρους υφής u και v με τις γωνιακές συνιστώσες της σφαιρικής αναπαράστασης (Σχήμα 14.9):

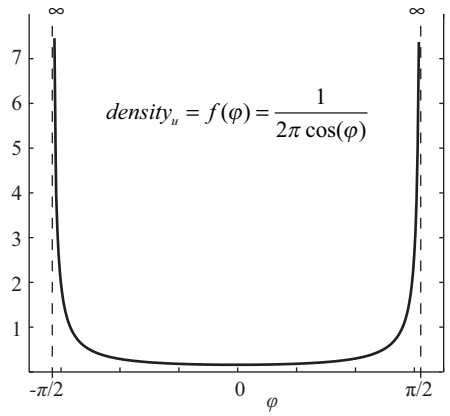
$$u = \frac{\theta + \pi}{2\pi}, \qquad v = \frac{\varphi + \pi/2}{\pi}. \tag{14.14}$$

Χρησιμοποιώντας και πολλαπλασιαστές επανάληψης (a, b) για τις δύο συντεταγμένες υφής u και v, η απεικόνιση σε σφαίρα γίνεται:

$$\begin{aligned} u &= \frac{a\,(\theta + \pi)}{2\pi} - \left\lfloor \frac{a\,(\theta + \pi)}{2\pi} \right\rfloor, \\ v &= \frac{b\,(\varphi + \pi/2)}{\pi} - \left\lfloor \frac{b\,(\varphi + \pi/2)}{\pi} \right\rfloor. \end{aligned} \tag{14.15}$$

Αυτή η πολύ κοινή απεικόνιση «τυλίγει» μια εικόνα γύρω από ένα αντικείμενο με τον ίδιο τρόπο που ένας παγκόσμιος χάρτης αποτυπώνεται πάνω σ' ένα μοντέλο της υδρογείου. Αυτό σημαίνει πως η χωρική ευκρίνεια των texels μεταβάλλεται ανάλογα με την κατακόρυφη απόκλιση του σημείου κι έχει ως αποτέλεσμα ισχυρή παραμόρφωση των απεικονιζόμενων μορφών στους πόλους, καθώς μια ολόκληρη γραμμή της εικόνας υφής καταλήγει να απεικονιστεί πάνω σ' ένα σημείο. Το φαινόμενο αυτό επιδεικνύεται στο Σχήμα 14.10.

Αντί των Καρτεσιανών συντεταγμένων του σημείου, μπορούν να χρησιμοποιηθούν

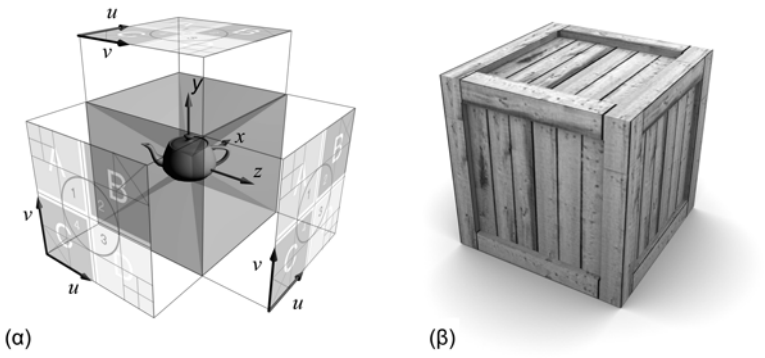


Σχήμα 14.10: *Εγγενής παραμόρφωση κατά την απεικόνιση σε σφαίρα. Το διάγραμμα συσχετίζει το εμβαδόν ενός texel μιας εικόνας με ανάλυση* 128 × 128 *με τη συντεταγμένη ν, καθώς αυτή μεταβάλλεται ώστε να καλύπτει τη σφαίρα από το νότιο ως το βόρειο πόλο.*

και οι συντεταγμένες του κανονικού διανύσματος για τον υπολογισμό των παραμέτρων υφής. Αυτό γίνεται εύκολα αν αντικαταστήσουμε τις συντεταγμένες του σημείου (x, y, z) της Εξίσωσης (14.13) με τις συντεταγμένες του κανονικού διανύσματος (n_x, n_y, n_z). Αυτή είναι μια αρκετά χρήσιμη απεικόνιση, ειδικά αν το κανονικό διάνυσμα είναι εκφρασμένο σε ΣΣΚ, δηλαδή αφού έχουν προηγηθεί όλοι οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί. Έτσι επιτρέπεται η απόδοση πολύπλοκου φωτισμού από το περιβάλλον ως υφή πάνω στο αντικείμενο, ανάλογα με την κατεύθυνση της επιφάνειας. Μια σφαιρική προβολή του εισερχόμενου φωτός από μακρινές πηγές και από το περιβάλλον καταγράφεται και αποθηκεύεται σε μια εικόνα υφής. Στη συνέχεια, αντί να εφαρμόσουμε το μοντέλο Phong ή κάποιο άλλο τοπικό μοντέλο φωτισμού για τη φωτοσκίαση των επιφανειών, ο φωτισμός δειγματοληπτείται από την εικόνα υφής χρησιμοποιώντας απεικόνιση σε σφαίρα για το κανονικό διάνυσμα. Κατ' αναλογία, μπορούμε να πετύχουμε ειδικά εφέ όπως ψευδο-χρωματισμό ή σκίαση σε μορφή σκίτσου, θεωρώντας πάντα ότι οι πηγές φωτός είναι πολύ απομακρυσμένες σε σχέση με τις διαστάσεις του αντικειμένου.

14.3.4 Απεικόνιση σε κύβο

Προκειμένου να εξάγει τις συντεταγμένες υφής, η απεικόνιση σε κύβο συνδυάζει την τοπική πληροφορία για τον προσανατολισμό της επιφάνειας με τις Καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου. Στην ουσία, δουλεύει όπως η προβολή σε επίπεδο. Αντί όμως να χρησιμοποιεί μία διεύθυνση προβολής, π.χ. τη z, επιλέγεται κάθε φορά ένας από τους τρεις κύριους άξονες, ανάλογα με το προς τα που ρέπει περισσότερο το κανονικό διάνυσμα στο σημείο αυτό. Αυτό συνεπάγεται ότι ένα σημείο $\mathbf{p}$ προβάλλεται πάνω στο επίπεδο xy, yz, ή το xz, ανάλογα με το αν η απόλυτη τιμή της συντεταγμένης z, x, ή y του κανονικού διανύσματος είναι μεγαλύτερη από τις άλλες (Σχήμα 14.11(α)).

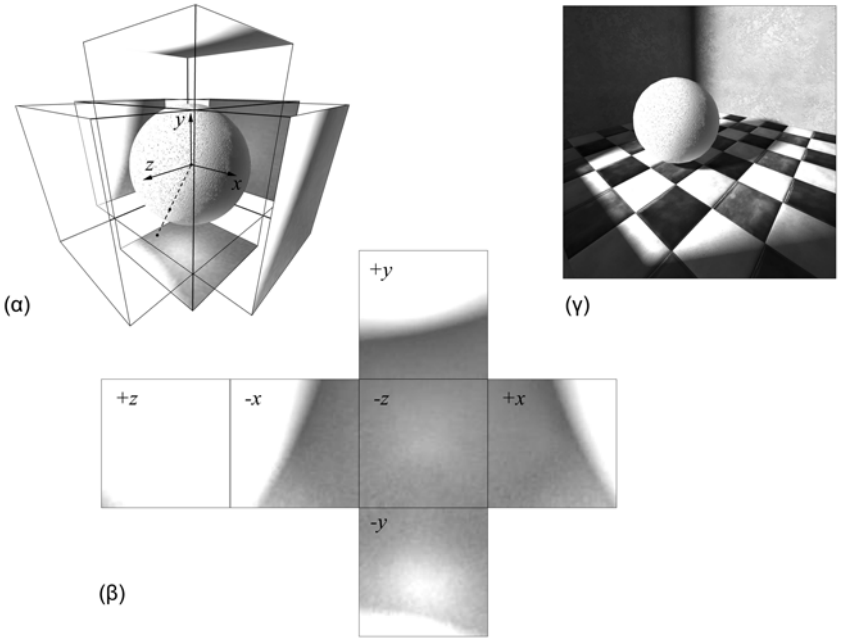


Σχήμα 14.11: *Απεικόνιση σε κύβο. (α) Η παραγωγή των συντεταγμένων υφής. (β) Παράδειγμα εφαρμογής.*

Σε κάθε περίπτωση, η επίπεδη προβολή επιτυγχάνεται με την κατάλληλη αντικατάσταση ζευγών παραμέτρων στην Εξίσωση (14.9). Η απεικόνιση σε κύβο είναι ιδανική για γεωμετρία με πολλαπλές διακριτές πλευρές· ειδικά για σχήματα με κάθετες επιφάνειες όπως δωμάτια, κτίρια, ή κιβώτια (Σχήμα 14.11(β)). Μια χρήσιμη ιδιότητα της κυβικής απεικόνισης είναι ότι η εικόνα υφής δεν προβάλλεται ποτέ πάνω σε επιφάνεια υπό γωνία μεγαλύτερη από 45 μοίρες. Επομένως, δεν έχουμε σημαντική παραμόρφωση ή τέντωμα των texels. Από την άλλη πλευρά, η μετάπτωση από το ένα επίπεδο προβολής σε άλλο είναι πιθανό να προκαλέσει ασυνέχειες, ειδικά όταν εφαρμόζεται σε καμπυλωτές επιφάνειες.

Όταν η κυβική απεικόνιση υφής συσχετίζεται με το τοπικό κανονικό διάνυσμα ή όταν οι συντεταγμένες του σημείου αντιμετωπίζονται ως διάνυσμα κατεύθυνσης, οι υπολογισμοί τροποποιούνται. Καταρχήν, πρέπει να εξηγήσουμε τη χρησιμότητα αυτής της παραλλαγής απεικόνισης σε κύβο. Σε αυτή την ενότητα είδαμε πως η σφαιρική προβολή παραμορφώνει την εικόνα της υφής στους πόλους, λόγω της εγγενούς απροσδιοριστίας που προκύπτει από τις πολικές συντεταγμένες. Είναι σαφές πως το συγκεκριμένο φαινόμενο μπορεί να γίνει ιδιαίτερα αισθητό, ειδικά όταν καλύπτουμε με υφή μεγάλες επιφάνειες, όπως ουράνιους θόλους. Η κυβική απεικόνιση αποφεύγει αυτό το πρόβλημα, με το να επιλέγει πάντα εκείνη την πλευρά του κύβου για προβολή που είναι πιο κάθετη στο διάνυσμά μας (Σχήμα 14.12(α)). Για να πετύχουμε όμως το ίδιο αποτέλεσμα με τη σφαιρική απεικόνιση με βάση διάνυσμα, αντί για τρεις προβολές, χρησιμοποιούμε έξι διαφορετικές πλευρές και αντίστοιχες εικόνες υφής, όσοι και οι κύριοι ημιάξονες (Σχήμα 14.12(β)). Με αυτόν τον τρόπο, επιτυγχάνουμε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από μια συγκεκριμένη κατεύθυνση σε ένα σημείο πάνω σε κάποια από τις έξι εικόνες υφής, παρότι οι παραγόμενες συντεταγμένες u και v δεν είναι μοναδικές (επαναλαμβάνονται σε καθεμία από τις έξι εικόνες).

Οι εξισώσεις απεικόνισης σε κύβο για τη δημιουργία συντεταγμένων υφής από διανύσματα είναι σχετικά απλές. Αν θεωρήσουμε ένα διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}} = (v_x, v_y, v_z)$, το οποίο καθορίζει ένα σημείο $\mathbf{v} = \mathbf{o} + \vec{\mathbf{v}}$ ή μια διεύθυνση στο χώρο, οι συντεταγμένες υφής προκύπτουν από την κανονικοποίηση των συντεταγμένων του διανύσματος στο διάστημα



Σχήμα 14.12: *Χρήση απεικόνισης συντεταγμένων διανύσματος σε κύβο για την απόδοση προϋπολογισμένου άμεσου φωτισμού σε ένα αντικείμενο. (α) Διάταξη της απεικόνισης σε κύβο. (β) Οι έξι επιμέρους εικόνες υφής του κύβου. (γ) Το φωτοσκιασμένο μέσω υφής αντικείμενο μέσα στο τελικό περιβάλλον του.*

[0,1]. Η κατάλληλη εικόνα υφής επιλέγεται με βάση τη μεγαλύτερη συντεταγμένη του διανύσματος, δηλαδή $-x$, $+x$, $-y$, $+y$, $-z$, ή $+z$. Η ακριβής αντιστοιχία μεταξύ αξόνων στο χώρο της υφής και των συντεταγμένων δεν είναι περιοριστική αλλά εξαρτάται από τις συμβάσεις της εκάστοτε υλοποίησης. Η απεικόνιση σε κύβο για διανύσματα έχει υλοποιηθεί στις μεγάλες βιβλιοθήκες τριδιάστατων γραφικών. Τόσο το OpenGL όσο και το DirectX^{TM} υλοποιούν μια κοινή σύμβαση για τις συντεταγμένες υφής η οποία συνοψίζεται στον παρακάτω τύπο [Sega04]:

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{u_c}{|m_a|} + 1\right), v = \frac{1}{2}\left(\frac{v_c}{|m_a|} + 1\right), \tag{14.16}$$

όπου

$$\begin{aligned}
(u_c, v_c, m_a) &= (-v_z, -v_y, v_x) & v_x &= \max\{|v_x|, |v_y|, |v_z|\},\\
(u_c, v_c, m_a) &= (v_z, -v_y, v_x) & -v_x &= \max\{|v_x|, |v_y|, |v_z|\},\\
(u_c, v_c, m_a) &= (v_x, v_z, v_y) & v_y &= \max\{|v_x|, |v_y|, |v_z|\},\\
(u_c, v_c, m_a) &= (v_x, -v_z, v_y) & -v_y &= \max\{|v_x|, |v_y|, |v_z|\},\\
(u_c, v_c, m_a) &= (v_x, -v_y, v_z) & v_z &= \max\{|v_x|, |v_y|, |v_z|\},\\
(u_c, v_c, m_a) &= (-v_x, -v_y, v_z) & -v_z &= \max\{|v_x|, |v_y|, |v_z|\}.
\end{aligned} \tag{14.17}$$

Η απεικόνιση σε κύβο χρησιμοποιείται πολύ συχνά για την αναπαράσταση μακρινών ορίων για μια σκηνή, όπως μακρινά τοπία, κτίρια, σφαίρες ή κουτιά που παριστάνουν τον ουρανό. Όταν δεικτοδοτούμε την απεικόνιση σε κύβο με κανονικό διάνυσμα επιφανείας, η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδοση προϋπολογισμένου φωτισμού (Σχήμα 14.12). Ουσιαστικά, οποτεδήποτε μας επιστρέφεται ένα διάνυσμα από έναν υπολογισμό πάνω σε ένα fragment ή σημείο στο χώρο, αυτό μπορεί να απεικονιστεί στον κύβο για να προσπελάσουμε ένα προϋπολογισμένο χαρακτηριστικό που έχει αποθηκευτεί σε μία από τις έξι εικόνες υφής της κυβικής απεικόνισης. Η απεικόνιση περιβάλλοντος — μια τεχνική που θα εξετάσουμε στη συνέχεια — όπως και διάφοροι shaders, εκμεταλλεύονται την κυβική απεικόνιση υφής για να προσεγγίσουν την ανάκλαση και διάδοση του φωτός σε μια επιφάνεια.

14.3.5 Απεικόνιση περιβάλλοντος

Τόσο ο καθορισμός των συντεταγμένων υφής για ένα σημείο αντικειμένου όσο και η επιλογή μιας εικόνας υφής μπορούν γίνουν δυναμικά κατά την εξέλιξη της σχεδίασης. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της απεικόνισης άμεσου φωτισμού μέσω υφής του Σχήματος 14.12, οι έξι επιμέρους εικόνες θα μπορούσαν να επανυπολογίζονται κάθε φορά που άλλαζε το σκηνικό κατά τρόπο που να επηρεάζει τον καταγεγραμμένο φωτισμό. Επιπλέον, επειδή η καταγεγραμμένη φωτεινότητα εξαρτάται από την τοποθεσία πρόσπτωσης του φωτός, μια σημαντική μεταβολή της θέσης του φωτοσκιαζόμενου αντικειμένου θα απαιτούσε κι αυτή επανασχεδίαση των έξι υφών του κύβου. Προφανώς, μια αλλαγή προσανατολισμού του αντικειμένου θα άλλαζε επίσης τις υπολογισμένες τιμές για τις συντεταγμένες υφής.

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, η κυβική απεικόνιση υφής ή οποιοσδήποτε άλλος μηχανισμός προβολής υφής μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προσομοίωση και προ-αποθήκευση διάφορων υπολογισμών και ιδιοτήτων του υλικού [Cabr99]. Ακόμα, ας θυμηθούμε ότι τα φυσικά ή εμπειρικά μοντέλα που μοντελοποιούν την κατοπτρική ανάκλαση και μετάδοση φωτός χρησιμοποιούν τη σχέση της κατεύθυνσης παρατήρησης και του κανονικού διανύσματος της επιφάνειας. Αυτό συνεπάγεται ότι αν επιλέξουμε να προϋπολογίσουμε οποιαδήποτε ποσότητα εξαρτάται από τα παραπάνω διανύσματα και να τη χρησιμοποιήσουμε ως υφή, πρέπει να ξαναυπολογίσουμε τις συντεταγμένες υφής, κάθε φορά που μετακινείται είτε ο παρατηρητής είτε το αντικείμενο.

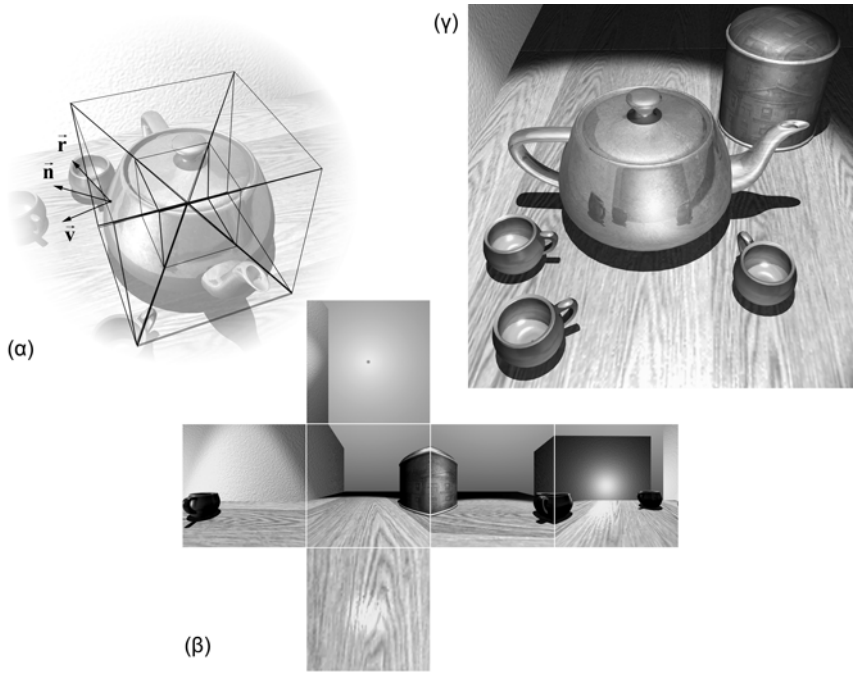
Η γενική κατηγορία υπολογισμών συντεταγμένων υφής η οποία αντιμετωπίζει τις εικόνες υφής ως μέσο αποθήκευσης κατευθυντικών δεδομένων εισερχόμενου φωτισμού αποκαλείται *απεικόνιση περιβάλλοντος* (*environment mapping*)· παρότι η συγκεκριμένη ονομασία πιο συχνά συνδέεται με την προσεγγιστική αναπαράσταση φωτός που ανακλάται με τέλεια ανάκλαση πάνω στην επιφάνεια [Blin76].

Έστω $\hat{\mathbf{r}}$ το διάνυσμα ανάκλασης μιας νοητής ακτίνας που ξεκινά από τον παρατηρητή και ανακλάται τέλεια σ' ένα σημείο της επιφάνειας με κανονικό διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$. Όπως θυμόμαστε από τους υπολογισμούς για την κατοπτρική ανάκλαση στα μοντέλα φωτισμού, αν το διάνυσμα παρατήρησης από το σημείο προς τον παρατηρητή είναι $\hat{\mathbf{v}}$,

τότε το διάνυσμα ανάκλασης δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{\mathbf{r}} = 2\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) - \hat{\mathbf{v}}. \tag{14.18}$$

Ουσιαστικά, το διάνυσμα $\hat{\mathbf{r}}$ δείχνει προς την κατεύθυνση απ' όπου προέρχεται ο φωτισμός που βλέπουμε μέσω ανάκλασης από το σημείο παρατήρησης. Αυτή η ιδιότητα της συμμετρικής πορείας του φωτός κατά την ανάκλαση, ως προς το κανονικό διάνυσμα, ισχύει προφανώς μόνο για τέλεια κατοπτρική ανάκλαση. Στη συνέχεια, το διάνυσμα ανάκλασης χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των συντεταγμένων (u, v) με μια συνάρτηση απεικόνισης υφής της αρεσκείας μας. Όταν η Εξίσωση (14.18) συνδυαστεί με τους τύπους (14.16) και (14.17) για την κυβική απεικόνιση, προσομοιώνουμε ψευδο-ανάκλαση του περιβάλλοντος με υφή σε κύβο, της οποίας τα αποτελέσματα και την προετοιμασία βλέπουμε στο Σχήμα 14.13. Η υφή σε κύβο είναι ιδανική για απεικόνιση περιβάλλοντος εξαιτίας των χαμηλών παραμορφώσεών της, ενώ ως δεύτερη επιλογή μπορεί να εφαρμοστεί και σφαιρική απεικόνιση, ή οποία χρησιμοποιούνταν εκτενώς στο παρελθόν, πριν η υφή σε διάταξη κύβου γίνει αναπόσπαστο κομμάτι των



Σχήμα 14.13: *Απεικόνιση (ανάκλασης) περιβάλλοντος χρησιμοποιώντας εικόνες υφής σε κύβο. (α) Το διάνυσμα ανάκλασης χρησιμοποιείται για τη διευθυνσιοδότηση της υφής (επιλογή εικόνας και καθορισμός συντεταγμένων (u, v)). (β) Οι επιμέρους εικόνες υφής. Οι εικόνες δημιουργούνται σχεδιάζοντας τον τριδιάστατο κόσμο έξι φορές από το κέντρο της τσαγιέρας με προσανατολισμό τους αντίστοιχους άξονες και άνοιγμα πεδίου παρατήρησης 90 μοιρών. (γ) Η τελική διαμόρφωση του χρώματος επιφάνειας με ψευδο-ανακλάσεις από την υφή ενισχύει την πειστικότητα της μεταλλικής όψης της επιφάνειας.*

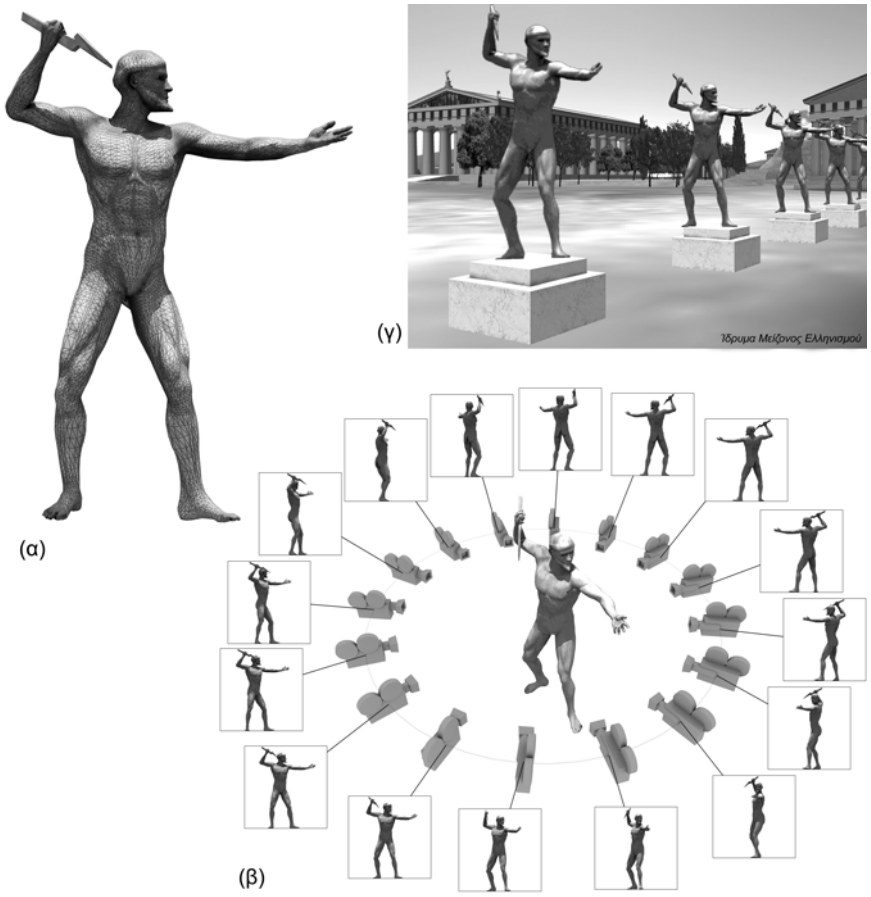
επικρατέστερων σύγχρονων βιβλιοθηκών γραφικών.

Να σημειωθεί ότι για να είναι αποτελεσματική η ψευδαίσθηση της απεικόνισης περιβάλλοντος, πρέπει να θεωρήσουμε πως όλη η γεωμετρία που αποτυπώνεται στις εικόνες υφής, βρίσκεται μακριά από το αντικείμενο σε σχέση με τις διαστάσεις του τελευταίου. Διαφορετικά, ο εισερχόμενος φωτισμός θα άλλαζε δραματικά από σημείο σε σημείο πάνω στο αντικείμενο ή καθώς αυτό κινείται και επομένως θα έπρεπε να έχουν προϋπολογιστεί διαφορετικές υφές ανά τοποθεσία που περνά το αντικείμενο και να επιλέγεται η κατάλληλη υφή (ή εξάδα, αν χρησιμοποιούμε υφή σε κύβο).

Μια συνήθης πρακτική που εφαρμόζουμε όταν καταγράφουμε ανακλάσεις από το περιβάλλον σε μορφή υφής σε κύβο είναι να σχεδιάζεται έξι φορές το περιβάλλον από το κέντρο του κατοπτρικού αντικειμένου σε εικόνες χαμηλής ανάλυσης· μία φορά για κάθε ημιάξονα, χρησιμοποιώντας ένα συμμετρικό πεδίο παρατήρησης με άνοιγμα 90° (Σχήμα 14.13). Παρότι η ανάλυση των εικόνων που καταγράφουμε είναι χαμηλή, για λόγους οικονομίας πόρων, το τελικό αποτέλεσμα δεν προδίδει αυτή την απώλεια ποιότητας, αφού υπάρχουν πολλές παραμορφώσεις από την κύρτωση των ανακλώμενων ακτίνων πάνω στην επιφάνεια του αντικειμένου. Η χρήση χαμηλής ανάλυσης εικόνων για την απεικόνιση του περιβάλλοντος έχει το πλεονέκτημα ότι μας επιτρέπει να τις επανυπολογίζουμε συχνά, ακόμα και σε πραγματικό χρόνο, κι έτσι μας διευκολύνει να έχουμε σχετικά ακριβείς εικόνες για το καθρεπτιζόμενο περιβάλλον σε οποιαδήποτε θέση και αν βρίσκεται το αντικείμενό μας μέσα σε αυτό. Στην Εικόνα 28 φαίνεται ένας αριθμός από ανακλαστικά μεταλλικά αντικείμενα. Όλα τους χρησιμοποιούν τις ίδιες προϋπολογισμένες εικόνες υφής σε κύβο, οι οποίες έχουν καταγραφεί από το κέντρο της σκηνής. Ο υπολογισμός των εικόνων της υφής περιβάλλοντος από πριν είναι προτιμότερος , όπου είναι εφικτός, δηλαδή όταν δεν παράγει αφύσικα αποτελέσματα. Το να ενημερώνουμε συνεχώς τις εικόνες υφής, σχεδιάζοντας σε κάθε καρέ το περιεχόμενό τους, επιβαρύνει σημαντικά το ρυθμό σχεδίασης.

14.3.6 Υφή εξαρτώμενη από την οπτική γωνία⊛

Στην απεικόνιση σε κύβο, είδαμε πως μια επιμέρους εικόνα της υφής περιβάλλοντος επιλέγεται σύμφωνα με ένα διάνυσμα κατεύθυνσης. Η ιδέα όμως της επιλογής μιας εικόνας υφής σύμφωνα με μια κατεύθυνση υπήρχε πολύ πριν την εφεύρεση της υφής σε διάταξη κύβου· από την εποχή των πρώτων προσπαθειών για συγγραφή μηχανών παιχνιδιών (game engines) οι οποίες να παρουσιάζουν έναν τριδιάστατο ή ψευδοτριδιάστατο κόσμο με τη βοήθεια *sprites*. Απλά εικονίδια, με ορισμένα εικονοστοιχεία τους διαφανή, χρησιμοποιούνταν για να υποκαταστήσουν ένα αντικείμενο, προβάλλοντας προϋπολογισμένες ή σχεδιασμένες όψεις του από έναν προκαθορισμένο αριθμό από οπτικές γωνίες. Η σχεδίαση με επιλογή του κατάλληλου sprite είναι η απλούστερη μορφή *σχεδίασης βασισμένης σε εικόνες* (*image-based rendering* – IBR), όπου αντί να σχεδιάζουμε πραγματικά μια τριδιάστατη οντότητα, ανακατασκευάζουμε μια κατάλληλη όψη του αντικειμένου με παρεμβολή ή παραμόρφωση προϋπολογισμένων ή καταγεγραμμένων εικόνων που σε πολλές περιπτώσεις συνοδεύονται από πληροφορία βάθους (όπως για παράδειγμα στις αναφορές [Shad98, Levo96, Gort96]). Ένα



Σχήμα 14.14: *Απλή σχεδίαση βασισμένη σε εικόνες (IBR) χρησιμοποιώντας υφή εξαρτώμενη από την οπτική γωνία. (α) Το αρχικό μοντέλο του αγάλματος του Δία, αποτελούμενο από περίπου 36.000 τρίγωνα. (β) Σχεδίαση και καταγραφή πολλαπλών όψεων του αντικειμένου από σταθερή απόσταση γύρω από αυτό. (γ) Ένα απλό πολύγωνο αντικαθιστά την πολύπλοκη γεωμετρία, επικαλυμμένο με την εικόνα της κοντινότερης οπτικής γωνίας του πρωτότυπου (ή με γραμμική παρεμβολή των δύο κοντινότερων πλάνων). Η επιλογή της κατάλληλης υφής εξαρτάται από την κατεύθυνση παρατήρησης προς το κέντρο του αντικειμένου. (Στιγμιότυπο από την παραγωγή εικονικής πραγματικότητας « Ένας περίπατος στην Αρχαία Ολυμπία.», ευγενική προσφορά του Ιδρύματος Μείζονος Ελληνισμού.)*

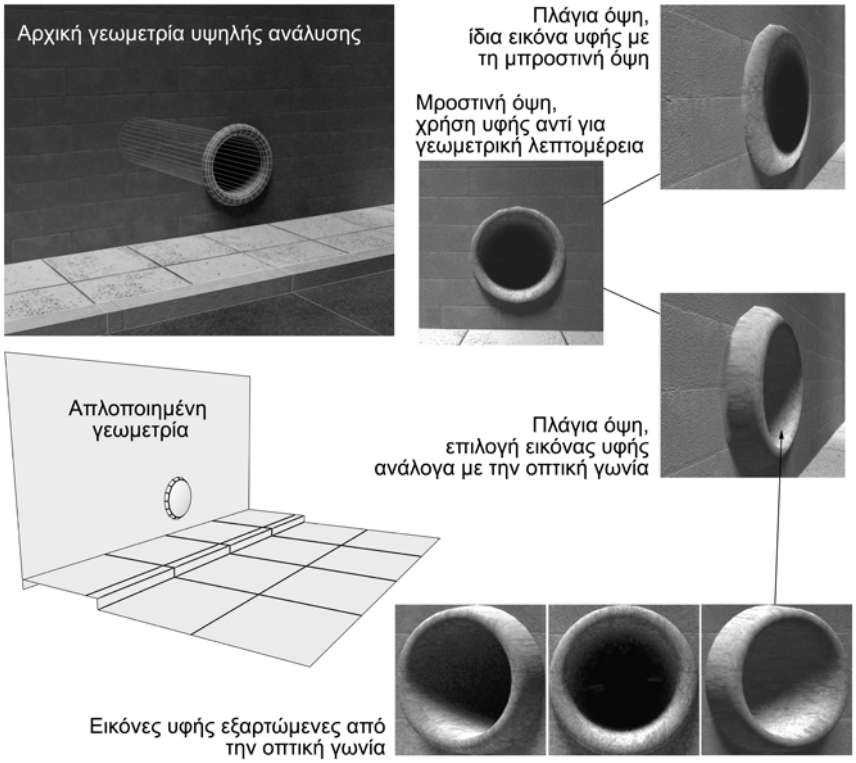
πλεονέκτημα της σχεδίασης με βάση εικόνες είναι η αποσυσχέτιση του χρόνου σχεδίασης από την πολυπλοκότητα των αντικειμένων. Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται σταθερός ρυθμός ανανέωσης της εικόνας, ανεξάρτητα από τη λεπτομέρεια των απεικονιζόμενων μορφών. Ένα πολύ σύνθετο αντικείμενο, όπως ένα λεπτομερές δένδρο ή μια ανθρώπινη μορφή, μπορεί να προσχεδιαστεί ή να φωτογραφηθεί από διάφορες γωνίες· συνήθως δε από ισαπέχουσες θέσεις και με προσανατολισμό προς το κέντρο του αντικειμένου (Σχήμα 14.14(β)). Κατά την απεικόνιση της σκηνής, η όψη του αντικειμένου όπως αυτό φαίνεται από την οπτική γωνία του παρατηρητή, προσεγγίζεται από τις κοντινότερες προϋπολογισμένες όψεις. Οι τεχνικές σχεδίασης με βάση εικόνες ενδέχεται να γίνουν υπολογιστικά ακριβές, ειδικά όταν απαιτείται να συμπληρωθεί πληροφορία βάθους ή κάποιο κενό.

Όπως είναι αναμενόμενο, οι δημοφιλέστερες IBR τεχνικές είναι οι απλούστερες παρά το γεγονός ότι τα αποτελέσματά τους δεν είναι ιδιαίτερα ακριβή. Στην απλή μέθοδο IBR των *impostors*, μια ενδιάμεση τρισδιάστατη επιφάνεια (*geometry proxy*), όπως ένα πολύγωνο ή ένα απλό πολυγωνικό αντικείμενο, επενδύεται με υφή που επιλέγεται με βάση την οπτική γωνία, σύμφωνα με τα παραπάνω (Σχήμα 14.14). Οι επιμέρους εικόνες υφής σε αυτή την τεχνική αντιστοιχούν σε ισαπέχουσες θέσεις γύρω από το αντικείμενο και έχουν προ-ταξινομηθεί· οπότε η επιλογή της κατάλληλης εικόνας είναι εύκολη και συνεπώς γρήγορη. Οι IBR impostors εκμεταλλεύονται το hardware γραφικών, αφού ακόμα και κατά την παρεμβολή εικόνων από γειτονικές οπτικές γωνίες, η μίξη μπορεί να γίνει με πολλαπλά στρώματα υφής και shaders. Αυτή η μέθοδος είναι πολύ δημοφιλής στα παιχνίδια υπολογιστών και στην εικονική πραγματικότητα, ειδικά για τη σχεδίαση χλωρίδας και πλήθους κόσμου με μεγάλη πολυπλοκότητα [Tecc02].

Η αντίστροφη τεχνική της σχεδίασης με βάση εικόνες είναι αυτή που υλοποιείται από το QuickTime VR [Chen95], όπου, αντί να δειγματοληπτείται μια συγκεκριμένη τοποθεσία του χώρου από πολλαπλά σημεία γύρω από το σημείο ενδιαφέροντος, κατασκευάζεται μια εικόνα περιβάλλοντος για το τι βλέπουμε από το δεδομένο σημείο. Αυτή η τεχνική ήταν και εξακολουθεί να είναι ιδιαίτερα διαδεδομένη σε πολυμεσικές εφαρμογές και παιχνίδια υπολογιστών.

Ένας υβριδικός συνδυασμός μεταξύ της απεικόνισης με βάση εικόνες πάνω σε απλά πολύγωνα (IBR proxies) και πραγματικής τριδιάστατης γεωμετρίας για τα ίδια αντικείμενα είναι η χρήση *εικόνων υφής εξαρτώμενων από την οπτική γωνία* πάνω σε απλοποιημένες εκδόσεις των αρχικών μοντέλων [Debe96]. Η ανάγκη για η χρήση διαφορετικών εικόνων υφής, ανάλογα με την οπτική γωνία που κοιτάμε ένα αντικείμενο, προκύπτει κυρίως στην απεικόνιση απλοποιημένων μοντέλων με χαμηλό αριθμό τριγώνων σε εφαρμογές πραγματικού χρόνου, όπου οι λεπτομέρειες των επιφανειών παραλείπονται για να βελτιωθεί η ταχύτητα σχεδίασης. Προς την ίδια κατεύθυνση, χρησιμοποιούνται κι άλλες σημαντικές τεχνικές, όπως η απεικόνιση αναγλύφου, προκειμένου να αναπληρωθεί η φαινόμενη πολυπλοκότητα της επιφάνειας που χάθηκε με την εξαίρεση λεπτομερειών από τη γεωμετρία της. Και πάλι βέβαια, οι τεχνικές αυτές έχουν κάποιο όριο πέρα από το οποίο παύουν να είναι αποτελεσματικές.

Φανταστείτε την περίπτωση του Σχήματος 14.15. Ο υψηλής ανάλυσης αγωγός που



Σχήμα 14.15: *Εικόνες υφής εξαρτώμενες από την οπτική γωνία. Εδώ, προ-σχεδιασμένες απόψεις ενός μοντέλου υψηλής ανάλυσης έχουν εφαρμοστεί ως υφές σε μια έκδοση του μοντέλου με χαμηλό αριθμό τριγώνων, επιλέγοντας την κατάλληλη εικόνα ανάλογα με την οπτική γωνία, έτσι ώστε να προσομοιώνεται σωστά η όψη του αρχικού μοντέλου.*

φαίνεται στην πάνω αριστερή γωνία του σχήματος αποτελείται από αρκετά πολύγωνα και είναι πραγματικά κούφιος και διαπερνά τον τοίχο. Τα πολύγωνα του τοίχου είναι αντίστοιχα κομμένα έτσι, ώστε να σχηματίζεται τρύπα απ' όπου περνά ο σωλήνας. Σε εφαρμογές πραγματικού χρόνου, είναι σημαντικό να κρατάμε τον αριθμό των απεικονιζόμενων πολυγώνων χαμηλό και να μεγιστοποιούμε την επαναχρησιμοποίηση των αντικειμένων για ευκολότερη μοντελοποίηση και καλύτερο caching. Ένα δομικό στοιχείο, όπως ένα σπίτι ή ένας τοίχος, πρέπει να είναι επαναχρησιμοποιήσιμο και παραμετρικό. Επομένως, τα διάφορα διακοσμητικά στοιχεία (όπως ο αγωγός του Σχήματος 14.15) δε θα πρέπει ούτε να αλλάζουν τη δομή του βασικού μοντέλου, ούτε να το επιβαρύνουν με γεωμετρική λεπτομέρεια. Μια λιγότερο λεπτομερής έκδοση του συγκεκριμένου μοντέλου φαίνεται στην κάτω αριστερή γωνία του Σχήματος 14.15. Παρατηρείστε ότι ο αγωγός δε διαπερνά πια τον τοίχο.

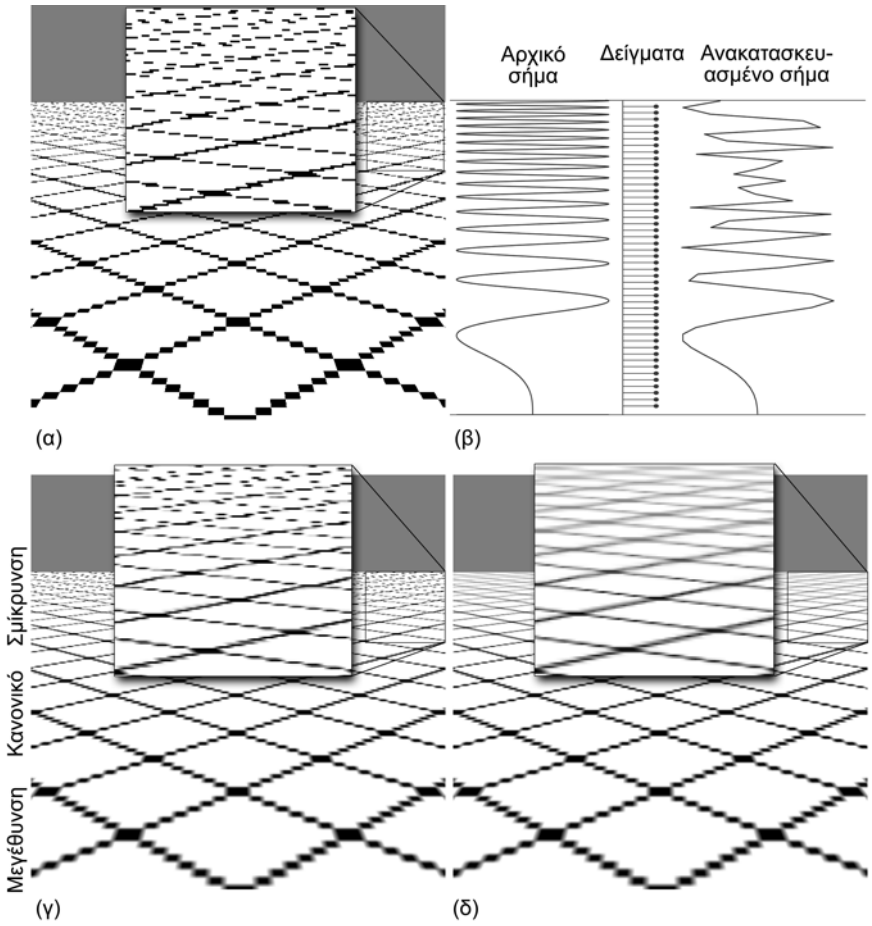
Ένας προφανής τρόπος να αποτυπώσουμε τη λεπτομέρεια του μοντέλου υψηλής ανάλυσης πάνω στην απλοποιημένη έκδοσή του είναι να σχεδιάσουμε το αντικείμενο από μια οπτική γωνία που εξασφαλίζει μέγιστη ορατότητα των λεπτομερειών και να

χρησιμοποιήσουμε την εικόνα που θα πάρουμε ως υφή πάνω στο χαμηλής ανάλυσης μοντέλο. Το πρόβλημα είναι ότι υπάρχουν περιπτώσεις, σαν αυτή του Σχήματος 14.15, όπου το μάτι δεν μπορεί να ξεγελαστεί, κυρίως λόγω της προοπτικής παραμόρφωσης και κίνησης, αλλά και της αναμενόμενης συμπεριφοράς της επιφάνειας στο φωτισμό από διαφορετική οπτική γωνία. Η απεικόνιση αναγλύφου (βλ. Ενότητα 14.7) διορθώνει μερικώς το πρόβλημα (της φωτοσκίασης), ωστόσο ούτε αυτή η τεχνική μπορεί να δώσει σωστή πληροφορία για το βάθος, την απόκρυψη επιφανειών και τις αναμενόμενες σκιές. Αν όμως χρησιμοποιήσουμε παραπάνω από μια εικόνες υφής, οι οποίες να παριστάνουν τη γεωμετρική λεπτομέρεια από διαφορετικές οπτικές γωνίες και παρεμβάλουμε το αποτέλεσμα ανάλογα με την οπτική γωνία που κοιτάμε το αντικείμενο, μπορούμε να πετύχουμε πολύ πιο ρεαλιστική απεικόνιση δεσμεύοντας φυσικά περισσότερη μνήμη.

14.4 Σμίκρυνση και μεγέθυνση υφής

Όταν εφαρμόζουμε μια εικόνα υφής πάνω σε μια επιφάνεια, τα texels της απλώνονται και παραμορφώνονται έτσι ώστε να καταλάβουν το χώρο που τους αναλογεί, σύμφωνα με τον τοπικό ρυθμό μεταβολής των παραμέτρων υφής και τις διαστάσεις των πολυγώνων. Κατά την προβολή της επικαλυμμένης με υφή επιφάνειας στο επίπεδο παρατήρησης το κάθε texel καταλαμβάνει ένα ίχνος πάνω στη δημιουργημένη εικόνα. Προφανώς, εκτός από τον προσανατολισμό των επιφανειών και την παραμετροποίηση της υφής πάνω σε αυτές, η περιοχή που καταλαμβάνει ένα texel στο χώρο της εικόνας εξαρτάται και από το μετασχηματισμό προβολής, το μέγεθος του πεδίου παράστασης και από την απόσταση του απεικονιζόμενου σημείου από τον παρατηρητή, στην περίπτωση που έχουμε προοπτική προβολή. Στην περίπτωση που ένα προβεβλημένο texel καταλαμβάνει περιοχή μεγαλύτερη του ενός εικονοστοιχείου πάνω στο χώρο της εικόνας, έχει υποστεί τοπική *μεγέθυνση* . Στην αντίθετη περίπτωση, όπου το ίχνος του texel είναι μικρότερο του ενός εικονοστοιχείου, η υφή έχει υποστεί τοπική *σμίκρυνση* ή *συμπίεση* (Σχήμα 14.16).

Το αποτέλεσμα της μεγέθυνσης της υφής είναι η συστηματική ανάδειξη των ασυνεχειών φωτεινότητας από texel σε texel και η δημιουργία σκαλωτής εικόνας, όπου οι ισοπαραμετρικές καμπύλες των παραμέτρων υφής δεν είναι παράλληλες με το πλέγμα δειγματοληψίας της εικόνας (Σχήμα 14.16). Το φαινόμενο αυτό λέγεται *pixelization* και πρακτικά επιφέρει κακής ποιότητας απεικόνιση υφής, η οποία δε μπορεί να είναι πειστική. Ευτυχώς, οι μέθοδοι παρεμβολής που χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή τιμών υφής από τα κοντινότερα εικονοστοιχεία της εικόνας υφής, διορθώνουν τις ασυνέχειες, εξομαλύνοντας την υφή. Η διγραμμική παρεμβολή που υλοποιείται από τις μονάδες ανάκτησης υφής του hardware γραφικών και η οποία εξηγείται στην Ενότητα 14.2.1, παρέχει μια ισορροπημένη λύση μεταξύ ποιότητας ανακατασκευής σήματος και ταχύτητας, παρότι υπάρχουν υψηλότερου βαθμού αλλά ακριβότερα στον υπολογισμό φίλτρα, τα οποία μπορούν να δώσουν καλύτερη δειγματοληψία και εικόνα που επιδέχεται μεγαλύτερης μεγέθυνσης [Sigg05].



Σχήμα 14.16: *Μεγέθυνση και σμίκρυνση υφής. (α) Δειγματοληψία με επιλογή κοντινότερου δείγματος χωρίς φιλτράρισμα. (β) Σφάλματα δειγματοληψίας κατά την προοπτική προβολή επιφάνειας με υφή. (γ) Δειγματοληψία με διγραμμική παρεμβολή κατά τη μεγέθυνση της υφής, παρουσία σφαλμάτων στις περιοχές που συμπιέζεται η υφή. (δ) Υφή με mip-mapping (ιεραρχικό προ-φιλτράρισμα με τριγραμμική παρεμβολή).*

Σοβαρότερα οπτικά προβλήματα προκύπτουν κατά τη σμίκρυνση της εικόνας καθώς εμφανίζονται χωρικά και χρονικά μεταβαλλόμενα σφάλματα δειγματοληψίας. Το σχέδιο της υφής δειγματοληπτείται άτακτα και σποραδικά, προκαλώντας θορυβώδες αποτέλεσμα και εμφάνιση μοτίβου Moiré στις υψηλές συχνότητες της υφής. Το πρόβλημα της κακής δειγματοληψίας αποκαλείται *ταύτιση υφής* και εξηγείται διεξοδικότερα παρακάτω.

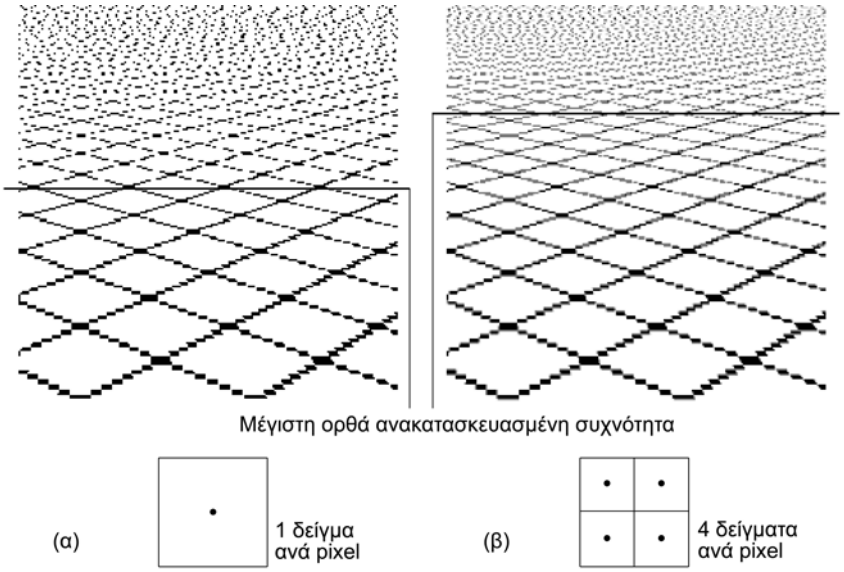
14.4.1 Αντιταύτιση στο χώρο της υφής$^{\circledast}$

Από τη σκοπιά της θεωρίας σημάτων, η διαδικασία της απεικόνισης καταγράφει δείγματα των επιφανειών οι οποίες είναι επικαλυμμένες με υφή σε συγκεκριμένες θέ-

σεις πάνω στο επίπεδο της εικόνας κατά προκαθορισμένα διαστήματα (π.χ. ένα δείγμα ανά εικονοστοιχείο). Προκειμένου να ανακατασκευαστεί ορθά το αρχικό σήμα από τα δείγματά του, αυτό πρέπει να έχει περιορισμένο εύρος ζώνης συχνοτήτων και η υψηλότερη συχνότητά του πρέπει να είναι η μισή του ρυθμού δειγματοληψίας (*θεώρημα ομοιόμορφης δειγματοληψίας*) [Glas95]. Μεταφέροντας το θεώρημα αυτό στην περίπτωση της δειγματοληψίας υφής, όταν μια επιφάνεια με υφή παθαίνει διάφορους μετασχηματισμούς και τελικά προβάλλεται στο επίπεδο παρατήρησης, η πυκνότητα των texels στο χώρο της εικόνας μεταβάλλεται συνεχώς και μάλιστα ανομοιόμορφα ως προς τις διαστάσεις τους. Ο ρυθμός (σε pixels) κατά τον οποίο μεταβαίνουμε από ένα προβεβλημένο texel στο διπλανό του μέσα στην εικόνα καθορίζει τη φαινόμενη *χωρική συχνότητα* της υφής. Στην περίπτωση της συμπίεσης της υφής, ένα texel αντιστοιχεί σε λιγότερο από δύο δείγματα εικονοστοιχείων πάνω στην εικόνα· όταν δε η υφή έχει υποστεί ισχυρή σμίκρυνση, η δειγματοληψία χάνει αρκετά texels από δείγμα σε δείγμα. Αυτό φαίνεται χαρακτηριστικά στο παράδειγμα του Σχήματος 14.16(β). Μια ημιτονοειδής κυματομορφή παραμορφώνεται προοπτικά και στη συνέχεια δειγματοληπτείται ομοιόμορφα. Το άπειρου μήκους σήμα δεν είναι πια φραγμένο στο πεδίο των συχνοτήτων και η ομοιόμορφη δειγματοληψία αποτυγχάνει να ανακατασκευάσει σωστά τη μορφή του αρχικού σήματος για τις συχνότητες πάνω από το μισό του ρυθμού δειγματοληψίας.

Γι' αυτό το πρόβλημα υπάρχουν δύο λύσεις. Η πρώτη είναι να υπερ-δειγματοληπτήσουμε επαρκώς την υφή στο χώρο της εικόνας, προκειμένου να εξασφαλίσουμε ότι χρησιμοποιούμε ρυθμό δειγματοληψίας πάνω από το κριτήριο Nyquist και στη συνέχεια να περιορίσουμε το εύρος ζώνης του ανακατασκευασμένου σήματος στην πραγματική χωρική ανάλυση του καταχωρητή εικόνας με ολοκλήρωση (*μετα-φιλτράρισμα*). Αυτή η τεχνική φαίνεται στο Σχήμα 14.17. Η άλλη λύση είναι να περιορίσουμε το εύρος συχνοτήτων του αρχικού σήματος *πριν* να σχεδιάσουμε τη γεωμετρία στον καταχωρητή εικόνας (*προ-φιλτράρισμα*).

Η πρώτη λύση, παρότι βοηθάει να βελτιωθεί η τελική ποιότητα της εικόνας και παρέχει ένα μηχανισμό για συνολική αντιταύτιση (δηλαδή και για γραμμές και περιγράμματα· βλ. Ενότητα 2.8), πάσχει από ένα προφανές πρόβλημα στην περίπτωση της απεικόνισης υφής. Αν επιλέξουμε ένα μεγαλύτερο αριθμό δειγμάτων ανά εικονοστοιχείο, το μόνο που καταφέρνουμε είναι να μεταθέσουμε το πρόβλημα της ταύτισης σε υψηλότερη χωρική συχνότητα. Για παράδειγμα, αν διπλασιάσουμε τα δείγματα που παίρνουμε σε κάθε άξονα της εικόνας (τέσσερα δείγματα ανά εικονοστοιχείο), αυξάνουμε το ρυθμό δειγματοληψίας των προβεβλημένων texels. Αυτό μπορεί να είναι επαρκές για αρκετές συνθετικές εικόνες, αλλά δεν εγγυάται την ορθή ανακατασκευή της υφής της επιφάνειας για τον απλό λόγο ότι δεν υπάρχει κανένας συσχετισμός του ρυθμού δειγματοληψίας με την πυκνότητα των προβεβλημένων texels στο επίπεδο της εικόνας. Υπάρχουν πολλές καταστάσεις που η τεχνική αυτή αποτυγχάνει, και το παράδειγμα του Σχήματος 14.16 αποτελεί μια τέτοια χαρακτηριστική περίπτωση (επίπεδη επιφάνεια υπό προοπτική προβολή). Επιπλέον, η υπερδειγματοληψία για αντιταύτιση υφής είναι κακή λύση για εφαρμογές πραγματικού χρόνου, καθώς δεν είναι εύκολο να προβλέψουμε τον απαιτούμενο ρυθμό δειγματοληψίας. Ακόμα κι αν μπορούμε να το



Σχήμα 14.17: *Αντιταύτιση υφής με μετα-φιλτράρισμα. (α) Προοπτική προβολή μιας επιφάνειας με επίπεδη απεικόνιση υφής. Χωρίς φιλτράρισμα, η τελική εικόνα παρουσιάζει ισχυρή ταύτιση. (β) Η ίδια επιφάνεια σχεδιασμένη με υπερδειγματοληψία 2×2 σημείων ανά εικονοστοιχείο. Η ταύτιση μετατίθεται σε υψηλότερη χωρική συχνότητα.*

κάνουμε αυτό, είτε ο αριθμός και η διάταξη των παραπάνω δειγμάτων περιορίζονται από τις δυνατότητες της υλοποίησης του hardware για συστήματα πραγματικού χρόνου είτε επιβαρύνεται σημαντικά η απόδοση του αλγόριθμου σχεδίασης μη πραγματικού χρόνου. Όπως και να έχει όμως, επειδή η υπερδειγματοληψία είναι η πιο κοινή μέθοδος συνολικής αντιταύτισης της εικόνας, συνεισφέρει στην επίλυση του προβλήματος της ταύτισης της υφής, όταν συνδυαστεί και με άλλες τεχνικές.

Η δεύτερη επιλογή αντιταύτισης είναι το τοπικό προ-φιλτράρισμα της υφής πριν τη σχεδίαση του αντίστοιχου fragment στον καταχωρητή εικόνας προκειμένου να περιοριστεί το εύρος φάσματος της υφής, όταν αυτή στη συνέχεια μετασχηματιστεί σε συντεταγμένες εικόνας. Στην ουσία προσπαθούμε να προβλέψουμε πόσα texels συνεισφέρουν στη φωτεινότητα ενός εικονοστοιχείου, όταν η επικαλυμμένη με υφή επιφάνεια προβληθεί στο επίπεδο της εικόνας. Πρώτα παίρνουμε το μέσο όρο από τα συνεισφέροντα texels (βαθυπερατό φιλτράρισμα) και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα για το χρωματισμό της επιφάνειας.

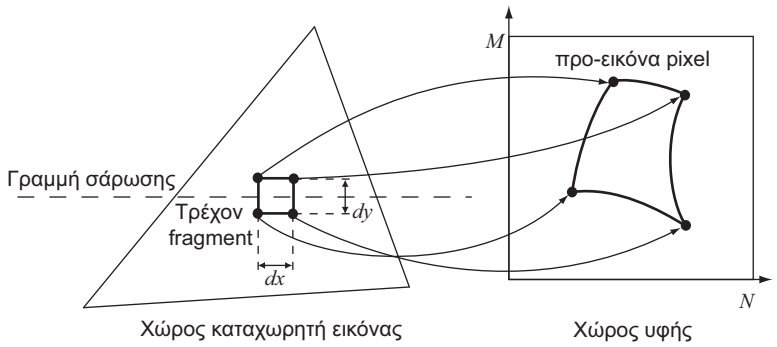
Το φιλτράρισμα εκτελείται στο χώρο της υφής με *συνέλιξη* ενός φίλτρου $f(s,t)$ με κρουστική απόκριση πεπερασμένης έκτασης G με τις τιμές της υφής $i(u,v)$ στην αντίστοιχη περιοχή:

$$(f * i)(u,v) = \iint_G f(s,t) \cdot i(u-s, v-t) ds dt. \tag{14.19}$$

Ας δούμε όμως σύντομα πως γίνεται το φιλτράρισμα ενός σήματος στη γενική πε-

ρίπτωση. Το φιλτράρισμα στο πεδίο των συχνοτήτων μεταφράζεται σε πολλαπλασιασμό των συντελεστών Fourier του σήματος και του φίλτρου· δηλαδή του *φάσματος του σήματος* και της *απόκρισης συχνοτήτων* τουφίλτρου αντίστοιχα. Για να κόψουμε τις υψηλές συχνότητες ενός σήματος δουλεύοντας στο πεδίο των συχνοτήτων, το μόνο που πρέπει να κάνουμε είναι να δημιουργήσουμε ένα φίλτρο, του οποίου η απόκριση είναι μηδενική πάνω από τη συχνότητα αποκοπής και να πολλαπλασιάσουμε το φάσμα του σήματος με την απόκριση του φίλτρου. Όμως κάτι τέτοιο δεν είναι τόσο απλό στην πράξη, καθώς ένα απλοϊκό ιδανικό φίλτρο με απότομη (ασυνεχή) απόκριση συχνοτήτων (box filter, 1 εντός της επιθυμητής ζώνης συχνοτήτων και 0 οπουδήποτε αλλού) έχει άπειρη κρουστική απόκριση (IIR), δηλαδή δεν είναι πεπερασμένο σήμα στο πεδίο του χώρου της εικόνας. Καθώς στην περίπτωση της σχεδίασης είναι πολύ πιο αποδοτικό και άμεσο να φιλτράρουμε ένα σήμα στο πεδίο του χώρου της εικόνας, ένα IIR φίλτρο δεν θα μπορούσε να εφαρμοστεί πρακτικά, αφού θα χρειαζόμασταν ένα πυρήνα φίλτρου άπειρου μεγέθους. Εντούτοις, υπάρχουν πολλά διακριτά φίλτρα χαμηλών συχνοτήτων πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR), όπως είναι η προσέγγιση με B-splines του Gaussian φίλτρου. Ωστόσο, περαιτέρω ανάλυση πάνω στο σχεδιασμό φίλτρων είναι πέρα από τους σκοπούς αυτού του βιβλίου. Στην πράξη, το φιλτράρισμα στο πεδίο της υφής γίνεται με βεβαρημένο μέσο όρο σε μια πεπερασμένη περιοχή γύρω από το σημείο δειγματοληψίας (u, v). Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με την κατασκευή φίλτρων και την εφαρμογή τους σε συνεχή και διακριτά σήματα, μπορείτε να ανατρέξετε σε κάποιο βιβλίο επεξεργασίας σήματος ή εικόνας.

Εξετάζοντας τη σχέση που έχει ένα εικονοστοιχείο της τελικής εικόνας και ένα texel, εξαιτίας της προσθετικής επίδρασης της καμπυλότητας μιας επιφάνειας και της προοπτικής προβολής, στη γενική περίπτωση ένα εικονοστοιχείο μετασχηματίζεται σε ένα καμπυλόγραμμο τετράπλευρο στο χώρο της υφής (*προ-εικόνα εικονοστοιχείου*) [Heck89] (Σχήμα 14.18). Προκειμένου να δειγματοληπτήσουμε σωστά την υφή σ' ένα δεδομένο εικονοστοιχείο πρέπει να υπολογιστεί το σχήμα και το εμβαδόν της προεικόνας του τελευταίου, μετασχηματίζοντας την περιοχή του εικονοστοιχείου από το



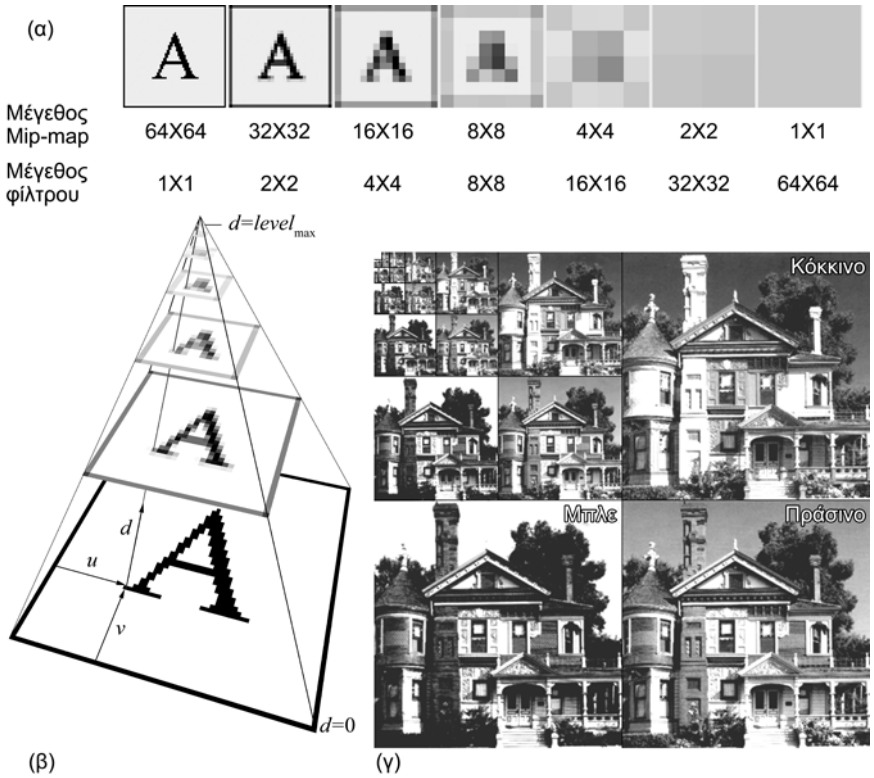
Σχήμα 14.18: *Το «ίχνος» ενός fragment όταν προβάλλεται από το χώρο της εικόνας στο χώρο της υφής (προ-εικόνα). Όταν η υφή παθαίνει σμίκρυνση (συμπιέζεται), η προ-εικόνα του εικονοστοιχείου ενδέχεται να καλύπτει μια περιοχή αρκετών texels.*

χώρο της εικόνας στο χώρο της υφής και ολοκληρώνοντας της τιμές της υφής πάνω σε αυτή. Το σχήμα και το μέγεθος του φίλτρου δειγματοληψίας και ολοκλήρωσης που θα χρησιμοποιήσουμε πρέπει να προσαρμοστεί στην επιφάνεια της προ-εικόνας, αν θέλουμε να φιλτράρουμε ακριβώς το ωφέλιμο εύρος χωρικών συχνοτήτων της υφής, χωρίς να προκαλέσουμε άσκοπο θόλωμα. Μια μεγάλη σε έκταση προ-εικόνα συνεπάγεται ένα μέσο όρο πάνω σ' έναν αντίστοιχα μεγάλο αριθμό από δείγματα υφής και το ανάποδο. Δυστυχώς, εξαιτίας της φύσης της απεικόνισης υφής και της πιθανής αλλαγής του σχήματος της προ-εικόνας σε κάθε εικονοστοιχείο, ιδανικά θα έπρεπε να υπολογίζαμε ένα διαφορετικό φίλτρο για κάθε εικονοστοιχείο. Ένα άλλο σημαντικό θέμα που προκύπτει είναι ότι είναι πιθανό στην ίδια θέση της εικόνας να έχουμε ταυτόχρονα σμίκρυνση και μεγέθυνση της υφής (σε διαφορετικούς άξονες), αφού η προ-εικόνα μπορεί να γίνει υπερβολικά επιμήκης. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος της κατασκευής φίλτρων δειγματοληψίας της υφής έχουν προταθεί διάφορες λύσεις, όπως το ελλειπτικό βεβαρημένο φίλτρο μέσου όρου — το οποίο είναι ουσιαστικά μια σειρά από προκατασκευασμένα φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης Gaussian μορφής με διάφορους προσανατολισμούς και κλίμακες που να πλησιάζουν τη μορφή της προ-εικόνας κάθε εικονοστοιχείου [Gree86].

14.4.2 Mip-mapping⊛

Είναι σαφές ότι ο επανυπολογισμός ή η δυναμική επιλογή ενός προϋπολογισμένου φίλτρου και η πραγματοποίηση της δειγματοληψίας και του φιλτραρίσματος σε πραγματικό χρόνο είναι μια ακριβή διαδικασία από πλευράς υπολογισμών. Αν κάνουμε την απλούστευση ότι η προ-εικόνα – και άρα ο πυρήνας του φίλτρου – έχει μεταβλητό μέγεθος αλλά σταθερό προσανατολισμό και λόγο διαστάσεων, τότε μπορούμε να προϋπολογίσουμε προ-φιλτραρισμένες εκδόσεις της εικόνας υφής και να τις αποθηκεύσουμε αποδοτικά στη μνήμη. Κατά την ώρα της σχεδίασης το μόνο που χρειάζεται είναι να αποφανθούμε ποιο είναι το κατάλληλο μέγεθος πυρήνα φίλτρου και συνεπώς, ποια προ-φιλτραρισμένη έκδοση της εικόνας υφής πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για τη σχεδίαση του συγκεκριμένου fragment. Ακριβώς αυτή την ιδέα διατύπωσε και ο L. Williams στην εργασία του πάνω στην πυραμιδική παραμετρική παρεμβολή [Will83], η οποία εισήγαγε την έννοια του *mip-mapping* για την απεικόνιση υφής σε επιφάνειες. Το ακρώνυμο "mip" αντιστοιχεί στη Λατινική φράση "*multum in parvo*," που σημαίνει «πολλά πράγματα σε ένα μικρό μέρος» και έχει να κάνει κυρίως με τον τρόπο αποθήκευσης των προ-φιλτραρισμένων εκδόσεων της εικόνας υφής στη μνήμη.

Το Mip-mapping δουλεύει ως εξής: η αρχική εικόνα υφής (όχι απαραίτητα τετράγωνη) δειγματοληπτείται και φιλτράρεται αναδρομικά σε ολοένα και μικρότερες εκδόσεις της (*mip-maps*) η καθεμία από τις οποίες έχει το μισό μέγεθος σε κάθε διάσταση σε σχέση με την προηγούμενη (Σχήμα 14.19(α)). Ένα απλό 2×2 ομοιόμορφο φίλτρο χρησιμοποιείται για το μέσο όρο τεσσάρων texels της μίας έκδοσης για να παραχθεί το χρώμα του αντίστοιχου texel της αμέσως μικρότερης εικόνας. Από αυτή τη διαδικασία, προκύπτει μια ιεραρχία από mip-maps που το καθένα παριστάνει το αποτέλεσμα της

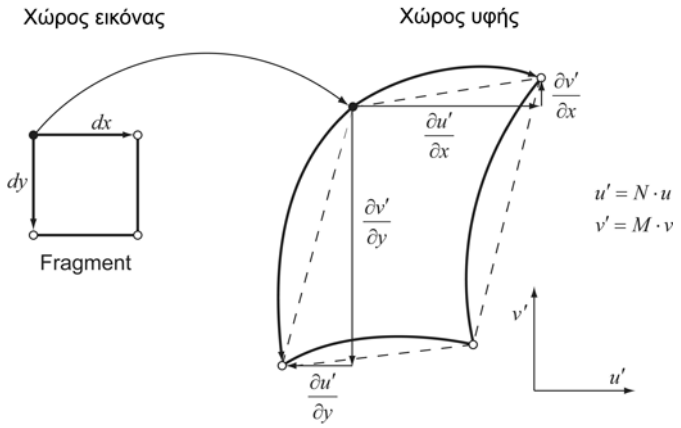


Σχήμα 14.19: *Mip-mapping. (α) Τα διαδοχικά επανα-δειγματοληπτημένα επίπεδα mip-map. Η αριστερή εικόνα είναι το βασικό επίπεδο (επίπεδο 0). (β) Η πυραμιδική παραμετρική αναπαράσταση του mip-map. (γ) Οργάνωση μιας τρικάναλης έγχρωμης εικόνας υφής στη μνήμη ως mip-map.*

συνέλιξης της αρχικής εικόνας μ' ένα τετράγωνο φίλτρο. Η ακμή του αντίστοιχου φίλτρου έχει μήκος δύναμη του δύο, αντίστοιχη του βάθους της ιεραρχίας (Σχήμα 14.19(α) και (β)). Η αρχική εικόνα αποτελεί το επίπεδο 0 της πυραμιδικής αναπαράστασης υφής και αντιστοιχεί σε πυρήνα φίλτρου με διαστάσεις $2^0 = 1$. Τα επόμενα επίπεδα είναι αριθμημένα διαδοχικά και αντιστοιχούν σε φιλτράρισμα με πυρήνες φίλτρων με μήκος πλευράς 2^i, όπου i είναι το *επίπεδο του mip-map*. Αν η αρχική εικόνα έχει διαστάσεις $N \times M$, όπου και οι δύο είναι δυνάμεις του 2, το σύνολο των mip-maps αριθμεί το πολύ $\lfloor \log_2 (\max(N, M)) \rfloor + 1$ επίπεδα. Το i-στό επίπεδο mip-map έχει διαστάσεις που δίνονται από τη σχέση:

$$\max\left(\frac{N}{2^i}, 1\right) \times \max\left(\frac{M}{2^i}, 1\right). \tag{14.20}$$

Είδαμε στην Ενότητα 14.2.1 ότι για να εξάγουμε την τιμή υφής από μια διδιάστατη εικόνα σ' ένα τυχαίο σημείο (u, v) στον παραμετρικό χώρο της υφής, χρησιμοποιούμε διγραμμική παρεμβολή μεταξύ των κοντινότερων διακριτών texels. Για να προσεγγίσουμε το φιλτράρισμα μιας εικόνας μ' έναν πυρήνα φίλτρου τυχαίου μεγέθους, ει-



Σχήμα 14.20: *Η προ-εικόνα ενός εικονοστοιχείου (fragment) και οι αντίστοιχες μερικές παράγωγοι ως προς της συντεταγμένες του χώρου της (τελικής) εικόνας.*

σάγουμε μια τρίτη παράμετρο d, $d \in [0, \text{level}_{\max}]$, η οποία κινείται μεταξύ των διαφορετικών επιπέδων και παρεμβάλει τις τιμές των πλησιέστερων επιπέδων mip-map, ανάλογα με το συντελεστή σμίκρυνσης που υπολογίζεται για κάθε fragment της εικόνας. Αυτό σημαίνει ότι όλα τα φίλτρα που χρησιμοποιούνται στη διαδικασία του ιεραρχικού προ-φιλτραρίσματος προσεγγίζονται από γραμμική ανάμειξη ορθογώνιων φίλτρων. Παρότι αυτή η τεχνική απέχει αρκετά από την παραγωγή ιδανικών φίλτρων και δε χρησιμοποιεί κάποιο μετασχηματισμό του πυρήνα του φίλτρου για να προσαρμόσει το φίλτρο σε ασύμμετρες προ-εικόνες, συνήθως δουλεύει αρκετά ικανοποιητικά αν έχει επιλεγεί η κατάλληλη τιμή για το d. Ο υπολογισμός της παραμέτρου πυραμιδικής παρεμβολής d είναι μεγάλης σημασίας για την ποιότητα και την ευκρίνεια του αποτελέσματος. Μια κακή επιλογή για την παράμετρο d οδηγεί είτε σε ανεπιτυχή αντιταύτιση είτε σε υπερβολικό θόλωμα της υφής.

Ας θεωρήσουμε τώρα το ρυθμό μεταβολής των texels αναφορικά με τη μεταβολή των εικονοστοιχείων (fragments) στο χώρο της εικόνας. Για μια εικόνα υφής $N \times M$, οι μερικές παράγωγοι της εικόνας υφής αναφορικά με τον οριζόντιο και κάθετο άξονα του καταχωρητή εικόνας είναι $\partial u'/\partial x$, $\partial u'/\partial y$, $\partial v'/\partial x$, $\partial v'/\partial y$ (Σχήμα 14.20), όπου

$$u' = u \cdot N, \qquad v' = v \cdot M, \qquad u, v \in [0, 1]. \tag{14.21}$$

Το μέγεθος και ο προσανατολισμός της προ-εικόνας του εικονοστοιχείου συνδέονται άμεσα με αυτές τις ποσότητες. Στην απλουστευμένη περίπτωση του mip-mapping, κατά την οποία μας ενδιαφέρει μόνο η επιλογή ενός τετράγωνου φίλτρου, η γραμμική κλίμακα ρ του πυρήνα του φίλτρου είναι περίπου ίση με τη μέγιστη διάσταση της προ-εικόνας του εικονοστοιχείου που αντιστοιχεί στη μέγιστη σμίκρυνση της υφής [Will83]:

$$\rho = \max\left\{\sqrt{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right)^2}, \sqrt{\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)^2}\right\}. \tag{14.22}$$

Παρότι ο παραπάνω ορισμός για την κλίμακα του φίλτρου δίνει καλά αποτελέσματα, σε πρακτικές υλοποιήσεις θα ήταν επιθυμητή μια απλούστερη υπολογιστικά λύση [Sega04]. Η ζητούμενη τιμή της παραμέτρου παρεμβολής d, η οποία είναι στην ουσία μια συνεχής μεταβλητή που δηλώνει το επίπεδο λεπτομέρειας της υφής (συνεχές επίπεδο mip-map), εξαρτάται από την κλίμακα του φίλτρου και μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$d = \begin{cases} \text{level}_{\max} & \lambda > \text{level}_{\max}, \\ \lambda & 0 \le \lambda \le \text{level}_{\max}, \\ 0 & \lambda < 0, \end{cases} \tag{14.23}$$

όπου $\lambda = \log_2 \rho$ και $\text{level}_{\max}$ είναι το μέγιστο προϋπολογισμένο επίπεδο mip-map.

Ανάλογα με το μηχανισμό επιλογής των mip-map εικόνων, η d μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε ως κριτήριο απόφασης του κοντινότερου επιπέδου είτε ως μια τρίτη παράμετρος παρεμβολής για να εκτελέσουμε τριγραμμική παρεμβολή μεταξύ των διαδοχικών επιπέδων· Σ' αυτή την περίπτωση υλοποιείται πλήρως η μέθοδος πυραμιδικής υφής και παράγεται ομαλή μετάβαση από το ένα επίπεδο λεπτομέρειας υφής στο επόμενο (Σχήμα 14.16(δ)).

Η ακριβής οργάνωση των διαφορετικών επιπέδων λεπτομέρειας της εικόνας υφής στη μνήμη εξαρτάται από την εκάστοτε υλοποίηση και επηρεάζεται από τον αριθμό των καναλιών χρώματος της εικόνας. Για τρία κανάλια χρώματος, ο Williams πρότεινε το διαχωρισμό της εικόνας σε τρεις αντίστοιχες ψηφίδες και την παράταξή τους στο σχηματισμό που φαίνεται στο Σχήμα 14.19(γ). Τα επίπεδα mip-map υψηλότερου επιπέδου σώζονται πάνω και αριστερά ως προς τις τριάδες καναλιών του προηγούμενου επιπέδου. Η ιδέα πίσω από τη συγκεκριμένη διάταξη είναι ότι όταν έχει υπολογιστεί το ζεύγος συντεταγμένων (u, v) για την αρχική εικόνα, οι αντίστοιχες διευθύνσεις των συντεταγμένων για τα υπόλοιπα επίπεδα προκύπτουν εύκολα με δυαδική ολίσθηση ανάλογα με το επίπεδο.

Το προ-φιλτράρισμα της υφής με την τεχνική των mip-maps επιταχύνει σημαντικά τη σχεδίαση επειδή ακριβώς το φιλτράρισμα λαμβάνει χώρα κατά το φόρτωμα της υφής στην αρχή. Η προσέγγιση ενός πυρήνα φίλτρου τυχαίου μεγέθους με παρεμβολή προϋπολογισμένων φίλτρων σταθερού μεγέθους επιτρέπει την αποτελεσματική υλοποίηση του προ-φιλτραρίσματος στο hardware για εικόνες υφής, από μία έως και τρεις διαστάσεις, με τον ίδιο τρόπο. Σήμερα, όλες οι κάρτες γραφικών του εμπορίου υλοποιούν πλήρως τη λειτουργικότητα του mip-mapping καθώς επίσης και την ανισοτροπική έκδοσή του (παραλληλόγραμμοι πυρήνες φίλτρου με όλους τους συνδυασμούς διαστάσεων αντί για μόνο τετράγωνους). Ο αναγνώστης όμως θα πρέπει να έχει υπόψη του πως το mip-mapping δεν κάνει βέλτιστο φιλτράρισμα, στην περίπτωση που

η προ-εικόνα αποκλίνει από το παραλληλόγραμμο σχήμα. Τέλος, ένας σημαντικός περιορισμός όλων των αλγορίθμων που εξαρτώνται από δεδομένα του καταχωρητή εικόνας είναι ότι δύνανται να εφαρμοστούν μόνο σε αυξητικούς αλγόριθμους σχεδίασης. Άλλες μέθοδοι σχεδίασης — όπως είναι η παρακολούθηση ακτίνας — δεν μπορούν να ωφεληθούν άμεσα από το mip-mapping καθώς η προ-εικόνα δεν μπορεί να υπολογιστεί για ένα τυχαίο και μεμονωμένο δείγμα πάνω στην επιφάνεια που χρωματίζεται με υφή.

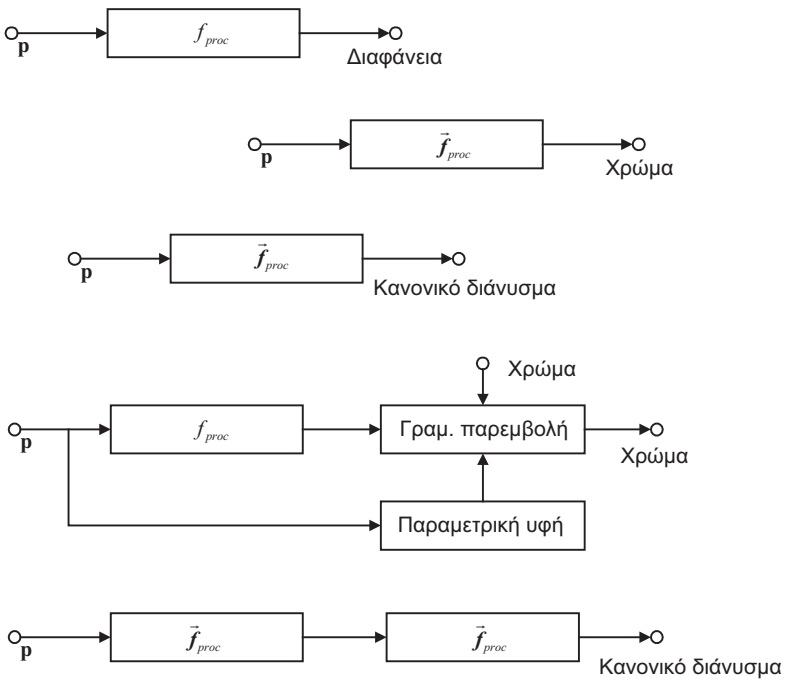
14.5 Συναρτησιακή υφή

Μέχρι τώρα, ασχοληθήκαμε με απεικόνιση υφής σε δύο στάδια, ξεκινώντας από τις Καρτεσιανές συντεταγμένες και πηγαίνοντας μέσω κάποιας παραμετρικής αναπαράστασης στο χώρο μιας προκαθορισμένης εικόνας υφής, απ' όπου δειγματοληπτούσαμε τιμές για το χρωματισμό της επιφάνειας· εξ ου και η ονομασία «παραμετρική απεικόνιση υφής». Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως στο κεφάλαιο, αυτό το είδος αναπαράστασης υφής είναι ο πιο αυθόρμητος τρόπος να εφαρμόσουμε υφή η οποία είναι αποθηκευμένη σε έναν πίνακα από προϋπολογισμένες τιμές. Υπάρχουν όμως πολλές περιπτώσεις, κατά τις οποίες ένα χαρακτηριστικό μιας επιφάνειας (ή του όγκου του στερεού) μπορεί να υπολογιστεί απευθείας από ένα μαθηματικό μοντέλο ή γενικότερα από έναν αλγόριθμο. Η *συναρτησιακή υφή* δε χρησιμοποιεί κάποιον ενδιάμεσο παραμετρικό χώρο. Αντ' αυτού, απεικονίζει άμεσα και με μοναδικό τρόπο ένα διάνυσμα συντεταγμένων εισόδου σε μια τιμή υφής. Οι αλγόριθμοι συναρτησιακής υφής μπορούν να θεωρηθούν ως χρονικά μεταβαλλόμενα, αυτοτελή συστήματα και συχνά τους αποδίδεται η ονομασία *procedural shaders*. Με άλλα λόγια είναι δομικά στοιχεία στα οποία η είσοδος του ενός μπορεί να συνδεθεί στην έξοδο του προηγούμενου για να παράγουν ένα σύνολο από χαρακτηριστικά υλικού για την επιφάνεια με βάση τα τοπικά της χαρακτηριστικά. Μια συνάρτηση ή ένας αλγόριθμος υφής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό συνιστωσών χρώματος, κανονικών διανυσμάτων και άλλων κατευθύνσεων, νέων συντεταγμένων για σημεία ή ενός βαθμωτού μεγέθους. Μερικές από τις μορφές που μπορεί να έχει ένας αλγόριθμος συναρτησιακής υφής, με δεδομένο ένα διάνυσμα χαρακτηριστικών $\mathbf{a}$ και ένα σημείο εισόδου $\mathbf{p}$, είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{f}_{\text{proc}}(\mathbf{p}, \mathbf{a}), \\ \overrightarrow{\mathbf{n}} &= \overrightarrow{\mathbf{f}}_{\text{proc}}(\mathbf{p}, \mathbf{a}), \\ t &= f_{\text{proc}}(\mathbf{p}, \mathbf{a}). \end{aligned} \tag{14.24}$$

Οι παράμετροι εξόδου μιας συνάρτησης υφής μπορούν με τη σειρά τους να τροφοδοτήσουν την είσοδο μιας άλλης συνάρτησης υφής ή να χρησιμοποιηθούν για τη δεικτοδότηση μιας παραμετρικής υφής. Στο Σχήμα 14.21 φαίνονται μερικά παραδείγματα χρήσης συναρτησιακής υφής.

Μια σημαντική ερώτηση που πρέπει να κάνει κανείς είναι, ποιος είναι ο λόγος να χρησιμοποιήσουμε συναρτησιακή υφή αντί για εικόνες υφής. Για να απαντήσουμε σε αυτό, πρέπει πρώτα να δούμε ποιες είναι οι ιδιότητες της συναρτησιακής υφής. Καταρχήν, εξ ορισμού, μια συνάρτηση υφής έχει ένα συνεχές και άπειρο πεδίο ορισμού



Σχήμα 14.21: *Η χρήση συναρτησιακής υφής για διάφορους υπολογισμούς χρωματισμού επιφάνειας.*

και παράγει μια έξοδο με άπειρη ανάλυση (προφανώς περιορίζεται από την αριθμητική ακρίβεια των πράξεων). Αυτό σημαίνει ότι η δειγματοληψία μιας επιφάνειας σε μεγάλη ανάλυση με συναρτησιακή υφή δε θα καταφεύγει στην παρεμβολή κάποιων διακριτών δεδομένων· άρα θα είναι απαλλαγμένη από το θόλωμα της μεγέθυνσης της παραμετρικής υφής με εικόνες, αποδίδοντας το πεδίο τιμών με μεγαλύτερη λεπτομέρεια. Επομένως, η συναρτησιακή υφή είναι απαλλαγμένη από προβλήματα μεγέθυνσης. Κατά δεύτερον, αφού δε μεσολαβεί κάποια παραμετρική επιφάνεια που μπορεί να έχει ασύμβατη παραμετροποίηση σε σχέση με το αντικείμενο μας, δεν υπάρχει κάποιος παράγοντας που να επιφέρει παραμόρφωση. Τέλος, μια συνάρτηση υφής μπορεί — και πρέπει — να οριστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζει μια απεικόνιση από ολόκληρο τον $\mathbb{R}^3$ στο σωστό πεδίο τιμών.

Πολλά επαναλαμβανόμενα μοτίβα, αυτο-όμοια σχήματα, ή τυχαία και θορυβώδη σήματα που απαντούμε στη φύση μπορούν να μοντελοποιηθούν με μεγάλη ακρίβεια χρησιμοποιώντας συναρτησιακή υφή σε οποιονδήποτε ρυθμό δειγματοληψίας. Η ικανότητα της συναρτησιακής υφής να ελέγχει την εμφάνιση ενός μοτίβου με μαθηματικό τρόπο με την κατάλληλη επιλογή παραμέτρων μας παρέχει ένα δυνατό εργαλείο οπτικοποίησης, τόσο για επιστημονικές όσο και για καλλιτεχνικές εφαρμογές. Δείτε την Εικόνα 3 για ένα παράδειγμα χρήσης συναρτησιακής υφής για σύνθεση εικόνας.

Μέχρι πριν μερικά χρόνια η συναρτησιακή υφή ήταν διαθέσιμη μόνο σε εφαρμογές μη πραγματικού χρόνου, επειδή το hardware δεν μπορούσε να υποστηρίξει shaders.

Όλοι οι υπολογισμοί γίνονταν στη CPU σπαταλώντας έναν πολύτιμο πόρο συστήματος και παράγοντας αποτελέσματα που ήταν ασύμβατα με τη σωλήνωση του υποσυστήματος γραφικών. Ο μόνος τρόπος να συνδυαστεί η συναρτησιακή υφή με το μηχανισμό ανάγνωσης εικόνων υφής που υποστήριζε το hardware ήταν να δειγματοληπτηθεί η πρώτη στην ανάλυση της εικόνας υφής και να χρησιμοποιηθεί ως παραμετρική υφή. Προφανώς μια τέτοια λύση επαναφέρει όλα τα προβλήματα δειγματοληψίας που είδαμε στην Ενότητα 14.4 και χάνει όλα τα πλεονεκτήματα της συναρτησιακής υφής. Από τότε που εφευρέθηκαν οι προγραμματιζόμενες GPUs, απαντούμε συνέχεια shaders που υλοποιούν συναρτησιακή υφή για την απεικόνιση εντυπωσιακών υλικών επιφάνειας και ειδικών εφέ.

14.5.1 Παραγωγή θορύβου*

Στο περιβάλλον πολύ συχνά συναντάμε υλικά με ακανόνιστες μορφές ή κοκκώδη υφή. Για παράδειγμα, αν παρατηρήσουμε προσεκτικά έναν τραχύ σοβατισμένο τοίχο, ή βαμμένο με ματ μπογιά, θα ανακαλύψουμε πως ο ομοιόμορφος φωτισμός που σκεδάζεται από την επιφάνειά του, προκαλείται από ακανόνιστες ανωμαλίες του ανάγλυφου του υλικού. Μια έκταση με άμμο ή διάφορα μεταλλεύματα και πετρώματα αποτελούνται από μια ανομοιόμορφη συγκέντρωση από μικροσκοπικά και ακανόνιστα ψήγματα διαφορετικών υλικών. Ο γρανίτης και το μάρμαρο συχνά διαθέτουν έντονες και απότομες εναλλαγές χρώματος με τυρβώδη μορφή. Φανερά, μπορεί κανείς να βρει πολλά παραδείγματα παρουσίας θορύβου στη σύνθεση φυσικών υλικών και σχηματισμών. Ο σχεδιασμός και η υλοποίηση μιας συνάρτησης υφής, η οποία να συμπεριφέρεται ως γεννήτρια ψευδο-τυχαίων αριθμών αλλά να διαθέτει και κάποια πιο ελεγχόμενα χαρακτηριστικά και χρήσιμες ιδιότητες, είναι κρίσιμης σημασίας για το πεδίο των αλγορίθμων σύνθεσης υφής. Επιπλέον, αν υπερθέσουμε ένα μοτίβο θορύβου σε επαναλαμβανόμενη παραμετρική υφή ή τη διαμορφώσουμε με ένα αργά μεταβαλλόμενο τυχαίο σήμα, η έντονα εμφανής επαναληπτικότητα μπορεί να μειωθεί και έτσι να μοιάζει πιο ενδιαφέρουσα η επιφάνεια.

Για να είναι χρήσιμη μια γεννήτρια θορύβου για τη σύνθεση εικόνας πρέπει να ακολουθεί κάποιους κανόνες, προκειμένου να εξασφαλίζεται μια συνεπής έξοδος για οποιοδήποτε διάνυσμα εισόδου. Ο συναρτησιακός θόρυβος πρέπει να είναι όλα τα ακόλουθα:

- *Χωρίς μνήμη.* Η εκάστοτε τιμή ή το διάνυσμα εξόδου δεν πρέπει να εξαρτάται από προηγούμενες καταστάσεις ή τιμές εξόδου. Αυτός ο περιορισμός είναι απαραίτητος αν επιθυμούμε να λαμβάνουμε μια ασυσχέτιστη ακολουθία τιμών εξόδου.

- *Χρονικά αναλλοίωτος.* Η έξοδος πρέπει να είναι ντετερμινιστική. Εξάρτηση της συνάρτησης θορύβου από το ρολόι του συστήματος ή αντίστοιχες γεννήτριες αριθμών θα πρέπει να αποφεύγεται καθώς ο παραγόμενος θόρυβος θα είναι διαφορετικός για επαναλαμβανόμενα δείγματα στην ίδια τοποθεσία.

- *Παραγωγίσιμος.* Η έξοδος της γεννήτριας θορύβου πρέπει να είναι συνεχής και ομαλή. Για κάθε τιμή του διανύσματος εισόδου πρέπει να ορίζονται οι πρώτες μερικές παράγωγοι ως προς τις Καρτεσιανές συντεταγμένες, καθώς είναι απαραίτητες για πολλούς υπολογισμούς και εφέ φωτοσκίασης.

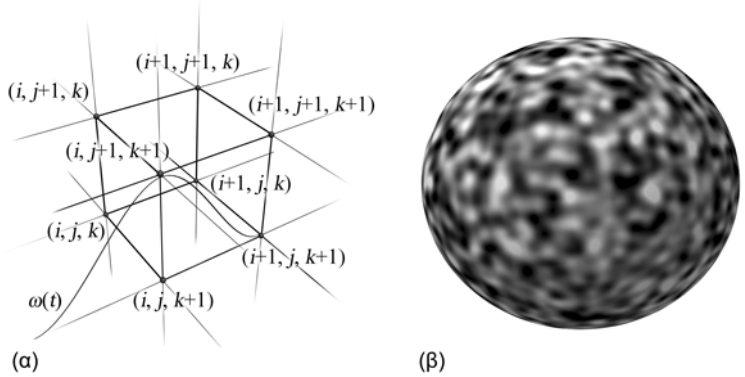
- *Περιορισμένου εύρους ζώνης συχνοτήτων.* Μια γεννήτρια λευκού θορύβου (ομοιόμορφη κατανομή ισχύος, άπειρη έκταση φάσματος) δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τον υπολογισμό τιμών υφής με βάση συντεταγμένες εικόνας ή παραμέτρους υφής, αφού το σήμα δε θα δειγματοληπτηθεί ποτέ επαρκώς, ανεξάρτητα από την πυκνότητα των δειγμάτων. Το μοντέλο υπολογισμού του συναρτησιακού θορύβου θα πρέπει να παρέχει τη δυνατότητα προσδιορισμού της μέγιστης (και ελάχιστης) συχνότητας εναλλαγής τιμών του αποτελέσματος. Ο θόρυβος περιορισμένου εύρους ζώνης με χαμηλό κατώφλι υψηλών συχνοτήτων παράγει συνεκτικές και αργά μεταβαλλόμενες χωρικά τιμές, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ακόμα και για τη μεταβολή της θέσης των πραγματικών σημείων της γεωμετρίας στην οποία εφαρμόζεται.

Η ευρύτερα χρησιμοποιούμενη γεννήτρια θορύβου στα γραφικά υπολογιστών προτάθηκε από τον Perlin [Perl85]. Ο *θόρυβος Perlin* ανταποκρίνεται σε όλες τις ιδιότητες που αναφέρθηκαν παραπάνω και βασίζεται σ' ένα αρκετά κοινό και αποδοτικό σχήμα κατακερματισμού για την παρεμβολή μεταξύ προϋπολογισμένων τυχαίων τιμών.

Θεωρείστε ένα πλέγμα στον $\mathbb{R}^3$ που αποτελείται από όλες τις τριάδες ακέραιων συντεταγμένων, έτσι ώστε ο κόμβος $\Omega_{i,j,k}$ να βρίσκεται πάνω στο σημείο (i, j, k): $i, j, k \in \mathrm{N}$. Με κάθε κόμβο του πλέγματος είναι συσχετισμένος ένας προϋπολογισμένος ψευδο-τυχαίος αριθμός $\gamma_{i,j,k}$ στο διάστημα $[-1.0, 1.0]$, μια τριάδα ψευδο-τυχαίων αριθμών — στην περίπτωση που μας απασχολούν ολόκληρα διανύσματα θορύβου — ή ακόμα και ψευδο-τυχαία μοναδιαία διανύσματα $\overrightarrow{\gamma}_{i,j,k}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα εξετάσουμε την περίπτωση της βαθμωτής γεννήτριας θορύβου. Η έξοδος της συνάρτησης θορύβου είναι το βεβαρημένο άθροισμα των τιμών στους οκτώ πλησιέστερους κόμβους ως προς το σημείο εισόδου $\mathbf{p}$. Πιο συγκεκριμένα, ο Perlin χρησιμοποίησε τους κόμβους του πλέγματος $\Omega_{i,j,k}$ ως κόμβους μιας Spline παρεμβολής, οι οποίοι συνεισφέρουν στο τελικό αποτέλεσμα σύμφωνα με την ακόλουθη συνάρτηση βάρους [Perl89]:

$$\omega(t) = \begin{cases} 2|t|^3 - 3t^2 + 1 & |t| < 1, \\ 0 & |t| \geq 1. \end{cases} \tag{14.25}$$

Η παραπάνω συνάρτηση είναι μη μηδενική σε διάστημα 2 μονάδων με κέντρο το 0, οπότε για έναν ακέραιο i, η $\omega(t - i)$ μεγιστοποιείται στο i και πέφτει στο 0 πέρα από το $i \pm 1$. Η τελική μορφή του θορύβου $f_{\text{noise}}(\mathbf{p})$ για ένα τυχαίο σημείο $\mathbf{p} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ δίνεται με τριγραμμική παρεμβολή μεταξύ των τιμών $\gamma_{i,j,k}$ των κοντινότερων κόμβων $\Omega_{i,j,k}$ προς το σημείο $\mathbf{p}$ (Σχήμα 14.22(α)), χρησιμοποιώντας ως συντελεστή παρεμβολής την $\omega(t - \lfloor t \rfloor)$ αντί για το $t - \lfloor t \rfloor$, $t \in \mathbb{R}$. Οι οκτώ κοντινότεροι κόμβοι στο σημείο $\mathbf{p}$ είναι προφανώς οι $\Omega_{i,j,k}$, $\Omega_{i+1,j,k}$, $\Omega_{i,j+1,k}$, $\Omega_{i,j,k+1}$, $\Omega_{i+1,j+1,k}$, $\Omega_{i,j+1,k+1}$, $\Omega_{i+1,j,k+1}$, $\Omega_{i+1,j+1,k+1}$: $i = \lfloor x \rfloor$, $j = \lfloor y \rfloor$, $k = \lfloor z \rfloor$.



Σχήμα 14.22: *Ο θόρυβος Perlin. (α) Οι τιμές υφής σε τυχαίες τριδιάστατες συντεταγμένες υπολογίζονται με βάση ψευδο-τυχαίους αριθμούς που συνδέονται με τους κοντινότερους ακέραιους. (β) Το αποτέλεσμα της δειγματοληψίας του θορύβου Perlin στην επιφάνεια μιας σφαίρας.*

Προκειμένου να πετύχουμε χρονικά αναλλοίωτα αποτελέσματα που να μπορούν να επαναληφθούν, χωρίς να μοιάζουν περιοδικά και προβλέψιμα, κάνουμε τα εξής: Οι τιμές για τη $\gamma_{i,j,k}$ επιλέγονται από έναν πίνακα G από N ομοιόμορφα κατανεμημένες προϋπολογισμένες τιμές στο επιθυμητό εύρος επιστρατεύοντας έναν κοινό μηχανισμό κατακερματισμού με βάση το υπόλοιπο ακέραιας διαίρεσης:

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j,k} &= \mathrm{G}\left[\mathrm{hash}\left(i + \mathrm{hash}\left(j + \mathrm{hash}(k)\right)\right)\right], \\ \mathrm{hash}(n) &= \mathrm{P}[n \bmod N]. \end{aligned} \tag{14.26}$$

Στην παραπάνω σχέση, P είναι ένας πίνακας που περιέχει μια ψευδο-τυχαία αντιμετάθεση των πρώτων N ακεραίων. Στο Σχήμα 14.22(β) απεικονίζονται αποτελέσματα της τριδιάστατης συνάρτησης θορύβου Perlin. Έχουν υλοποιηθεί πολλές παραλλαγές του ορισμού που δόθηκε εδώ με μικρές αλλαγές στα βάρη και στη συνάρτηση παρεμβολής των τιμών του πλέγματος ή στην καμπύλη απόκρισης στις τιμές εισόδου, η οποία παραπάνω θεωρήθηκε γραμμική.

14.5.2 Στροβιλισμός⊛

Μια επέκταση της συνάρτησης θορύβου που περιγράφηκε στην Ενότητα 14.5.1 είναι ο θόρυβος $1/f$, ή αλλιώς συνάρτηση *στροβιλισμού*, η οποία επίσης προτάθηκε από τον Perlin [Perl85]. Αυτή είναι άλλη μια συνάρτηση θορύβου με περιορισμένο εύρος συχνοτήτων της οποίας το μοτίβο απαντάται συχνά σε διάφορους φυσικούς σχηματισμούς και φαινόμενα. Όπως προδίδει το όνομά του, ο θόρυβος $1/f$ έχει μια καμπύλη φάσματος της οποίας το μέτρο είναι αντιστρόφως ανάλογο της αντίστοιχης συχνότητας. Μια προσέγγιση αυτού του στοχαστικού σήματος επιτυγχάνεται με υπέρθεση αρμονικών μιας συνάρτησης θορύβου σαν την $f_{\mathrm{noise}}(\mathbf{p})$, με κατάλληλη προσαρμογή κλίμακας για την καθεμία. Με βάση τη δυϊκή σχέση μεταξύ κλίμακας χρόνου και φά-

σματος, η συρρίκνωση της διάρκειας του σήματος θορύβου έχει ως αποτέλεσμα την επέκταση του φάσματός του. Συνεπώς, για να παράγουμε τις απαιτούμενες αρμονικές υψηλής τάξης αλλάζουμε την κλίμακα του σήματος εισόδου, δηλαδή των σημείων πάνω στα οποία υπολογίζεται ο θόρυβος, με βάση την κεντρική συχνότητα του ολισθημένου φάσματος. Αυτό οδηγεί στην ακόλουθη σχέση για τη συνάρτηση που παράγει το θόρυβο $1/f$ (Σχήμα 14.23):

$$f_{\text{turb}}(\mathbf{p}) = f_{1/f}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{\text{octaves}} \frac{1}{2^i f} f_{\text{noise}}(2^i f \cdot \mathbf{p}) \tag{14.27}$$

όπου f είναι η κεντρική συχνότητα του θορύβου στο πεδίο του χώρου και *octaves* είναι ο μέγιστος αριθμός των σημάτων θορύβου που υπερτίθενται. Το οπτικό αποτέλεσμα της παραπάνω συνάρτησης θορύβου μοιάζει με κίνηση Brown. Η Εξίσωση (14.27) μπορεί να γραφεί σε πιο γενικευμένη μορφή, παρέχοντας τη δυνατότητα ελέγχου της συνεισφοράς από τις οκτάβες μεγαλύτερης τάξης, ανεξάρτητα από τη συχνότητα:

$$f_{1/f}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{\text{octaves}} \omega^i \cdot f_{\text{noise}}(\lambda^i \cdot \mathbf{p}), \tag{14.28}$$

όπου το $\omega > 0$ ρυθμίζει τη συνεισφορά των υψηλότερων συχνοτήτων στο τελικό αποτέλεσμα και το $\lambda > 1$ ελέγχει τη χαοτική συμπεριφορά του θορύβου. Όταν $\lambda \to 1$, η $f_{1/f}(\mathbf{p})$ μοιάζει με την $f_{\text{noise}}(\mathbf{p})$, ενώ μεγαλύτερες τιμές την κάνουν να μοιάζει πιο τυρβώδης. Αν θεωρήσουμε τη διανυσματική μορφή της συνάρτησης θορύβου $1/f$, όπου το $\vec{f}_{1/f}(\mathbf{p})$ παίζει το ρόλο της απόκλισης του σημείου $\mathbf{p}$ μετά από έναν τυχαίο περίπατο, το ω εκφράζει την ταχύτητα της κίνησης και το λ προσομοιώνει την εντροπία του συστήματος κατά την κίνηση Brown.

Μια κοινή παραλλαγή της συνάρτησης στροβιλισμού συναθροίζει τις απόλυτες τιμές από τις επιμέρους οκτάβες της $f_{\text{noise}}(\mathbf{p})$, έχοντας ως αποτέλεσμα ένα μοτίβο με πιο απότομα και καθαρά «νερά». Αυτή η παραλλαγή προφανώς δεν μπορεί να εφαρμοστεί στη διανυσματική μορφή της συνάρτησης.

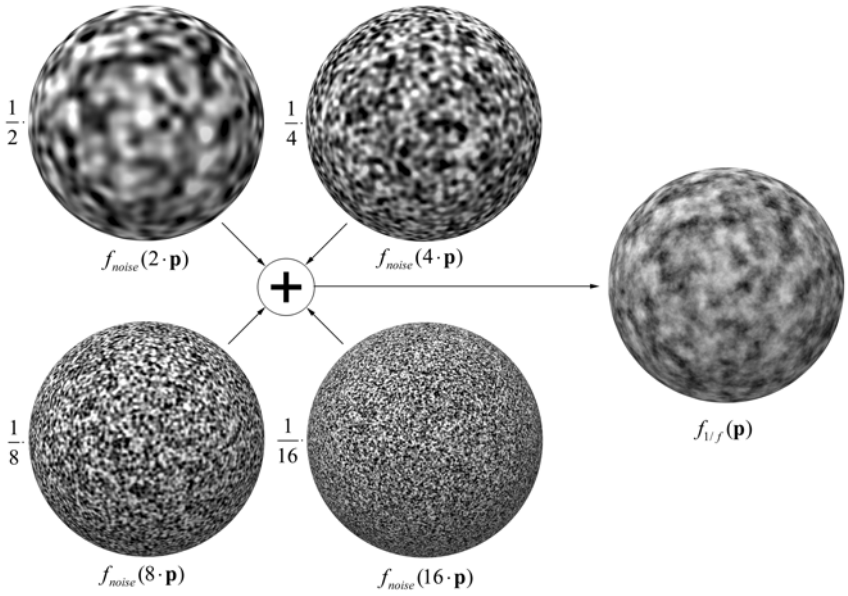
Μπορούν να προκύψουν πολλά ενδιαφέροντα μοτίβα με την εφαρμογή είτε της βαθμωτής είτε της διανυσματικής μορφής της συνάρτησης στροβιλισμού σε απλούς μαθηματικούς τύπους. Ο θόρυβος μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως απόκλιση πάνω στις συντεταγμένες εισόδου ή να αποτελέσει μέρος μιας σύνθετης συνάρτησης:

$$f_{\text{proc}}(\mathbf{p}) = f_{\text{math}}\left(f_{\text{turb}}(\mathbf{p})\right), \tag{14.29}$$

$$f_{\text{proc}}(\mathbf{p}) = f_{\text{math}}(\mathbf{p} + a \cdot \vec{f}_{\text{turb}}(\mathbf{p})). \tag{14.30}$$

14.5.3 Κοινές συναρτήσεις τριδιάστατης υφής

Ένα από τα πιο κοινά στερεά μοτίβα είναι το τριδιάστατο καρώ (Σχήμα 14.24), το οποίο αποτελείται από εναλλασσόμενες ορθογώνιες περιοχές διαφορετικού χρώματος (μονοχρωματικές εντάσεις εδώ). Αυτό το μοτίβο είναι προτιμότερο να απεικονιστεί με συναρτησιακή υφή εξαιτίας της ασυνέχειας που εμφανίζει στη μετάβαση από τη μία



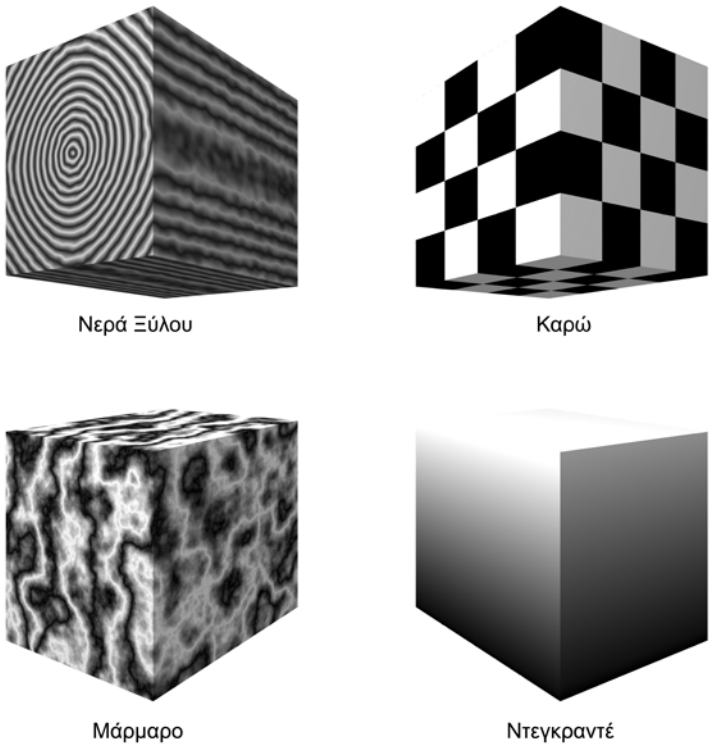
Σχήμα 14.23: *Σύνθεση του θορύβου* $1/f$.

χρωματιστή περιοχή στη διπλανή της, η οποία δεν μπορεί να παρασταθεί σωστά με εικόνα υφής, αφού σε κάποια ανάλυση, είτε θα παρουσιάσει οδόντωση στις ασυνέχειες είτε θα αναγκαστούμε να τη θολώσουμε για να την εξομαλύνουμε. Πίσω από αυτή την κομψή συνάρτηση υφής κρύβεται μια πολύ απλή σχέση:

$$f_{\text{checker}}(\mathbf{p}) = (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor z \rfloor) \bmod 2. \tag{14.31}$$

Για τον αντίθετο λόγο, ένα εξαιρετικά χρήσιμο μοτίβο είναι η γραμμική μετάπτωση χρώματος (ντεγκραντέ). Όταν παρεμβάλλουμε το χρώμα μεταξύ δύο τοποθεσιών με βάση τις Καρτεσιανές συντεταγμένες τους ή τις αποστάσεις σημείων στο χώρο, ένα συναρτησιακά παραγόμενο ντεγκραντέ δημιουργεί μιας υψηλής ποιότητας μετάπτωση με όλους τους ενδιάμεσους τόνους, χωρίς εμφανείς ζώνες ίδιου χρώματος (μπάντες). Οι ζώνες αυτές προκαλούνται κατά την κβάντιση του χρώματος στην απεικόνιση εικόνων υφής πεπερασμένης αριθμητικής ακρίβειας, προκαλώντας ασυνέχειες στις δεύτερες παραγώγους των γραμμικά παρεμβλημένων τιμών της υφής. Τα γραμμικά ντεγκραντέ είναι εύκολα στην υλοποίηση και μπορούν να οριστούν με αρκετά αυθόρμητο τρόπο χρησιμοποιώντας πολλές εναλλακτικές παραμέτρους ως είσοδο· από απλές καρτεσιανές συντεταγμένες μέχρι αποστάσεις στο χώρο ή πολικές συντεταγμένες. Στην απλούστερη περίπτωση, μια συνάρτηση παραγωγής ντεγκραντέ υφής μπορεί να οριστεί ως μια ράμπα πάνω σ' έναν από τους κύριους άξονες:

$$f_{\text{gradient}}(\mathbf{p}) = y - \lfloor y \rfloor . \tag{14.32}$$



Σχήμα 14.24: *Παραδείγματα συναρτήσεων στερεάς υφής.*

Φυσικοί σχηματισμοί μπορούν να μοντελοποιηθούν αποτελεσματικά συνδυάζοντας μια μαθηματική έκφραση, η οποία καθορίζει τα βασικά χαρακτηριστικά του εκάστοτε υλικού με μια συνάρτηση θορύβου ή στροβιλισμού, όπως περιγράφηκε στις Εξισώσεις (14.29) και (14.30).

Η υφή ξύλου μπορεί να παρασταθεί ως μια διαδοχή ολοένα διευρυνόμενων, ομοαξονικών, κυλινδρικών στρωμάτων. Τα στρώματα αυτά μπορούν να μοντελοποιηθούν με μια συνάρτηση ράμπας πάνω στην κυλινδρική συντεταγμένη r, δηλαδή στην απόσταση του σημείου από τον άξονα (Σχήμα 14.24). Όταν προσθέσουμε ένα ποσοστό διαταραχής a στα σημεία εισόδου και τονίσουμε την απότομη μετάπτωση από στρώμα σε στρώμα χωρίς ασυνέχειες, χρησιμοποιώντας το απόλυτο ενός ημιτόνου, παίρνουμε μια συνάρτηση υφής με πειστική απόδοση ξύλου:

$$\begin{aligned} f_{\text{wood}}(\mathbf{p}) &= \left|\cos\left(2\pi\left(d - \lfloor d \rfloor\right)\right)\right|, \\ d &= \sqrt{y^2 + z^2} + a \cdot f_{\text{turb}}(\mathbf{p}). \end{aligned} \tag{14.33}$$

Ένα άλλο φυσικό μοτίβο που μπορεί να προσομοιωθεί εύκολα με συναρτησιακή υφή είναι το σχήμα των νερών του μαρμάρου. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια ομαλά μεταβαλλόμενη συνάρτηση για τη δημιουργία του αδρού σχηματισμού των συμ-

πιεσμένων στρωμάτων πετρώματος, όπως ένα ημίτονο. Αν η παράμετρος εισόδου διαταραχθεί με τη συνάρτηση στροβιλισμού, μπορούμε να πάρουμε μια πολύ ρεαλιστική απεικόνιση των αυτο-όμοιων νερών του μαρμάρου (Σχήμα 14.24):

$$\begin{aligned} f_{\text{marble}}(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2} + \sin\left(2\pi\left(x + f_{\text{turb2}}(\mathbf{p})\right)\right), \\ f_{\text{turb2}} &= \sum_{i=1}^{\text{octaves}} \frac{1}{2^i f}\left|f_{\text{noise}}\left(2^i f \cdot \mathbf{p}\right)\right|. \end{aligned} \tag{14.34}$$

14.6 Μετασχηματισμοί στο χώρο της υφής

Στην προηγούμενη ενότητα, υπερθέσαμε μια σειρά από ολοένα υψηλότερες συχνότητες μιας υφής, προκειμένου να πετύχουμε τη συνάρτηση στροβιλισμού. Στην πράξη αυτό που κάναμε ήταν να πάρουμε τη μορφή ενός βασικού θορύβου, να της ελαττώσουμε τις διαστάσεις, έτσι ώστε να αυξηθεί η χωρική της συχνότητα και στη συνέχεια να τη χρησιμοποιήσουμε στο άθροισμα των επιμέρους οκτάβων. Αλλά ποιος ακριβώς ήταν ο μηχανισμός με τον οποίο συρρικνώσαμε το αποτέλεσμα της υφής; Ας ξαναδούμε τις Εξισώσεις (14.27) και (14.34). Όταν χρειαστήκαμε ένα σήμα εξόδου με μισή περίοδο της αρχικής, πολλαπλασιάσαμε (επεκτείναμε) το σήμα εισόδου επί 2. Αυτή η πράξη — απλά — χρησιμοποιεί τη δυϊκή σχέση μεταξύ των μετασχηματισμών που εφαρμόζουμε στις συντεταγμένες και στο σύστημα αξόνων από το οποίο αυτές εξαρτώνται. Θυμηθείτε από το Κεφάλαιο 3 ότι όταν ένα σημείο στο χώρο $\mathbf{p}$ έχει συντεταγμένες (x, y, z) ως προς ένα σύστημα αναφοράς $L = \{\mathbf{o}, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$, το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού του $\mathbf{p}$ μπορεί να επιτευχθεί μετασχηματίζοντας αντίστροφα το σύστημα αναφοράς:

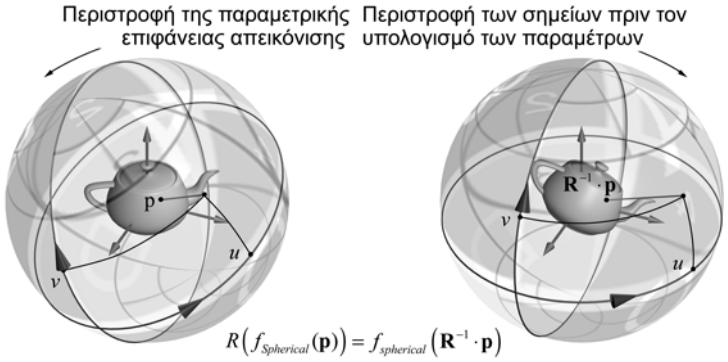
$$\begin{aligned} &\mathbf{p}' = (x', y', z') = \mathbf{M}(\mathbf{p}) : \mathbf{p} = \mathbf{o} + x\hat{\mathbf{e}}_1 + y\hat{\mathbf{e}}_2 + z\hat{\mathbf{e}}_3 \quad \Leftrightarrow \\ &\mathbf{p}' = \mathbf{o}' + x'\hat{\mathbf{e}}'_1 + y'\hat{\mathbf{e}}'_2 + z'\hat{\mathbf{e}}'_3 : \{\mathbf{o}', \hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\} = \mathbf{M}^{-1}(\{\mathbf{o}, \hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}). \end{aligned} \tag{14.35}$$

Αυτή η απλή ιδιότητα είναι πολύ χρήσιμη επειδή μας επιτρέπει να δημιουργήσουμε παραλλαγές στη μορφή της συναρτησιακής υφής, χωρίς να χρειάζεται να πειράξουμε την ίδια τη σχέση ή τον αλγόριθμο που τη μοντελοποιεί. Για παράδειγμα, μπορούμε να πάρουμε ένα ντεγκραντέ κατά μήκος του άξονα x επαναχρησιμοποιώντας την Εξίσωση (14.32). Αντί όμως να εφαρμόσουμε τη σχέση απευθείας στα σημεία εισόδου, χρησιμοποιούμε μια μετασχηματισμένη έκδοσή τους:

$$f_{\text{gradientX}}(\mathbf{p}) = \mathbf{R}_{-90,z}\left(f_{\text{gradient}}(\mathbf{p})\right) = f_{\text{gradient}}(\mathbf{R}_{90,z} \cdot \mathbf{p}). \tag{14.36}$$

Με την ίδια λογική, όπως κι αν θέλουμε να μετασχηματίσουμε ένα μοτίβο, μπορούμε να πετύχουμε το ίδιο αποτέλεσμα εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό στο πεδίο ορισμού:

$$M\left(f_{\text{proc}}(\mathbf{p})\right) = f_{\text{proc}}\left(\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{p}\right). \tag{14.37}$$



Σχήμα 14.25: *Παράδειγμα πρακτικής εφαρμογής μετασχηματισμού παραμετρικής υφής.*

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί επίσης και στην παραμετρική υφή. Όταν χρειαζόμαστε μια μετασχηματισμένη έκδοση της ενδιάμεσης παραμετρικής επιφάνειας, είναι απλούστερο να μετασχηματίσουμε αντίστροφα τα σημεία για τα οποία θα υπολογίσουμε τις συντεταγμένες (u, v), αντί να παράγουμε μια νέα απεικόνιση σε παραμετρική επιφάνεια (Σχήμα 14.25).

Όταν χρησιμοποιούμε παραμετρική απεικόνιση υφής, έχουμε την ευχέρεια να μετασχηματίσουμε και τις ίδιες τις παραμέτρους υφής. Οι συντεταγμένες υφής μπορούν να μεταβληθούν κανονικά χρησιμοποιώντας τυπικούς διδιάστατους μετασχηματισμούς (ή τριδιάστατους για την περίπτωση των εικόνων υφής τριών διαστάσεων). Κάτι τέτοιο είναι ιδιαίτερα χρήσιμο κατά τη διαδικασία της μοντελοποίησης, όπου ο καλλιτέχνης μπορεί να εργαστεί σ' ένα ειδικό γραφικό περιβάλλον, τον «uv editor», για να τακτοποιήσει τις παραμέτρους υφής, μετασχηματίζοντας με χειριστήρια της διεπαφής τις κορυφές των πολυγώνων (και εσωτερικά τη σχέση τους με τις αντίστοιχες συντεταγμένες υφής) που απεικονίζονται πάνω στο χώρο της υφής.

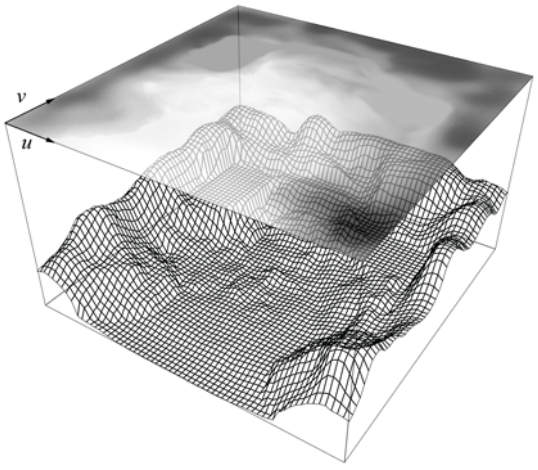
14.7 Αναπαράσταση αναγλύφου

Εκτός από τη διαμόρφωση των χαρακτηριστικών του υλικού, μια εικόνα υφής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αλλαγή της γεωμετρίας, προκειμένου να αποτυπώσει σε αυτή ανάγλυφα σχέδια. Ακόμα καλύτερα μπορεί να παράγει μια απομίμηση του οπτικού αποτελέσματος του αναγλύφου, χωρίς στην πραγματικότητα να μεταβάλλει ή να επαυξήσει τη γεωμετρία. Υπάρχουν δύο κύριες προσεγγίσεις για την αναπαράσταση αναγλύφου με υφή (είτε παραμετρική είτε συναρτησιακή). Η πρώτη τεχνική, η *απεικόνιση μετατόπισης* (displacement mapping), παραμορφώνει τη γεωμετρία για να σχηματίσει το επιθυμητό ανάγλυφο μοτίβο. Η δεύτερη προσέγγιση, η *απεικόνιση αναγλύφου* (bump mapping), ή η παρόμοια μέθοδος, η *απεικόνιση κανονικών διανυσμάτων* (normal mapping), επιχειρεί να δημιουργήσει μια ψευδαίσθηση ανάγλυφης επιφάνειας χωρίς να αλλοιώνει πραγματικά την επιφάνεια.

14.7.1 Απεικόνιση μετατόπισης

Στην απεικόνιση μετατόπισης, το ανάγλυφο σχέδιο πάνω στην επιφάνεια δημιουργείται με την εξώθηση των κορυφών των πολυγώνων κατά μήκος του κανονικού διανύσματος ή μιας προκαθορισμένης διεύθυνσης, ανάλογα με την τιμή της υφής σε κάθε σημείο (βλ. Σχήμα 14.26). Το μοτίβο της μετατόπισης που χρησιμοποιείται τόσο σε αυτή την τεχνική όσο και στην απεικόνιση αναγλύφου, είναι μια βαθμωτή εικόνα υφής, η *εικόνα αναγλύφου* (bump map). Αυτή η τεχνική απαιτεί είτε λεπτομερή αρχική διαμέριση της επιφάνειας σε μικρά πολύγωνα είτε έναν προσαρμοστικό αλγόριθμο διαμέρισης ο οποίος προσθέτει περισσότερα πολύγωνα σε περιοχές με απότομες μεταβολές κλίσης. Η απεικόνιση μετατόπισης δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε fragment ξεχωριστά κατά την ώρα της σχεδίασης μετατοπίζοντας τα σημεία που κατευθύνονται προς σχεδίαση, καθώς οι διαφορές ανύψωσης σε γειτονικά σημεία είναι πολύ πιθανό να δημιουργήσουν κενά.

Το μεγάλο πλεονέκτημα της απεικόνισης μετατόπισης είναι ότι δημιουργεί πραγματικό ανάγλυφο και όχι μόνο την οπτική ψευδαίσθηση αυτού. Αυτό σημαίνει πως η επιφάνεια διαθέτει τη σωστή προοπτική και απόκρυψη τμημάτων της απ᾽ όλες τις γωνίες θέασης· ακόμα και πάνω στο περίγραμμά της. Από την άλλη πλευρά, η υψηλή διαμέριση της επιφάνειας, κάνει τη μέθοδο πολλές φορές απαγορευτική για την απεικόνιση αναγλύφου σε πραγματικό χρόνο. Σε εφαρμογές πραγματικού χρόνου η απεικόνιση μετατόπισης χρησιμοποιείται μέσα σε vertex shaders για την αλγοριθμική παραμόρφωση επιφανειών, όπως για παράδειγμα στην κίνηση μεγάλων κυμάτων.



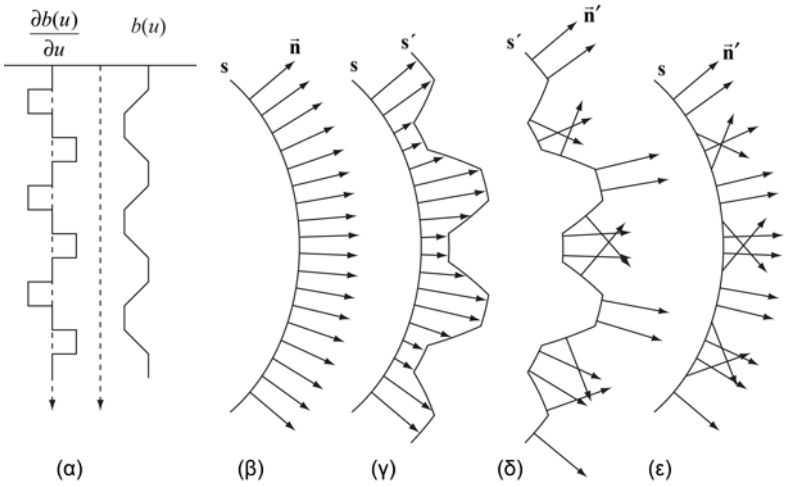
Σχήμα 14.26: *Απεικόνιση μετατόπισης. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, τιμές χαμηλότερης έντασης στην εικόνα υφής (αναγλύφου) αντιστοιχούν σε μεγαλύτερο ύψος.*

14.7.2 Απεικόνιση αναγλύφου*

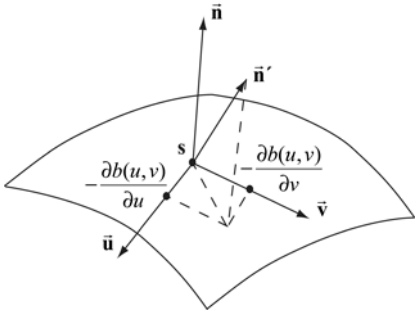
Προς τα τέλη της δεκαετίας του ΄70, ο Blinn επινόησε ένα οπτικό τέχνασμα για την προσομοίωση της εικόνας που δίνει μια ανάγλυφη ή ζαρωμένη επιφάνεια, η οποία ονομάζεται απεικόνιση αναγλύφου. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιείται από τότε εκτενώς για την απόδοση οπτικής γεωμετρικής πολυπλοκότητας, η οποία είναι αποθηκευμένη σε εικόνες υφής, πάνω σε επιφάνειες.

Ας θεωρήσουμε την απλοποιημένη διδιάστατη περίπτωση απεικόνισης αναγλύφου που φαίνεται στο Σχήμα 14.27. Έστω $b(u)$ το μοτίβο της ανύψωσης, εκφρασμένο στο χώρο της υφής και $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{u})$ η θέση πάνω στην επιφάνεια που αντιστοιχεί στην ίδια παραμετροποίηση· στην πραγματικότητα, δεν αποκλείεται πολλαπλά σημεία να αντιστοιχούνται από τη συνάρτηση απεικόνισης υφής στην ίδια παράμετρο u. Η μετατοπισμένη επιφάνεια $\mathbf{s}' = \mathbf{s}'(u)$ είναι $\mathbf{s}'(u) = \mathbf{s}(u) + b(u)\hat{\mathbf{n}}(u)$. Η νέα επιφάνεια έχει διαφορετικό κανονικό διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}'(u)$ σε σχέση με την αρχική, αφού το κανονικό διάνυσμα πρέπει να είναι εξ ορισμού κάθετο στη νέα, παραμορφωμένη επιφάνεια.

Η σημαντική παρατήρηση, η οποία είναι και η βασική ιδέα πίσω από την απεικόνιση αναγλύφου, είναι το πώς αντιλαμβάνεται ο άνθρωπος το ανάγλυφο σ' ένα αντικείμενο. Όταν παρατηρούμε μια τραχεία επιφάνεια, αυτό από το οποίο εξάγουμε συμπέρασμα για τη μορφή του αναγλύφου είναι ο τρόπος που αλλάζει ο χρωματισμός της εξαιτίας της φωτοσκίασης. Ας θυμηθούμε τώρα από το μοντέλο του Phong πως το μόνο τοπικό χαρακτηριστικό της επιφάνειας που συνεισφέρει στον υπολογισμό της φωτοσκίασης είναι το κανονικό διάνυσμα και όχι κάποια άλλη υψομετρική πληροφορία. Αυτό έχει ως εκπληκτική συνέπεια το ότι μπορούμε να πάρουμε το ίδιο οπτικό αποτέλεσμα για



Σχήμα 14.27: *Η αρχή της απεικόνισης αναγλύφου. (α) Ένα μονοχρωματικό μοτίβο διαμορφώνει το ύψος μιας αρχικής επιφάνειας (β) εξωθώντας τη κατά τη διεύθυνση του κανονικού διανύσματος (γ). Ο αλγόριθμος της απεικόνισης αναγλύφου υπολογίζει τα νέα κανονικά διανύσματα (δ). Αντί να μεταβάλει πραγματικά την επιφάνεια, αντικαθιστά τα παλιά διανύσματα της αρχικής επιφάνειας με τα νέα (ε), επιτυγχάνοντας το ίδιο οπτικό αποτέλεσμα.*



Σχήμα 14.28: *Ο χώρος εφαπτόμενων διανυσμάτων και το νέο κανονικό διάνυσμα που προκύπτει από τους υπολογισμούς της απεικόνισης αναγλύφου.*

τον τοπικό φωτισμό που θα προέκυπτε από την γεωμετρικά αλλαγμένη επιφάνεια υπολογίζοντας απευθείας τα τελικά κανονικά διανύσματα χωρίς να προηγηθεί όμως η εξώθηση της ίδιας της επιφάνειας. Με αυτό τον τρόπο, το μάτι μας έχει την εντύπωση ότι το τριδιάστατο μοντέλο διαθέτει σημαντικά πιο περίπλοκη επιφανειακή λεπτομέρεια, ενώ στην πράξη, αλλάζουμε μόνο το κανονικό διάνυσμα που συμμετέχει στον υπολογισμό του τοπικού μοντέλου φωτισμού, σύμφωνα με το μοτίβο της υφής.

Για να κατανοήσουμε καλύτερο τον τρόπο λειτουργίας της απεικόνισης αναγλύφου στις τρεις διαστάσεις ας ορίσουμε την έννοια του *χώρου εφαπτόμενων διανυσμάτων* (tangent space) (Σχήμα 14.28). Δεδομένης μιας παραμετροποίησης της επιφάνειας (u, v): $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, το τοπικό κανονικό διάνυσμα της επιφάνειας μοναδιαίου μήκους $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}(u, v)$ είναι:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} &= \hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}}, & \hat{\mathbf{u}} &= \frac{\vec{\mathbf{t}}}{|\vec{\mathbf{t}}|}, \\ \hat{\mathbf{v}} &= \frac{\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{b}}|}, & \vec{\mathbf{t}} &= \frac{\partial \mathbf{s}(u,v)}{\partial u}, \\ \vec{\mathbf{b}} &= \frac{\partial \mathbf{s}(u,v)}{\partial v}. \end{aligned} \tag{14.38}$$

Τα δύο κανονικοποιημένα διανύσματα $\hat{\mathbf{u}}$ και $\hat{\mathbf{v}}$, καθώς και οι αντίστοιχες παράγωγοι $\vec{\mathbf{t}}$ και $\vec{\mathbf{b}}$, ορίζουν το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $\mathbf{s}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ και αποκαλούνται αντίστοιχα *εφαπτόμενο διάνυσμα* και *συνεφαπτόμενο διάνυσμα*. Κατά τη χρήση μιας εικόνας υφής ως υψομετρική εικόνα στην απεικόνιση αναγλύφου, το εφαπτόμενο διάνυσμα αντιστοιχεί στην παράμετρο u του χώρου υφής και το συνεφαπτόμενο διάνυσμα αντιστοιχεί στην παράμετρο v. Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην Ενότητα 14.7.5 για τον υπολογισμό των εφαπτόμενων διανυσμάτων σε ένα τυχαίο σημείο πάνω σ' ένα πολύγωνο με υφή.

Η εξωθημένη επιφάνεια $\mathbf{s}'(u, v)$ δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{s}'(u, v) = \mathbf{s}(u, v) + \hat{\mathbf{n}}(u, v) \cdot b(u, v), \tag{14.39}$$

και το αλλαγμένο κανονικό διάνυσμα είναι κάθετο στα δύο νέα εφαπτόμενα διανύσματα:

$$\hat{\mathbf{n}}' = \hat{\mathbf{u}}' \times \hat{\mathbf{v}}' = \frac{\partial \mathbf{s}'(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{s}'(u,v)}{\partial v}. \tag{14.40}$$

Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους, με εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας στην Εξίσωση (14.39), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{s}'(u,v)}{\partial u} &= \frac{\partial \mathbf{s}(u,v)}{\partial u} + \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}(u,v)}{\partial u} \cdot b(u,v) + \hat{\mathbf{n}}(u,v) \cdot \frac{\partial b(u,v)}{\partial u}, \\ \frac{\partial \mathbf{s}'(u,v)}{\partial v} &= \frac{\partial \mathbf{s}(u,v)}{\partial v} + \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}(u,v)}{\partial v} \cdot b(u,v) + \hat{\mathbf{n}}(u,v) \cdot \frac{\partial b(u,v)}{\partial v}. \end{aligned} \tag{14.41}$$

Για αργά (ομαλά) μεταβαλλόμενα κανονικά διανύσματα σε σχέση με την έκταση της επιφάνειας, οι ποσότητες $\partial\hat{\mathbf{n}}/\partial u$ και $\partial\hat{\mathbf{n}}/\partial v$ είναι αμελητέες, οπότε η Εξίσωση (14.41) γίνεται:

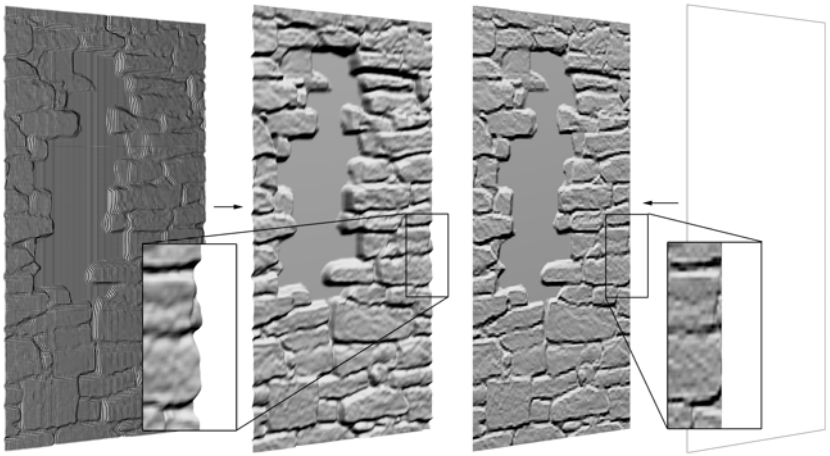
$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{s}'(u,v)}{\partial u} &= \frac{\partial \mathbf{s}(u,v)}{\partial u} + \hat{\mathbf{n}}(u,v) \cdot \frac{\partial b(u,v)}{\partial u} = \vec{\mathbf{t}} + \hat{\mathbf{n}}(u,v) \cdot \frac{\partial b(u,v)}{\partial u}, \\ \frac{\partial \mathbf{s}'(u,v)}{\partial v} &= \frac{\partial \mathbf{s}(u,v)}{\partial v} + \hat{\mathbf{n}}(u,v) \cdot \frac{\partial b(u,v)}{\partial v} = \vec{\mathbf{b}} + \hat{\mathbf{n}}(u,v) \cdot \frac{\partial b(u,v)}{\partial v}. \end{aligned} \tag{14.42}$$

Αντικαθιστώντας τις μερικές παραγώγους της (14.42) στην Εξίσωση (14.40), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}' &= \left(\vec{\mathbf{t}} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial b(u,v)}{\partial u} \right) \times \left(\vec{\mathbf{b}} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial b(u,v)}{\partial v} \right) \\ &= \vec{\mathbf{t}} \times \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial b(u,v)}{\partial v} + \hat{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{b}} \cdot \frac{\partial b(u,v)}{\partial u} + \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial b(u,v)}{\partial u} \frac{\partial b(u,v)}{\partial v} \Rightarrow \\ \hat{\mathbf{n}}' &= \hat{\mathbf{n}} - \vec{\mathbf{b}} \cdot \frac{\partial b(u,v)}{\partial v} - \vec{\mathbf{t}} \cdot \frac{\partial b(u,v)}{\partial u}. \end{aligned} \tag{14.43}$$

Το νέο, μετατοπισμένο κανονικό διάνυσμα της Εξίσωσης (14.43), το οποίο μπορεί να είναι εκφρασμένο ως προς το ΣΣΚ ή το τοπικό σύστημα συντεταγμένων του αντικειμένου, εξαρτάται μόνο από τα εφαπτόμενα διανύσματα και τις μερικές παραγώγους της εικόνας αναγλύφου (Σχήμα 14.28).

Το Σχήμα 14.29 παραθέτει μια σύγκριση μεταξύ των μεθόδων απεικόνισης μετατόπισης και απεικόνισης αναγλύφου. Η μετατοπισμένη επιφάνεια πρέπει να έχει υποδιαιρεθεί σε πολύ μικρά πολύγωνα προκειμένου να μπορέσουν οι κορυφές των πολυγώνων να ακολουθήσουν τις απότομες αλλαγές ύψους που είναι καταγεγραμμένες στην εικόνα αναγλύφου. Η τελική, μετατοπισμένη πλεγματική επιφάνεια αποδίδει σωστά τις λεπτομέρειες του αναγλύφου, ενώ φωτοσκιάζεται και αποκόπτεται σωστά σε όλη την έκτασή της. Από την άλλη πλευρά, αν εφαρμόσουμε την ίδια εικόνα αναγλύφου στην επιφάνεια με τη μέθοδο της απεικόνισης αναγλύφου, δεν υπάρχει λόγος να προβού-



Σχήμα 14.29: *Σύγκριση των μεθόδων απεικόνισης μετατόπισης και αναγλύφου. Η πρώτη παράγει ακριβή προοπτική και απόκρυψη σημείων καθώς και σωστό περίγραμμα με τίμημα το μεγάλο αριθμό πολυγώνων. Μια επιφάνεια με απεικόνιση αναγλύφου μπορεί να έχει πολύ απλοποιημένη γεωμετρία κι εντούτοις να δίνει μια πειστική εντύπωση αναγλύφου, η οποία όμως χάνει σε ακρίβεια και δε μπορεί να αποδώσει σωστή εικόνα πάνω στο περίγραμμα.*

με σε μεγάλη υποδιαίρεση της επιφάνειας. Ακόμα και μια αδρή αναπαράσταση του σχήματος με πολύγωνα επαρκεί για την προσέγγιση της σωστής φωτοσκίασης της επιφάνειας. Ωστόσο, αυτό το κατά τα άλλα πειστικό τρικ (όπως επίσης και η απεικόνιση κανονικών διανυσμάτων που περιγράφεται παρακάτω) έχει δύο μειονεκτήματα. Πρώτον, η αναπαράσταση σχετικών υψών του αναγλύφου δεν είναι πειστική όταν υπάρχουν μεγάλα βυθίσματα ή υψώματα στο μοτίβο. Το δεύτερο πρόβλημα προκύπτει στο περίγραμμα των επιφανειών, όπου, εξαιτίας του γεγονότος ότι η γεωμετρία δεν είναι στην πραγματικότητα ανάγλυφη, η πολύπλοκη φωτοσκίαση έρχεται σε αντίθεση με τις αδρές και ομαλές γραμμές των ορίων του αντικειμένου. Σε κάποιες περιπτώσεις, αυτό μπορεί να λυθεί αποκόπτοντας το μοντέλο που είναι σε χαμηλή ανάλυση στο περίγραμμα της γεωμετρίας υψηλής ανάλυσης (δηλαδή εδώ, την επιφάνεια υψηλής ανάλυσης η οποία έχει πραγματική μετατόπιση) [Sand00].

14.7.3 Εικόνες κανονικών διανυσμάτων⊛

Η μέθοδος απεικόνισης αναγλύφου που είδαμε, χρησιμοποιεί ως είσοδο την ίδια μονοχρωματική εικόνα παράστασης του ύψους επιφάνειας με τη μέθοδο της απεικόνισης μετατόπισης. Μια εναλλακτική μέθοδος αναπαράστασης αναγλύφου είναι η *απεικόνιση κανονικών διανυσμάτων* (normal mapping). Σε αυτή τη μέθοδο, αντί να παρέχεται το ύψος της μετατοπισμένης επιφάνειας σε κάθε σημείο, αποδίδεται απευθείας το κανονικό διάνυσμα που πρέπει να χρησιμοποιηθεί στον υπολογισμό της φωτοσκίασης [Cohe98]. Όταν χρησιμοποιούμε συναρτησιακή υφή, το κανονικό διάνυσμα προκύπτει απευθείας ως διανυσματική έξοδος κάποιας συνάρτησης υφής. Στην παραμετρική



Σχήμα 14.30: *Απεικόνιση κανονικών διανυσμάτων. (α) Τα διανύσματα ενός πλεγματικού μοντέλου χαμηλής ανάλυσης έχουν αντικατασταθεί σε κάθε εικονοστοιχείο που σχεδιάζεται σύμφωνα με την εικόνα κανονικών διανυσμάτων που φαίνεται στην Εικόνα 22. (β) Η αρχική γεωμετρία υψηλής ανάλυσης από την οποία αντιγράφηκαν και αποθηκεύτηκαν τα κανονικά διανύσματα.*

απεικόνιση αναγλύφου με εικόνες υφής, το κανονικό διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}(u, v)$ αποθηκεύεται κωδικοποιημένο ως τριπλέτα χρώματος στο αντίστοιχο κελί μέσα στην εικόνα υφής. Οι R,G,B συνιστώσες της εικόνας $\mathbf{c}(u, v)$ έχουν αποθηκευμένες τις Καρτεσιανές συντεταγμένες του μοναδιαίου κανονικού διανύσματος, οι οποίες είναι κατάλληλα κανονικοποιημένες και συνήθως κβαντισμένες· εκτός και αν χρησιμοποιείται μορφότυπος αποθήκευσης με τιμές κινητής υποδιαστολής:

$$\hat{\mathbf{n}}(u, v) = \mathbf{c}(u, v)/2^{\text{Nbits}} - (0.5, 0.5, 0.5), \tag{14.44}$$

όπου Nbits είναι ο αριθμός των bits του κάθε καναλιού χρώματος.

Η παραπάνω τεχνική αποκαλείται *απεικόνιση κανονικών διανυσμάτων σε συντεταγμένες αντικειμένου* (*object-space normal mapping*). Η έκφραση των αποθηκευμένων κανονικών διανυσμάτων σε συντεταγμένες αντικειμένου έχει δύο πλεονεκτήματα. Πρώτον, αντίθετα με την απεικόνιση αναγλύφου, τα κανονικά διανύσματα μπορούν να υπολογιστούν αυτόματα πάνω σε υψηλής ανάλυσης μοντέλα που διαθέτουν πραγματικά το ανάγλυφο μοτίβο και μετά να αντιγραφούν σε εικόνες υφής οι οποίες στη συνέχεια θα αποτυπωθούν σε απλοποιημένες εκδόσεις των επιφανειών. Η Εικόνα 22 δείχνει ένα παράδειγμα εικόνας κανονικών διανυσμάτων σε συντεταγμένες αντικειμένου. Το Σχήμα 14.30 και η Εικόνα 23 επιδεικνύουν τη χρήση της τεχνικής για την απόδοση λεπτομέρειας σε μια απλοποιημένη, αδρή έκδοση ενός μοντέλου υψηλής ανάλυσης. Η εικόνα κανονικών διανυσμάτων έχει κατασκευαστεί με δειγματοληψία του μοντέλου υψηλής ανάλυσης και αποθήκευση των διανυσμάτων σ' έναν άτλαντα υφής (βλ. Ενότητα 14.8). Αυτή η μεθοδολογία είναι πολύ χρήσιμη στη σχεδίαση γραφικών πραγματικού χρόνου, όπου πρώτα ο καλλιτέχνης δημιουργεί ελεύθερα μια γεωμετρική απόδοση ενός μοντέλου με μεγάλη λεπτομέρεια και άρα με πολλά πολύγωνα. Στη συνέχεια, για την απεικόνιση σε πραγματικό χρόνο, κατασκευάζεται μια απλουστευμένη έκδοση της ίδιας μορφής· αυτή επικαλύπτεται με εικόνα κανονικών διανυσμάτων που περιέχει τα διανύσματα του μοντέλου υψηλής ανάλυσης και άρα φωτοσκιάζεται με πα-

ρόμοιο τρόπο με το λεπτομερές μοντέλο, χωρίς να είναι το ίδιο βαριά στην απεικόνιση. Το δεύτερο πλεονέκτημα των εικόνων κανονικών διανυσμάτων σε συντεταγμένες αντικειμένου είναι ότι απαιτούν σημαντικά λιγότερους υπολογισμούς για την παραγωγή του τελικού διανύσματος που θα χρησιμοποιηθεί στο φωτισμό του αντίστοιχου σημείου της επιφάνειας. Από την άλλη πλευρά όμως, επειδή τα κανονικά διανύσματα είναι εκφρασμένα αναφορικά με συντεταγμένες αντικειμένου ή ακόμα και κόσμου, πρέπει έτσι κι αλλιώς να μετασχηματιστούν μαζί με το αντικείμενο. Ακόμα, όταν το αντικείμενο παθαίνει οποιαδήποτε παραμόρφωση, όπως σκελετική κίνηση ή μεταμόρφωση (morphing), οι συντεταγμένες των κανονικών διανυσμάτων είναι ανακόλουθες αναφορικά με τις νέες θέσεις των σημείων και την κλίση της επιφάνειας και χαλάνε την ψευδαίσθηση του αναγλύφου.

14.7.4 Εικόνες κανονικών διανυσμάτων σε χώρο εφαπτόμενων διανυσμάτων⊛

Για να ξεπεράσουμε τους περιορισμούς της απεικόνισης κανονικών διανυσμάτων σε συντεταγμένες αντικειμένου τα αποθηκευμένα διανύσματα μπορούν να προσδιοριστούν ως προς το σύστημα αναφοράς του χώρου εφαπτόμενων διανυσμάτων σε κάθε σημείο. Οι εικόνες διανυσμάτων που προκύπτουν από αυτή την παραλλαγή της μεθόδου αποκαλούνται *εικόνες κανονικών διανυσμάτων σε συντεταγμένες εφαπτόμενων διανυσμάτων* (*tangent-space normal maps*, βλ. Εικόνα 24). Τα κανονικά διανύσματα όταν εκφράζονται ως προς τη βάση των εφαπτόμενων διανυσμάτων σ' ένα σημείο, ενδέχεται να μην είναι κατανοητά στην οπτικοποίηση και μοντελοποίηση ή να μην υπολογίζονται τόσο άμεσα όσο τα αντίστοιχα σε συντεταγμένες αντικειμένου. Μοιάζουν δε με εικόνες αναγλύφου στις οποίες έχουμε περάσει ένα φίλτρο ανίχνευσης ακμών (όντως σχετίζονται άμεσα με τις μερικές παραγώγους κατά διεύθυνση των εικόνων αναγλύφου). Αφού τα διανύσματα είναι δοσμένα αναφορικά με ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων, δεν επηρεάζονται από μετασχηματισμούς ή παραμορφώσεις της επιφάνειας. Επιπλέον, τα ανάγλυφα μοτίβα των αντίστοιχων εικόνων κανονικών διανυσμάτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν με επαναληπτικότητα πάνω σε οποιαδήποτε επιφάνεια.

Δυστυχώς, οι εικόνες διανυσμάτων στο χώρο εφαπτόμενων διανυσμάτων απαιτούν κάποιους επιπρόσθετους υπολογισμούς προκειμένου να συνεργαστούν με τα τοπικά μοντέλα φωτισμού. Ειδικότερα, τα διανύσματα προς το φως ($\hat{\mathbf{n}}_L$) και τον παρατηρητή ($\hat{\mathbf{n}}_V$), τα οποία είναι αρχικά ορισμένα στο ΣΣΚ, πρέπει να μετασχηματιστούν κι αυτά στο τοπικό σύστημα εφαπτόμενων διανυσμάτων για να εφαρμοστεί κάποιο μοντέλο φωτισμού.

Ο χώρος εφαπτόμενων διανυσμάτων είναι ορισμένος κατά τέτοιο τρόπο, ώστε ο τοπικός άξονας z να συμπίπτει με το (αρχικό) παρεμβλημένο κανονικό διάνυσμα, ο άξονας x να συμπίπτει με το εφαπτόμενο διάνυσμα και ο άξονας y να ταυτίζεται με το συνεφαπτόμενο διάνυσμα. Αφού αντικαταστήσουμε το κανονικό διάνυσμα με αυτό που μας παρέχει η εικόνα κανονικών διανυσμάτων, παίρνουμε ένα νέο κανονικό διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}'(u, v)$. Το σύστημα συντεταγμένων που προκύπτει συνήθως δεν είναι πια ορ-

θοκανονικό. Παρόλα αυτά, τα εφαπτόμενα διανύσματα συνεχίζουν να δείχνουν περίπου προς τη σωστή κατεύθυνση, με την προϋπόθεση ότι η διαταραχή που έχει υποστεί το κανονικό διάνυσμα δεν είναι πολύ μεγάλη. Σε αυτό το σημείο έχουμε δύο επιλογές. Η μία είναι να αφήσουμε τα εφαπτόμενα διανύσματα ως έχουν και να πάρουμε ένα «σχεδόν ορθοκανονικό» σύστημα συντεταγμένων αν είμαστε απόλυτα σίγουροι ότι το απεικονιζόμενο ανάγλυφο έχει ανεπαίσθητες αυξομειώσεις. Η πιο ασφαλής λύση είναι να διορθώσουμε τα εφαπτόμενα διανύσματα εκτελώντας μια ορθογωνοποίηση του χώρου, πριν προχωρήσουμε στο μετασχηματισμό των διανυσμάτων φωτός και παρατηρητή στο νέο σύστημα. Αν εφαρμόσουμε τη σχέση ορθογωνοποίησης Gram-Schmidt [Leng04] και μετά κανονικοποιήσουμε τα εφαπτόμενα διανύσματα που προκύπτουν, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{u}}' &= \hat{\mathbf{u}} - (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{u}}) \cdot \hat{\mathbf{n}}', \\ \vec{\mathbf{v}}' &= \hat{\mathbf{v}} - (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{v}}) \cdot \hat{\mathbf{n}}' - (\mathbf{u}' \cdot \hat{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{u}}'. \end{aligned} \tag{14.45}$$

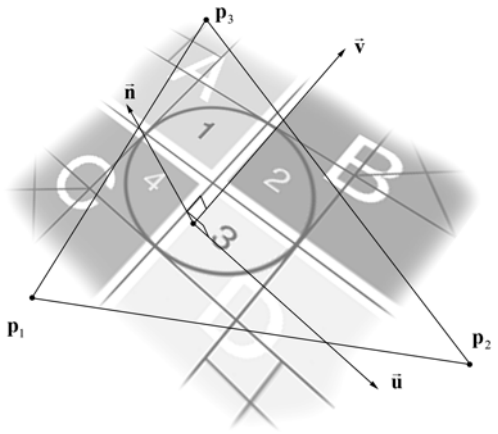
Ο πίνακας περιστροφής που φέρνει τα διανύσματα προς το φως και τον παρατηρητή από το ΣΣΚ στο τοπικό σύστημα εφαπτόμενων διανυσμάτων, είναι ο γνωστός πίνακας αλλαγής συστήματος συντεταγμένων του οποίου ο υποπίνακας περιστροφής του αποτελείται από γραμμές που είναι οι συντεταγμένες των αξόνων του συστήματος εφαπτόμενων διανυσμάτων εκφρασμένες ως προς το σύστημα συντεταγμένων εκκίνησης (ΣΣΚ εδώ):

$$\mathbf{R}_{\text{Tangent}} = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y & u'_z & 0 \\ v'_x & v'_y & v'_z & 0 \\ n'_x & n'_y & n'_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{14.46}$$

14.7.5 Υπολογισμός του εφαπτόμενου συστήματος συντεταγμένων*

Δεδομένου ενός τυχαίου σημείου **s** με υφή πάνω σε ένα πολύγωνο, όποια μέθοδο απεικόνισης αναγλύφου κι αν επιλέξουμε πρέπει να υπολογίσουμε τα εφαπτόμενα διανύσματα $\vec{\mathbf{t}}$ και $\vec{\mathbf{b}}$, καθώς και τα αντίστοιχα κανονικοποιημένα διανύσματα $\hat{\mathbf{u}}$ και $\hat{\mathbf{v}}$. Ας πάρουμε την πιο κοινή περίπτωση ενός τριγώνου που περιέχει το σημείο **s**. Θα εφαρμόσουμε την τεχνική για τον υπολογισμό των $\vec{\mathbf{t}}$ και $\vec{\mathbf{b}}$ που περιγράφεται στο [Leng04].

Έστω ότι (u_1, v_1), (u_2, v_2), και (u_3, v_3) είναι τα ζεύγη παραμέτρων υφής στις κορυφές του τριγώνου $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3$. Θέτουμε τον περιορισμό το εφαπτόμενο και το συνεφαπτόμενο διάνυσμα να είναι τοπικά παράλληλα με τις αντίστοιχες ισοπαραμετρικές καμπύλες των συντεταγμένων υφής. Με αυτό τον τρόπο, το εφαπτόμενο σύστημα συντεταγμένων έχει πάντα τους εφαπτόμενους άξονές του παράλληλους με τους άξονες της εικόνας αναγλύφου ή κανονικών διανυσμάτων (Σχήμα 14.31) και οι παράμετροι υφής αποτελούν τοπικές συντεταγμένες πάνω στο επίπεδο xy του συστήματος (θυμηθείτε ότι ο τοπικός άξονας z συμπίπτει με το κανονικό διάνυσμα). Προς το παρόν επίσης θα θεωρήσουμε ότι το σύστημα εφαπτόμενων διανυσμάτων παραμένει σταθερό σε όλη την έκταση του τριγώνου. Μπορούμε τώρα να εκφράσουμε ένα τυχαίο σημείο **p** του



Σχήμα 14.31: *Το προσανατολισμένο με την εικόνα υφής τοπικό σύστημα εφαπτόμενων διανυσμάτων.*

εσωτερικού του τριγώνου αναφορικά με τα εφαπτόμενα διανύσματα με τη σχέση:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + (u - u_1)\hat{\mathbf{u}} + (v - v_1)\hat{\mathbf{v}}. \tag{14.47}$$

Αφού όλες οι κορυφές του τριγώνου έχουν ένα κοινό σύστημα εφαπτόμενων συντεταγμένων, ικανοποιούν ταυτόχρονα την Εξίσωση (14.47):

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 &= (u_2 - u_1)\,\hat{\mathbf{u}} + (v_2 - v_1)\,\hat{\mathbf{v}}, \\ \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1 &= (u_3 - u_1)\,\hat{\mathbf{u}} + (v_3 - v_1)\,\hat{\mathbf{v}}, \end{aligned} \tag{14.48}$$

ή σε πιο συνεπτυγμένη μορφή:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{q}}_2 &= u_{21}\hat{\mathbf{u}} + v_{21}\hat{\mathbf{v}}, \\ \overrightarrow{\mathbf{q}}_3 &= u_{31}\hat{\mathbf{u}} + v_{31}\hat{\mathbf{v}}. \end{aligned} \tag{14.49}$$

Το παραπάνω γραμμικό σύστημα έξι εξισώσεων (δύο διανύσματα, τρεις συντεταγμένες ανά διάνυσμα) μπορεί να εκφραστεί σε μορφή πίνακα ως προς τις έξι άγνωστες συντεταγμένες των $\hat{\mathbf{t}}$ και $\hat{\mathbf{b}}$:

$$\begin{bmatrix} u_{21} & v_{21} \\ u_{31} & v_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x & t_y & t_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{2x} & q_{2y} & q_{2z} \\ q_{3x} & q_{3y} & q_{3z} \end{bmatrix}. \tag{14.50}$$

Λύνοντας αυτό το τετριμμένο γραμμικό σύστημα λαμβάνουμε τις έξι άγνωστες συντεταγμένες. Αντιστρέφοντας τον πίνακα με τη μέθοδο της ορίζουσας παίρνουμε:

$$\begin{bmatrix} t_x & t_y & t_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \frac{1}{u_{21}v_{31} - u_{31}v_{21}} \begin{bmatrix} v_{31} & -v_{21} \\ -u_{31} & u_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{2x} & q_{2y} & q_{2z} \\ q_{3x} & q_{3y} & q_{3z} \end{bmatrix}. \tag{14.51}$$

Το σύστημα συντεταγμένων που παίρνουμε ως αποτέλεσμα δεν είναι κανονικοποιημένο και πιθανά ούτε ορθογώνιο. Τα διανύσματα πρέπει να προσαρμοστούν σύμφωνα με την Εξίσωση (14.45) και να κανονικοποιηθούν. Τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathbf{t}}$ και $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ αποτελούν το εφαπτόμενο επίπεδο του τριγώνου που χρειαζόμαστε. Προκειμένου να έχουμε στη διάθεσή μας ένα σύστημα εφαπτόμενων διανυσμάτων για καθεμία από τις τρεις κορυφές του τριγώνου σ' ένα πολυγωνικό μοντέλο, υπολογίζονται τα εφαπτόμενα διανύσματα των τριγώνων που μοιράζονται μια κοινή κορυφή, βγαίνει ο μέσος όρος τους και αποθηκεύονται στις πληροφορίες που συνοδεύουν τις κορυφές μαζί με τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά τους. Κατά τη σχεδίαση, για κάθε σημείο μέσα στο τρίγωνο, τα διανύσματα αυτά που είναι αποθηκευμένα πια στις κορυφές του, παρεμβάλλονται με τον ίδιο τρόπο που παρεμβάλλονται και οι τιμές των υπόλοιπων χαρακτηριστικών (δηλαδή, με διγραμμική παρεμβολή ή βαρυκεντρικές συντεταγμένες).

14.8 Άτλαντες υφής⊛

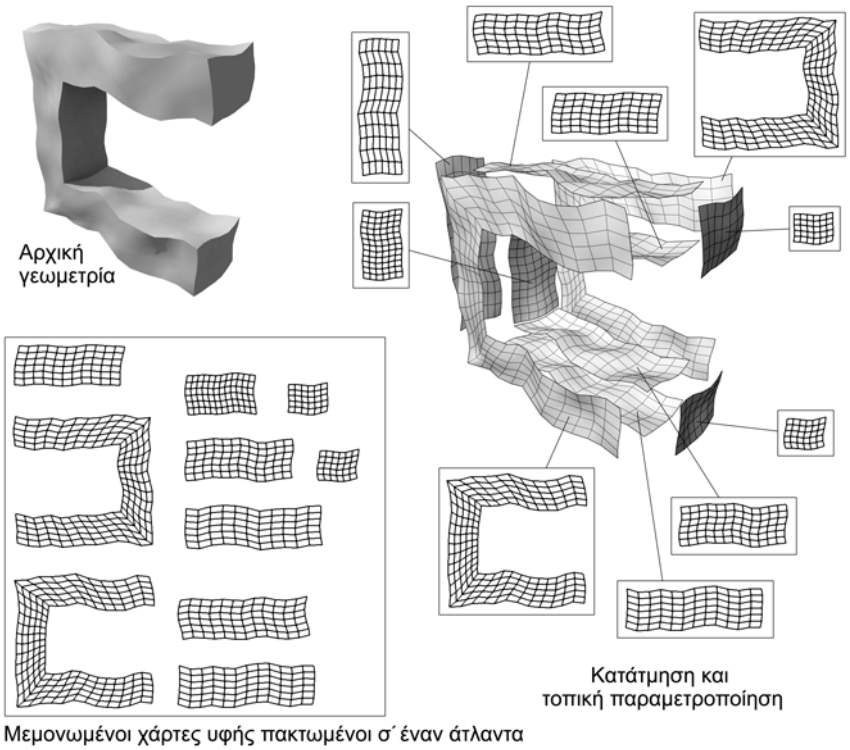
Συχνά σε πρακτικές εφαρμογές της απεικόνισης υφής προκύπτει η ανάγκη να ορίσουμε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των σημείων μιας επιφάνειας και των συντεταγμένων του χώρου της υφής. Η ένα-προς-ένα παραμετροποίηση χρησιμοποιείται συνήθως σε καταστάσεις όπου, πρώτον, οι τιμές της υφής εξαρτώνται από τη θέση πάνω στο αντικείμενο, δεύτερον, η εικόνα υφής χρησιμεύει ως αποθηκευτικό μέσο για δεδομένα της γεωμετρίας και τρίτον, χρειαζόμαστε να βρίσκουμε ταυτόχρονα συντεταγμένες τόσο από τον τριδιάστατο χώρο προς το χώρο της υφής όσο και αντίστροφα. Τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων παραμετροποιήσεων είναι η χρήση εικόνων υφής για την αποθήκευση προϋπολογισμένου φωτισμού (*εικόνες φωτός/φωτισμού – light/illumination maps*), οι εικόνες κανονικών διανυσμάτων σε συντεταγμένες αντικειμένου και οι *γεωμετρικές εικόνες* (*geometry images*), στις οποίες οι Καρτεσιανές συντεταγμένες μιας επιφάνειας κωδικοποιούνται ως χρώματα και σώζονται σε εικόνες υφής. Περισσότερα σχετικά με αυτές τις εφαρμογές θα δούμε παρακάτω.

Ένας *άτλαντας υφής* (texture atlas) είναι μια παραμετροποίηση επιφάνειας στην οποία συνδεδεμένα και συνεκτικά τμήματά της, οι *χάρτες* (*charts*), απεικονίζονται σε συμπαγείς περιοχές του χώρου της υφής. Ένα μοντέλο πρώτα διαμερίζεται σε χάρτες — οι οποίοι είναι ομόμορφοι ως προς μια τοπολογία σε δίσκο στο επίπεδο [Levy02]. Στη συνέχεια, κάθε χάρτης παραμετροποιείται με τέτοιο τρόπο ώστε το τμήμα επιφάνειας στο οποίο αντιστοιχεί να ξεδιπλώνεται πάνω σ' έναν παραμετρικό διδιάστατο χώρο, εξασφαλίζοντας έτσι μια μοναδική αντιστοιχία μεταξύ Καρτεσιανών συντεταγμένων του χάρτη και παραμέτρων στο επίπεδο. Σε αυτό το στάδιο, οι περιοχές του παραμετρικού χώρου πάνω στις οποίες αντιστοιχήθηκαν οι χάρτες, ενδέχεται να επικαλύπτονται. Γι' αυτό, ως τελική φάση, οι ανεξάρτητες περιοχές και τα αντίστοιχα

διαστήματα των τιμών των παραμέτρων πακετάρονται σε μια μοναδική παραμετροποίηση υφής έτσι ώστε να μην επικαλύπτονται πια. Με αυτό τον τρόπο, ο τελικός άτλαντας υφής εξασφαλίζει την αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ Καρτεσιανών συντεταγμένων επιφάνειας και του χώρου της εικόνας υφής (Σχήμα 14.32).

Έχουν προταθεί πολυάριθμοι αλγόριθμοι για κάθε ένα από τα παραπάνω στάδια σχηματισμού ενός άτλαντα υφής. Το στάδιο της μοναδικής παραμετροποίησης εξαρτάται από τα κριτήρια και τους περιορισμούς που έχουμε επιλέξει για τη διαμέριση της επιφάνειας σε χάρτες. Όταν κόβεται η επιφάνεια και ο κάθε χάρτης ξεδιπλώνεται στο παραμετρικό επίπεδο, πρέπει να πληρείται ένα σύνολο από κριτήρια ποιότητας τα οποία εξαρτώνται από τον εκάστοτε αλγόριθμο με στόχο:

- να ελαχιστοποιηθεί η παραμόρφωση και οι απότομες μεταπτώσεις της υφής·
- να κατανεμηθούν τα texels πάνω στην επιφάνεια του χάρτη όσο πιο ομοιόμορφα γίνεται·
- να διασφαλιστεί η συνέχεια και η συμβατότητα της απεικόνισης μεταξύ χαρτών, αν αυτό είναι εφικτό·



Σχήμα 14.32: *Η παραμετροποίηση μιας επιφάνειας ως άτλαντας υφής.*

- να μεγιστοποιηθεί η περιοχή κατάληψης της εικόνας υφής από τους χάρτες και ταυτόχρονα να ελαχιστοποιηθεί ο αριθμός των ανεξάρτητων χαρτών.

Το τρίτο στάδιο, δηλαδή το πακετάρισμα της υφής, είναι στην πραγματικότητα μια παραλλαγή του κλασικού NP-complete προβλήματος «bin packing,» κατά το οποίο ένας αριθμός από αντικείμενα διαφορετικού μεγέθους πρέπει να πακτωθούν σ' ένα πεπερασμένο σύνολο από δοχεία ελαχιστοποιώντας τον κενό χώρο μεταξύ τους. Στη διδιάστατη εκδοχή του πακεταρίσματος του άτλαντα υφής, ένας πεπερασμένος αριθμός από κομμάτια του άτλαντα με γνωστό σχήμα (στη γενική περίπτωση μη κυρτού περιγράμματος) πρέπει να διαταχθούν (μετακινηθούν, περιστραφούν και αλλάξουν κλίμακα) μέσα στην τελική εικόνα έτσι, ώστε να ελαχιστοποιηθούν τα κενά και να μεγιστοποιηθεί η κατάληψη της τελικής εικόνας υφής. Καθώς το συγκεκριμένο πρόβλημα ανήκει στην κατηγορία των NP-complete προβλημάτων, οι λύσεις που έχουν προταθεί, από επιθετικές στρατηγικές δυαδικής διαμέρισης μέχρι αλγόριθμοι μη-γραμμικού προγραμματισμού, είναι αποδοτικοί αλλά όχι βέλτιστοι.

Στην Ενότητα 14.8.1 θα παρουσιαστεί ο αλγόριθμος «polypacks» μαζί με μερικές χρήσιμες τροποποιήσεις. Αυτή η προσέγγιση για δημιουργία άτλαντα υφής είναι απλή και σχετικά εύκολη στον προγραμματισμό [Zhuk98b]. Δε θα πρέπει να μας ξαφνιάζει επομένως το γεγονός ότι είναι από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους αυτόματης παραμετροποίησης, η οποία έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς στην κατασκευή εικόνων φωτός. Ο αλγόριθμος επιστρατεύει μια προσέγγιση για το πακετάρισμα που βασίζεται σε kd-δένδρο. Ορισμένες πιο σύνθετες αλλά αποδοτικότερες τεχνικές για την επίλυση του προβλήματος της ένα-προς-ένα παραμετροποίησης μπορεί κανείς να βρει στις αναφορές [Levy02, Purn04, Shef05].

14.8.1 Διαμέριση επιφανειών⊛

Η επιφάνεια διαμερίζεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε κάθε περιοχή της (συστάδα πολυγώνων ή αλλιώς *polypack*) να απεικονίζεται σ' ένα επίπεδο με την ελάχιστη δυνατή παραμόρφωση. Ο ευκολότερος τρόπος να γίνει αυτό είναι να κοπεί η επιφάνεια σε περιοχές συνδεδεμένων πολυγώνων που κοιτάζουν προς τον ίδιο κύριο ημιάξονα και να χρησιμοποιηθεί το αντίστοιχο επίπεδο (που είναι κάθετο στον άξονα αυτό) ως επίπεδο προβολής για επίπεδη απεικόνιση (planar mapping, Σχήμα 14.32).

Το πρόβλημα με αυτή την απλοϊκή προσέγγιση για την διαμέριση είναι ότι για σχετικά περίπλοκες επιφάνειες και μοντέλα με αυλακώσεις ή ακανόνιστες καμπύλες περιοχές, παράγονται πάρα πολλά polypacks, τα οποία μάλιστα είναι και σχετικά μικρά. Προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε τον αριθμό των χαρτών στον τελικό άτλαντα διότι, πρώτον, ο αχρησιμοποίητος χώρος του άτλαντα αυξάνει με τον αριθμό των ανεξάρτητων χαρτών και, δεύτερον, τα όρια μεταξύ γειτονικών τμημάτων υφής (που αντιστοιχούν σε χάρτες) τείνουν να φαίνονται, καθώς πολλαπλά και μικρά κομμάτια αλλάζουν συνεχώς προσανατολισμό και μέγεθος. Αν μάλιστα χρησιμοποιούμε διγραμμική παρεμβολή ή mip-mapping πάνω στον άτλαντα υφής, αυτό καθιστά την ανάγκη για λιγότερους χάρτες πιο επιτακτική εξαιτίας του επιπρόσθετου χώρου που απαιτείται

μεταξύ των ανεξάρτητων πακεταρισμένων περιοχών, ο οποίος δρα ως περίμετρος ασφαλείας για να μην πάρουμε μέσους όρους από texels που ανήκουν σε διαφορετικούς χάρτες.

Η επίπεδη απεικόνιση που επιλέξαμε μπορεί να τροποποιηθεί για να αποδώσει λιγότερες συστάδες από πολύγωνα και έτσι να βελτιωθεί κάπως η κατάσταση. Καταρχήν, το κριτήριο για το σχηματισμό των συστάδων μπορεί να αλλάξει ώστε να συγχωνεύουμε στην ίδια συστάδα πολύγωνα με παραπλήσιο κανονικό διάνυσμα, ανεξάρτητα από τον κύριο άξονα στον οποίο κοιτάζει το καθένα. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να εφαρμόσουμε έναν αλγόριθμο επέκτασης περιοχής (region growing) πάνω σε έναν αριθμό από τυχαία αρχικά πολύγωνα στην επιφάνεια και να δημιουργήσουμε συνδεδεμένες περιοχές από πολύγωνα. Τα κριτήρια για την αφομοίωση νέων πολυγώνων σε μια υπάρχουσα περιοχή εξαρτώνται — συνήθως — από την απόκλιση του κανονικού διανύσματος του νέου πολυγώνου από αυτό του γεννήτορα της περιοχής ή από το μέσο κανονικό διάνυσμά της [Sand01]. Το επίπεδο προβολής για την επίπεδη απεικόνιση επιλέγεται έτσι ώστε να είναι κάθετο στο κανονικό διάνυσμα. Σε μερικές περιπτώσεις, ο αλγόριθμος κατάτμισης με επέκταση περιοχής αφήνει κάποια μικρά και ασύνδετα τμήματα, από τα οποία μάλιστα κάποια βρίσκονται μέσα σε άλλες μεγαλύτερες περιοχές. Τότε, μπορούμε με μια επαναληπτική διαδικασία να τα απορροφήσουμε σταδιακά μέσα σε μεγαλύτερες περιοχές, παράγοντας τελικά λιγότερες τελικές συστάδες [Papa00].

Η απλούστερη περίπτωση της κατάτμησης της επιφάνειας είναι όταν διατηρούμε τον προσανατολισμό των κομματιών με τους άξονες επίπεδης προβολής. Το περιγεγραμμένο παραλληλόγραμμο της προβολής του χάρτη στο επιλεγμένο επίπεδο απεικονίζεται απευθείας στην αντίστοιχη περιοχή στο παραμετρικό επίπεδο της υφής. Οι Sander et al. [Sand01] προτείνουν τη βελτιστοποίηση αυτού του αποτελέσματος με την προσθήκη ενός ακόμα βήματος· βρίσκουν το περιγεγραμμένο παραλληλόγραμμο ελάχιστου εμβαδού των προβεβλημένων πολυγώνων του χάρτη (το παραλληλόγραμμο αυτό δεν είναι υποχρεωτικά πια προσανατολισμένο ως προς τους άξονες). Αυτή η περιοχή τελικά αντιστοιχίζεται σ' ένα προσανατολισμένο παραλληλόγραμμο στο παραμετρικό επίπεδο της υφής, ελαχιστοποιώντας έτσι τον εναπομένοντα κενό χώρο.

Αν το επίπεδο προβολής είναι κάθετο στο μέσο κανονικό διάνυσμα της συστάδας πολυγώνων, πρέπει να προβάλουμε τα σημεία στο παραμετρικό αυτό επίπεδο και να φέρουμε στη συνέχεια τις συντεταγμένες που προκύπτουν στο διάστημα $[0,1]$. Εναλλακτικά, μπορούμε να μετασχηματίσουμε τα σημεία των πολυγώνων της συστάδας έτσι, ώστε το κανονικό της διάνυσμα να έρθει παράλληλα με κάποιον κύριο άξονα και στη συνέχεια να ακολουθήσουμε την παραμετροποίηση όπως στην προηγούμενη περίπτωση που έχουμε προσανατολισμένα επίπεδα προβολής ως προς τους κύριους άξονες.

14.8.2 Εκχώρηση και πακετάρισμα υφής®

Αφού γίνει η κατάτμηση και η αρχική παραμετροποίηση των τμημάτων επιφάνειας του μοντέλου, για το οποίο δεν κάνουμε κάποια υπόθεση για το αν είναι κλειστό ή

αποτελεί 2-πολλαπλότητα, κάθε συστάδα από πολύγωνα έχει απεικονιστεί στο διάστημα ([0,1],[0,1]) του παραμετρικού επιπέδου. Για να έχουμε μια όσο το δυνατό πιο ομοιόμορφη κατανομή των texels μεταξύ των χαρτών στον τελικό άτλαντα και να αποφύγουμε παραμορφώσεις, κάθε χάρτης i πρέπει να αντιστοιχηθεί με μια περιοχή της εικόνας, της οποίας ο λόγος πλάτους προς ύψος $r(i)$ να ταιριάζει με το λόγο των πλευρών της επίπεδης προβολής της i-οστής συστάδας πολυγώνων πριν το πακετάρισμα. Το κάθε τμήμα εικόνας ξεχωριστά δε χρειάζεται να είναι δύναμη του 2, αφού όλα μαζί θα πακεταριστούν και θα αποτελέσουν μια τελική εικόνα υφής, όπου εκεί πια μας απασχολούν τέτοιοι προβληματισμοί.

Το μέγεθος σε texels $N_{\text{texels}}(i)$ κάθε τμήματος του άτλαντα αποφασίζεται σύμφωνα με το λόγο της επιφάνειας $A_{\text{proj}}(i)$ του περιγεγραμμένου παραλληλόγραμμου των πολυγώνων του αντίστοιχου χάρτη ως προς το αθροιστικό εμβαδόν όλων των κομματιών (συνολικό εμβαδόν μαζί με τον αχρησιμοποίητο χώρο):

$$N_{\text{texels}}(i) = \alpha N_{\text{total}} \cdot \frac{A_{\text{proj}}(i)}{\sum_{j=1}^{\text{Charts}} A_{\text{proj}}(j)}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{14.52}$$

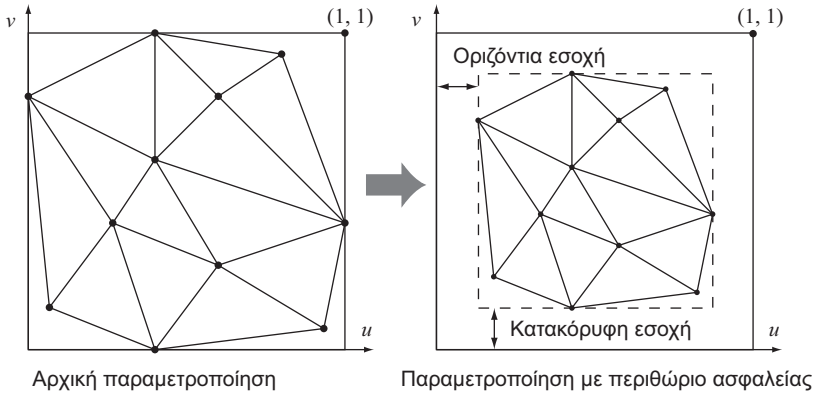
Οι διαστάσεις του i-οστού τμήματος του άτλαντα υπολογίζονται εύκολα από τον αριθμό των texels που του αναλογούν και το λόγο πλάτους προς ύψος που έχει:

$$\begin{cases} w_i \cdot h_i = N_{\text{texels}}(i) \\ r(i) = w_i / h_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_i = \sqrt{N_{\text{texels}}(i)/r(i)} \\ w_i = r(i) \cdot h_i \end{cases}. \tag{14.53}$$

Όταν προβάλλουμε ένα texel πάνω στο επίπεδο ενός πολυγώνου της συστάδας, το ίχνος του θα είναι μια κλειστή τετράπλευρη περιοχή επιφάνειας (patch) με παράλληλες πλευρές. Αν οι παραμορφώσεις που έχουμε εισάγει από την παραμετροποίηση είναι μικρές, η περιοχή αυτή θα τείνει σε τετράγωνο. Οπότε, σε αυτή την περίπτωση, η επιφάνεια του τριγώνου δειγματοληπτείται σχεδόν ομοιόμορφα και ο άτλαντας υφής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για επανα-δειγματοληψία και ανακατασκευή της επιφάνειας ή για απεικόνιση προϋπολογισμένου φωτισμού σε αυτή (βλ. Ενότητα 14.8.3).

Η προετοιμασία των επιμέρους τμημάτων του άτλαντα δεν έχει ακόμα τελειώσει. Για να αποφύγουμε τη δειγματοληψία τιμών υφής από γειτονικά κομμάτια, στην τελική, ολική εικόνα του άτλαντα, οι συντεταγμένες υφής των συστάδων πολυγώνων πρέπει να μαζευτούν προς το εσωτερικό της περιοχής που καταλαμβάνει στο χώρο της υφής (Σχήμα 14.33). Ας ονομάσουμε «ενεργά εικονοστοιχεία» αυτά που αντιστοιχούν σε πραγματική επιφάνεια πολυγώνων μετά τη συρρίκνωση των συντεταγμένων υφής. Τα εικονοστοιχεία που απομένουν στο τμήμα του άτλαντα έξω από τα ενεργά εικονοστοιχεία σημειώνονται ως «εικονοστοιχεία αναχώματος» και παίζουν το ρόλο μιας ζώνης προστασίας. Αφού υπολογίσουμε τις συντεταγμένες για τα ενεργά εικονοστοιχεία, οι τιμές των texels του αναχώματος αντιγράφονται επαναληπτικά από τα κοντινότερα texels που έχουν ήδη υπολογιστεί (ενεργά texels ή texels αναχώματος που έχουν ήδη πάρει τιμή).

Αν N_{sand} είναι ο επιθυμητός αριθμός εικονοστοιχείων αναχώματος κατά τη διάστα-



Σχήμα 14.33: *Μετασχηματισμός των συντεταγμένων υφής μέσα σ' ένα τμήμα του άτλαντα προκειμένου να αφεθεί μια περίμετρος ασφαλείας στον παραμετρικό χώρο γύρω από τη συστάδα πολυγώνων.*

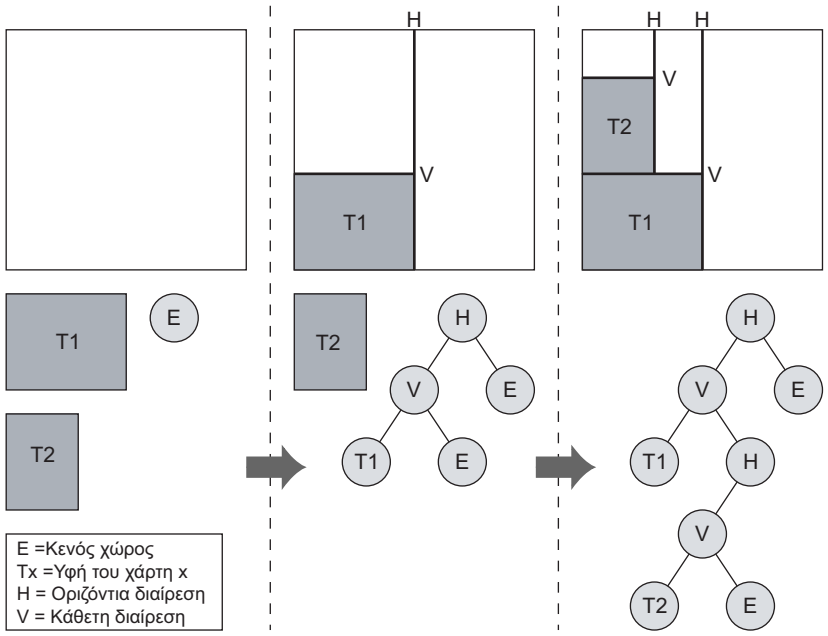
ση του πάχους της περιμέτρου ασφαλείας, ο αντίστοιχος πίνακας μετασχηματισμού για τη συρρίκνωση των συντεταγμένων υφής της i-οστής συστάδας πολυγώνων δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{M}_{\text{sand}} = \mathbf{T}\left(\frac{1}{w_i}N_{\text{sand}}, \frac{1}{h_i}N_{\text{sand}}\right) \cdot \mathbf{S}\left(\frac{w_i - 2N_{\text{sand}}}{w_i}, \frac{h_i - 2N_{\text{sand}}}{h_i}\right). \tag{14.54}$$

Στην εργασία των Zhukov et al. [Zhuk98b], αναφέρεται επίσης μια λύση για το πρόβλημα των διασταυρούμενων πολυγώνων. Όταν δύο τμήματα επιφάνειας στο αρχικό αντικείμενο τέμνονται και ένα μέρος ενός πολυγώνου περνά κάτω από την επιφάνεια ενός άλλου, οι τιμές της υφής των εικονοστοιχείων που αντιστοιχούν στη βυθισμένη επιφάνεια ενδέχεται να έχουν εσφαλμένες τιμές. Επιπλέον, εξαιτίας της παρεμβολής στο χώρο της υφής, τα δύο διασταυρούμενα πολύγωνα θα αντλούν τιμές υφής από τη βυθισμένη περιοχή κοντά στην τομή τους προκαλώντας ασυνέχειες στο χρωματισμό. Στην εργασία αυτή προτείνεται α) η επισήμανση των εικονοστοιχείων που βρίσκονται σε τμήματα πολυγώνων που περνάνε κάτω από άλλα ως ανήκοντα σε ανάχωμα και β) η ανάθεση χρωματισμού σε αυτά από παρεμβολή χρώματος από τα τεμνόμενα πολύγωνα.

Το πακετάρισμα της υφής γίνεται με τον αναδρομικό κατακερματισμό της τελικής εικόνας του άτλαντα, δηλαδή του τελικού δοχείου για τα επιμέρους τμήματα που αντιστοιχούν στους χάρτες. Η μέθοδος που παρατίθεται εδώ εκτελεί μια ανομοιόμορφη δυαδική διαμέριση του χώρου της εικόνας που έχει ως αποτέλεσμα ένα μη ζυγισμένο *kd-δένδρο* (*kd-tree*). Ένα kd-δένδρο είναι ένα δυαδικό δένδρο στο οποίο η ταξινόμηση και η αναζήτηση γίνονται χρησιμοποιώντας ένα k-διάστατο κλειδί. Σε κάθε εσωτερικό επίπεδο i, η $(i \bmod k)$ [1] συντεταγμένη της k-διάστατης τιμής εισόδου συγκρίνεται με

[1] Η επιλογή της διάστασης του κλειδιού μπορεί να γίνει και με άλλο κριτήριο, το οποίο να μειώνει τον αχρησιμοποίητο χώρο.



Σχήμα 14.34: *Κατασκευή ενός άτλαντα υφής με πακετάρισμα ανεξάρτητων εικόνων υφής για κάθε χάρτη, χρησιμοποιώντας μια διαμέριση εικόνας με kd-δένδρο.*

το κλειδί που είναι αποθηκευμένο στον κάθε κόμβο για την επιλογή του αριστερού ή του δεξιού μονοπατιού. Στην περίπτωση της διαμέρισης εικόνας, οι εσωτερικοί κόμβοι αναπαριστούν διαχωριστικές γραμμές οι οποίες διαιρούν μια περιοχή εικόνας σε δύο άνισες περιοχές· είτε κάθετα είτε οριζόντια. Τα φύλλα του δένδρου αναπαριστούν είτε άδειο χώρο είτε περιοχές που καταλαμβάνονται από χάρτες (Σχήμα 14.34).

Στο συγκεκριμένο kd-δένδρο, η διαίρεση της εικόνας γίνεται εναλλάξ οριζόντια και κάθετα. Η παραλλαγή του βασικού αλγόριθμου διαμέρισης που αναλύεται παρακάτω, χρησιμοποιεί μια μεταβλητή επιλογή κλειδιού ανάλογα με το κατά ποια διεύθυνση χωράει καλύτερα ένας χάρτης μέσα στην υπό εξέταση περιοχή του άτλαντα. Με αυτό τον τρόπο ο διαθέσιμος χώρος αξιοποιείται όσο καλύτερα γίνεται. Όπως είναι σαφές, κάτι τέτοιο συνεπάγεται πως μια οριζόντια διαίρεση μιας περιοχής δεν ακολουθείται υποχρεωτικά από μια κάθετη ή το αντίστροφο, κάτι που άλλωστε το περιμένουμε σε ένα kd-δένδρο.

Αρχικά, υπάρχει μόνο ένας, άδειος κόμβος που παριστάνει ολόκληρο τον κανονικοποιημένο χώρο υφής του άτλαντα. Πριν εισάγουμε οποιοδήποτε τμήμα εικόνας στο δένδρο του άτλαντα, τα τμήματα ταξινομούνται κατά την μεγαλύτερη διάστασή τους, προκειμένου να εισάγουμε τα πιο μεγάλα τμήματα πρώτα και να αποφύγουμε τον άσκοπο κατακερματισμό της εικόνας.

Όταν το πρώτο τμήμα εισαχθεί στην κάτω αριστερή γωνία του άτλαντα, ο τελευταίος διαιρείται οριζόντια σε δύο κελιά, από τα οποία το αριστερό υιοθετεί το πλάτος του τμήματος, ενώ το δεξιό γίνεται ένας άδειος κόμβος (Σχήμα 14.34). Τώρα το αρι-

στερό κελί δεν είναι ακόμα καλά ορισμένο και χρειάζεται να διαιρεθεί περαιτέρω σε δύο κόμβους: έναν που περιέχει ακριβώς και αποκλειστικά το τμήμα που εισάγαμε και έναν που παριστάνει τον υπόλοιπο χώρο που μένει πάνω από αυτό. Συνεπώς, το αριστερό κελί γίνεται κόμβος διακλάδωσης και επισημαίνεται ως κατακόρυφη διαίρεση με τη διαχωριστική γραμμή στο ύψος του τμήματος που εισάγαμε. Το ίδιο το τμήμα γίνεται παιδί του κόμβου κατακόρυφης διαίρεσης (κατειλημμένος κόμβος-φύλλο) και ο υπόλοιπος χώρος χαρακτηρίζεται ως άδειος κόμβος. Τα νέα τμήματα που εισάγονται διασχίζουν το δένδρο ψάχνοντας για άδειο χώρο που να τα χωράει. Στο παράδειγμά μας, ένα νέο τμήμα εικόνας μπορεί να εισαχθεί είτε στον άδειο κόμβο δεύτερου επιπέδου είτε στον άδειο κόμβο του πρώτου επιπέδου ο οποίος προκλήθηκε από την οριζόντια διαίρεση. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι είτε όλα τα τμήματα να έχουν τοποθετηθεί στον άτλαντα είτε να προκύψει σφάλμα επειδή κάποιο τμήμα δε χώρεσε.

Ένας λόγος για τον οποίο μπορεί να αποτύχει το πακετάρισμα είναι ότι ενδέχεται το μέγεθος της εικόνας του άτλαντα να είναι πολύ μικρό για να χωρέσει τα επιμέρους τμήματα. Σημειώστε ότι ένα τμήμα εικόνας πρέπει να έχει μέγεθος τουλάχιστο 1×1 texels. Επιπλέον, αν αφήσουμε και την ελάχιστη δυνατή περίμετρο ασφαλείας, θα προκύψουν τμήματα με ελάχιστο μέγεθος 3×3 εικονοστοιχεία, οπότε οι διαστάσεις των επιμέρους τμημάτων δεν είναι σε ευθεία αναλογία των διαστάσεων της τελικής εικόνας. Αν η τελική εικόνα που έχουμε προβλέψει είναι πολύ μικρή, δεν υπάρχει περίπτωση να χωρέσουν τα τμήματα μέσα σε αυτή.

Η διαδικασία της εισαγωγής ενός τμήματος στη δομή του δένδρου του άτλαντα καθώς κι ένας ορισμός για τους βασικούς κόμβους περιγράφονται στον κώδικα που ακολουθεί.

```
class TreeNode
{
    //ΠΕΔΙΑ:
    //Τα όρια της περιοχής που καταλαμβάνει ένας κόμβος στον άτλαντα
    int width, height, xmin, ymin, xmax, ymax;

    //node type: branch (vert/horiz), empty, leaf (atlas element)
    int type;
    //Αν είναι φύλλο, δείκτης προς τη δεσμευμένη περιοχή εικόνας
    TextureMap *map;

    //ΜΕΘΟΔΟΙ:
    TreeNode(TreeNode *parent, int minx, int maxx,
            int miny, int maxy);
    bool isBranch();
    bool isLeaf();
    bool insert(Element * element);
    ...

}
```

```
bool TreeNode::insert (Element * element)
{
// ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Α. Τερματικός, κατειλημμένος κόμβος:
//              Δε γίνεται εισαγωγή
if (isLeaf ())
    return false;

// ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Β. Κόμβος διακλάδωσης:
                Επιχειρούμε εισαγωγή στους κόμβους-παιδιά
if (isBranch())
{
    if (child[0]->insert (element)) // Εισαγωγή στο αριστερό παιδί...
        return true;
    else
    if (child[1]->insert (element)) // Εισαγωγή στο δεξί παιδί...
        return true;
    else                            // Αποτυχία, δε χωράει το στοιχείο
        return false;
}


// ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Γ. Αχρησιμοποίητος κόμβος, δοκιμή εισαγωγής:
    // 1) Χωράει το στοιχείο στο χώρο που μένει;
    if (width < element->width || height < element->height)
    {  // Δε χωράει ως έχει, δοκίμασε εισαγωγή με το πλάι:
        if (height < element->width || width < element->height)
        {
            // Δε χωράει ούτε στραμμένο, αποτυχία εισαγωγής
            return false;
        }
        else
            // Χωράει στραμμένο, περιστροφή με εναλλαγή συντεταγμένων
            element->swapUVs ();
    }
    // 2)Διάλεξε διαχωριστικό, χώρισε την περιοχή και βάλε το στοιχείο
    if (width - element->width >= height - element->height)
    {
        //i. Αν η εικόνα αφήνει πιο πολύ χώρο οριζόντια, χώρισέ τη
        //   οριζόντια, δημιουργώντας αριστερό και δεξί παιδί
        type = NODE_HORIZONTAL_SPLIT;
        child[CHILD_LEFT] = new TreeNode (this,
            xmin, xmin + element->width - 1, ymin, ymax);
        child[CHILD_RIGHT] =new TreeNode (this,
            xmin + element->width, xmax, ymin, ymax);
        // Τώρα χώρισε το αριστερό παιδί σε:
        //ένα κόμβο-φύλλο (πάνω)...
        child[CHILD_LEFT]->type = NODE_VERTICAL_SPLIT;
```

```
            child[CHILD_LEFT]->child[CHILD_TOP] =
            new TreeNode (child[CHILD_LEFT],
                xmin, xmin + element->width - 1, ymin,
                ymin + element->height - 1);
            child[CHILD_LEFT]->child[CHILD_TOP]->type = NODE_LEAF;
            child[CHILD_LEFT]->child[CHILD_TOP]->map = element->map;
            // ... και έναν άδειο κόμβο (κάτω)
            child[CHILD_LEFT]->child[CHILD_BOTTOM] =
                new TreeNode (child[CHILD_LEFT],
                              xmin, xmin + element->width - 1,
                              ymin + element->height, ymax);
        }
        else
        {
            // ii. χώρισε το κελί κάθετα, δημιουργώντας ένα
            //     παιδί πάνω κι ένα κάτω
            type = NODE_VERTICAL_SPLIT;
            child[CHILD_TOP] = new TreeNode (this,
                xmin, xmax, ymin, ymin + element->height - 1);
            child[CHILD_BOTTOM] = new TreeNode (this,
                xmin, xmax, ymin + element->height, ymax);
            // Τώρα χώρισε το πάνω παιδί σε ένα κόμβο-φύλλο (αριστερό)...
            child[CHILD_TOP]->type = NODE_HORIZONTAL_SPLIT;
            child[CHILD_TOP]->child[CHILD_LEFT] =
                new TreeNode (child[CHILD_TOP],
                    xmin, xmin + element->width - 1,
                    ymin, ymin + element->height - 1);
            child[CHILD_TOP]->child[CHILD_LEFT]->type = NODE_LEAF;
            child[CHILD_TOP]->child[CHILD_LEFT]->map = element->map;
            // ... και έναν άδειο κόμβο (δεξιό)
            child[CHILD_TOP]->child[CHILD_RIGHT] =
                new TreeNode (child[CHILD_TOP],
                    xmin + element->width, xmax,
                    ymin,ymin + element->height - 1);
        }

        return true;
    }
```

Οι Lévy et al. πρότειναν μια λίγο πιο περίπλοκη τεχνική πακεταρίσματος [Levy02]. Η μέθοδος αυτή είναι καταλληλότερη για μεγάλους πολυγωνικούς χάρτες με χαμηλή συνεκτικότητα (με πολύ ακανόνιστα περιθώρια) απ' ότι η δυαδική διαμέριση που είδαμε και δουλεύει στο χώρο της εικόνας απευθείας πάνω σε εικονοστοιχεία. Αφού οι χάρτες περιστραφούν ώστε η μεγαλύτερή τους διάμετρος να γίνει κατακόρυφη, ταξινομούνται κατά ύψος και εισάγονται στον άτλαντα. Οι επόμενοι εισερχόμενοι χάρτες στοιβάζονται πάνω στους υπάρχοντες, παρόμοια με το γνωστό παιχνίδι Tetris. Τα πάνω texels της περιοχής του άτλαντα που έχει ήδη καταληφθεί από εισερχόμενους

χάρτες σχηματίζουν έναν «ορίζοντα» στον οποίο οι κάτω πλευρές των εισερχόμενων χαρτών («κάτω ορίζοντες») δεν πρέπει να διεισδύσουν κατά την τοποθέτησή τους. Η ακριβής θέση κάθε εισερχόμενου τμήματος βελτιστοποιείται έτσι ώστε να αφήνει τον ελάχιστο δυνατό χώρο μεταξύ του κάτω ορίζοντα του τμήματος και του άνω ορίζοντα του άτλαντα. Στη συνέχεια, ο ορίζοντας του άτλαντα ενημερώνεται ώστε να συμπεριλάβει και τα texels του χάρτη που μόλις τοποθετήθηκε.

14.8.3 Εφαρμογές του άτλαντα υφής®

Η πιο κοινή εφαρμογή για έναν άτλαντα υφής είναι η αποθήκευση προϋπολογισμένου και ανεξάρτητου από τη γωνία παρατήρησης φωτισμού. Ένα τριδιάστατο μοντέλο παραμετροποιείται ως άτλαντας υφής, όπου εδώ αποκαλείται *εικόνα φωτισμού/φωτός* (light map). Η προσπίπτουσα έμμεση και άμεση ενέργεια αποθηκεύεται στην εικόνα. Όταν σχεδιάζεται το αντικείμενο, αντί να εκτελούμε σύνθετους υπολογισμούς για τον ολικό φωτισμό και τις σκιές, είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί η προ-αποθηκευμένη στην εικόνα φωτός πληροφορία με την προϋπόθεση ότι η γεωμετρία είναι μέρος ενός στατικού περιβάλλοντος και ότι η συνεισφορά στο φωτισμό της από τα κινούμενα αντικείμενα της σκηνής είναι αμελητέα. Για τα περισσότερα στατικά περιβάλλοντα που συναντάμε σε παιχνίδια και άλλες παραγωγές αυτή η υπόθεση ισχύει και, επομένως, η καταγραφή φωτισμού σε εικόνες χρησιμοποιείται εκτενώς για την ταχύτερη σχεδίαση ρεαλιστικών γραφικών σκηνών σε πραγματικό χρόνο [Watt01]. Στην πράξη, αφού ο φωτισμός μεταβάλλεται εν γένει πολύ βραδύτερα πάνω σε μια επιφάνεια από ότι το χρώμα της ή το ανάγλυφό της (με εξαίρεση τα όρια των απότομων σκιών), η ανάλυση της εικόνας φωτός δε χρειάζεται να είναι ιδιαίτερα μεγάλη. Επιπλέον — στις περισσότερες περιπτώσεις — η επιφάνεια διαθέτει ήδη τουλάχιστον ένα σύνολο παραμέτρων υφής που σχετίζονται με τη διαμόρφωση του υλικού της. Αυτό σημαίνει πως χρειαζόμαστε ένα ξεχωριστό σύνολο παραμέτρων υφής μόνο για την παραμετροποίηση της εικόνας φωτός, το οποίο αποθηκεύεται κι αυτό ως πληροφορία στις κορυφές των πολυγώνων. Η εικόνα φωτός εφαρμόζεται ως ένα δεύτερο πέρασμα σχεδίασης της επιφάνειας, διαμορφώνοντας το χρώμα και το τοπικό μοντέλο φωτισμού. Στο σύγχρονο hardware, όπου υπάρχουν πολλαπλές μονάδες ανάκτησης τιμών υφής οι οποίες εργάζονται ταυτόχρονα, οι διαφορετικές εικόνες υφής αναμιγνύονται σε ένα πέρασμα, μειώνοντας πολύ το χρόνο σχεδίασης.

Στην Ενότητα 14.7 είδαμε ότι με χρήση υφής μπορούμε να προσομοιώσουμε την όψη μιας επιφάνειας που έχει ανάγλυφη λεπτομέρεια και πως εκμεταλλευόμαστε την απεικόνιση αναγλύφου για να μεταφέρουμε τη φωτοσκίαση πολύπλοκων επιφανειών πάνω σε απλοποιημένες εκδόσεις τους. Αν το μοντέλο που χρησιμοποιούμε δεν είναι τετριμμένο — π.χ. ένας τοίχος — είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε άτλαντα υφής.

Προχωρώντας παραπέρα την ιδέα της απεικόνισης κανονικών διανυσμάτων, οι *γεωμετρικές εικόνες* [Gu02, Sand03] αποθηκεύουν στις R, G, και B συνιστώσες μιας εικόνας υφής τις θέσεις των αντίστοιχων σημείων με τα texels πάνω στον άτλαντα. Αυτή η αποδοτική τριδιάστατη αναπαράσταση παρέχει μια ομοιόμορφη δειγματοληψία της

επιφάνειας και, συνεπώς, μπορεί να αξιοποιηθεί για αναγνώριση αντικειμένων, εύκολη αναπαράσταση σε πολλαπλές αναλύσεις, γρήγορη μετάδοση, αναδόμηση του πλέγματος πολυγωνικού μοντέλου καθώς και σε άλλες χρήσιμες εφαρμογές.

14.9 Ιεραρχίες υφής

Μπορούμε να πετύχουμε την όψη σύνθετων υλικών και φινιρισμάτων χρησιμοποιώντας παραμετρική ή συναρτησιακή υφή ως δομικά στοιχεία σε μια ιεραρχική (δενδρική) δομή (ένα *δένδρο υφής*). Ιεραρχίες υφής εμφανίστηκαν για πρώτη φορά στη δουλειά του Cook πάνω σε δένδρα φωτοσκίασης, ένα γενικευμένο ιεραρχικό μηχανισμό για το σχεδιασμό και την υλοποίηση shaders [Cook84]. Οι επιμέρους υφές μπορούν να αναμιχθούν, πολλαπλασιαστούν, προστεθούν ή γενικά να συνδυαστούν με πολυάριθμους τρόπους. Επιπλέον, η έξοδος μιας υφής μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως είσοδος σε μια δεύτερη ή ως κανόνας ανάμιξης μεταξύ δύο άλλων υφών (βλ. Σχήμα 14.35). Οι ιεραρχίες υφής ενδέχεται να περιλαμβάνουν μετασχηματισμούς υφής, φίλτρα (βλ. Ενότητα 10.5.1), ή συναρτήσεις μετατροπής μορφής εξόδου. Οποιοδήποτε χαρακτηριστικό του υλικού μιας επιφάνειας μπορεί να υπολογιστεί μέσω ιεραρχιών υφής, με την προϋπόθεση ότι η μορφή εξόδου της (ρίζας) της ιεραρχίας είναι συμβατή με τον τύπο δεδομένων του χαρακτηριστικού· για παράδειγμα, για τη διαμόρφωση της διαφάνειας του υλικού χρειαζόμαστε μια μονοχρωματική — άρα βαθμωτή — και όχι κάποια διανυσματική έξοδο.

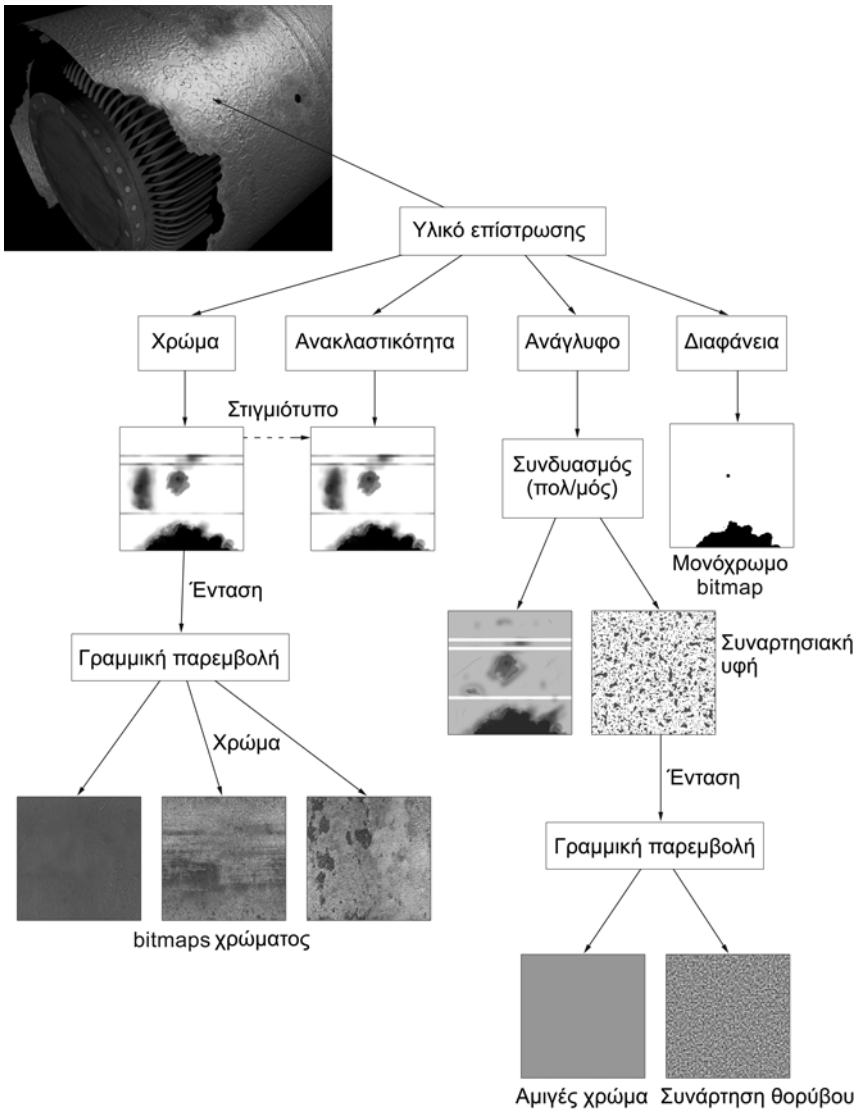
Όπως και στους γράφους σκηνής, στις ιεραρχίες υφής οι κόμβοι μπορούν να είναι στιγμιότυπα άλλων κόμβων υφής (Σχήμα 14.35). Αν ένα μοτίβο υφής χρησιμοποιείται πολλές φορές σε διάφορα σημεία της ιεραρχίας, δεν υπάρχει λόγος να κρατάμε χωριστά δεδομένα γι' αυτό και να το υπολογίζουμε ξανά και ξανά. Η υφή δεσμεύεται μία μόνο φορά και αναφερόμαστε στο αποτέλεσμά της όσες φορές χρειάζεται. Αν δεν αλλάζουν οι συντεταγμένες υφής, δε χρειάζεται να υπολογίσουμε την υφή ξανά κάθε φορά που ζητάμε πρόσβαση στο μοτίβο.

Οι ιεραρχίες υφής χρησιμοποιούνται συστηματικά στα φωτορεαλιστικά γραφικά μη πραγματικού χρόνου καθώς παρέχουν μεγάλη ελευθερία έκφρασης στους καλλιτέχνες. Τους επιτρέπουν τη δημιουργία βιβλιοθηκών με απλά και επαναχρησιμοποιήσιμα στοιχεία τα οποία στη συνέχεια τα συνδυάζουν και τα παραμετροποιούν ιεραρχικά για να αποδώσουν ένα σύνθετο αποτέλεσμα στα αντικείμενα. Αντίστοιχα, στη σχεδίαση σε πραγματικό χρόνο, οι ιεραρχίες υφής υλοποιούνται μέσα σε shaders με την εκμετάλλευση των πολλαπλών μονάδων διαχείρισης εικόνων υφής που παρέχει το hardware.

14.10 Ασκήσεις

1. Εξάγετε μια σχέση για τον υπολογισμό φωλιασμένης συναρτησιακής υφής, λαμβάνοντας υπόψη πιθανούς μετασχηματισμούς:

   $\mathbf{M}_1 f_{\text{proc1}}(\mathbf{M}_2 f_{\text{proc2}}(\ldots \mathbf{M}_N f_{\text{procN}}(\mathbf{p})))$.



Σχήμα 14.35: *Ένα πρακτικό παράδειγμα ιεραρχικής υφής. (Δείτε επίσης την Εικόνα 25.)*

2. Γράψτε ένα πρόγραμμα για τον υπολογισμό των επιπέδων mip-map μιας εικόνας υφής διαστάσεων $2^M \times 2^N$, συμπεριλαμβάνοντας το φιλτράρισμα και την υποδειγματοληψία της.

3. Υλοποιείστε το μηχανισμό επιλογής και διευθυνσιοδότησης της απεικόνισης σε κύβο ως συνάρτηση (shader). Η είσοδος πρέπει να είναι ένα διάνυσμα και η έξοδος ένα ζεύγος συντεταγμένων υφής και ένας δείκτης σε μια εικόνα. Σχολιάστε την περίπτωση εφαρμογής μετασχηματισμών στις συντεταγμένες υφής που προκύπτουν από αυτή την τεχνική. Τι επηρεάζουν; Θυμηθείτε πως η απεικόνιση σε κύβο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αποθήκευση εισερχόμενου φωτισμού από το περιβάλλον ενός αντικειμένου. Πώς μπορούν να βοηθήσουν οι μετασχηματισμοί στο χώρο της υφής την ελαχιστοποίηση των υπολογισμών στις επιμέρους εικόνες υφής, όταν περιστρέφουμε ένα ανακλαστικό ή διαθλαστικό αντικείμενο που χρησιμοποιεί αυτή την απεικόνιση υφής;

4. Ποια μέθοδος αναπαράστασης αναγλύφου θα ήταν πιο κατάλληλη για τη σχεδίαση (α) αμμόλοφων, (β) μιας πεδιάδας με κρατήρες; Λάβετε υπόψη σας την ταχύτητα σχεδίασης και την ποιότητα εικόνας από το ύψος του εδάφους για την επιλογή σας.

5. Θεωρείστε το παράδειγμα ιεραρχίας υφής του Σχήματος 14.35. Αν όλες οι εικόνες υφής χρησιμοποιούν τις ίδιες συντεταγμένες υφής, μπορεί το δένδρο να συμπτυχθεί πολλαπλασιάζοντας από πριν τις εικόνες μεταξύ τους και παρεμβαίνοντας στα χαρακτηριστικά των συναρτήσεων υφής;

⊛6. Αλλάξτε τον αλγόριθμο πακεταρίσματος της Ενότητας 14.8 ώστε να μπορεί να αλλάζει το μέγεθος των χαρτών και, αν αυτό δεν είναι δυνατό, του ίδιου του άτλαντα υφής, στην περίπτωση ανεπαρκούς χώρου για την αποθήκευση των χαρτών σε αυτόν. Λάβετε υπόψη τον περιορισμό ότι ένας χάρτης δεν μπορεί να καταλαμβάνει χώρο μικρότερο από ένα texel (τα ενεργά texels του) και πως πρέπει να αφήσετε και χώρο για τα texels αναχώματος.

7. Υλοποιείστε μια υφή για αναταράξεις (κυκλικά κύματα) σε λίμνη. Υλοποιείστε μια ιεραρχία υφής που να συνδυάζει συναρτήσεις υφής ξύλου με διαφορετικά χαρακτηριστικά, κατάλληλα προσαρμοσμένη ώστε να παράγει ως έξοδο ένα μοναδιαίο διάνυσμα το οποίο να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως κανονικό διάνυσμα ενός επιπέδου.

⊛8. Μπορεί η απεικόνιση σε κύβο να χρησιμοποιηθεί για την αποθήκευση πληροφοριών σκιάς ώστε να επιταχύνει μία ή περισσότερες από τις μεθόδους παραγωγής σκιών; Με ποιους τρόπους; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

15

Παρακολούθηση ακτίνων

Υπάρχουν δύο τρόποι να διαδώσεις το φως…
Να γίνεις το κερί,
ή να είσαι ο καθρέπτης που αντανακλά το φως του.
—Edith Wharton

15.1 Εισαγωγή

Οι αλγόριθμοι άμεσης απεικόνισης (όπως η σάρωση πολυγώνων) εργάζονται πάνω στα στοιχειώδη σχήματα που πρέπει να παρασταθούν στην οθόνη γεμίζοντας με χρωματική πληροφορία τυχαίες θέσεις μέσα στον καταχωρητή εικόνας. Σε γενικές γραμμές, συνθέτουν την εικόνα δουλεύοντας από το χώρο των αντικειμένων προς το χώρο της εικόνας. Η ταξινόμηση (απομάκρυνση κρυφών επιφανειών) πραγματοποιείται στο χώρο της εικόνας με τον αλγόριθμο Z-buffer. Η παρακολούθηση ακτίνων είναι ένας γενικός και ευέλικτος αλγόριθμος σχεδίασης, ο οποίος στην πράξη δουλεύει με το ακριβώς αντίθετο σκεπτικό, συνθέτοντας δηλαδή την εικόνα από το χώρο της εικόνας προς το χώρο των αντικειμένων.

Στην *παρακολούθηση ακτίνων* (*ray tracing*), ακολουθείται το μονοπάτι (ακτίνα) κατά μήκος της γραμμής που ξεκινάει από το κέντρο προβολής της κάμερας (παρατηρητής), διέρχεται από το κάθε εικονοστοιχείο και διασταυρώνεται με τη σκηνή καταγράφοντας τι βλέπει ο παρατηρητής προς αυτή την κατεύθυνση [Appe68]. Όταν η ακτίνα συναντά επιφάνειες αντικειμένων, απορροφάται, ανακλάται, διαθλάται ή εξασθενεί, ανάλογα με τις ιδιότητες του υλικού της γεωμετρίας. Η απομάκρυνση των κρυφών επιφανειών συμβαίνει στο χώρο των αντικειμένων αντί για το χώρο της εικόνας και αποτελεί εγγενή λειτουργία της παρακολούθησης ακτίνων, καθώς μια ακτίνα συναντά πρώτα επιφάνειες που είναι πιο κοντά στον παρατηρητή κατά την πορεία της μέσα στον τριδιάστατο κόσμο.

Η ιδέα της παρακολούθησης του μονοπατιού που διανύει το φως και του υπολογισμού της συμπεριφοράς του καθώς διαπερνά τις επιφάνειες μεταξύ διαφορετικών μέσων, προϋπήρχε κατά πολύ της εποχής των γραφικών υπολογιστών. Η θεωρία της μετάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, αλλά κυρίως η γεωμετρική οπτική και οι νόμοι της ανάκλασης και διάθλασης, παρείχαν το υπόβαθρο για τη φυσική μελέτη της αλληλεπίδρασης μεταξύ φωτός και αντικειμένων πολύ πριν την επινόηση της

παρακολούθησης ακτίνας ως υπολογιστικό αλγόριθμο στις αρχές της δεκαετίας του 80.

Στην καθαρή της μορφή, η άμεση σχεδίαση σε πραγματικό χρόνο δε συσχετίζει το χρωματισμό και τη φωτοσκίαση μιας περιοχής επιφάνειας με την ύπαρξη άλλων αντικειμένων στο ίδιο περιβάλλον. Η απεικόνιση σκιών, ανακλάσεων και διαθλώμενου φωτός στα αντικείμενα του χώρου πρέπει να υπολογιστούν ή να προσεγγιστούν χωριστά και να ενσωματωθούν ως χρωματική πληροφορία στον υπολογισμό του τοπικού μοντέλου φωτισμού κατά τη σάρωση της σκηνής. Από την άλλη, η παρακολούθηση ακτίνων ενσωματώνει όλους του υπολογισμούς που εμπλέκουν την κατευθυντική διάδοση του φωτός σ' έναν ενιαίο και κομψό αναδρομικό αλγόριθμο: την *αναδρομική παρακολούθηση ακτίνων* (βλ. Ενότητα 15.3).

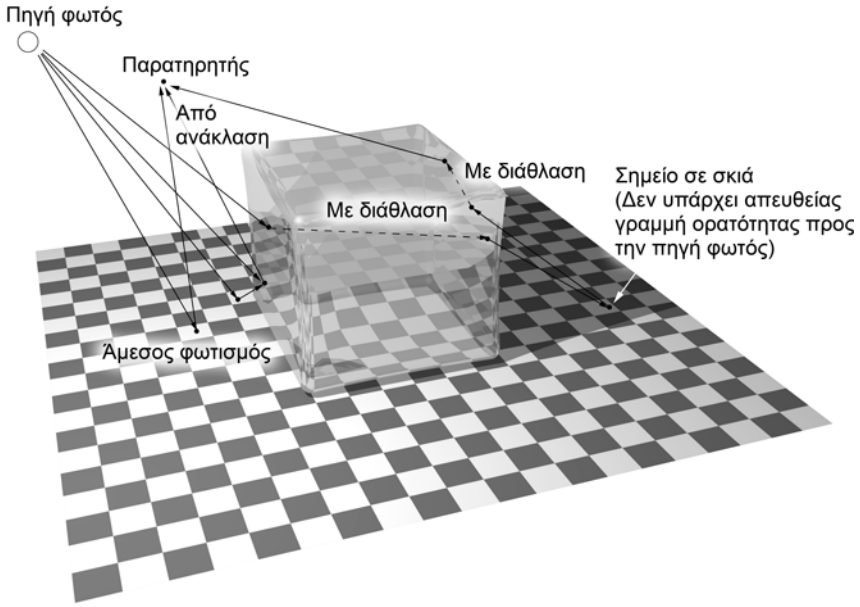
15.2 Οι αρχές της παρακολούθησης ακτίνων

Ας δούμε καταρχήν πώς μεταδίδεται στο χώρο το φως που εκπέμπεται από μια σημειακή πηγή. Στο Σχήμα 15.1, ένας γυάλινος κύβος ακουμπά πάνω σε μια επιφάνεια με καρώ σχέδιο και φωτίζεται από μια σημειακή πηγή φωτός. Το φως φεύγει ακτινικά προς όλες τις κατευθύνεις γύρω από τη σημειακή πηγή φωτός, ακολουθώντας αναρίθμητα ευθύγραμμα μονοπάτια τα οποία σταματούν όταν βρουν κάποια επιφάνεια.

Στο όριο μεταξύ δύο συμπαγών σωμάτων,[1] το φως σκεδάζεται και ανακλάται ή μεταδίδεται κατευθυντικά. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα του σχήματός μας, το υλικό της καρώ επιφάνειας δεν είναι ούτε ανακλαστικό, ούτε περατό από το φως· οπότε ένα τοπικό μοντέλο φωτισμού σαν το μοντέλο Blinn, αρκεί για τον υπολογισμό της έντασης του φωτός που φεύγει από την επιφάνεια (βλ. Κεφάλαιο 12). Σύμφωνα πάντα με την BRDF του υλικού, ένα μέρος της κατοπτρικά ανακλώμενης και της σκεδαζόμενης φωτεινής ενέργειας φθάνει κατευθείαν στον παρατηρητή, εφόσον δε διακόπτεται η πορεία του φωτός από κάποιο εμπόδιο. Όμως στον παρατηρητή φθάνει και έμμεσα φως, αφού ακολουθήσει δευτερεύοντα μονοπάτια μέσα από διαφανή μέσα ή ανακλαστεί σε κατοπτρικές επιφάνειες. Η επιφάνεια του κύβου του σχήματος είναι ημι-ανακλαστική, οπότε ορισμένες ακτίνες που σκεδάζονται στην καρώ επιφάνεια φτάνουν στον παρατηρητή μετά από ανάκλαση στα τοιχώματα του κύβου. Φως μεταδίδεται και μέσα από τον κύβο φωτίζοντας τις επιφάνειες (όρια σωμάτων) που συναντά με χρήση κάποιου τοπικού μοντέλου φωτισμού, ενώ αποσβένει και απορροφάται από το υλικό που διασχίζει. Τελικά, ένα μέρος του φθάνει έμμεσα στον παρατηρητή.

Ας επιστρέψουμε τώρα στο μοντέλο της παρακολούθησης ακτίνων. Το φως που καταγράφεται σ' ένα εικονοστοιχείο της τελικής εικόνας είναι η αθροιστική συνεισφορά του φωτισμού του σημείου του τριδιάστατου κόσμου που βλέπει ο παρατηρητής μέσα από το εικονοστοιχείο, ως αποτέλεσμα της πρόσπτωσης φωτός στο σημείο από

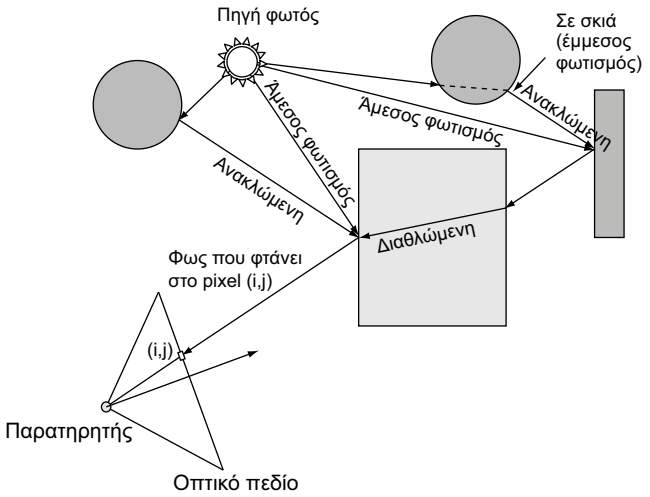
[1] Οι πολυγωνικές και παραμετρικές επιφάνειες που συνήθως εξετάζουμε στα γραφικά, αντιμετωπίζονται ως ερμητικά κλειστά μοντέλα που περικλείουν μια περιοχή του τριδιάστατου χώρου. Στις επιφάνειες αυτές, αναθέτουμε ιδιότητες υλικών όπως είναι ο δείκτης διάθλασης ή ο συντελεστής ανάκλασης που στην ουσία χαρακτηρίζουν τη μάζα του (όχι απαραίτητα ομοιογενούς) σώματος. Αυτές οι ιδιότητες συχνά διαμορφώνονται περαιτέρω με τεχνικές απεικόνισης υφής (βλ. Κεφάλαιο 14).



Σχήμα 15.1: *Μετάδοση φωτός. Ένας τεράστιος αριθμός από ακτίνες (φωτόνια) φεύγει από την πηγή φωτός. Ελάχιστες από αυτές θα καταλήξουν στον παρατηρητή, αφού πρώτα ακολουθήσουν πολύπλοκα μονοπάτια μέσα στο περιβάλλον.*

ακτίνες που άμεσα ή έμμεσα φτάνουν από την πηγή σε αυτό (Σχήμα 15.2). Το κοντινότερο σημείο που συναντάμε, αν κοιτάξουμε το τριδιάστατο περιβάλλον μέσα από ένα εικονοστοιχείο (i, j), στη γενική περίπτωση κρύβει όλα τα άλλα σημεία επιφανειών που βρίσκονται πίσω του, ενώ αποτελεί το κοντινότερο σημείο τομής μεταξύ της γεωμετρίας και της νοητής ευθείας που διαπερνά το εικονοστοιχείο φεύγοντας από τον παρατηρητή. Το συγκεκριμένο σημείο δε φωτίζεται απαραίτητα άμεσα από την πηγή φωτός. Αυτό εξαρτάται από το αν κάποια άλλη επιφάνεια παρεμβάλλεται στην πορεία από το σημείο αυτό που εξετάζουμε, προς την πηγή ή τις πηγές φωτός. Εφόσον όντως φωτίζεται το σημείο άμεσα, υπολογίζουμε τη φωτοσκίαση του με κάποιο τοπικό μοντέλο φωτισμού, ανάλογα με τις ιδιότητες του υλικού.

Μπορούμε να ανιχνεύσουμε και να ακολουθήσουμε τις ακτίνες που φτάνουν στο σημείο τομής από άλλες κατευθύνσεις (μέσω ανάκλασης ή διάθλασης) με πορεία προς το εικονοστοιχείο (i, j), προκειμένου να ανακαλύψουμε πόσο φως εκπέμφθηκε από εκεί που ξεκίνησαν. Αυτό είναι εφικτό εξαιτίας της αμφίδρομης συνέπειας που έχει η μετάδοση φωτός μεταξύ δύο σημείων· το φως ακολουθεί το ίδιο μονοπάτι κατά την ανάκλαση ή τη διάθλασή του στο όριο μεταξύ δύο σωμάτων, ανεξάρτητα από τη φορά της μετάδοσης (με εξαίρεση το φαινόμενο της ολικής εσωτερικής ανάκλασης, βλ. Ενότητα 15.2.2). Για κάθε ακτίνα που παρακολουθούμε πίσω προς την πηγή, μπορούμε να εκτιμήσουμε την ένταση του φωτός που διαδίδεται προς τον παρατηρητή, εφαρμόζοντας ένα τοπικό μοντέλο φωτισμού σε κάθε νέο σημείο τομής και υπολογίζοντας καινούρια μονοπάτια που ενδέχεται να μεταφέρουν φως έως εκεί. Αυτός ακριβώς είναι



Σχήμα 15.2: *Φως που είναι ορατό μέσα από ένα εικονοστοιχείο* (i, j) *του καταχωρητή εικόνας, ως αποτέλεσμα της συγκέντρωσης των συνεισφορών ενέργειας από τις απευθείας και έμμεσες διαδρομές φωτός.*

ο μηχανισμός της παρακολούθησης ακτίνων. Δεδομένου του — πρακτικά — άπειρου αριθμού ακτίνων που φεύγουν από τις πηγές φωτός προς το περιβάλλον, εμείς ενδιαφερόμαστε μόνο για εκείνες που τελικά θα φτάσουν στον παρατηρητή μέσα από ένα συγκεκριμένο εικονοστοιχείο κάθε φορά. Μπορούμε να καταγράψουμε τις συνεισφορές φωτεινής έντασης, ακολουθώντας την αντίθετη πορεία από αυτή που κανονικά μεταδίδεται το φως, δηλαδή ξεκινώντας από τον παρατηρητή και οδηγούμενοι προς τις πηγές. Αυτή η ιδέα της παρακολούθησης της αντίστροφης πορείας του φωτός από τον παρατηρητή προς το περιβάλλον και τις πηγές είναι που καθιστά τον αλγόριθμο παρακολούθησης ακτίνων εφικτό υπολογιστικά και εφαρμόσιμο σε πολλές περιοχές προσομοίωσης — πέρα από τα γραφικά υπολογιστών.

Συγκριτικά με την άμεση απεικόνιση, ο αλγόριθμος παρακολούθησης ακτίνων έχει δύο σημαντικά πλεονεκτήματα. Πρώτον, οι τομές ακτίνων με γεωμετρία δεν είναι απαραίτητο να περιορίζονται σε πολυγωνικές επιφάνειες και έτσι μπορούμε να απεικονίσουμε απευθείας και άλλες μορφές, όπως μαθηματικά στερεά, αναλυτικές και παραμετρικές επιφάνειες, μορφοκλάσματα κ.λ.π., χωρίς να πρέπει να τις μετατρέψουμε σε πολυγωνική αναπαράσταση. Οποιαδήποτε μαθηματική επιφάνεια ή γενικά οποιαδήποτε συνάρτηση που μπορεί να δώσει τομή με μια συνάρτηση ευθείας (ακτίνα) μπορεί και να απεικονισθεί. Δεύτερον, τα φαινόμενα διάθλασης και ανάκλασης μπορούν να μοντελοποιηθούν με μεγάλη ακρίβεια.

Στις δύο επόμενες ενότητες θα διατυπώσουμε σύντομα τους νόμους της ανάκλασης και της διάθλασης, περιγράφοντάς τους μ' έναν τρόπο βολικό για το μοντέλο της παρακολούθησης ακτίνων.

15.2.1 Ανάκλαση

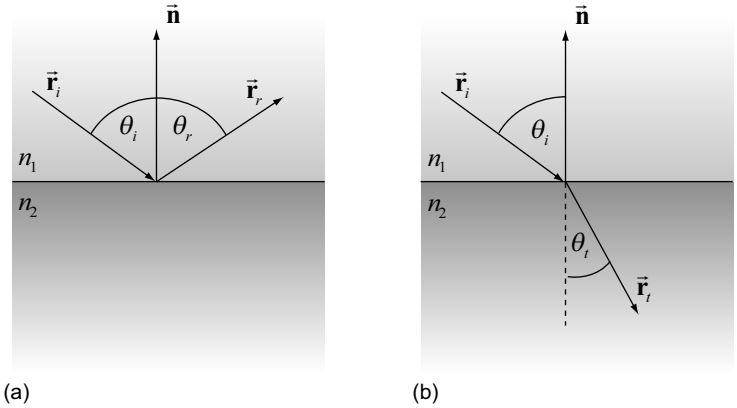
Στο Κεφάλαιο 12, προκειμένου να προβλέψουμε την κατεύθυνση μέγιστης κατοπτρικής ανάκλασης, υπολογίσαμε το διάνυσμα ανάκλασης $\hat{\mathbf{r}}$ με βάση το κανονικό διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$ της επιφάνειας και την κατεύθυνση πρόσπτωσης του φωτός $\hat{\mathbf{I}}$. Οι διευθύνσεις πρόσπτωσης και ανάκλασης βρίσκονται πάντα πάνω σ' ένα επίπεδο κάθετο στην επιφάνεια και — σύμφωνα με το νόμο της ανάκλασης — η γωνία πρόσπτωσης θ_i ισούται με τη γωνία ανάκλασης θ_r· δηλαδή, οι διευθύνσεις μετάδοσης του προσπίπτοντος και ανακλώμενου φωτός είναι συμμετρικές ως προς το κανονικό διάνυσμα. Συνοψίζοτας τους υπολογισμούς της Ενότητας 12.5.2, για μια τυχαία ακτίνα φωτός που ταξιδεύει με κατεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}_i$ και προσπίπτει σε μια ιδανική κατοπτρική επιφάνεια μεταξύ δύο υλικών, η ανακλώμενη ακτίνα προς τη διεύθυνση τέλειας ανάκλασης $\hat{\mathbf{r}}_r$ δίνεται από τη σχέση (Σχήμα 15.3(α)):

$$\hat{\mathbf{r}}_r = \hat{\mathbf{r}}_i - 2\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_i). \tag{15.1}$$

Παρατηρείστε πως σε αυτή τη σχέση το διάνυσμα πρόσπτωσης έχει αντίθετη φορά από το διάνυσμα του φωτός $\hat{\mathbf{I}}$ της Ενότητας 12.5.2, μιας και στην παρακολούθηση ακτίνων θέλουμε να εστιάσουμε στην κατεύθυνση διάδοσης.

15.2.2 Διάθλαση

Όταν το φως διασχίζει το όριο μεταξύ δύο ομογενών διηλεκτρικών μέσων, η ταχύτητα του κατά τη διεύθυνση διάδοσης αλλάζει, ενώ παράλληλα το μήκος κύματός του παραμένει σταθερό. Ο *δείκτης διάθλασης* (*index of refraction*) n ενός υλικού είναι ο λόγος της ταχύτητας του φωτός στο κενό c προς την ταχύτητα ομάδος του διαδιδόμενου κύματος φωτός v στο συγκεκριμένο μέσο:



Σχήμα 15.3: *Απόκλιση των ακτίνων κατά τη μετάδοση τους. (α) Ανάκλαση. (β) Διάθλαση.*

$$n = c/v. \tag{15.2}$$

Ο δείκτης διάθλασης n είναι μεγαλύτερος της μονάδος για διαφανή υλικά και σχεδόν 1 για τον αέρα. Ακόμα, ο δείκτης διάθλασης εξαρτάται από το μήκος κύματος του φωτός λ, συνεπώς $n = n(\lambda)$. Πιο συγκεκριμένα, για το ορατό φως ο n μειώνεται καθώς αυξάνει το μήκος κύματος. Στην πράξη όμως, οι περισσότερες υλοποιήσεις της παρακολούθησης ακτίνας δεν λαμβάνουν υπόψη την εξάρτηση αυτή του δείκτη διάθλασης από το μήκος κύματος του διαδιδόμενου φωτός.

Η διαφορά στην ταχύτητα ομάδος του κύματος μεταξύ δύο υλικών είναι αυτή που ευθύνεται για την κύρτωση της διεύθυνσης διάδοσης κατά τη μετάβαση από το ένα μέσο στο επόμενο (Σχήμα 15.3(β)). Σύμφωνα με το *Νόμο του Snell*, η γωνία θ_t με την οποία το φως εξέρχεται από ένα υλικό με δείκτη διάθλασης n_1 και μπαίνει σ' ένα υλικό με δείκτη διάθλασης n_2 έχοντας γωνία πρόσπτωσης στο όριο μεταξύ των υλικών θ_t, δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{15.3}$$

Σύμφωνα με την Εξίσωση (15.3), όταν εισέρχεται φως σ' ένα μέσο με μεγαλύτερο δείκτη διάθλασης ($n_2 > n_1$), αυτό συγκλίνει προς την κατεύθυνση του κανονικού διανύσματος της διαχωριστικής επιφάνειας.

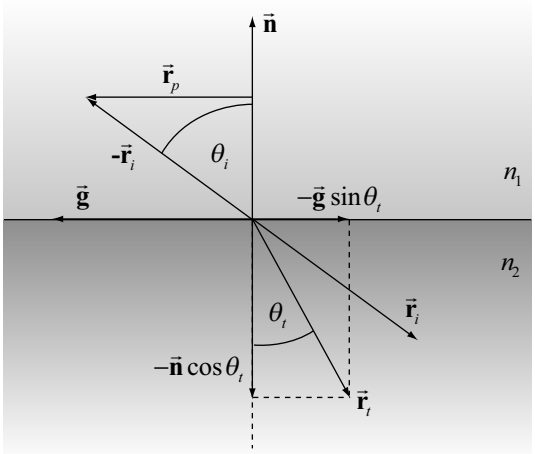
Όταν $n_2 < n_1$, δηλαδή όταν το φως εισέρχεται σε σώμα με μικρότερο δείκτη διάθλασης, ανάλογα με τη γωνία πρόσπτωσης ενδέχεται να συμβεί το φαινόμενο της *ολικής εσωτερικής ανάκλασης*. Σε αυτή την κατάσταση, το φως δε διαπερνά τη διαχωριστική επιφάνεια αλλά ανακλάται πίσω στο υλικό με το μεγαλύτερο δείκτη διάθλασης. Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε το φαινόμενο της ολικής εσωτερικής ανάκλασης όταν βουτάμε κάτω από το νερό: σε μεγάλες γωνίες παρατήρησης μέσα στο νερό (σχεδόν παράλληλα με την επιφάνεια), ή επιφάνεια του νερού δρα ως καθρέπτης. Η ελάχιστη γωνία πρόσπτωσης/παρατήρησης στην οποία συμβαίνει το φαινόμενο αυτό, αποκαλείται *κρίσιμη γωνία* θ_c:

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \tag{15.4}$$

Ας υπολογίσουμε τώρα την κατεύθυνση της νέας ακτίνας $\hat{\mathbf{r}}_t$ που μεταδίδεται στο δεύτερο σώμα, με βάση την κατεύθυνση της ακτίνας που προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια $\hat{\mathbf{r}}_i$, το κανονικό διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$ στο σημείο πρόσπτωσης και τους δείκτες διάθλασης n_1 και n_2 (Σχήμα 15.4). Ακολουθώντας τη λύση που προτείνεται στο [Leng04], το διάνυσμα κατεύθυνσης της μεταδιδόμενης ακτίνας μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα μιας συνιστώσας παράλληλης στο κανονικό διάνυσμα και μιας συνιστώσας παράλληλης προς τη διαχωριστική επιφάνεια (βλ. Σχήμα 15.4):

$$\hat{\mathbf{r}}_t = -\hat{\mathbf{n}}\cos\theta_t - \hat{\mathbf{g}}\sin\theta_t, \tag{15.5}$$

όπου $\hat{\mathbf{g}}$ είναι το μοναδιαίου μήκους διάνυσμα που είναι παράλληλο με το $\hat{\mathbf{r}}_p$, όπως στο



Σχήμα 15.4: *Υπολογισμός της διαθλώμενης ακτίνας*

Σχήμα 15.4. Το διάνυσμα $\hat{\mathbf{r}}_p$ μπορεί να υπολογιστεί από το κανονικό διάνυσμα και το διάνυσμα πρόσπτωσης:

$$\hat{\mathbf{r}}_p = -\hat{\mathbf{r}}_i - \hat{\mathbf{n}}\cos\theta_i = -\hat{\mathbf{r}}_i - \hat{\mathbf{n}}\cdot(-\hat{\mathbf{r}}_i\cdot\hat{\mathbf{n}}) = -\hat{\mathbf{r}}_i + \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{r}}_i\cdot\hat{\mathbf{n}}). \tag{15.6}$$

Εξαιτίας του γεγονότος ότι το $\hat{\mathbf{r}}_i$ είναι μοναδιαίο, το μήκος του $\hat{\mathbf{r}}_p$ ισούται με $\sin\theta_i$. Μετά την κανονικοποίησή του, παίρνουμε:

$$\hat{\mathbf{g}} = \frac{\hat{\mathbf{r}}_p}{\sin\theta_i} = \frac{-\hat{\mathbf{r}}_i + \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{r}}_i)}{\sin\theta_i}. \tag{15.7}$$

Αντικαθιστώντας το $\hat{\mathbf{g}}$ στη σχέση (15.5) από την Εξίσωση (15.7), παίρνουμε:

$$\hat{\mathbf{r}}_t = -\hat{\mathbf{n}}\cos\theta_t - (\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{r}}_i) - \hat{\mathbf{r}}_i)\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i}. \tag{15.8}$$

Από το νόμο του Snell (Εξίσωση (15.3» μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα ημίτονα στην παραπάνω σχέση με δείκτες διάθλασης. Επίσης, από τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα, το $\cos\theta_t$ μπορεί να αντικατασταθεί με $\sqrt{1-\sin^2\theta_t}$. Αυτό το βήμα είναι απαραίτητο προκειμένου να συσχετίσουμε το διάνυσμα μετάδοσης με γνωστές ποσότητες. Εφαρμόζοντας ξανά το νόμο του Snell πάνω στην ταυτότητα, παίρνουμε:

$$\cos\theta_t = \sqrt{1-\sin^2\theta_t} = \sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i} = \sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}(1-\cos^2\theta_i)}. \tag{15.9}$$

Εισάγοντας αυτές τις σχέσεις στην Εξίσωση (15.8), καταλήγουμε σε μια σχέση που είναι απαλλαγμένη από παραμέτρους που σχετίζονται με την πλευρά που μεταδίδεται

το φως:

$$\hat{\mathbf{r}}_t = -\hat{\mathbf{n}}\sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\left(1-\cos^2\theta_i\right)} - \left(\hat{\mathbf{n}}\left(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{r}}_i\right)-\hat{\mathbf{r}}_i\right)\frac{n_1}{n_2}. \tag{15.10}$$

Ως τελικό βήμα, αντικαθιστούμε το συνημίτονο με το αντίστοιχο εσωτερικό γινόμενο:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}}_t &= -\hat{\mathbf{n}}\sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\left(1-\left(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{r}}_i\right)^2\right)} - \left(\hat{\mathbf{n}}\left(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{r}}_i\right)-\hat{\mathbf{r}}_i\right)\frac{n_1}{n_2} \\ &= \hat{\mathbf{r}}_i\frac{n_1}{n_2} - \hat{\mathbf{n}}\left(\left(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{r}}_i\right)\frac{n_1}{n_2} + \sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\left(1-\left(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{r}}_i\right)^2\right)}\right).\end{aligned} \tag{15.11}$$

Να σημειωθεί ότι το υπόριζο της Εξίσωσης (15.11) είναι θετικό (και επομένως έγκυρο για τους υπολογισμούς μας) μόνο όταν $n_2^2/n_1^2 \geq 1-\left(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{r}}_i\right)^2 \Leftrightarrow n_2/n_1 \geq \sin\theta_i$. Σε αντίθετη περίπτωση, ισχύει το φαινόμενο της ολικής εσωτερικής ανάκλασης και η νέα ακτίνα υπολογίζεται σύμφωνα με τον νόμο της ανάκλασης (Εξίσωση (15.1)).

15.2.3 Ανακλαστικότητα και διαπερατότητα*

Είδαμε πως το φως το οποίο φτάνει σε μια διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δύο διαφορετικών διηλεκτρικών υλικών, διαχωρίζεται σε ένα ανακλώμενο και ένα διαθλώμενο κύμα. Οι νόμοι της ανάκλασης και του Snell καθορίζουν την κατεύθυνση μετάδοσης του φωτός στις δύο περιπτώσεις, αλλά δεν παρέχουν κάποια ένδειξη για την κατανομή της φωτεινής έντασης ανάμεσα στο ανακλώμενο και το διαθλώμενο κύμα. Το ποσοστό του φωτός που ανακλάται σε μια δαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δύο υλικών με δείκτες διάθλασης n_1 και n_2, δίνεται από τις *Εξισώσεις Fresnel*.

Οι εξισώσεις Fresnel προσδιορίζουν τους συντελεστές ανάκλασης και διάθλασης για το φως που διαπερνά τη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δύο διηλεκτρικών μέσων, οι οποίοι αντιστοιχούν με το λόγο του πλάτους του ηλεκτρικού πεδίου ανάκλασης/διάθλασης προς το πλάτος του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου. Το φως είναι ένα εγκάρσιο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο· επομένως το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο ταλαντώνονται σε διεύθυνση κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης του φωτός. Σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, το ηλεκτρικό πεδίο (ή το μαγνητικό πεδίο, το οποίο είναι κάθετο στο ηλεκτρικό) μπορεί να αναλυθεί σε μια παράλληλη και μια κάθετη συνιστώσα ως προς το επίπεδο ανάκλασης. Για μη μαγνητισμένα, ισοτροπικά υλικά, ο A. J. Fresnel κατέληξε σε δύο εξισώσεις για το συντελεστή ανάκλασης r_p και r_s για την παράλληλη και την κάθετη πόλωση αντίστοιχα, καθώς και στις αντίστοιχες εξισώσεις για το συντελεστή μετάδοσης t_p και t_s:

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}, & r_p &= \frac{n_1\cos\theta_t - n_2\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t + n_2\cos\theta_i}; \\ t_s &= \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}, & t_p &= \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t + n_2\cos\theta_i}. \end{aligned} \tag{15.12}$$

Με δεδομένο ότι ο συντελεστής διάθλασης εξαρτάται από το μήκος κύματος του φωτός, οι συντελεστές ανάκλασης και διάθλασης εξαρτώνται από τη διεύθυνση πρόσπτωσης και το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτίνας. Οι εξισώσεις Fresnel για την ένταση του κύματος μπορούν να εξαχθούν παίρνοντας το τετράγωνο της Εξίσωσης (15.12):

$$R_s = r_s^2, \quad R_p = r_p^2, \quad T_s = t_s^2, \quad T_p = t_p^2. \tag{15.13}$$

Να σημειωθεί πως δε θα πρέπει να περιμένουμε ότι $T_s = 1 - R_s$ ή $T_p = 1 - R_p$ (διατήρηση της ενέργειας) εξαιτίας του γεγονότος ότι, εξ ορισμού, η ένταση είναι ισχύς ανά μονάδα επιφανείας ενώ η εισερχόμενη φωτεινή δέσμη ανοίγει ή συγκεντρώνεται ανάλογα με τη σχέση που έχουν οι δείκτες διάθλασης.

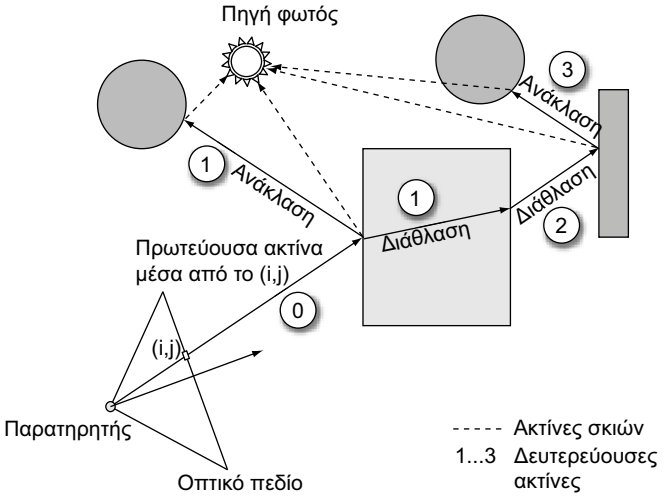
Με δεδομένο ότι σπάνια χρησιμοποιούνται στα γραφικά υπολογιστών οι ακριβείς κατευθύνσεις ταλάντωσης και πόλωσης του φωτός, όταν εφαρμόζεται το μοντέλο ανάκλασης του Fresnel, χρησιμοποιούνται μόνο οι μέσοι συντελεστές ανάκλασης και διάθλασης:

$$R = (R_s + R_p)/2, \qquad T = (T_s + T_p)/2. \tag{15.14}$$

Σε μια ακόμα πιο απλοποιημένη (αλλά αρκετά κοινή) θεώρηση, οι συντελεστές ανάκλασης και μετάδοσης δίνονται από το χρήστη και ο περιορισμός της διατήρησης της ενέργειας πολλές φορές δεν τηρείται. Ένας λόγος που συμβαίνει αυτό είναι ότι, προκειμένου να προσεγγίσουμε χονδρικά την απόσβεση του φωτός καθώς διαδίδεται μέσα στο περατό μέσο, αποδίδεται σημαντικά χαμηλότερη τιμή από την αναμενόμενη στο συντελεστή μετάδοσης (διάθλασης). Ένα άλλο ζητούμενο είναι η ισοστάθμιση του φωτός που καταγράφεται από την ανακλώμενη και τη διαθλώμενη συνιστώσα, προκειμένου να μην κορεστεί το χρώμα κατά τον υπολογισμό της συνεισφοράς αυτών στο τοπικό μοντέλο φωτισμού. Πολλές φορές δε, επιθυμούμε να υπερ-τονίσουμε με αφύσικο τρόπο τις ανακλάσεις ή το φως που διαδίδεται μέσα στο σώμα ενός αντικειμένου, προκειμένου να πάρουμε ένα συγκεκριμένο αισθητικό αποτέλεσμα.

15.3 Ο αναδρομικός αλγόριθμος παρακολούθησης ακτίνων

Η ιδέα της εκπομπής ακτίνων από τον παρατηρητή προς τη σκηνή για να σχεδιαστεί η τελευταία με σωστή ταξινόμηση βάθους χωρίς τη χρήση του αλγόριθμου Z-buffer αποδίδεται στους Appel [Appe68] και τους Goldstein και Nagel [Gold71]. Όμως μια ολοκληρωμένη μέθοδος για την αναδρομική παρακολούθηση όλων των ακτίνων που ανακλώνται και διαθλώνται μέσα στη σκηνή προτάθηκε αργότερα από τον Whitted [Whit80]. Η μέθοδος αυτή συνδύασε τους προηγούμενους αλγόριθμους, οι οποίοι έστελναν πρωτεύουσες ακτίνες από τον παρατηρητή προς τη σκηνή, μέχρι να βρεθεί τομή με κάποια επιφάνεια και στη συνέχεια φωτοσκίαζαν τα σημεία τομής με βάση ένα τοπικό μοντέλο φωτισμού, με την αναδρομική γέννηση νέων ακτίνων από τα σημεία

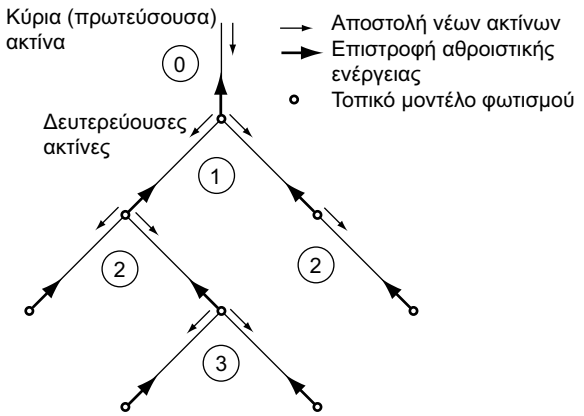


Σχήμα 15.5: *Η αναδρομική γέννηση ακτίνων και η παρακολούθηση της τροχιάς τους μέσα στη σκηνή.*

αυτά.

Η αρχή του αλγόριθμου παρακολούθησης ακτίνων είναι σχετικά απλή: Για κάθε εικονοστοιχείο δημιουργείται μια *κύρια* (*πρωτεύουσα*) ακτίνα με σημείο εκκίνησης τον παρατηρητή, η οποία διαπερνάει το κέντρο του εικονοστοιχείου. Η ακτίνα ελέγχεται για τομή με τη γεωμετρία της σκηνής προκειμένου να βρεθεί το κοντινότερο σημείο τομής με αυτή αναφορικά με το σημείο εκκίνησης (Σχήμα 15.5). Όταν ανιχνευτεί ένα έγκυρο σημείο τομής, εφαρμόζεται σε αυτό κάποιο τοπικό μοντέλο φωτισμού για να του αποδώσει φωτοσκίαση με βάση τις πηγές φωτός που βρίσκονται σε οπτική επαφή με το σημείο τομής. Αν δε βρεθεί τομή, αποδίδεται το χρώμα του υποβάθρου στην ακτίνα. Αν το υλικό της επιφάνειας που σταμάτησε η ακτίνα είναι διαφανές, γεννάται μια νέα, *δευτερεύουσα* ακτίνα διάθλασης από το σημείο τομής. Αν η επιφάνεια είναι ανακλαστική, γεννάται μια δευτερεύουσα ακτίνα προς την κατεύθυνση τέλειας ανάκλασης. Και οι δύο δευτερεύουσες ακτίνες (ανάκλασης και διάθλασης) αντιμετωπίζονται στη συνέχεια όπως η κύρια ακτίνα· εκπέμπονται από το σημείο τομής και αναζητείται το σημείο τομής τους με τη σκηνή. Σε περίπτωση που χτυπήσουν κάποια επιφάνεια, υπολογίζεται εκ νέου η φωτοσκίαση με ένα τοπικό μοντέλο φωτισμού, γεννιούνται νέες ακτίνες σύμφωνα με τις ιδιότητες του υλικού κ.ο.κ. (Σχήμα 15.5).

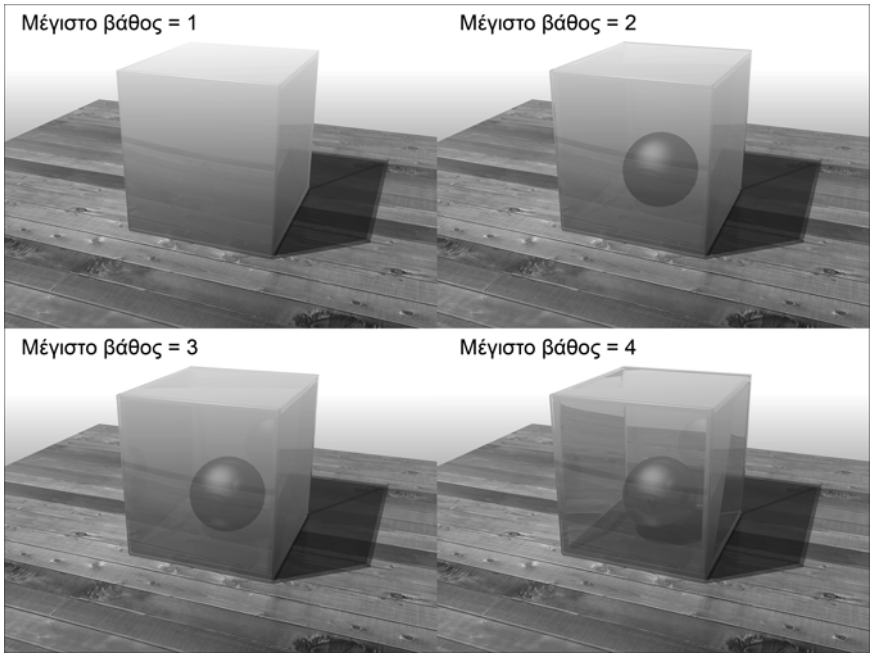
Κάθε φορά που μια ακτίνα συναντά μια επιφάνεια, υπολογίζεται το τοπικό χρώμα για το σημείο τομής. Αυτό το χρώμα είναι το άθροισμα του χρώματος από το τοπικό μοντέλο φωτισμού και τις συνεισφορές χρώματος που επιστρέφουν οι ανακλώμενες και διαθλώμενες ακτίνες που ξεκίνησαν από το σημείο αυτό. Συνεπώς, κάθε φορά που επιστρέφει ο αλγόριθμος από ένα αναδρομικό βήμα, μεταφέρει το αθροιστικό χρώμα που συνυπολογίστηκε από αυτό το επίπεδο αναδρομής και κάτω (Σχήμα 15.6). Αυτό το χρώμα προστίθεται στο τοπικό χρώμα φωτισμού του παραπάνω επιπέδου ανάλογα με την τιμή των συντελεστών διάθλασης (μετάδοσης) και ανάκλασης και προωθείται



Σχήμα 15.6: *Σχηματικό διάγραμμα του αλγόριθμου παρακολούθησης ακτίνων.*

στο ανώτερο επίπεδο. Αφού επιστρέψουν όλες οι αναδρομικές κλήσεις, το τελικό χρώμα είναι αυτό που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής πάνω στην κατεύθυνση της κύριας ακτίνας, το οποίο και ανατίθεται στο αντίστοιχο εικονοστοιχείο.

Το βάθος της αναδρομής, δηλαδή το πόσες φορές θα γεννηθούν νέες ακτίνες, εξαρτάται κυρίως από τρεις παράγοντες. Πρώτον, αν η ακτίνα χτυπήσει μια επιφάνεια που δε διαθέτει διαφάνεια ή που δεν είναι ανακλαστική, δε γεννώνται άλλες ακτίνες. Δεύτερον, αν η συνεισφορά μιας ακτίνας μειωθεί σημαντικά, δεν έχει νόημα να συνεχίσουμε να συσσωρεύουμε φως από το συγκεκριμένο μονοπάτι, αφού δε θα έχει ουσιαστική συνεισφορά στο τελικό χρώμα του εικονοστοιχείου από το οποίο ξεκίνησε το μονοπάτι. Τέλος, προκειμένου να αποφύγουμε μια ανεξέλεγκτη αναγέννηση ακτίνων σε πολύ ανακλαστικά ή διαφανή σκηνικά, καθορίζεται συνήθως ένα μέγιστο βάθος αναδρομής (τυπικές τιμές βάθους αναδρομής είναι 6 έως 8 για τις περισσότερες σκηνές — ανάλογα με την καμπυλότητα και τους συντελεστές διάθλασης και ανάκλασης των αντικειμένων). Σε σκηνές με έντονα καμπύλες, ανακλαστικές ή διαθλαστικές επιφάνειες, οι ισχυρές παραμορφώσεις που προκαλούνται στις ανακλώμενες και διαθλώμενες εικόνες αποτρέπουν το μάτι μας από το να εντοπίσει εύκολα την πληροφορία που λείπει λόγω μικρού βάθους αναδρομής. Στο Σχήμα 15.7 γίνεται σύγκριση μεταξύ εικόνων από παρακολούθηση ακτίνων με διαφορετικό μέγιστο βάθος αναδρομής. Η πρώιμη αποκοπή ακτίνων μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα αποτελέσματα για κάποιες σκηνές. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, μια γυαλιστερή σφαίρα είναι τοποθετημένη μέσα σε ένα κουτί από Plexiglas. Αν αφήσουμε να γίνει μόνο ένα αναδρομικό βήμα, ο διαφανής κύβος δε διαπερνάται και δρα μόνο ως ανακλαστήρας, αφού απαιτείται άλλο ένα βήμα για να βγει από την εσωτερική πλευρά του κύβου η διαθλώμενη ακτίνα. Από μέγιστο βάθος αναδρομής ίσο με τέσσερα και πάνω, η εικόνα αρχίζει να προσεγγίζει το επιθυμητό αποτέλεσμα· καθώς πολλαπλές ακτίνες ανακλώνται και διαθλώνται, διαπερνώντας τον κύβο και μεταδίδοντας την εικόνα του υπόβαθρου πέρα από αυτόν, γίνεται αντιληπτό ότι πρόκειται για ένα διαμπερές αντικείμενο.



Σχήμα 15.7: *Η επίπτωση του μέγιστου βάθους αναδρομής του αλγόριθμου παρακολούθησης ακτίνων στην πιστότητα του αποτελέσματος.*

Ο αναδρομικός αλγόριθμος της παρακολούθησης ακτίνων έχει την παρακάτω μορφή:

```
Color raytrace( Ray r, int depth, Scene world,
                vector <Light*> lights )
{
  Ray   *refl, *tran;
  Color color_r, color_t, color_l;

  // Τερματισμός της διαδικασίας αν ξεπεραστεί το μέγιστο
  // βάθος αναδρομής.
  if ( depth > MAX_DEPTH )
    return backgroundColor;

  // Εύρεση της κοντινότερης τομής της ακτίνας με τη σκηνή
  int hits = findClosestIntersection(r, world);
  if ( hits == 0 )
    return backgroundColor;

  // Εφαρμογή του τοπικού μοντέλου φωτισμού,
  // συνυπολογίζοντας τις σκιές
  color_l = calculateLocalColor(r, lights, world);
```

```
    // Παρακολούθηση της ανακλώμενης και διαθλώμενης ακτίνας
    // σύμφωνα με τις αντίστοιχες ιδιότητες του υλικού
    if (r->isect->surface->material->k_refl > 0)
    {
      refl = calculateReflection(r);
      color_r = raytrace(refl, depth+1, world, lights);
      delete refl;
    }
    if (r->isect->surface->material->k_refr > 0)
    {
      tran = calculateRefraction(r);
      color_t = raytrace(tran, depth+1, world, lights);
      delete tran;
    }
    return color_l + color_r + color_t;
  }
```

15.3.1 Δομές δεδομένων για την παρακολούθηση ακτίνων

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τον παραπάνω αλγόριθμο, είναι καλό να εισάγουμε μια δομή δεδομένων για την αναπαράσταση μιας ακτίνας και να εξηγήσουμε που και πότε χρησιμοποιούνται τα επιμέρους χαρακτηριστικά της.

Καθώς το φως διαπερνά τα διαφανή αντικείμενα ή εκτρέπεται πάνω σε ανακλαστικές επιφάνειες, αποσβένει εξαιτίας των τιμών των συντελεστών ανάκλασης και μετάδοσης, καθώς και των απωλειών της ενέργειας λόγω της απόστασης που διανύει. Αν το φως διαπερνά ένα υλικό με μη μηδενική οπτική πυκνότητα, τότε πρέπει να λαμβάνονται υπόψη και οι απώλειες εξαιτίας της απορρόφησης και της διάχυσης (αυτή η περίπτωση δε μελετάται σε αυτό το κεφάλαιο. Για περισσότερα στοιχεία ανατρέξτε στην οπτικοποίηση δεδομένων όγκου στο Κεφάλαιο 18). Όλοι οι παραπάνω παράγοντες υποδεικνύουν ότι είναι σκόπιμο μια ακτίνα να διαθέτει πληροφορία για το σθένος της, προκειμένου να μπορούμε να διαμορφώσουμε τη συνεισφορά του φωτισμού σε όποιο σημείο βρει τομή με τη γεωμετρία και να παρέχουμε ένα αξιόπιστο κριτήριο για τον τερματισμό της αναδρομής (βλ.παραπάνω τα κριτήρια τερματισμού του αλγόριθμου).

Καθώς μια ακτίνα τυπικά συναντά πολλαπλές επιφάνειες στην πορεία της, ανιχνεύονται πολλά σημεία τομής πάνω στην ημιευθεία που αυτή ορίζει. Αυτό σημαίνει ότι η αντίστοιχη δομή πρέπει να τηρεί το πλησιέστερο σημείο τομής ως προς το σημείο εκκίνησης της ακτίνας έτσι, ώστε να είναι εφικτή η σύγκρισή του με το επόμενο σημείο τομής που θα βρεθεί διατρέχοντας επαναληπτικά τα γεωμετρικά στοιχεία της σκηνής (βλ. Ενότητα 15.3.2). Μαζί με το σημείο, είναι καλό να φυλάμε και την απόσταση από το σημείο εκκίνησης στην οποία βρέθηκε η κοντινότερη τομή, αφού ουσιαστικά αποτελεί το κριτήριο σύγκρισης για να εξάγουμε το κοντινότερο σημείο πρόσκρουσης της ακτίνας. Η αποθηκευμένη απόσταση είναι επίσης χρήσιμη για τον υπολογισμό της απόσβεσης στην περίπτωση που στις απώλειες προσμετράμε και την επίδραση του υλικού του όγκου μέσα στον οποίο κινείται η ακτίνα.

Από πλευράς αναπαράστασης δεδομένων, στην περίπτωση της παρακολούθησης ακτίνων, το σημείο τομής της ακτίνας με μια επιφάνεια δεν είναι μια απλή τριάδα από Καρτεσιανές συντεταγμένες του χώρου. Αφού βρεθεί το σημείο τομής, εμπλέκεται σε υπολογισμούς που χρησιμοποιούν το κανονικό διάνυσμα στη θέση αυτή, τους συντελεστές διάθλασης και ανάκλασης, άλλα τοπικά χαρακτηριστικά του υλικού της επιφάνειας (για το τοπικό μοντέλο φωτισμού), κλπ. Επομένως, με την καταγραφή κάθε νέου, εγγύτερου σημείου τομής, ένα σύνολο από δεδομένα πρέπει να αντιγραφούν στην ακτίνα ή σε κάποια ειδική δομή αναπαράστασης των σημείων τομής που περιέχεται στην ακτίνα. Για τους υπολογισμούς μας χρειαζόμαστε εκτός από τις συντεταγμένες του σημείου τομής, το κανονικό διάνυσμα, τις συντεταγμένες υφής και μια αναφορά στο υλικό που ισχύει για το δεδομένο σημείο τομής. Επιπλέον, αν χρειαστούμε επιπρόσθετες πληροφορίες για την επιφάνεια που βρέθηκε η τομή, μπορούμε να φυλάμε και μια αναφορά προς το γεωμετρικό στοιχείο στο οποίο συνάντησε η ακτίνα την τομή. Για την εξειδικευμένη αλλά κοινή περίπτωση της παρακολούθησης ακτίνων σε πολυγωνικά περιβάλλοντα, η ακτίνα χρειάζεται να κρατάει μόνο πληροφορίες για τις συντεταγμένες και την απόσταση του σημείου τομής, μια αναφορά προς το πολύγωνο που χτυπήθηκε, και ένα σετ βαρυκεντρικών συντεταγμένων για την παρεμβολή όλων των υπόλοιπον χαρακτηριστικών από τις κορυφές του πολυγώνου — όταν αυτά χρειαστούν (βλ. Ενότητα 14.2.2). Μια πιθανή εκδοχή για τις δομές αποθήκευσης της ακτίνας και του σημείου τομής δίνεται παρακάτω:

```
class IsectPoint : Vector4f
{
public:
  Vector3f n;            // τοπικό κανονικό διάνυσμα
  Primitive *surface;    // γεωμετρικό στοιχείο που χτυπήθηκε
  double barycentric[3]; // για τριγωνικά πλεγματικά μοντέλα
  double t;              // παραμετρική απόσταση σημείου
                         // εκκίνησης και σημείου τομής
}

class Ray
{
public:
  IsectPoint *isect;
  int level;
  Vector4f origin;
  Vector3f dir;
  float strength;
  ...
  // μέθοδοι
  transform (Matrix4X4 mat);
  ...
}
```

15.3.2 Εύρεση τομών ακτίνων-σκηνής

Όπως έχει ήδη καταστεί σαφές, για τις τυπικές πρωτεύουσες και δευτερεύουσες ακτίνες η αναζήτηση της κοντινότερης τομής ως προς το σημείο εκκίνησής τους μέσα στα δεδομένα αναπαράστασης της σκηνής είναι εξαντλητική (οι ακτίνες σκιών αντιμετωπίζονται διαφορετικά· βλ. Ενότητα 15.3.3). Η ορθή ταξινόμηση ως προς την απόσταση — και άρα η απόκρυψη — των επιφανειών που συναντά μια ακτίνα απαιτεί την εύρεση όλων των σημείων τομής πάνω στην ημιευθεία που αυτή ορίζει.

Αν δε χρησιμοποιήσουμε κάποια μορφή ειδικής επιτάχυνσης του αλγορίθμου, οι ακτίνες πρέπει να ελεγχθούν με ένα προς ένα τα στοιχεία γεωμετρίας που απαρτίζουν τη σκηνή. Στην παρακολούθηση ακτίνων, ένα γεωμετρικό στοιχείο (primitive) είναι οποιαδήποτε μαθηματικά ορισμένη οντότητα μπορεί να δώσει τομή (κοινή λύση) με την ημιευθεία που αντιστοιχεί στην ακτίνα. Οι τομές ακτίνας-γεωμετρικών στοιχείων είναι οι πιο συχνοί υπολογισμοί κατά την εκτέλεση του αλγόριθμου παρακολούθησης ακτίνων. Η εξαντλητική κι επαναληπτική φύση της αναζήτησης τομών είναι ο λόγος που ο αλγόριθμος αυτός είναι ακριβός υπολογιστικά, αλλά επίσης και τετριμμένα παραλληλοποιήσιμος. Έχουν προταθεί αρκετοί βελτιστοποιημένοι αλγόριθμοι για την εύρεση τομών με γεωμετρικά στοιχεία διαφόρων τύπων. Μερικούς από αυτούς μπορείτε να βρείτε στις [Leng04] και [Schn03] και στο Παράρτημα Γ. Στην Ενότητα 15.5.1 θα γίνει σχολιασμός για το πως μπορεί να βελτιστοποιηθεί δραματικά το είδος και, κυρίως, ο αριθμός των ελέγχων τομής. Προς το παρόν, θα θεωρήσουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας μια γενικευμένη αόριστη κλάση Primitive αναπαράστασης γεωμετρικών στοιχείων, η οποία προσδιορίζει μια τυπική διεπαφή για όλα τα πιο εξειδικευμένα γεωμετρικά στοιχεία (π.χ. τις κλάσεις Sphere, Box, Triangle, Plane, κλπ), μέσω πολυμορφισμού.

Το απόσπασμα κώδικα που ακολουθεί υλοποιεί τη συνάρτηση του βασικού αναδρομικού αλγόριθμου παρακολούθησης ακτίνων `findClosestIntersection()`, η οποία παρέχει ένα μηχανισμό εξαντλητικής αναζήτησης για τον εντοπισμό του κοντινότερου σημείου τομής (και της απόστασης), αναφορικά με το σημείο εκκίνησης της ακτίνας. Τα αποτελέσματα της αναζήτησης αποθηκεύονται στο στιγμιότυπο της κλάσης της ακτίνας και επιστρέφεται ο αριθμός των τομών που βρέθηκε.

```
int findClosestIntersection(Ray r, Scene world)
{
  int hits=0;
  r.isect = new IsectPoint();
  r.isect->t = 10000000; // κάποια πολύ μεγάλη απόσταση («άπειρο»)
  for ( j=0; j<world.numObjects(); j++ )
    for ( k=0; k<world.getObject(j)->numPrims(); k++ )
    {
      Primitive *prim = world.getObject(j)->getPrim(k);
      IsectPoint *Q = prim->isect(r);
      if (Q==NULL)
        continue;
      hits++;
      // αν βρεθεί κοντινότερη τομή, αποθήκευσέ τη στην r
```

```
      if ( r.isect->t > Q->t )
        r.isect->copy(Q);
    }
  return hits;
}
```

15.3.3 Υπολογισμός φωτισμού και σκιών

Για κάθε πηγή φωτός στη σκηνή, χρειάζεται να εφαρμόσουμε ένα τοπικό μοντέλο φωτισμού στο σημείο της τομής της ακτίνας με την κοντινότερη επιφάνεια. Γι' αυτό το σκοπό, πρέπει να στείλουμε μια *ακτίνα σκιάς* σε καθεμία πηγή φωτός και να προσδιορίσουμε την ορατότητά της από το σημείο τομής. Αν υποθέσουμε ότι το φως είτε είναι πλήρως ορατό από το σημείο, αν δεν παρεμβάλλεται κάποια επιφάνεια στην πορεία της ακτίνας σκιάς, είτε παρεμποδίζεται ολικά, τότε την πρώτη φορά που θα συναντήσει η ακτίνα αυτή τομή με οποιαδήποτε επιφάνεια, ο φωτισμός που λαμβάνεται από την πηγή μηδενίζεται. Επειδή όμως τα αντικείμενα δεν είναι όλα εντελώς αδιαφανή, το χρώμα και η ένταση του φωτός στην πράξη δε μηδενίζονται πάντα, αλλά φιλτράρονται από τα αντικείμενα που παρεμβάλλονται στο μονοπάτι από το σημείο τομής στην πηγή. Ακόμα βέβαια και σε αυτή την περίπτωση, όταν η συνεισφορά του φωτός από μια πηγή στο σημείο τομής πέσει κάτω από ένα κατώφλι, μπορούμε να την αγνοήσουμε και να διακόψουμε την αναζήτηση για άλλα εμπόδια πάνω στην ακτίνα σκιάς. Αυτή είναι μια σημαντική διαφοροποίηση της ακτίνας σκιάς σε σχέση με τις κανονικές πρωτεύουσες και δευτερεύουσες ακτίνες. Οι ακτίνες σκιάς μπορούν να υπολογιστούν ταχύτερα γιατί δε μας ενδιαφέρει η διάταξη των σημείων τομής και, επομένως, μπορούμε να διακόψουμε την αναζήτηση τομών μόλις το σθένος της ακτίνας πέσει πολύ χαμηλά λόγω εξασθένισης.

Στο κομμάτι κώδικα που ακολουθεί παρουσιάζεται ο βασικός υπολογισμός του τοπικού μοντέλου με ενσωματωμένη την εκπομπή ακτίνων σκιών. Για κάθε πηγή φωτός της σκηνής υπολογίζεται η συνεισφορά της (η μεταβλητή penetration). Ένα τοπικό μοντέλο φωτισμού παράγει τη φωτοσκίαση του σημείου σύμφωνα με την κατεύθυνση φωτισμού, το κανονικό διάνυσμα, τα τοπικά χαρακτηριστικά του υλικού και την κατεύθυνση κατοπτρικής ανάκλασης (βλ. Κεφάλαιο 12). Η τελική συνισταμένη του χρώματος επιστρέφεται ως έξοδος. Σημειώστε πως κάθε φορά που βρίσκεται μια τομή, η συνεισφορά του φωτός ελαττώνεται ανάλογα με τη διαφάνεια του γεωμετρικού στοιχείου. Για κλειστές πολυγωνικές επιφάνειες, η ακτίνα θα αποσβένει τόσο κατά την είσοδό της σε αυτές, όσο και κατά την έξοδό της. Αν αυτό δεν είναι επιθυμητό, θα πρέπει να γίνεται ένας παραπάνω έλεγχος για την κατεύθυνση της ακτίνας σε σχέση με το κανονικό διάνυσμα του πολυγώνου.

```
Color calculateLocalColor( Ray r, Vector<Light*> lights,
                           Scene world )
{
  int i,j,k;
  // αρχικοποίησε το χρώμα στον ελάχιστο φωτισμό
```

```
  Color col = ambientColor();

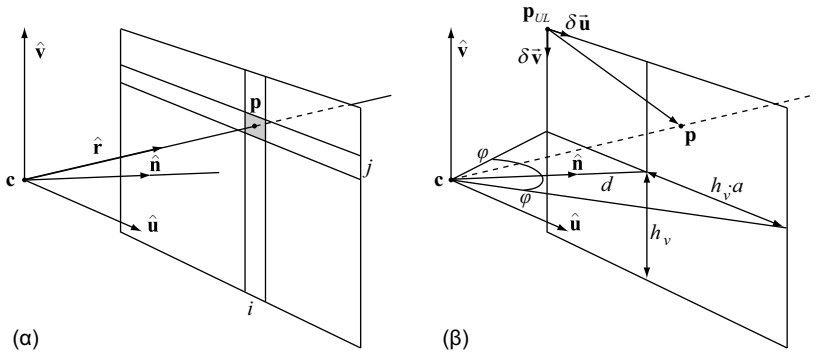
  // Για κάθε φως, οδήγησε μια ακτίνα προς αυτό
  for ( i=0; i<lights.size(); i++ )
  {
    Ray *shadowRay = new Ray(r->isect,lights[i]->pos);
    // μέτρησε πόσο φως φτάνει στο σημείο τομής
    float penetration=1.0f;
    // φιλτράρισε το φως καθώς διέρχεται από τη σκηνή
    for ( j=0; j<world.numObjects(); j++ )
      for ( k=0; k<world.getObject(j)->numPrims(); k++ )
      {
        Primitive *prim = world.getObject(j)->getPrim(k);
        IsectPoint *Q = prim->isect(r);
        // Περίπτωση 1: Δεν υπάρχει παρεμπόδιση - καθόλου εξασθένιση
        if (Q==NULL)
          continue;
        // Περίπτωση 2: η συνεισφορά του φωτός μειώνεται
        penetration *= 1 - prim->material->alpha;
        // Κριτήριο τερματισμού: Το φως έχει σχεδόν αποκοπεί
        if ( penetration < 0.02 )
        {
          penetration=0;
          break;
        }
      }

    // Έλεγξε αν το light[i] συνεισφέρει στο τοπικό χρώμα
    if (penetration==0)
      continue;
    col+=localShadingModel( r, prim, lights[i]->pos,
                            penetration );
  } // light[i]
  return col;
}
```

15.4 Εκπομπή ακτίνων

15.4.1 Πρωτεύουσες ακτίνες

Υπάρχουν πολλοί τρόποι να προσδιορίσουμε τις κύριες ακτίνες οι οποίες φεύγουν από το κέντρο προβολής και περνάνε μέσα από κάθε εικονοστοιχείο για να συναντήσουν τη σκηνή. Εδώ παρουσιάζεται ένας τρόπος υπολογισμού που είναι κατάλληλος για οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων παρατηρητή $(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$ και για συμμετρικό οπτικό πεδίο ως προς τον οπτικό άξονα (μπροστά). Προς το παρόν, ας θεωρήσουμε



Σχήμα 15.8: *Υπολογισμός κύριων ακτίνων. (α) Η ακτίνα διέρχεται από το κέντρο του αντίστοιχου εικονοστοιχείου. (β) Η παραμετροποίηση της κάμερας.*

ένα ιδανικό μοντέλο κάμερας (pinhole camera) με εστιακή απόσταση d και λόγο πλάτους προς ύψος $a = w/h$, όπου w και h είναι αντίστοιχα το πλάτος και το ύψος της εικόνας σε μονάδες pixel (Σχήμα 15.8(β)). Τα εικονοστοιχεία θεωρούνται τετράγωνα (λόγος πλευρών 1 : 1).

Το μισό πλάτος και ύψος w_v, h_v του παραθύρου στο κοντινό επίπεδο αποκοπής (στην εστιακή απόσταση εδώ), εκφρασμένα σε συντεταγμένες κόσμου, είναι αντίστοιχα (Σχήμα 15.8(β)):

$$w_v = d \tan \varphi, \qquad h_v = w_v / a. \tag{15.15}$$

Ο κύριος βρόγχος σ' ένα πρόγραμμα παρακολούθησης ακτίνων (ray tracer) διατρέχει όλα τα εικονοστοιχεία (i, j) της τελικής εικόνας και εκπέμπει (τουλάχιστον) μία ακτίνα από καθένα (Σχήμα 15.8(α)). Εξαιτίας αυτής της επαναληπτικής διαδικασίας, είναι βολικό να προσδιορίσουμε τον τύπο για το σημείο $\mathbf{p}$ και την κατεύθυνση εκκίνησης της ακτίνας $\hat{\mathbf{r}}$ με ένα βηματικό τρόπο. Μπορούμε να υπολογίσουμε τη θέση του σημείου $\mathbf{p}_{UL}$, το οποίο αντιστοιχεί στην πάνω αριστερή συντεταγμένη επί της εικόνας, καθώς και τις βηματικές μετατοπίσεις σε συντεταγμένες κόσμου οριζόντια και κάθετα $\delta\vec{\mathbf{u}}$, $\delta\vec{\mathbf{v}}$, μεταξύ των διαδοχικών εικονοστοιχείων. Με αυτό τον τρόπο, είναι εύκολο να προσδιορίσουμε το σημείο εκκίνησης για κάθε ακτίνα (κέντρο του εικονοστοιχείου). Το σημείο $\mathbf{p}_{UL}$ υπολογίζεται προσθέτοντας στο διάνυσμα από το κέντρο παρατήρησης μέχρι το κέντρο του επιπέδου προβολής $\mathbf{c}$, το διάνυσμα μέχρι τη γωνία του παραλληλογράμμου:

$$\mathbf{p}_{UL} = \mathbf{c} + d \cdot \hat{\mathbf{n}} - w_v \hat{\mathbf{u}} + h_v \hat{\mathbf{v}}, \tag{15.16}$$

ή χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (15.15),

$$\mathbf{p}_{UL} = \mathbf{c} + d \left[\hat{\mathbf{n}} + \left(\frac{h}{w} \cdot \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{u}} \right) \tan \varphi \right]. \tag{15.17}$$

Οι βηματικές μετατοπίσεις $\delta\overrightarrow{\mathbf{u}}$ και $\delta\overrightarrow{\mathbf{v}}$ εξαρτώνται από την ανάλυση της εικόνας σε κάθε διάσταση:

$$\delta\overrightarrow{\mathbf{u}} = \frac{2w_v}{w}\hat{\mathbf{u}}, \qquad \delta\overrightarrow{\mathbf{v}} = -\frac{2h_v}{h}\hat{\mathbf{v}}. \tag{15.18}$$

Επειδή έχουμε υποθέσει τετράγωνα εικονοστοιχεία, η ανάλυση της εικόνας επηρεάζει μόνο το άνοιγμα του οπτικού πεδίου κατά την οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση και το μέγεθος του εικονοστοιχείου, αλλά όχι το σχήμα του τελευταίου. Πράγματι:

$$\left|\delta\overrightarrow{\mathbf{u}}\right| = \frac{2w_v}{w}\left|\hat{\mathbf{u}}\right| = \frac{2ah_v}{w} = \frac{2h_v}{h} = \left|\delta\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|. \tag{15.19}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε το κέντρο του εικονοστοιχείου ως σημείο εκκίνησης $\mathbf{p}$ της ακτίνας, τότε για $i = 0..w-1$ και $j = 0..h-1$,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_{UL} + \left(i + \frac{1}{2}\right)\delta\overrightarrow{\mathbf{u}} + \left(j + \frac{1}{2}\right)\delta\overrightarrow{\mathbf{v}}. \tag{15.20}$$

Η κατεύθυνση μετάδοσης της ακτίνας είναι — απλά — το κανονικοποιημένο διάνυσμα διαφοράς μεταξύ του σημείου εκκίνησης και του κέντρου προβολής:

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}-\mathbf{c}}{|\mathbf{p}-\mathbf{c}|}. \tag{15.21}$$

15.4.2 Αποκοπή

Μια ενδιαφέρουσα επίπτωση της απομάκρυνσης των κρυφών επιφανειών στο πεδίο του τριδιάστατου χώρου και όχι ως ένα βήμα μετά την προοπτική προβολή (όπως στην άμεση σχεδίαση με τη χρήση του αλγόριθμου Z-buffer) είναι ότι τόσο η κοντινή όσο και η μακρινή απόσταση αποκοπής μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή, ακόμα και αρνητική. Για την παρακολούθηση ακτίνας, αυτές οι τιμές είναι απλά αποστάσεις από το κέντρο προβολής και τίποτα περισσότερο. Αντίθετα στον αλγόριθμο Z-buffer, ο λόγος μεταξύ της μακρινής και κοντινής απόστασης αποκοπής έχει σημαντική επίπτωση στην ακρίβεια της ταξινόμησης κατά βάθος, ενώ δεν επιτρέπεται μηδενική κοντινή απόσταση αποκοπής. Στην παρακολούθηση ακτίνας, το κοντινό επίπεδο αποκοπής μπορεί να τεθεί ακριβώς πάνω στο κέντρο προβολής (κοντινή απόσταση αποκοπής = 0) και το μακρινό στο άπειρο (στην πράξη, σε μια πολύ μεγάλη απόσταση) χωρίς κανένα πρόβλημα.

Όπως αναφέρθηκε στην Ενότητα 15.3.1, η ταξινόμηση των σημείων τομής ακτίνας με το περιβάλλον συγκρίνει την τελευταία καταγεγραμμένη απόσταση από το σημείο εκκίνησης με αυτή της τρέχουσας τομής. Με δεδομένη μια παραμετρική αναπαράσταση της ημιευθείας της ακτίνας, ένα σημείο πάνω σε αυτή ορίζεται ως:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(t) = \mathbf{p}_{\text{start}} + t \cdot \hat{\mathbf{r}}. \tag{15.22}$$

Εξαιτίας του γεγονότος ότι το διάνυσμα κατεύθυνσης της ακτίνας είναι κανονικοποιημένο, η παράμετρος t είναι η προσημασμένη απόσταση από το σημείο εκκίνησης

πάνω στην ακτίνα. Αν το $\mathbf{p}_{\text{start}}$ βρίσκεται πάνω στο κοντινό επίπεδο αποκοπής, τομές $\mathbf{q}(\mathbf{t})$ με $t < 0$ απορρίπτονται ως μη ορατές. Για το μοντέλο επίπεδης επιφάνειας αποκοπής της Ενότητας 15.4.1, η εστιακή απόσταση $d : d > 0$ ισούται με την κοντινή απόσταση αποκοπής και $\mathbf{p}_{\text{start}} = \mathbf{p}$ (Εξίσωση (15.20)). Αν επιλέξουμε μια τυχαία απόσταση αποκοπής n, σε σχέση με το κέντρο προβολής, λαμβάνουμε σημεία εκκίνησης για τις ακτίνες που βρίσκονται πάνω σε μια σφαιρική επιφάνεια αποκοπής,

$$\mathbf{p}_{\text{start}} = \mathbf{c} + n \cdot \hat{\mathbf{r}}. \tag{15.23}$$

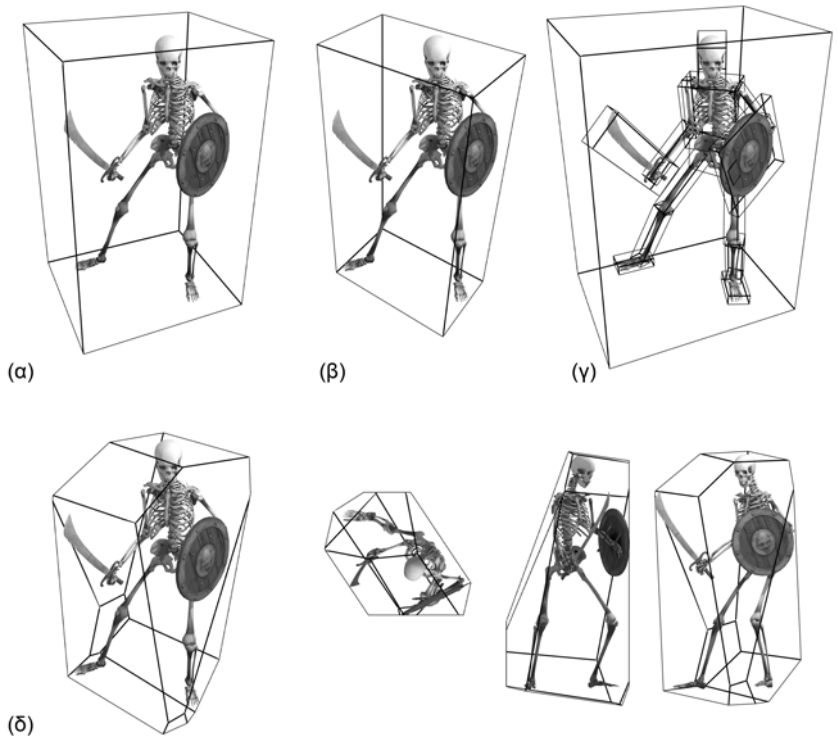
15.4.3 Δευτερεύουσες ακτίνες

Δευτερεύουσες ακτίνες αποστέλλονται όταν παρακολουθούμε κάποιο μονοπάτι ανάκλασης, μετάδοσης ή ελέγχου σκιάς, προς τη διεύθυνση ανάκλασης, διάθλασης ή την κατεύθυνση της φωτεινής πηγής αντίστοιχα. Γι αυτές τις ακτίνες το σημείο εκκίνησης είναι το σημείο τομής της ακτίνας του προηγούμενου αναδρομικού βήματος.

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι ακτίνες που φεύγουν από μια επιφάνεια είναι πολύ πιθανό να βρουν πλησιέστερη τομή ξανά με την ίδια επιφάνεια, στο ίδιο σημείο, οπότε πρέπει να βρούμε έναν τρόπο να αποκλείσουμε την τομή αυτή. Θυμηθείτε ότι, εξαιτίας της παραμετροποίησης της ημιευθείας της ακτίνας, οποιοδήποτε σημείο τομής $\mathbf{q}$ αντιστοιχεί σε μια απόσταση t από την αφετηρία της ακτίνας. Συνεπώς, ένας εύκολος έλεγχος που μπορούμε να πραγματοποιήσουμε είναι αν η παράμετρος t στο σημείο τομής είναι μεγαλύτερη από μηδέν. Αν όμως δύο επιφάνειες εφάπτονται ακριβώς, τότε αυτός ο έλεγχος πρέπει να επεκταθεί ώστε να περιλαμβάνει τη διάκριση μεταξύ της επιφάνειας απ' όπου ξεκίνησε η ακτίνα και των υπολοίπων:

```
class Ray
{
public:
  ...
  Primitive * startPrim;
  ...
}

int findClosestIntersection(Ray r, Scene world)
{
  ...
  if (Q==NULL)
    continue;
  if ( Q->t <0 || (nearZero(Q->t) && r.startPrim == prim) )
    continue;
  hits++;
  // αν βρέθηκε μια κοντινότερη τομή, αντίγραφέ τη στην r
  if ( r.isect->t > Q->t )
    r.isect->copy(Q);
  ...
}
```



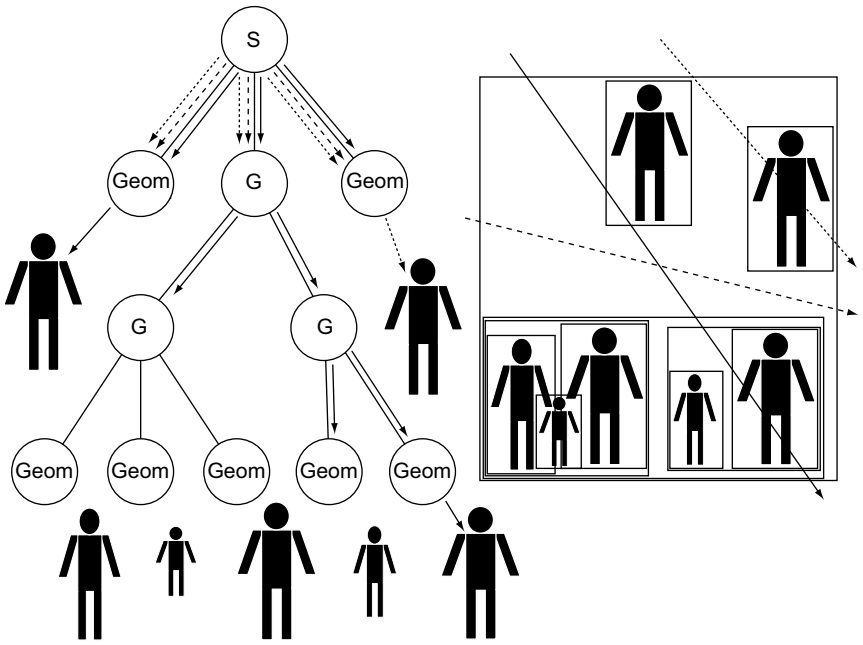
Σχήμα 15.9: *Οι τυπικοί περιβάλλοντες όγκοι που χρησιμοποιούνται στην παρακολούθηση ακτίνων. (α) Κουτιά παράλληλα με τους κύριους άξονες (AABB). (β) Κουτιά προσανατολισμένα προς τα αντικείμενα (OBB). (γ) Ιεραρχίες περιβαλλόντων όγκων (εδώ, ιεραρχία από OBB). (δ) Περιβάλλουσες πλάκες.*

15.5 Διάσχιση σκηνής για ανίχνευση τομών

15.5.1 Ιεραρχικοί έλεγχοι τομής

Μπορούμε να επωφεληθούμε από την ιεραρχική οργάνωση μιας σκηνής για να επιταχύνουμε τους ελέγχους τομών ακτίνας με τη σκηνή (βλ. επίσης Κεφάλαιο 9). Αντί να πραγματοποιούμε ελέγχους εξαντλητικά με καθένα από τα στοιχεία γεωμετρίας, μπορούμε να επιταχύνουμε σημαντικά τη διαδικασία εύρεσης τομών, ελέγχοντας πρώτα την ακτίνα με την οργανωμένη δομή διαχείρισης της σκηνής· αυτή μπορεί να είναι μια ιεραρχία από περιβάλλοντες όγκους, μια ιεραρχία υποδιαίρεσης χώρου, ή ένας συνδυασμός τέτοιων μορφών αναπαράστασης.

Η ιδέα της πραγματοποίησης μιας υπολογιστικά γρήγορης πράξης τομής μ' ένα απλό στερεό που περιβάλλει μια ομάδα γεωμετρικών στοιχείων αντί να επιχειρηθεί από την αρχή η διεξοδική ανίχνευση τομών με τα γεωμετρικά στοιχεία, προέκυψε αρκετά χρόνια πριν [Clar76, Whit80]. Για την επιτάχυνση της διαδικασίας της παρακολούθη-



Σχήμα 15.10: *Τομή ακτίνας με ιεραρχία περιβαλλόντων όγκων. Οι περισσότερες τομές ακτίνων με τα στοιχεία γεωμετρίας αποφεύγονται εκτελώντας απλές τομές ακτίνων – περιβαλλόντων όγκων.*

σης ακτίνων, οι πιο κοινοί τύποι περιβαλλόντων όγκων είναι οι σφαίρες, τα παράλληλα με τους κύριους άξονες κουτιά (axis-aligned bounding boxes - AABB), τα κουτιά που είναι προσανατολισμένα ως προς τα αντικείμενα που περιβάλλουν (oriented bounding boxes - OBB) και οι περιβάλλουσες πλάκες (bounding slabs [Kay86], Σχήμα 15.9 - βλ. επίσης Ενότητα 5.6). Καθώς ο περιορισμός που έχουν τα AABB να είναι παράλληλα με τους κύριους άξονες δεν ισχύει για τα OBB, τα τελευταία μπορούν να περιβάλουν τα αντικείμενα αφήνοντας λιγότερο κενό χώρο, αν επιλέξουμε με προσοχή τον προσανατολισμό τους. Αν αντικαταστήσουμε τα τρία κάθετα μεταξύ τους επίπεδα που σχηματίζουν τα τοιχώματα ενός OBB, μ' έναν αριθμό από ζεύγη παράλληλων επιπέδων, η γεωμετρία περικλείεται από ένα σύνολο από *περιβάλλουσες πλάκες* (ο χώρος ανάμεσα στα ανά δύο παράλληλα επίπεδα), οι οποίες εξασφαλίζουν ακόμα λιγότερο περισσευούμενο χώρο μέσα στον περιβάλλοντα όγκο.

Όταν η σκηνή είναι οργανωμένη με τη μορφή γράφου σκηνής, ο περιβάλλον όγκος κάθε κόμβου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να πάρουμε ένα πρώτο αποτέλεσμα τομής της ακτίνας με τη γεωμετρία που αυτός περιλαμβάνει (Σχήμα 15.10) [Rubi80]. Στην περίπτωση θετικού αποτελέσματος (εύρεση τομής με τον περιβάλλοντα όγκο), ο έλεγχος γίνεται αναδρομικά στους κόμβους-παιδιά του. Στο επίπεδο των φύλλων της ιεραρχίας, τα γεωμετρικά στοιχεία ελέγχονται εξαντλητικά, σύμφωνα με τη λογική του βασικού αλγόριθμου παρακολούθησης ακτίνων, αφού έχουν όμως πρώτα απορριφθεί όσα γεωμετρικά στοιχεία ανήκουν σε κόμβους που δεν τέμνονται με την ακτίνα. Εναλλακτικά, με την εξαντλητική αναζήτηση τομών σε αυτό το επίπεδο, αν το γράφο

σκηνής τον υποστηρίζει κάποιο σχήμα διαμέρισης χώρου (βλ. παρακάτω), τότε η ακτίνα προωθείται για αναζήτηση τομών με αυτό.

Ένας σημαντικός παράγοντας που επηρεάζει την απόδοση των περιβαλλόντων όγκων ως μηχανισμό πρόωρης απόρριψης τομών με ακτίνα, είναι ο κενός χώρος που περισσεύει στο εσωτερικό τους. Μια σκηνή με μεγάλους περιβάλλοντες όγκους σε ψηλά επίπεδα (περιβάλλοντες όγκοι ομάδων κόμβων) τείνει να αφήνει αρκετό κενό χώρο μεταξύ των αντικειμένων· Αυτό έχει ως αποτέλεσμα πολλές ακτίνες να τέμνουν τους όγκους, χωρίς να χτυπάνε στην την πραγματική γεωμετρία της σκηνής. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο οι περιβάλλουσες πλάκες είναι πιο αποδοτικές ως σχήμα σε σχέση με το αντίστοιχο προσανατολισμένο στους άξονες κουτί. Οι Goldsmith και Salmon [Gold87] έδειξαν επίσης ότι οι έλεγχοι τομών με ακτίνες τερματίζουν γρηγορότερα, δηλαδή σε υψηλότερο επίπεδο της ιεραρχίας, αν οι περιβάλλοντες όγκοι έχουν τη μικρότερη δυνατή επιφάνεια.

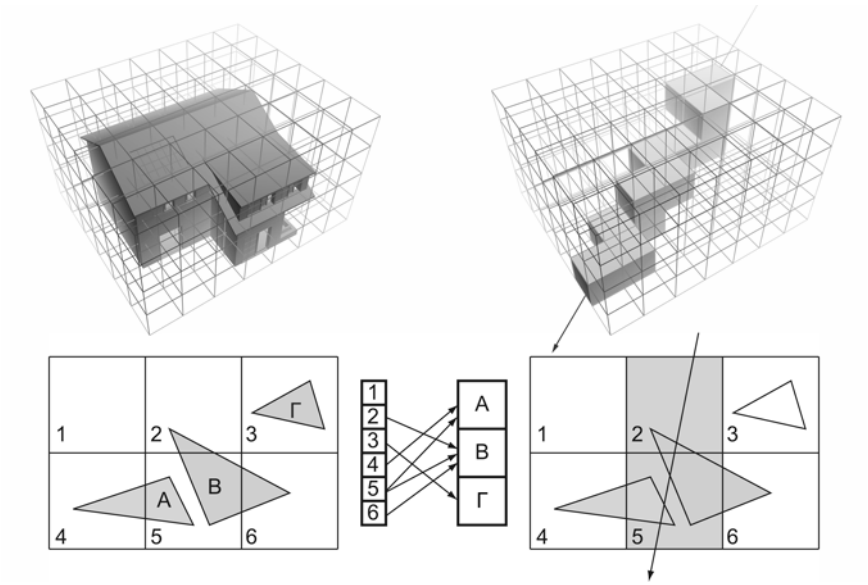
Όμως το αν λιγότερες ακτίνες τέμνουν έναν περιβάλλον όγκο δεν είναι το μοναδικό κριτήριο για την επιλογή ενός τύπου όγκου για να περιφράξουμε ένα αντικείμενο ή κόμβο. Η υπολογιστική πολυπλοκότητα της πράξης της ανίχνευσης τομής με το στερεό παίζει κι αυτή ένα πολύ σημαντικό ρόλο, εξαιτίας του πολύ μεγάλου αριθμού ακτίνων που πρέπει να ελέγξουμε σε μια τυπική απεικόνιση με παρακολούθηση ακτίνων. Η αναζήτηση τομών με ένα AABB είναι σχετικά φθηνή από πλευράς πράξεων. Ακόμα και στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε κουτιά προσανατολισμένα προς το αντικείμενο (OBB) για περιβάλλοντες όγκους, μπορούμε να μετασχηματίσουμε τις ακτίνες στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων του αντικειμένου και να εκτελέσουμε τον έλεγχο τομής σαν να είχαμε AABB (βλ. Ενότητα 15.5.2).

Μια διαφορετική προέγγιση για την επιτάχυνση της παρακολούθησης ακτίνων είναι η *διαμέριση χώρου*. Ο χώρος που περιλαμβάνει τη σκηνή κατακερματίζεται σ' έναν αριθμό από απλά κελιά, τα οποία είναι συνήθως παραλληλεπίπεδα προσανατολισμένα προς τους άξονες· καθένα από αυτά διατηρεί μια αναφορά προς όλα τα γεωμετρικά στοιχεία της σκηνής τα οποία τέμνει ή περιέχει. Όταν εκπέμπεται μια ακτίνα, υπολογίζονται τα κελιά που αυτή τέμνει κατά την πορεία της, και ελέγχονται για τομή μόνο εκείνα τα γεωμετρικά στοιχεία που περιλαμβάνονται στα επιλεγμένα κελιά. Όταν μια ακτίνα μπει στο πρώτο κελί που συναντά, τέμνεται με όλα τα γεωμετρικά στοιχεία που κρατάει το κελί ή, εναλλακτικά, επαναλαμβάνουμε αναδρομικά τον έλεγχο, αν το κελί περιέχει μια ιεραρχία από μικρότερες υποδιαιρέσεις του. Αν δε βρεθεί καμία τομή σε αυτό το κελί, τότε επισκεπτόμαστε το επόμενο κελί, κ.ο.κ.

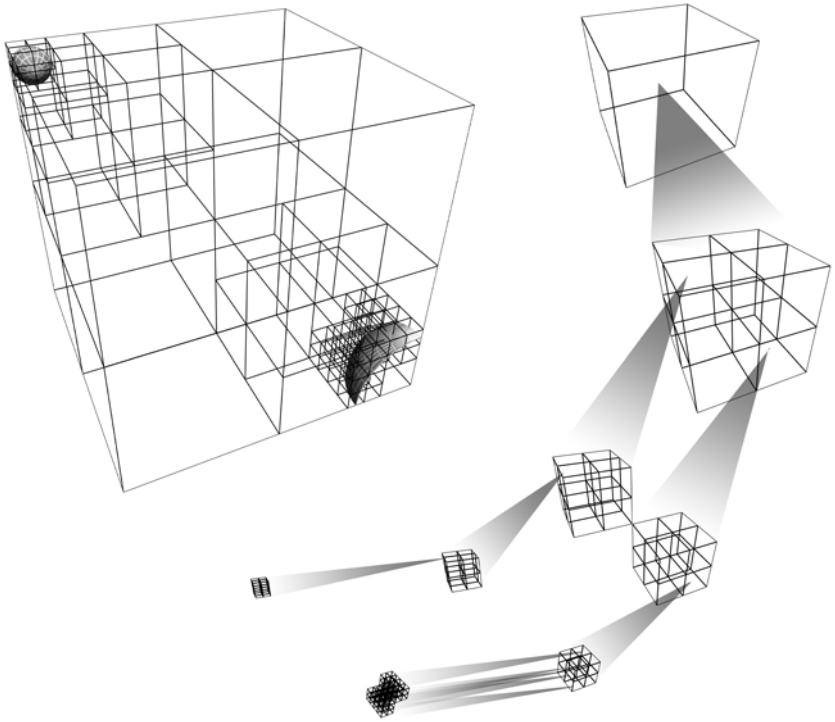
Ένα σημαντικό κέρδος που έχουμε όταν χρησιμοποιούμε μη επικαλυπτόμενα κελιά τα οποία προκύπτουν από μια ομοιόμορφη διαμέριση του χώρου, είναι ότι εκτελούμε μια ταξινόμηση τομών σε επίπεδο κελιών, αν τα διατρέξουμε κατά τη φορά που εκπέμπεται η ακτίνα. Όταν βρεθεί η κοντινότερη τομή σ' ένα από τα κελιά, η αναζήτηση τομών μπορεί να τερματιστεί. Αυτό δίνει ένα σημαντικό προβάδισμα ταχύτητας στη διαμέριση χώρου σε σχέση με μια ιεραρχία από περιβάλλοντες όγκους. Πρέπει να σημειωθεί όμως, ότι το γέμισμα των κελιών της διαμέρισης χώρου με αναφορές προς τα γεωμετρικά στοιχεία παίρνει κάποιο χρόνο, αφού πρέπει να βρεθούν οι τομές των κελιών με αυτά. Το γεγονός ότι χρειάζεται μια προ-επεξεργασία για να δημιουργήσουμε

τη διαμέριση χώρου πρέπει να λαμβάνεται υπόψη αν σκοπεύουμε να σχεδιάσουμε σκηνές με πολλά κινούμενα αντικείμενα. Οι δυναμικές σκηνές απαιτούν επανυπολογισμό των δομών της διαμέρισης χώρου σε κάθε καρέ.

Η απλούστερη μορφή διαμέρισης χώρου για την παρακολούθηση ακτίνων είναι η ομοιόμορφη διαμέριση του χώρου που καταλαμβάνει η σκηνή σε κελιά — στοιχεία όγκου (voxels) — ίδιων διαστάσεων (Σχήμα 15.11). Σε πρώτη φάση, προ-επεξεργαζόμαστε όλα τα γεωμετρικά στοιχεία για να αποφανθούμε με ποια κελιά τέμνονται. Σε κάθε κελί που περιλαμβάνει ή τέμνει ένα γεωμετρικό στοιχείο προστίθεται μια αναφορά σε αυτό. Στη φάση της παρακολούθησης ακτίνων, τα κελιά τα οποία διαπερνά μια ακτίνα ανιχνεύονται και γίνεται έλεγχος των περιεχόμενων σε αυτά στοιχείων γεωμετρίας για τομή. Το σύνολο των κελιών που διαπερνά μια ακτίνα υπολογίζεται συνήθως μ' έναν αυξητικό αλγόριθμο παρόμοιο με τον κλασικό διδιάστατο αλγόριθμο σχεδίασης γραμμών DDA, αλλά για τρεις διαστάσεις [Kauf86, Fuji86, Aman87]. Οι Amanatides και Woo [Aman87] πρότειναν μια τεχνική επιτάχυνσης, για την περίπτωση που οι ακτίνες δε σταματάνε απαραίτητα στην κοντινότερη τομή ή επισκεπτόμαστε με τυχαία σειρά τα επιλεγμένα κελιά. Στη μέθοδο αυτή που ονομάζεται *mailboxing*, η κάθε ακτίνα χαρακτηρίζεται από ένα μοναδικό αριθμό-προσδιοριστή (τουλάχιστο για το τρέχον καρέ) και κάθε φορά που τέμνεται ένα γεωμετρικό στοιχείο μέσα σε ένα κελί, αναθέτουμε τον αριθμό αυτό στο στοιχείο. Στην περίπτωση που ένα γεωμετρικό στοιχείο απλώνεται σε παραπάνω από ένα κελιά, ο έλεγχος τομής δε θα πραγματοποιηθεί ξανά



Σχήμα 15.11: *Ομοιόμορφη διαμέριση χώρου για την επιτάχυνση των τομών ακτίνας-σκηνής στην παρακολούθηση ακτίνων. Ένας χώρος με στοιχεία όγκου (voxels) παράγεται έτσι ώστε να περιλαμβάνει τη σκηνή (αριστερά) και να τη χωρίζει σε κελιά. Τα στοιχεία γεωμετρίας δεικτοδοτούνται ανάλογα με το ποια κελιά τέμνουν (μέση). Μια ακτίνα ελέγχεται μόνο με τα γεωμετρικά στοιχεία των κελιών που διαπερνά (δεξιά).*



Σχήμα 15.12: *Ένα οκταδικό δένδρο (octree).*

με αυτό, όταν η ακτίνα μπει σε επόμενο κελί που το περιέχει· συγκρίνεται ο προσδιοριστής που είναι αποθηκευμένος στο στοιχείο με αυτόν της ακτίνας, και αν είναι ίδιος, ο πλήρης (και δαπανηρός) έλεγχος τομής αποφεύγεται.

Ο αριθμός των κελιών (και συνεπώς, το μέγεθός τους) παίζει σημαντικό ρόλο στην απόδοση της ομοιόμορφης διαμέρισης. Με λίγα, μεγάλα κελιά παίρνουμε λιγότερες τομές μεταξύ κελιών και ακτίνων, μικρότερη πιθανότητα ένα γεωμετρικό στοιχείο να τέμνεται με πολλαπλά κελιά και, συνεπώς, λιγότερους περιττούς ελέγχους. Αντίθετα, με μικρότερα κελιά περιορίζεται ο αριθμός των γεωμετρικών στοιχείων που περιλαμβάνονται σε αυτά, αποφέροντας συντομότερους χρόνους τομής με το κάθε κελί.

Όπως αναφέρθηκε, τα κελιά (voxels) μιας διαμέρισης χώρου μπορούν να υποδιαιρεθούν ιεραρχικά. Συνήθως, ένας λόγος για τον οποίο θέλουμε κάτι τέτοιο είναι για να καταλήξουμε σε κελιά με ισοκατανεμημένο αριθμό αναφορών σε στοιχεία γεωμετρίας. Στο Σχήμα 15.12, βλέπουμε ότι πολλά κελιά παραμένουν άδεια, ενώ άλλα περιέχουν πολλά στοιχεία, εξαιτίας της ανομοιόμορφης κατανομής των τελευταίων στο χώρο που καταλαμβάνει το μοντέλο στο οποίο ανήκουν.

Το πιο κοινό ιεραρχικό σχήμα οργάνωσης για τη διαμέριση χώρου στην παρακολούθηση ακτίνων είναι το *οκταδικό δένδρο* (*octree*) [Glas84] (βλ. Ενότητα 5.6 για τον ορισμό του octree). Ο χώρος του κελιού πρώτου επιπέδου (π.χ., το AABB ολόκληρης της σκηνής) χωρίζεται ισομερώς στα οκτώ. Τα voxels που προκύπτουν δεν υποδιαι-

ρούνται περαιτέρω, αν δεν περιέχουν γεωμετρικά στοιχεία, ενώ τα υπόλοιπα χωρίζονται ξανά με την ίδια λογική κ.ο.κ. (Σχήμα 15.12). Η διαμέριση σταματά είτε όταν υπερβούμε έναν μέγιστο αριθμό υποδιαιρέσεων είτε όταν ο αριθμός των γεωμετρικών στοιχείων που περιέχει έναν κελί είναι αρκετά μικρός ώστε να καθιστά άσκοπη την περαιτέρω διαμέριση. Ο μέγιστος αριθμός των υποδιαιρέσεων καθορίζει και το βάθος του δένδρου. Σε αντίθεση με την ομοιόμορφη διαμέριση, η ανίχνευση τομών με τα κελιά του οκταδικού δένδρου δεν είναι ζυγισμένη, ωστόσο η κατανομή των ελέγχων στα φύλλα της ιεραρχικής δομής είναι πολύ πιο ομοιόμορφη.

15.5.2 Μετασχηματισμοί ακτίνων

Οι τομές ακτίνας–αντικειμένου συνήθως υπολογίζονται πιο αποδοτικά αν τόσο η ακτίνα όσο και το αντικείμενο είναι εκφρασμένα σ' ένα σύστημα συντεταγμένων διαφορετικό από το ΣΣΚ ή το ΣΣΠ. Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, αν χρησιμοποιούμε έναν OBB περιβάλλοντα όγκο, ο οποίος είναι, ευθυγραμμισμένος με ένα τυχαίο σύστημα συντεταγμένων. Η εύρεση τομής με το OBB μετατρέπεται σε μια πιο απλή υπολογιστικά διαδικασία, αν μετασχηματίσουμε πρώτα την ακτίνα στο σύστημα συντεταγμένων του προσανατολισμένου κουτιού· η ακτίνα στη συνέχεια ελέγχεται για τομή με τον περιβάλλοντα όγκο, σαν αυτός να ήταν AABB. Μια άλλη συχνή περίπτωση κατά την οποία συμφέρει να μετασχηματίσουμε τις ακτίνες είναι όταν έχουμε μετασχηματισμούς αντικειμένων. Ο επανυπολογισμός των συντεταγμένων ενός αντικειμένου όταν εφαρμόσουμε πάνω του ένα γεωμετρικό μετασχηματισμό, προκειμένου να φέρουμε το τελευταίο στο σύστημα που είναι εκφρασμένες οι ακτίνες, είναι πολύ πιο ακριβός από το να μετασχηματίσουμε τις ακτίνες στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων του αντικειμένου. Το φαινόμενο εντείνεται, αν έχουμε κινούμενα αντικείμενα για τα οποία οι μετασχηματισμοί αλλάζουν σε κάθε καρέ. Ο μετασχηματισμός των ακτίνων στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων των αντικειμένων, αντί για το αντίστροφο, διευκολύνει επίσης τη χρήση διαμέρισης χώρου για πολύπλοκα αντικείμενα. Αν τα αντικείμενα κινούνται μόνο λόγω γεωμετρικών μετασχηματισμών, δε χρειάζεται σε κάθε καρέ να επανυπολογίζουμε τις δομές που στηρίζουν τη διαμέριση χώρου. Τέλος, αν τα γεωμετρικά στοιχεία που χρησιμοποιούμε είναι μαθηματικές συναρτήσεις και παραμετρικά στερεά σώματα, μπορεί να αποβεί εξαιρετικά δύσκολο να επανα-παραμετροποιήσουμε την αναπαράστασή τους για να υπολογίσουμε τη νέα, μετασχηματισμένη έκδοσή τους. Αντίθετα, το να μετασχηματίσουμε την ακτίνα στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων που ορίστηκε αρχικά το γεωμετρικό στοιχείο είναι μια πολύ απλή διαδικασία.

Αν $\mathbf{M}$ είναι ο σύνθετος μετασχηματισμός ο οποίος εφαρμόζεται σ' ένα αντικείμενο μιας ιεραρχικής αναπαράστασης σκηνής (βλ. Ενότητα 9.2), τότε μπορούμε να εκτελέσουμε τον έλεγχο τομής της ακτίνας με το αντικείμενο στο τοπικό σύστημα αναφοράς του, αν πρώτα εφαρμόσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό πάνω στην ακτίνα:

$$\mathbf{q} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{q}' = \mathbf{M} \cdot \text{Object.RayIntersection}(\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{M}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{r}}), \tag{15.24}$$

όπου $\mathbf{q}$ είναι το σημείο τομής εκφρασμένο στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων της ακτίνας (συνήθως το ΣΣΚ) και $\mathbf{q}'$ είναι το σημείο τομής εκφρασμένο στο τοπικό σύ-

στημα συντεταγμένων του αντικειμένου, **p** είναι το σημείο εκκίνησης της ακτίνας και $\hat{\mathbf{r}}$ είναι η κατεύθυνση της ακτίνας. Συχνά, για στατικά τμήματα της σκηνής ή όταν η πρώτη ακτίνα επιχειρεί να ελεγχθεί με ένα αντικείμενο σ' ένα δεδομένο καρέ, υπολογίζεται και αποθηκεύεται ο αντίστροφος πίνακας μετασχηματισμού του αντικειμένου και στη συνέχεια επαναχρησιμοποιείται για όλες τις υπόλοιπες ακτίνες.

Για τα περιβάλλοντα κουτιά που είναι ευθυγραμμισμένα με τα αντικείμενα ή για άλλα συμμετρικά μαθηματικά στερεά, συχνά έχουμε στη διάθεσή μας απευθείας τους άξονες ($\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2, \hat{\mathbf{a}}_3$) και τις διαστάσεις τους (π.χ. από principal component analysis). Σε αυτές τις περιπτώσεις προϋπολογίζουμε και αποθηκεύουμε στον προσανατολισμένο όγκο το μετασχηματισμό που δημιουργεί το OBB από ένα μοναδιαίο κουτί ευθυγραμμισμένο με τους άξονες του κόσμου:

$$\mathbf{M}_{\text{OBV}} = \mathbf{T}_{\text{OBV}} \begin{bmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} & 0 \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} & 0 \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{S}_{\text{OBV}}, \tag{15.25}$$

όπου $\mathbf{T}_{\text{OBV}}$ είναι η μετατόπιση σύμφωνα με την αλλαγή κέντρου του όγκου και $\mathbf{S}_{\text{OBV}}$ είναι η αλλαγή κλίμακας για την προσαρμογή του όγκου στις τελικές του διαστάσεις.

15.5.3 Κατασκευαστική στερεά γεωμετρία

Ένα από τα ισχυρότερα σημεία της παρακολούθησης ακτίνων είναι η ικανότητά της να σχεδιάζει πολύ γρήγορα αντικείμενα που έχουν μοντελοποιηθεί με τελεστές συνόλων πάνω σε ομάδες από μαθηματικά στερεά. Η *Κατασκευαστική Στερεά Γεωμετρία* (Constructive Solid Geometry - CSG) είναι μια μέθοδος μοντελοποίησης που χρησιμοποιεί Boolean πράξεις πάνω σε μια δυαδική ιεραρχία από απλά στερεά, προκειμένου να παράξει νέα, πολυπλοκότερα στερεά σώματα. Η κλειστή επιφάνεια ενός στερεού που έχει κατασκευαστεί με CSG μπορεί να υπολογιστεί κατά τη διάρκεια της σχεδίασης, ή αφού οι τελεστές έχουν εφαρμοστεί στις συντεταγμένες των επιφανειών των αντικείμενων και έχουν παραχθεί πρώτα νέες, κατάλληλα διαμορφωμένες επιφάνειες. Στη δεύτερη περίπτωση, απαιτείται να γίνουν πράξεις πάνω σε δεδομένα επιφάνειας (π.χ. πολυγωνικά αντικείμενα), οι οποίες δεν είναι τετριμμένες και συχνά παρουσιάζουν σφάλματα αριθμητικής ακρίβειας. Στην παρακολούθηση ακτίνων, η τελεστές της ένωσης (A OR B), της τομής (A AND B) και της διαφοράς (A AND NOT B) αντιμετωπίζονται ως έλεγχοι ταξινόμησης για τα σημεία τομής. Αυτό σημαίνει πως το συνδυασμένο αποτέλεσμα μιας Boolean πράξης μεταξύ δύο στερεών υπολογίζεται αποδοτικά κατά την πραγματοποίηση της παρακολούθησης ακτίνων, χωρίς να χρειάζεται οποιαδήποτε επέμβαση πάνω στην ίδια τη γεωμετρία των στερεών. Καταρχήν, ας δούμε πως δουλεύει η κατασκευαστική στερεά γεωμετρία.

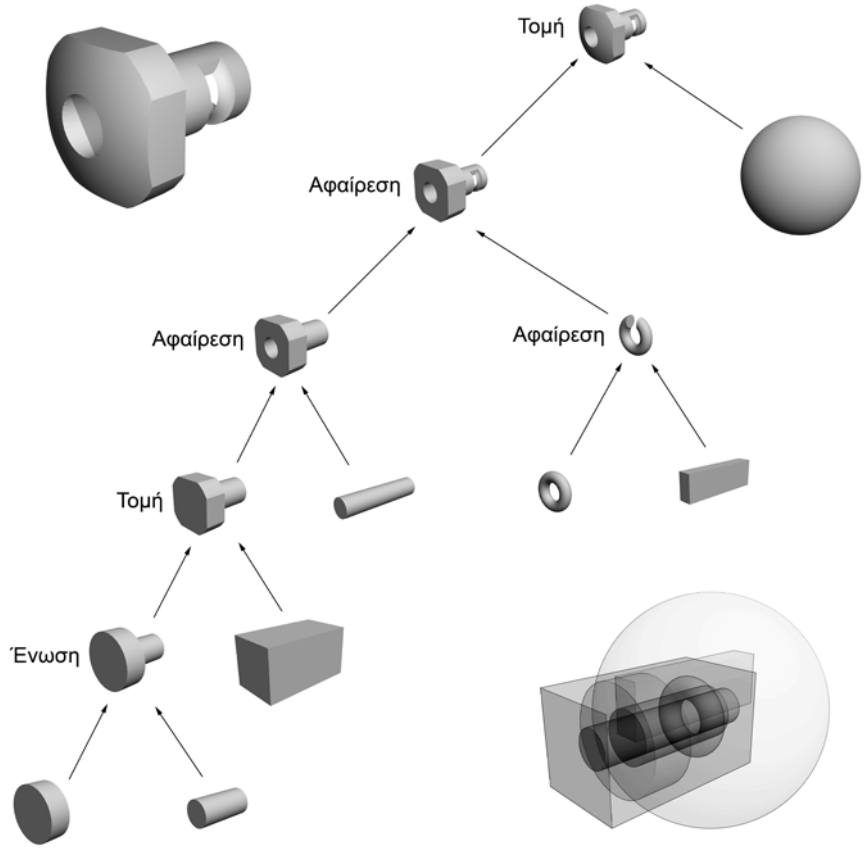
Στο Σχήμα 15.13, κατασκευάζουμε ένα πολύπλοκο στερεό μοντέλο από ένα σύνολο από απλά στερεά τα οποία είναι εύκολο να οριστούν με αναλυτικό τρόπο. Τα απλά αυτά σχήματα συνδυάζονται με λογικούς τελεστές, οι οποίοι είτε ενώνουν σχήματα είτε αποκόπτουν ανεπιθύμητα τμήματα αυτών. Σε πολλές περιστάσεις, η σειρά εκτέ-

λεσης των τελεστών μπορεί να τροποποιηθεί και να βελτιστοποιηθεί χωρίς να επηρεάσει τη μορφή του τελικού αποτελέσματος, αν και κάτι τέτοιο δεν ισχύει στη γενική περίπτωση. Τα στοιχειώδη στερεά σχήματα που χρησιμοποιούμε αλλά και οι ενδιάμεσοι συνδυασμοί αυτών που συμμετέχουν στο CSG μοντέλο απαρτίζουν ένα δυαδικό δένδρο, το δένδρο *CSG tree*. Σ' ένα τέτοιο δένδρο οι τελεστές Bool αποτελούν τους ενδιάμεσους κόμβους του, δηλαδή τους κόμβους CSG. Κάθε CSG κόμβος συνδυάζει δύο υποδένδρα σ' ένα στερεό μοντέλο. Το αριστερό και δεξί υποδένδρο του μπορούν να περιέχουν μετασχηματισμούς ή οποιονδήποτε άλλο κόμβο ο οποίος τροποποιεί τις ιδιότητες των κόμβων σε χαμηλότερο επίπεδο. Από τη σκοπιά του δημιουργού, το δένδρο CSG κατασκευάζεται από κάτω προς τα πάνω, με το συνεχή συνδυασμό τομών, διαφορών και ενώσεων ομάδων στερεών.

Στην παρακολούθηση ακτίνων, αν τα στοιχειώδη στερεά του δένδρου CSG τα αντιμετωπίζαμε ως αυτόνομα αντικείμενα, θα αναζητούσαμε όλες τις τομές με τις επιφάνειές τους και θα προσδιορίζαμε ποια τομή βρίσκεται κοντινότερα στην αφετηρία της ακτίνας. Καθώς τα στερεά σχηματίζουν ζεύγη με εφαρμογή των τελεστών Bool, τα αντίστοιχα σημεία τομής από τα δύο στερεά σχηματίζουν ευθύγραμμα τμήματα (διαστήματα επί της ακτίνας), τα οποία βρίσκονται μέσα ή έξω από το δημιουργούμενο σύνθετο στερεό. Αν ένα τέτοιο τμήμα ακτίνας βρίσκεται εκτός του σύνθετου στερεού, τα άκρα του (σημεία τομής) πρέπει να απορριφθούν. Αν ένα σημείο τομής βρίσκεται εντός του όγκου του στερεού, τότε δεν παίζει ρόλο στη σχεδίαση και πρέπει επίσης να απορριφθεί. Τα μόνα σημεία τομής που πρέπει να διατηρήσουμε από τις τομές με τα δύο αντικείμενα του ζεύγους είναι αυτά που βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια του σύνθετου αντικειμένου. Επομένως, ένα βήμα συνδυασμού CSG μετατρέπεται σε ταξινόμηση σημείων τομής:

- Βρες όλες τις τομές μεταξύ ακτίνας και του αριστερού παιδιού του κόμβου CSG.
- Βρες όλες τις τομές μεταξύ ακτίνας και του δεξιού παιδιού του κόμβου CSG.
- Συνένωσε όλες τις τομές σε μια λίστα ταξινομημένη ως προς την απόσταση από την αφετηρία της ακτίνας.
- Επισήμανε κάθε σημείο ως εσωτερικό (IN), εξωτερικό (OUT) ή επιφανειακό (SURFACE), ανάλογα με το αν περιέχεται ή όχι στον αντίστοιχο δεξί ή αριστερό όγκο του στερεού.
- Ταξινόμησε κάθε σημείο ως IN, OUT, ή SURFACE για το σύνθετο στερεό, ανάλογα με τους κανόνες της λογικής πράξης που εφαρμόζεται στο συγκεκριμένο κόμβο CSG (βλ. Πίνακα 15.1).
- Επέστρεψε ως αποτέλεσμα της τομής της ακτίνας με το σύνθετο στερεό όλα τα επιφανειακά σημεία (SURFACE).

Ένα δένδρο CSG διασχίζεται αναδρομικά, από την κορυφή προς τα φύλλα (απλά στερεά). Αν ένας κόμβος εκφράζει σύνθεση (κόμβος CSG), ζητούνται τα σημεία τομής από τα δύο παιδιά του και η δομή της ακτίνας περνάει προς τα κάτω σε αυτά. Αν

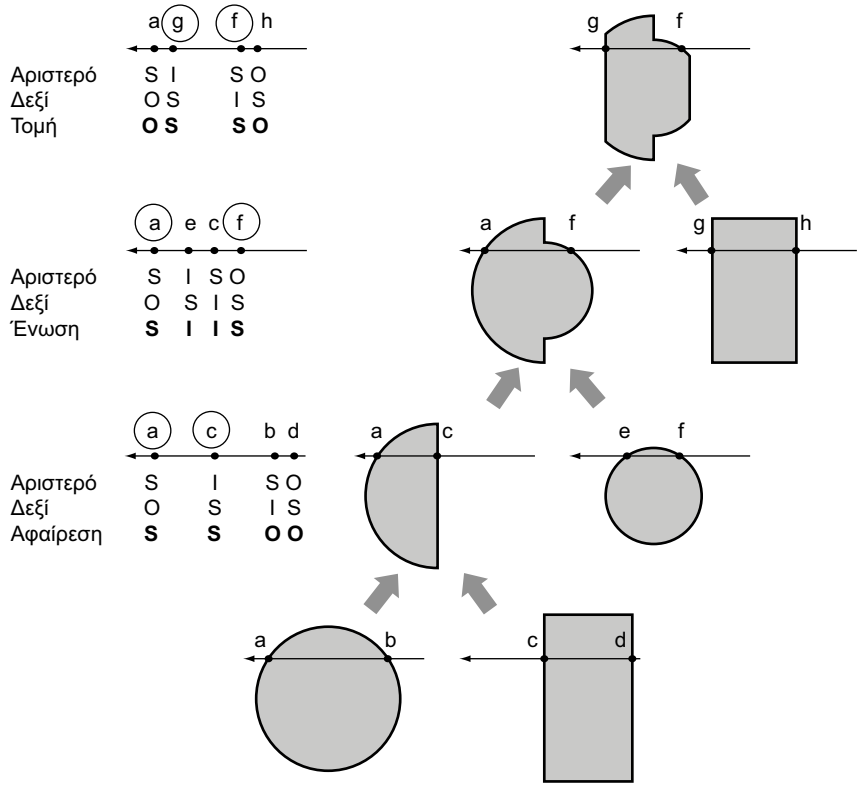


Σχήμα 15.13: *Παράδειγμα δένδρου CSG για τη δημιουργία ενός σύνθετου μοντέλου (πάνω αριστερά) από ένα σύνολο από απλά στερεά (κάτω δεξιά).*

μεσολαβούν γεωμετρικοί μετασχηματισμοί, η ακτίνα μετασχηματίζεται και εφαρμόζεται η ίδια διαδικασία για τον επόμενο χαμηλότερο κόμβο (βλ επίσης Ενότητα 15.5.2). Στη συνέχεια εφαρμόζονται τα παραπάνω βήματα και υπολογίζεται ένα νέο σύνολο από σημεία τομής. Αν ένας κόμβος είναι απλό στερεό (φύλλο του δένδρου), βρίσκεται η τομή του με την ακτίνα και επιστρέφονται όλα τα σημεία τομής στο παραπάνω επίπεδο.

Ο αλγόριθμος επιδεικνύεται στο Σχήμα 15.14. Δίπλα από κάθε κόμβο CSG παρουσιάζεται η λίστα των σημείων τομής που βρέθηκαν μαζί με τα αποτελέσματα της ταξινόμησής τους ανάλογα με τον τελεστή που εφαρμόζεται. Ανατρέξτε στον Πίνακα 15.1 για τους κανόνες ταξινόμησης.

Η ακτίνα περνάει στη ρίζα του δένδρου CSG (τομή) και μεταδίδεται αναδρομικά (πρώτα κατά βάθος) στα φύλλα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, ο πρώτος κόμβος CSG που μπορεί να υπολογιστεί πλήρως είναι ο κόμβος διαφοράς. Τα σημεία τομής **a**, **b** και **c**, **d** της ακτίνας με τη σφαίρα και το κουτί αντίστοιχα, υπολογίζονται από το αριστερό



Σχήμα 15.14: *Ταξινόμηση σημείων τομής ακτίνας με στερεό για τη σχεδίαση μοντέλων CSG με παρακολούθηση ακτίνων.*

και δεξί παιδί του κόμβου διαφοράς και επιστρέφονται στον κόμβο αυτό για ταξινόμηση. Στην αφαίρεση των δύο στερεών, διατηρούνται όλα τα σημεία επιφανείας του πρώτου τελεστέου (σφαίρα) τα οποία δεν αποκόπτονται από τον όγκο του δεύτερου τελεστέου (κουτί), καθώς συνεχίζουν να βρίσκονται πάνω στο περίβλημα του συνδυασμένου στερεού. Όλα τα σημεία τομής του δεύτερου τελεστέου που βρίσκονται έξω από τον όγκο του πρώτου τελεστέου απορρίπτονται, αφού αφαιρούνται από κενό χώρο. Τα επιφανειακά σημεία του δεύτερου όγκου που βρίσκονται μέσα στον όγκο του πρώτου παραμένουν (σημειώνονται ως SURFACE), αφού αποτελούν πια τα νέα όρια κοπής του πρώτου στερεού. Όλα τα σημεία που παρέμειναν, σημειώνονται ως επιφανειακά και επιστρέφονται στο παραπάνω επίπεδο ως τα σημεία τομής της ακτίνας με το συνδυασμένο στερεό του συγκεκριμένου υποδένδρου.

Στο επόμενο επίπεδο, ο κόμβος CSG είναι μια πράξη ένωσης. Εδώ, πρέπει να κρατήσουμε εκείνα τα σημεία τομής που ορίζουν τα μεγαλύτερα συνδυασμένα διαστήματα επί της ακτίνας (**a** και **f**). Συνεπώς, κρατάμε μόνο σημεία τύπου SURFACE του ενός στερεού τα οποία βρίσκονται έξω από τον όγκο του άλλου στερεού. Η τελευταία πράξη του παραδείγματος αφορά στην τομή δύο στερεών. Εδώ αναζητούμε σημεία τομής που φράσσουν διαστήματα επί της ακτίνας και διατρέχουν — ταυτόχρονα — το εσω-

Ένωση			
Διακλάδωση *Δεξιά* *Αριστερή*	IN	OUT	SURFACE
IN	IN	IN	IN
OUT	IN	OUT	SURFACE
SURFACE	IN	SURFACE	

Διαφορά			
Διακλάδωση *Δεξιά* *Αριστερή*	IN	OUT	SURFACE
IN	OUT	IN	SURFACE
OUT	OUT	OUT	OUT
SURFACE	OUT	SURFACE	

Τομή			
Διακλάδωση *Δεξιά* *Αριστερή*	IN	OUT	SURFACE
IN	IN	OUT	SURFACE
OUT	OUT	OUT	OUT
SURFACE	SURFACE	OUT	

Πίνακας 15.1: *Ταξινόμηση σημείων τομής για τις πράξεις Bool της κατασκευαστικής γεωμετρίας. Ο πίνακας απεικονίζει την κατάταξη ενός σημείου τομής κατά το συνδυασμό των δύο παιδιών ενός κόμβου ιεραρχίας CSG, ανάλογα με την κατηγορία του σημείου σε κάθε παιδί ξεχωριστά (προσαρμογή πίνακα από το [Wyvi95]).*

τερικό και των δύο στερεών. Κατατάσσουμε ως σημεία τύπου SURFACE τα σημεία του κελύφους του στερεού τα οποία βρίσκονται εντός του όγκου του άλλου στερεού και αντίστροφα (**g** και **f**). Όλα τα άλλα σημεία τομής που βρίσκονται στο εσωτερικό και των δύο όγκων είναι έγκυρα σημεία του τελικού στερεού, αλλά δε συμμετέχουν στο περίβλημά του.

15.6 Προβλήματα του αλγόριθμου παρακολούθησης ακτίνων

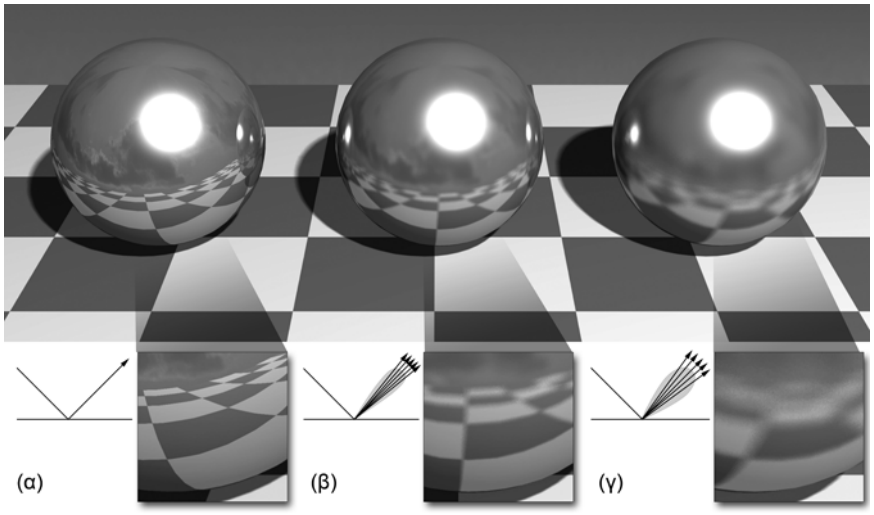
Συγκριτικά με τις μεθόδους άμεσης σχεδίασης, το μεγαλύτερο μειονέκτημα της παρακολούθησης ακτίνων είναι η χαμηλή της ταχύτητα. Παρά το γεγονός ότι ο βασικός αλγόριθμος παρακολούθησης ακτίνων επιταχύνεται σημαντικά με τις διάφορες τεχνικές βελτιστοποίησης των ελέγχων τομής ακτίνας-γεωμετρικών στοιχείων και τη διαμέριση, συνεχίζει να είναι πολλές τάξεις αργότερος από τους αλγόριθμους σάρωσης πολυγώνων. Οι τελευταίοι επιταχύνονται από το hardware και βασίζονται μόνο σε συνεκτικά τοπικά χαρακτηριστικά, εκτελώντας αυξητικούς υπολογισμούς στο χώρο της εικόνας. Από την άλλη πλευρά, η παρακολούθηση ακτίνων είναι πολύ εύκολα παραλ-

ληλοποιήσιμη, τόσο σε επίπεδο διαμέρισης εικόνας, όσο και σε επίπεδο παράλληλης εκτέλεσης τομών των ακτίνων με τη γεωμετρία. Τα τελευταία χρόνια γίνεται αρκετή έρευνα πάνω στην εκμετάλλευση της προγραμματιζόμενης σωλήνωσης του hardware γραφικών για την προσέγγιση τουλάχιστον των πρώτων αναδρομικών βημάτων της παρακολούθησης ακτίνων, είτε με άμεση σχεδίαση (βλ. για παράδειγμα [Wald01]) είτε με επίλυση τομών με ακτίνες στη GPU. Αυτές οι υβριδικές μέθοδοι, μαζί με παράλληλες υλοποιήσεις σε λογισμικό και hardware [Schm02, Wald02] επιταχύνουν σημαντικά την παρακολούθηση ακτίνων, επιτυγχάνοντας πολλές φορές διαδραστικά επίπεδα ρυθμού σχεδίασης καρέ για απλές σκηνές.

Εκτός από το θέμα της ταχύτητας, τα υπόλοιπα ζητήματα στα οποία ο αλγόριθμος παρακολούθησης ακτίνων δεν αποδίδει ικανοποιητικά αφορούν στην ποιότητα της εικόνας και στο ρεαλισμό της απόδοσης μιας σκηνής. Με την εισαγωγή της παρακολούθησης ακτίνων ως μεθόδου σύνθεσης εικόνων, μπορούσαν πια να αποδοθούν ανακλάσεις, σκιές και διαθλώμενο φως μέσα από διαφανή αντικείμενα, ξεπερνώντας την μέχρι εκείνη τη στιγμή αδιάφορη και φτωχή όψη της άμεσης σχεδίασης με χρήση μόνο τοπικών μοντέλων φωτισμού. Οι εικόνες απέκτησαν μια ζωντανή, γυαλιστερή και καθαρή όψη, η οποία βελτίωσε κατά πολύ την πειστικότητα των εικονιζόμενων θεμάτων. Ή μήπως η όψη των πραγμάτων έγινε τελικά υπερβολικά καθαρή και γυαλιστερή;

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 12, οι επιφάνειες των πραγματικών αντικειμένων — ανάλογα με την ομαλότητά τους — διαθέτουν ανωμαλίες στο ανάγλυφό τους. οι ανωμαλίες αυτές σκεδάζουν το προσπίπτον φως προς διάφορες κατευθύνσεις οι οποίες διαφέρουν από την κατεύθυνση της τέλειας ανάκλασης. Για τον υπολογισμό της κατοπτρικής ανάκλασης (specular highlight), αυτή η μορφολογία της μικρο-δομής των επιφανειών λαμβάνεται υπόψη, ωστόσο θα έπρεπε κανονικά να εφαρμόζεται και στην παρακολούθηση των ακτίνων ανάκλασης και διάθλασης. Οι εικόνες που υπολογίζονται από το βασικό αλγόριθμο παρακολούθησης ακτίνων διαθέτουν υπερβολικά ευκρινείς ανακλάσεις και διαθλάσεις, εξαιτίας του γεγονότος ότι για κάθε σημείο τομής ακτίνας με επιφάνεια γεννιέται μόνο άλλη μια ακτίνα (Σχήμα 15.15(α)). Το υλικό των επιφανειών στο βασικό αλγόριθμο παρακολούθησης ακτίνων θεωρείται ιδανικά λείο στην περιοχή του σημείου τομής. Συνεπώς, προσπίπτον φως από μια κατεύθυνση ελαφρώς διαφορετική από αυτή της τέλειας ανάκλασης ή διάθλασης — του οποίου ποσοστό θα έφτανε στον παρατηρητή σε μια πραγματική επιφάνεια — δεν πρόκειται να φανεί σε μια εικόνα από παρακολούθηση ακτίνων. Αυτή η υπερ-ρεαλιστική απόδοση των ανακλαστικών και διάφανων αντικειμένων είναι το χαρακτηριστικό γνώρισμα του βασικού αλγόριθμου παρακολούθησης ακτίνων και κάνει τις εικόνες να μοιάζουν πολύ «γυαλισμένες». Σ' ένα πραγματικό περιβάλλον, είτε αυτό ήταν φυσικό είτε δημιούργημα του ανθρώπου, δε θα συναντούσαμε ποτέ μια τέτοια εικόνα.

Μια δεύτερη παρενέργεια του γεγονότος ότι αποστέλλεται μόνο μια ακτίνα από το σημείο τομής είναι ότι δε μπορούμε να παραστήσουμε απαλές σκιές οι οποίες απαντώνται πολύ συχνά σ' ένα πραγματικό περιβάλλον, λόγω της παρουσίας πηγών μη αμελητέου μεγέθους (area lights). Στο βασικό αλγόριθμο, οι ακτίνες σκιών, είτε φτάνουν στην πηγή χωρίς παρεμπόδιση είτε δε φτάνουν καθόλου, έχοντας ως συνέπεια τη



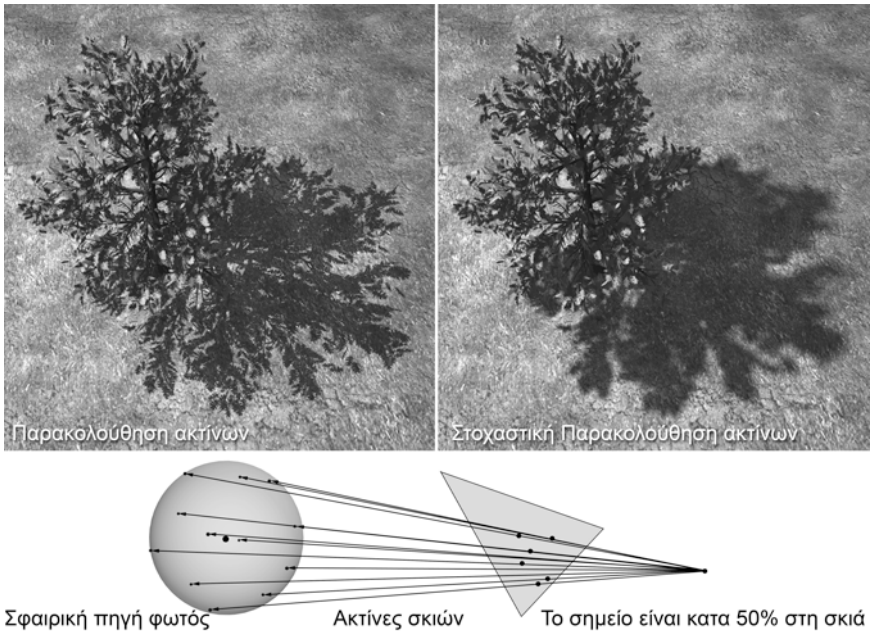
Σχήμα 15.15: *Κατανεμημένη παρακολούθηση ακτίνων. (α) Στον απλό αλγόριθμο παρακολούθησης ακτίνων, η αντανάκλαση του περιβάλλοντος πάνω σε αντικείμενα δείχνει υπερβολικά καθαρή. (β) Αν σταλούν πολλαπλές ακτίνες που έχουν εκτραπεί σε σχέση με την αρχική διεύθυνση, σύμφωνα με μια στοχαστική διαδικασία, προσομοιώνεται η ανώμαλη επιφάνεια (μικρο-δομή) του ανακλαστικού μέσου και παράγεται μια ρεαλιστική εικόνα για το υλικό. (γ) Όπως και το (β) αλλά για λιγότερο γυαλισμένη επιφάνεια.*

δημιουργία μόνο σκληρών σκιών (Σχήμα 15.16(α)).

Στην παρακολούθηση ακτίνων, όπως και στην περίπτωση της άμεσης σχεδίασης, ο έμμεσος φωτισμός μιας επιφάνειας λόγω της διάχυτης ανάκλασης του φωτός σε άλλες επιφάνειες θεωρείται σταθερός και ενσωματώνεται στη συνιστώσα ambient. Πιο εξελιγμένα μοντέλα ολικού φωτισμού, τα οποία προσεγγίζουν καλύτερα την εξίσωση φωτισμού [Kaji86b], υπολογίζουν και αυτόν τον όρο και προσομοιώνουν και άλλα φαινόμενα που λείπουν από την απλή παρακολούθηση ακτίνας, όπως οι καυστικές ακτίνες (caustics). Μπορείτε να ανατρέξετε στο Κεφάλαιο 16 για περισσότερες λεπτομέρειες.

15.7 Κατανεμημένη παρακολούθηση ακτίνων⊛

Μια σημαντική πρόοδος, από πλευράς ποιότητας σε σχέση με τον βασικό αλγόριθμο παρακολούθησης ακτίνων, ήρθε με με την *κατανεμημένη παρακολούθηση ακτίνων* ή αλλιώς, τη *στοχαστική παρακολούθηση ακτίνων* (distributed/stochastic ray tracing - βλ. επίσης Κεφάλαιο 16 για περισσότερες λεπτομέρειες). Στην κατανεμημένη παρακολούθηση ακτίνων, αντί να δειγματοληπτούμε την εισερχόμενη ενέργεια σ' ένα σημείο από μία κατεύθυνση — όπως στο βασικό αλγόριθμο παρακολούθησης ακτίνας — εκπέμπουμε πολλαπλές ακτίνες κατανεμημένες μέσα σε μια στερεά γωνία, η οποία είναι κεντραρισμένη γύρω από την κύρια κατεύθυνση μετάδοσης [Cook84, Cook86]. Πρόκειται για μια Monte Carlo προσέγγιση του ολοκληρώματος της ενέργειας που συνεισφέρει στην αύξηση της φωτεινότητας πάνω στο μονοπάτι που οδηγείται από το μάτι



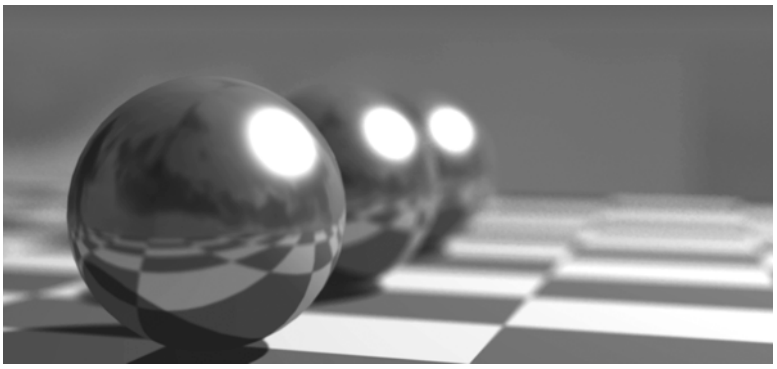
Σχήμα 15.16: *Απαλές σκιές χρησιμοποιώντας κατανεμημένες ακτίνες σκιών πάνω σε μια σφαιρική πηγή φωτός.*

του παρατηρητή προς τη σκηνή. Αυτή η μέθοδος αυξάνει δραματικά την ποιότητα του αποτελέσματος, αυξάνοντας όμως μαζί και το χρόνο σχεδίασης, ο οποίος αναλώνεται στην εύρεση των τομών των κατά πολύ περισσότερων ακτίνων με τη σκηνή.

Η κατανεμημένη παρακολούθηση ακτίνων βελτιώνει την όψη των συνθετικών εικόνων με διάφορους τρόπους. Για ανακλώμενα ή διαθλώμενα μονοπάτια (ακτίνες), επιτυγχάνεται το ρεαλιστικό θόλωμα των ανακλώμενων/διαθλώμενων εικόνων πάνω στις επιφάνειες, οι οποίες δεν είναι γενικά ιδανικές, εκπέμποντας πολλαπλές αποκλίνουσες ακτίνες σε σχέση με την ιδανική διεύθυνση μετάδοσης (Σχήμα 15.15(α) και (β)). Η μέγιστη απόκλιση των ακτίνων καθορίζεται από την τραχύτητα του υλικού.

Το στάδιο δημιουργίας σκιών του βασικού αλγορίθμου επεκτείνεται κατά την ίδια λογική στην κατανεμημένη παρακολούθηση ακτίνων και μπορεί πλέον να υποστηρίξει πηγές φωτός οποιουδήποτε σχήματος και μεγέθους. Θυμηθείτε από την Ενότητα 13.2 ότι η παρασκιά εμφανίζεται σε περιοχές μιας επιφάνειας στις οποίες φτάνει φως από μόνο ένα τμήμα της πηγής, καθώς το υπόλοιπο φως παρεμποδίζεται από ενδιάμεσα αντικείμενα. Αντί να υπολογίζουμε με αναλυτικό τρόπο την ακριβή ορατότητα της μη σημειακής πλέον πηγής σε σχέση με το σκιαζόμενο σημείο, αποστέλλουμε ακτίνες από αυτό προς τυχαία επιλεγμένα σημεία πάνω στην επιφάνεια της φωτεινής πηγής (Σχήμα 15.16). Έτσι πραγματοποιούμε μια Monte Carlo προσέγγιση του ολοκληρώματος της ορατότητας πάνω στη στερεά γωνία από το φωτιζόμενο σημείο προς την πηγή.

Η κατανεμημένη παρακολούθηση ακτίνων μπορεί να βελτιώσει και το πρώτο στάδιο της εκπομπής ακτίνων. Η συμβατική παρακολούθηση ακτίνων βασίζεται στο ι-



Σχήμα 15.17: *Προσομοίωση της απώλειας εστίασης χρησιμοποιώντας πολλαπλές ακτίνες ανά εικονοστοιχείο και ένα μη ιδανικό μοντέλο κάμερας (μη μηδενική διατομή ανοίγματος).*

δανικό μοντέλο κάμερας με σημειακό άνοιγμα, προκειμένου να εκπέμψει πολλαπλές ακτίνες από το επίπεδο προβολής, οι οποίες διέρχονται από το κέντρο του κάθε εικονοστοιχείου. Αποστέλλοντας περισσότερες ακτίνες ανά εικονοστοιχείο, μπορούν να προσομοιωθούν πιο σύνθετα μοντέλα κάμερας και φαινόμενα που σχετίζονται με τη διάδοση του φωτός μέσα από πραγματικούς φακούς με ένα ή περισσότερα στοιχεία [Cook84, Kolb95]. Αυτά τα προηγμένα μοντέλα παράγουν εικόνες με απώλεια εστίασης βάθους πεδίου και παραμορφώσεις, μοιάζοντας σαν να προέκυψαν από μια αληθινή κάμερα (Σχήμα 15.17). Για μοντέλα με φακούς πολλαπλών στοιχείων, επιλέγεται ένας αριθμός από σημεία πάνω στο στοιχείο του φακού ο οποίος βρίσκεται πλησιέστερα στο επίπεδο προβολής (εικονικός αισθητήρας) και για καθένα από αυτά παρακολουθείται μια ακτίνα. Χρησιμοποιώντας το νόμο του Snell, οι ακτίνες μεταδίδονται μέσα από τα πολλαπλά στοιχεία του φακού και τελικά εκπέμπονται προς τη σκηνή με την υπολογισμένη κατεύθυνση εξόδου από το τελευταίο στοιχείο. Τέλος, η μέση τιμή της έντασης απ' όλες τις ακτίνες καταγράφεται ως το χρώμα του εικονοστοιχείου.

Να σημειωθεί πως όταν υπολογίζουμε το μέσο όρο από πολλαπλές ακτίνες που αποστέλλονται μέσα από ένα εικονοστοιχείο, στην ουσία εκτελούμε και αντιταύτιση ανά εικονοστοιχείο. Αν χρησιμοποιούμε το μοντέλο της ιδανικής κάμερας, αντί να διαδώσουμε μία ακτίνα από το κέντρο του εικονοστοιχείου, χρησιμοποιούμε πολλαπλά δείγματα επιλέγοντας τυχαία σημεία μέσα στην περιοχή που καταλαμβάνει το εικονοστοιχείο στο επίπεδο προβολής. Τα δείγματα φωτεινότητας που παράγονται, συνδυάζονται με ένα βεβαρημένο άθροισμα, χρησιμοποιώντας συνήθως κάποια κατανομή ανάλογα με τη σημαντικότητα του δείγματος.

Η αντιταύτιση με υπερδειγματοληψία στην παρακολούθηση ακτίνων — όπως αυτή που είδαμε παραπάνω — μπορεί να πραγματοποιηθεί με προσαρμοστικό τρόπο. Η απόφαση για το αν απαιτούνται επιπρόσθετα δείγματα μπορεί να βασιστεί είτε στη σύγκριση τιμών φωτεινότητας σε γειτονικά εικονοστοιχεία είτε στη σύγκριση πολλαπλών δειγμάτων μέσα στο ίδιο εικονοστοιχείο. Επιπρόσθετες ακτίνες εκπέμπονται εφόσον η διαφορά φωτεινότητας υπερβεί ένα προκαθορισμένο κατώφλι.

Όπως άλλωστε σε κάθε μέθοδο που χρησιμοποιεί ολοκλήρωση Monte Carlo, η

επιλογή της συνάρτησης κατανομής των ακτίνων και η βαρύτητα της κάθε ακτίνας παίζει σημαντικό ρόλο στην ποιότητα και τις επιδόσεις της κατανεμημένης παρακολούθησης ακτίνων [Glas95, Cook86]. Για παράδειγμα, όταν δημιουργούμε πολλαπλές ακτίνες από ένα σημείο για να παρακολουθήσουμε το ανακλώμενο φως, η κατανομή των ακτίνων εξαρτάται από το μοντέλο κατοπτρικής ανάκλασης του υλικού.

15.8 Ασκήσεις

1. Σχολιάστε την αποδοτικότητα της ομοιόμορφης διαμέρισης χώρου για επιτάχυνση της μεθόδου παρακολούθησης ακτίνων, αναφορικά με την ανάλυση της υποδιαίρεσης και το μέγεθος κάθε κελιού. Πώς η τεχνική του mail boxing βελτιώνει την απόδοση του σχήματος διαμέρισης αυτού;

2. Τροποποιήστε το βασικό αλγόριθμο παρακολούθησης ακτίνων έτσι ώστε να υποστηρίζει στοχαστική (κατανεμημένη) παρακολούθηση για τις μεταδιδόμενες και ανακλώμενες ακτίνες, όπως και για τις ακτίνες σκιών. Απομονώστε τη διαδικασία της πολλαπλής δειγματοληψίας και παραμετροποιήστε την έτσι, ώστε να δέχεται ένα δείκτη σε μια οποιαδήποτε συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (αλγόριθμος υπολογισμού του νέου δείγματος με κάποιο πιθανοτικό μοντέλο και εξαγωγή της πιθανότητας να εμφανιστεί η συγκεκριμένη τιμή). Στη συνέχεια, πειραματιστείτε με διάφορες κατανομές ακτίνων, περνώντας ως όρισμα μια διαφορετική κάθε φορά γεννήτρια δειγμάτων.

3. Υλοποιήστε έναν αλγόριθμο παρακολούθησης ακτίνων για κατασκευαστική γεωμετρία με βάση ιεραρχίες από μετασχηματισμένες σφαίρες, παραλληλεπίπεδα, άπειρους κυλίνδρους, κώνους και επίπεδα (ημιχώρους).

16

Αλγόριθμοι ολικού φωτισμού

P. Dutré

Το μυστικό του να ζωγραφίζεις σκιές είναι να συλλάβεις
πόσο φως φτάνει μέσα στην επιφάνεια που καταλαμβάνουν.
—William Hook

16.1 Εισαγωγή

Οι αλγόριθμοι ολικού φωτισμού ασχολούνται με το ρεαλιστικό υπολογισμό της μετάδοσης του φωτός μέσα σε μια τριδιάστατη σκηνή. Εκτός από τον άμεσο φωτισμό, υπολογίζεται και ο έμμεσος φωτισμός, δηλαδή το φως που φτάνει σ' ένα σημείο μέσω διαδοχικών αναπηδήσεων σε άλλες επιφάνειες. Οι εικόνες που παράγονται από μια τέτοια διαδικασία είναι ακριβείς φωτομετρικά και άρα, φωτορεαλιστικές.

Προκειμένου να φτάσουν σ' ένα φωτορεαλιστικό επίπεδο απόδοσης, οι υπολογισμοί ολικού φωτισμού είναι απαραίτητο να σέβονται τους φυσικούς νόμους που διέπουν τη μετάδοση του φωτός, καθ' όλη τη σωλήνωση σύνθεσης της εικόνας. Αυτό σημαίνει ότι οι ανακλαστικές ιδιότητες όλων των υλικών περιγράφονται από κατάλληλα υπολογισμένες συναρτήσεις κατανομής αμφίδρομης ανακλαστικότητας (BRDF), οι πηγές φωτός είναι εκφρασμένες με πραγματικές ραδιομετρικές ποσότητες, η μεταφορά του φωτός μέσα στη σκηνή υπολογίζεται με ακρίβεια και τα χρώματα της εικόνας απεικονίζονται με τη σωστή απόδοση τονικότητας.

Αυτό το κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στις εξισώσεις που διέπουν τη μετάδοση του φωτός και στα μαθηματικά εργαλεία που απαιτούνται για τον υπολογισμό μιας λύσης για τον ολικό φωτισμό της σκηνής.

16.2 Φυσική της αλληλεπίδρασης φωτός-αντικειμένων II

16.2.1 Η εξίσωση φωτισμού

Η *εξίσωση φωτισμού* (*rendering equation*) είναι η θεμελιώδης σχέση για οποιονδήποτε αλγόριθμο φωτορεαλιστικής σύνθεσης εικόνων. Εκφράζει την ισορροπία της

κατανομής του φωτός σε μια τριδιάστατη σκηνή, λαμβάνοντας υπόψη τα φωτομετρικά χαρακτηριστικά των πηγών φωτός και την BRDF όλων των υλικών. Στη βασική μορφή της η εξίσωση φωτισμού δηλώνει ποιο είναι το ισοζύγιο μεταξύ εξερχόμενης λαμπρότητας από ένα σημείο επιφανείας προς μια κατεύθυνση, δεδομένης μιας κατανομής από εισερχόμενες τιμές λαμπρότητας προς το σημείο αυτό. Την αρχική μορφή της εξίσωσης φωτισμού τη μελέτησε και κατέγραψε πρώτος ο Kajiya [Kaji86b]. Οι σύγχρονες παραλλαγές της εξίσωσης διαφέρουν αρκετά σε σχέση με την εξίσωση φωτισμού που πρότεινε ο Kajiya.

Ολοκλήρωση λαμπρότητας επί ημισφαιρίου

Για να οδηγηθούμε στην εξίσωση φωτισμού μπορούμε να ξεκινήσουμε από τον ορισμό της BRDF σε ένα σημείο $\mathbf{x}$, η οποία εκφράζει την εξερχόμενη λαμπρότητα L_r στην κατεύθυνση (ϕ_r, θ_r) ως προς τον προσπίπτοντα φωτισμό E_i από την κατεύθυνση (ϕ_i, θ_i):

$$\begin{aligned} f_r(\phi_r, \theta_r, \phi_i, \theta_i) &= \frac{dL_r(\phi_r, \theta_r)}{dE_i(\phi_i, \theta_i)} \\ &= \frac{dL_r(\phi_r, \theta_r)}{L_i(\phi_i, \theta_i)\cos(\theta_i)d\omega_i}. \end{aligned} \tag{16.1}$$

Ξαναγράφοντας την προηγούμενη εξίσωση και ολοκληρώνοντάς την πάνω στο ημισφαίριο Ω_i όλων των δυνατών διαφορικών στερεών γωνιών $d\omega_i$ πάνω από το σημείο, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} dL_r(\phi_r, \theta_r) &= L_i(\phi_i, \theta_i) f_r(\phi_r, \theta_r, \phi_i, \theta_i)\cos(\theta_i)d\omega_i, \\ L_r(\phi_r, \theta_r) &= \int_{\Omega_i} L_i(\phi_i, \theta_i) f_r(\phi_r, \theta_r, \phi_i, \theta_i)\cos(\theta_i)d\omega_i. \end{aligned} \tag{16.2}$$

Η τελευταία έκφραση είναι απλά η ολοκληρωτική μορφή της BRDF, την οποία έχουμε δει μέχρι στιγμής ως διαφορική εξίσωση. Για να κάνουμε συνεπή την ολοκλήρωση, θα πρέπει να συμπεριλάβουμε έναν σταθερό όρο, ο οποίος αντιστοιχεί στην αυτόφωτη λαμπρότητα $L_e(\phi_r, \theta_r)$ του σημείου $\mathbf{x}$. Αυτός ο όρος θα είναι διάφορος του μηδέν μόνο για σημεία $\mathbf{x}$ που βρίσκονται πάνω σε φωτεινά σώματα (πηγές φωτός) της σκηνής.

Επομένως, η πλήρης εξίσωση φωτισμού που εκφράζει την εξερχόμενη λαμπρότητα L_r, δίνεται από τη σχέση:

$$L_r(\phi_r, \theta_r) = L_e(\phi_r, \theta_r) + \int_{\Omega_i} L_i(\phi_i, \theta_i) f_r(\phi_r, \theta_r, \phi_i, \theta_i)\cos(\theta_i)d\omega_i. \tag{16.3}$$

Αυτή η μορφή εξίσωσης είναι γνωστή ως μορφή Fredholm δεύτερου είδους, κατά την οποία η άγνωστη ποσότητα, η λαμπρότητα, εμφανίζεται τόσο στο αριστερό μέρος της εξίσωσης όσο και στο δεξιό, μέσα στο ολοκλήρωμα αυτής με μια συνάρτηση πυρήνα.

Ολοκλήρωση λαμπρότητας επί επιφανειών

Είναι δυνατό να ξαναγράψουμε την εξίσωση φωτισμού με τέτοιο τρόπο ώστε το ολοκλήρωμα να είναι ορισμένο επί όλων των ορατών επιφανειών του περιβάλλοντος από το σημείο που εξετάζουμε, αντί να ολοκληρώνουμε επί του ημισφαιρίου των κατευθύνσεων πρόσπτωσης. Αυτό επιτυγχάνεται μετασχηματίζοντας τη στερεά γωνία $d\omega_i$ στην αντίστοιχη διαφορική επιφάνεια dA. Έστω $\mathbf{y}$ το κοντινότερο ορατό σημείο επιφανείας ως προς το σημείο $\mathbf{x}$ προς την κατεύθυνση (ϕ_i, θ_i). Αν (ϕ_y, θ_y) είναι η κατεύθυνση από το σημείο $\mathbf{y}$ προς το $\mathbf{x}$, ενώ $r_{\mathbf{xy}}$ είναι η απόσταση μεταξύ του $\mathbf{x}$ και του $\mathbf{y}$, τότε:

$$d\omega_i = \frac{\cos(\theta_y)dA}{r_{\mathbf{xy}}^2}, \tag{16.4}$$

και η Εξίσωση (16.3) γίνεται

$$L_r(\phi_r, \theta_r) = L_e(\phi_r, \theta_r) + \int_{S_{\text{Visible}}} L_i(\phi_i, \theta_i) f_r(\phi_r, \theta_r, \phi_i, \theta_i) \frac{\cos(\theta_i)\cos(\theta_y)}{r_{\mathbf{xy}}^2} dA, \tag{16.5}$$

όπου το πεδίο ολοκλήρωσης S_{Visible} ορίζεται ως το σύνολο των ορατών επιφανειών από το σημείο $\mathbf{x}$.

Αφού η λαμπρότητα ως φωτομετρική ποσότητα παραμένει σταθερή πάνω σε μια ευθεία γραμμή, μπορούμε να εκφράσουμε την εισερχόμενη λαμπρότητα $L_i(\phi_i, \theta_i)$ στο σημείο $\mathbf{x}$ (την οποία γράφουμε $L_i(\mathbf{x}, \phi_i, \theta_i)$) ως την ισοδύναμη εξερχόμενη λαμπρότητα $L_r(\mathbf{y}, \phi_y, \theta_y)$ από το σημείο $\mathbf{y}$ προς την κατεύθυνση του σημείου $\mathbf{x}$:

$$L_i(\phi_i, \theta_i) = L_i(\mathbf{x}, \phi_i, \theta_i) = L_r(\mathbf{y}, \phi_y, \theta_y). \tag{16.6}$$

Στην Εξίσωση (16.5), το γινόμενο των δύο συνημιτονοειδών όρων διαιρεμένο με το τετράγωνο της απόστασης $r_{\mathbf{xy}}^2$ αποτελεί έναν όρο γεωμετρικής συσχέτισης ο οποίος εξαρτάται αποκλειστικά από τη σχετική τοποθέτηση των σημείων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ και δεν εμπεριέχει την κατανομή της λαμπρότητας ή τη BRDF των επιφανειών:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\cos(\theta_i)\cos(\theta_y)}{r_{\mathbf{xy}}^2}. \tag{16.7}$$

Αντικαθιστώντας όλα τα παραπάνω στην (16.5), παίρνουμε:

$$L_r(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r) = L_e(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r) + \int_{S_{\text{ίσιβλε}}} L_r(\mathbf{y}, \phi_y, \theta_y) f_r(\phi_r, \theta_r, \phi_i, \theta_i) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA. \tag{16.8}$$

Η Εξίσωση (16.8) είναι ισοδύναμη της Εξίσωσης (16.3). Αντί η ολοκλήρωση να γίνεται πάνω στο ημισφαίριο των κατευθύνσεων πρόσπτωσης, το πεδίο ολοκλήρωσης γίνεται όλο το σύνολο των ορατών σημείων. η μόνη διαφορά των δύο εξισώσεων είναι η αλλαγή μεταβλητής ολοκλήρωσης.

Ωστόσο, θα μας ενδιέφερε να γράψουμε την εξίσωση φωτισμού ως ένα ολοκλήρω-

μα πάνω σε όλες τις επιφάνειες και όχι μόνο στις ορατές από το σημείο **x**. Αυτό θα μας προσέφερε το πλεονέκτημα του να έχουμε ένα ενιαίο πεδίο ολοκλήρωσης, ανεξάρτητα από το σημείο **x** για το οποίο υπολογίζουμε την εξίσωση φωτισμού. Προκειμένου να επεκτείνουμε το πεδίο σε όλα τα σημεία των επιφανειών της σκηνής, χρειάζεται να εισάγουμε μια συνάρτηση ορατότητας $V(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Αυτή η συνάρτηση παίρνει την τιμή 1 όταν τα σημεία **x** και **y** είναι αμοιβαία ορατά, ενώ είναι μηδενική σε διαφορετική περίπτωση.

Η ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης φωτισμού επί επιφανειών γίνεται:

$$L_r(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r) = L_e(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r) + \int_S L_r(\mathbf{y}, \phi_y, \theta_y) f_r(\phi_r, \theta_r, \phi_i, \theta_i) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA, \tag{16.9}$$

όπου το πεδίο ολοκλήρωσης S περιλαμβάνει *όλα* τα σημεία **y** των επιφανειών της σκηνής.

Μια ειδική περίπτωση της ολοκληρωτικής μορφής επί επιφανειών της (16.9) προκύπτει όταν μας ενδιαφέρει μόνο ο άμεσος φωτισμός από μία ή περισσότερες πηγές φωτός. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την $L_r(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r)$ που προκαλείται από μία μόνο πηγή:

$$L_r(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r) = \int_{S_1} L_e(\mathbf{y}, \phi_y, \theta_y) f_r(\phi_r, \theta_r, \phi_i, \theta_i) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA, \tag{16.10}$$

όπου S_1 είναι η επιφάνεια της φωτεινής πηγής (Σχήμα 16.1).

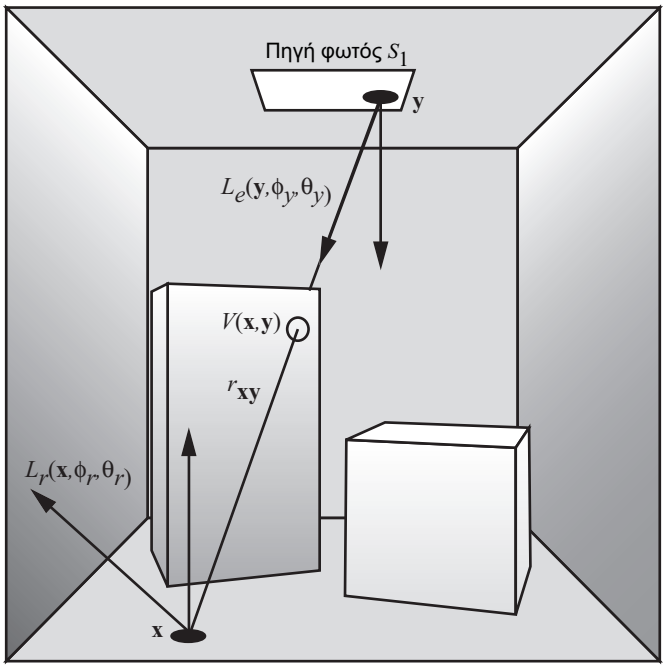
Αν στη σκηνή είναι παρούσες πολλαπλές πηγές φωτός, τότε μπορούμε να σπάσουμε το ολοκλήρωμα πάνω στη συνδυασμένη ορατή επιφάνεια σ' ένα άθροισμα ολοκληρωμάτων επί των επιφανειών της καθεμίας πηγής ξεχωριστά. Η ολική συνεισφορά των L πηγών φωτός γράφεται ως

$$L_r(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r) = \sum_{j=1}^{L} \int_{S_j} L_e(\mathbf{y}, \phi_y, \theta_y) f_r(\phi_r, \theta_r, \phi_i, \theta_i) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA. \tag{16.11}$$

Τόσο η Εξίσωση (16.10) όσο και η Εξίσωση (16.11) είναι σημαντικές στην υλοποίηση αλγορίθμων άμεσου φωτισμού, καθώς μας επιτρέπουν να χρησιμοποιήσουμε εξειδικευμένες μεθόδους ολοκλήρωσης ξεχωριστά για κάθε είδος πηγής φωτός, ώστε να μοντελοποιήσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια, κατά περίπτωση, το φωτισμό που αυτές προκαλούν.

Φωτισμός από εικόνα περιβάλλοντος φωτισμού

Μια τελευταία παραλλαγή της μοντελοποίησης για τον άμεσο φωτισμό μέσω της εξίσωσης φωτισμού, η οποία έχει γίνει αρκετά δημοφιλής τα τελευταία χρόνια, είναι η περίπτωση στην οποία η πηγή φωτός είναι κωδικοποιημένη ως εικόνα περιβάλλοντος φωτισμού (environment map) πάνω σε μια σφαίρα γύρω από τη σκηνή. Για κάθε



Σχήμα 16.1: *Άμεσος φωτισμός από μία πηγή φωτός.*

εισερχόμενη κατεύθυνση φωτισμού από το περιβάλλον προς τη σκηνή, ορίζεται μια τιμή εκπεμπόμενης λαμπρότητας $L_e(\phi_i, \theta_i)$ και υπολογίζουμε την ολική συνεισφορά επί ενός ημισφαιρίου προσανατολισμένου στην κατεύθυνση (ϕ_r, θ_r) του κανονικού διανύσματος των επιφανειών της σκηνής, ανεξάρτητα από τη θέση των σημείων:

$$L_r(\phi_r, \theta_r) = \int_{\Omega_i} L_e(\phi_i, \theta_i) f_r(\phi_r, \theta_r, \phi_i, \theta_i) \cos(\theta_i) d\omega_i. \tag{16.12}$$

Συνήθως, μια εικόνα περιβάλλοντος για φωτισμό δίνεται ως μια εικόνα μεγάλου δυναμικού εύρους (high dynamic range image) και μπορεί να περιέχει πάνω από ένα εκατομμύριο εικονοστοιχεία, το καθένα από τα οποία παριστάνει μια διαφορετική τιμή λαμπρότητας, προερχόμενη από μια διαφορετική κατεύθυνση του στερεώματος.

16.2.2 Διακριτή μορφή της εξίσωσης φωτισμού

Όλες οι παραλλαγές της εξίσωσης φωτισμού της προηγούμενης ενότητας εκφράζουν τιμές λαμπρότητας για μεμονωμένα σημεία και κατευθύνσεις. Για πολλές εφαρμογές, ενδέχεται να είναι πιο χρήσιμο να εκφράσουμε την ενέργεια ανά τμήμα επιφανείας (συνήθως διακριτά πολύγωνα) αντί για μεμονωμένα σημεία, και για όλο το ημισφαίριο των κατευθύνσεων εξερχόμενης ακτινοβολίας αντί για μια μεμονωμένη κατεύθυν-

ση. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τη μετατροπή της εξίσωσης φωτισμού σε διακριτή μορφή, κατά την οποία διαθέτουμε πλέον μια σχέση με πεπερασμένα στοιχεία για την ισορροπία ενέργειας μέσα στη σκηνή.

Η παραπάνω ισορροπία θα εκφραστεί με τη μορφή ενός γραμμικού συστήματος, κάθε εξίσωση του οποίου περιγράφει την εξισορρόπηση ενέργειας για ένα τμήμα επιφανείας. Η οικογένεια των τεχνικών που υλοποιούν αυτή την προσέγγιση είναι γνωστή ως *αλγόριθμοι radiosity*. Το όνομα «radiosity» διατηρείται κυρίως για ιστορικούς λόγους, αφού η οικογένεια αυτών των μεθόδων καλύπτει ένα ευρύ φάσμα τεχνικών πεπερασμένων στοιχείων που υπολογίζουν τον ολικό φωτισμό μιας σκηνής. Επιπλέον, δε χρησιμοποιούν όλοι οι αλγόριθμοι radiosity τη φωτομετρική ποσότητα *radiosity* (ακτινοβολία) για να εκφράσουν την ισορροπία ενέργειας· αρκετές παραλλαγές δουλεύουν απευθείας με την *ισχύ* (flux) ανά τμήμα επιφανείας.

Σε αυτή την ενότητα, θα αποδείξουμε τη διακριτή μορφή της εξίσωσης φωτισμού, κάνοντας πρώτα κάποιες παραδοχές σχετικά με τη φύση της σκηνής στην οποία την εφαρμόζουμε. Οι τεχνικές επίλυσης των διακριτών εξισώσεων φωτισμού παρουσιάζονται στην Ενότητα 16.6.

Οι πλέον κοινές παραδοχές για την εξαγωγή των εξισώσεων radiosity είναι οι ακόλουθες:

1. Όλες οι επιφάνειες της σκηνής υποδιαιρούνται σε τμήματα. Συνήθως, αυτά τα τμήματα είναι πολύγωνα που δεν πρέπει να ξεπερνούν ένα μέγιστο μέγεθος, χωρίς όμως να αποκλείονται άλλες μορφές τμημάτων επιφανείας (όπως υποδιαιρέσεις μιας spline επιφάνειας). Για κάθε τμήμα επιφανείας θεωρείται ότι η εξερχόμενη λαμπρότητα είναι παρεμφερής για όλα τα σημεία πάνω σε αυτό, έτσι, ώστε να μπορούμε να προσεγγίσουμε την ολική λαμπρότητα για το τμήμα επιφανείας παίρνοντας το μέσο όρο της λαμπρότητας των σημείων του. Για κάθε τμήμα επιφανείας ο αλγόριθμος θα υπολογίσει μόνο αυτή τη μέση τιμή λαμπρότητας.

2. Όλα τα τμήματα επιφανείας είναι τέλειοι σκεδαστές φωτός (Lambertian επιφάνειες – η BRDF του υλικού τους είναι σταθερή προς όλες τις κατευθύνσεις, βλ. Κεφάλαιο 12). Αυτό συνεπάγεται ότι ένα σημείο φαίνεται το ίδιο λαμπρό από οποιαδήποτε κατεύθυνση. Μαζί με την προηγούμενη προϋπόθεση, αυτό οδηγεί σ' έναν ολικό φωτισμό, στον οποίο κάθε τμήμα (πολύγωνο) διαθέτει μόνο μια μοναδική τιμή λαμπρότητας την οποία χρησιμοποιούν όλα τα σημεία του τμήματος επιφανείας. Είναι λοιπόν εφικτή η χρήση οποιουδήποτε αλγορίθμου άμεσης (διαδραστικής) σχεδίασης για την οπτικοποίηση του αποτελέσματος μετά την επίλυση του συστήματος. Αυτό είναι και το πιο χρήσιμο πλεονέκτημα των αλγόριθμων radiosity.

3. Οι πηγές φωτός θεωρούνται ότι είναι ομοιόμορφου φωτισμού (ίση ακτινοβολία προς όλες τις κατευθύνσεις). Παρότι αυτό δεν είναι απαραίτητος περιορισμός, εντούτοις απλοποιεί τις εξισώσεις και τις μεθόδους επίλυσης.

Το πρόβλημα radiosity ορίζεται ως η απλοποιημένη έκδοση της εξίσωσης φωτισμού για φωτισμό μόνο διάχυσης πάνω σε διακριτές επιφάνειες, κατά την οποία η ταυτόχρο-

νη επίλυση των εξισώσεων καταλήγει στην ισορροπία ενέργειας μέσα στο περιβάλλον της σκηνής.

Η *radiosity* (ακτινοβολία) B για ένα μεμονωμένο σημείο $\mathbf{x}$ ορίζεται ως ισχύς ανά μονάδα επιφανείας, ή, ισοδύναμα, ως ολική λαμπρότητα πάνω στο ημισφαίριο των εξερχόμενων κατευθύνσεων από το $\mathbf{x}$. Η *μέση* ακτινοβολία B_i που εκπέμπεται από το i-στο τμήμα επιφανείας με εμβαδόν A_i δίνεται επομένως από τη σχέση

$$B_i = \frac{1}{A_i} \int_{S_i} \int_{\Omega_\mathbf{x}} L_r(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r) \cos(\theta_r) d\omega_i dA, \tag{16.13}$$

όπου η $L_r(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r)$ για ένα σημείο $\mathbf{x}$ δίνεται από την εξίσωση φωτισμού (16.3).

Σε τέλεια σκεδαστικές επιφάνειες, η λαμπρότητα της εγγενούς φωτο-εκπομπής L_e, καθώς και η BRDF f_r δεν εξαρτώνται από τις κατευθύνσεις πρόσπτωσης και εξόδου της ενέργειας. Οπότε, η εξίσωση φωτισμού για το σημείο $\mathbf{x}$ μπορεί να γραφτεί ως

$$L_r(\mathbf{x}) = L_e(\mathbf{x}) + \int_{\Omega_x} L_i(\mathbf{x}, \phi_i, \theta_i) f_r(\mathbf{x}) \cos(\theta_i) d\omega_i. \tag{16.14}$$

Φυσικά η προσπίπτουσα λαμπρότητα $L_i(\mathbf{x}, \phi_i, \theta_i)$ εξακολουθεί να εξαρτάται από την κατεύθυνση εισόδου· αντιστοιχεί στην εξερχόμενη λαμπρότητα $L_r(\mathbf{y})$ που εκπέμπεται προς το $\mathbf{x}$ από ένα σημείο $\mathbf{y}$ το οποίο είναι ορατό από το $\mathbf{x}$ προς την κατεύθυνση (ϕ_i, θ_i). Όπως αναλύθηκε παραπάνω, το ολοκλήρωμα πάνω στο ημισφαίριο Ω_x μπορεί να μετασχηματιστεί σ' ένα ολοκλήρωμα πάνω σε όλες τις επιφάνειες τη σκηνής S. Το αποτέλεσμα είναι μια ολοκληρωτική μορφή που είναι απαλλαγμένη από κατευθυντική εξάρτηση:

$$L_r(\mathbf{x}) = L_e(\mathbf{x}) + f_r(\mathbf{x}) \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) L_r(\mathbf{y}) dA_\mathbf{y}. \tag{16.15}$$

Σ' ένα περιβάλλον όπου το φως μόνο διαχέεται, η ακτινοβολία και η λαμπρότητα σχετίζονται γραμμικά, αφού $B(\mathbf{x}) = \pi L_r(\mathbf{x})$ και $B_e(\mathbf{x}) = \pi L_e(\mathbf{x})$. Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση από δεξιά και αριστερά με π, παίρνουμε την ολοκληρωτική μορφή της *εξίσωσης radiosity*:

$$B(\mathbf{x}) = B_e(\mathbf{x}) + \frac{\rho(\mathbf{x})}{\pi} \int_S K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) B(\mathbf{y}) dA_\mathbf{y}, \tag{16.16}$$

όπου $\rho(\mathbf{x}) = \pi f_r(\mathbf{x})$ είναι η ανακλαστικότητα διάχυσης (επί ημισφαιρίου) στο διάστημα $[0, 1]$, ενώ ο πυρήνας $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ισούται με $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Η Εξίσωση (16.13) επομένως γίνεται:

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{1}{A_i} \int_{S_i} L_r(\mathbf{x}) \int_{\Omega_\mathbf{x}} \cos(\theta_r) d\omega_i dA \\ &= \frac{1}{A_i} \int_{S_i} L_r(\mathbf{x}) \pi dA \\ &= \frac{1}{A_i} \int_{S_i} B(\mathbf{x}) dA. \end{aligned} \tag{16.17}$$

Συχνά, οι ολοκληρωτικές μορφές εξισώσεων σαν την (16.16) επιλύονται μετατρέποντάς τες στο κατάλληλο σύστημα γραμμικών εξισώσεων με τη μέθοδο που είναι γνωστή ως διακριτοποίηση *Galerkin* [Delv85, Kres89, Cohe93, Sill94].

Έστω ότι η ακτινοβολία $B(\mathbf{x})$ είναι σταθερή σε όλο το i-στό τμήμα επιφανείας, δηλαδή $B(\mathbf{x}) = B'_i \forall \mathbf{x} \in S_i$. Η Εξίσωση (16.16) μπορεί τότε να μετατραπεί σε ένα γραμμικό σύστημα:

$$
\begin{aligned}
& B(\mathbf{x}) = B_e(\mathbf{x}) + \frac{\rho(\mathbf{x})}{\pi} \int_S K(\mathbf{x},\mathbf{y}) B(\mathbf{y}) dA_y \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{A_i} \int_{S_i} B(\mathbf{x}) dA_x = \frac{1}{A_i} \int_{S_i} B_e(\mathbf{x}) dA_x \\
& \qquad + \frac{1}{A_i} \int_{S_i} \int_S \frac{\rho(\mathbf{x})}{\pi} K(\mathbf{x},\mathbf{y}) B(\mathbf{y}) dA_y dA_x \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{A_i} \int_{S_i} B(\mathbf{x}) dA_x = \frac{1}{A_i} \int_{S_i} B_e(\mathbf{x}) dA_x \\
& \qquad + \sum_j \frac{1}{A_i} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\rho(\mathbf{x})}{\pi} K(\mathbf{x},\mathbf{y}) B(\mathbf{y}) dA_y dA_x \\
\Leftrightarrow \quad & B'_i = B_{ei} + \sum_j B'_j \frac{1}{A_i} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\rho(\mathbf{x})}{\pi} K(\mathbf{x},\mathbf{y}) dA_y dA_x .
\end{aligned}
$$

Επιπλέον εάν υποθέσουμε ότι η ανακλαστικότητα διάχυτου φωτισμού είναι σταθερή προς όλες τις κατευθύνσεις στο ημισφαίριο πάνω από τη στοιχειώδη επιφάνεια, δηλαδή, $\rho(\mathbf{x}) = \rho_i \forall \mathbf{x} \in S_i$, παίρνουμε ως αποτέλεσμα το ακόλουθο κλασικό σύστημα Radiosity:

$$
B'_i = B_{ei} + \rho_i \sum_j F_{ij} B'_j . \tag{16.18}
$$

Οι συντελεστές F_{ij} αποκαλούνται *συντελεστές αλληλεπίδρασης από επιφάνεια σε επιφάνεια* (*patch-to-patch form factors*):

$$
F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{K(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\pi} dA_y dA_x . \tag{16.19}
$$

Οι συντελεστές αλληλεπίδρασης εκφράζουν το ποσοστό της ενέργειας που μεταδίδεται από ένα τμήμα επιφανείας i σε ένα άλλο τμήμα j· είναι δε στη γενική περίπτωση ολοκληρώματα τεσσάρων διαστάσεων μη τετριμμένης μορφής. Εξαρτώνται αποκλειστικά από τη γεωμετρία της σκηνής και όχι από την ενέργεια των πηγών φωτός.

Να σημειωθεί πως η ακτινοβολία B'_i που προκύπτει μετά την επίλυση του συστήματος γραμμικών εξισώσεων (Εξίσωση (16.18)) είναι μόνο μια προσέγγιση της μέσης τιμής της ακτινοβολίας B_i του τμήματος επιφανείας. Η πραγματική τιμή της ακτινοβολίας $B(\mathbf{y})$ που αντικαταστάθηκε από την B'_j στις παραπάνω εξισώσεις δεν είναι στην πράξη κατά τμήματα σταθερή, όπως υποθέσαμε. Όμως η διαφορά μεταξύ B_i και B'_i είναι σπάνια ορατή και επομένως, τόσο η μέση ακτινοβολία (Εξίσωση (16.13)) όσο και οι συντελεστές ακτινοβολίας της Εξίσωσης (16.18) χρησιμοποιούνται εναλλάξ.

16.3 Ολοκλήρωση Monte Carlo

Ένα σημαντικό εργαλείο για την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης ολικού φωτισμού είναι η μέθοδος ολοκλήρωσης Monte Carlo, σύμφωνα με την οποία υπολογίζεται το ολοκλήρωμα με βάση μια σειρά από δείγματα επιλεγμένα με τυχαίο τρόπο μέσα από το πεδίο ολοκλήρωσης. Η ολοκλήρωση Monte Carlo έχει μακρά ιστορία στην αριθμητική ανάλυση και μια εκτενή περιγραφή των διαφόρων μεθόδων Monte Carlo μπορεί να βρει κανείς στα [Kalo86, Hamm64].

Η δύναμη της ολοκλήρωσης Monte Carlo έγκειται στην απλότητα και ευρωστία της. Σύμφωνα με τη μέθοδο, ένα ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί απλά, αν παράγουμε τυχαία σημεία στο πεδίο ολοκλήρωσης, υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα σε καθένα απ' αυτά και πάρουμε το μέσο όρο των αποτελεσμάτων. Η ευρωστία της μεθόδου Monte Carlo προκύπτει από το γεγονός ότι μπορεί να δουλέψει ανεξάρτητα από την πολυπλοκότητα της συνάρτησης που ολοκληρώνεται. Για παράδειγμα, η ολοκλήρωση Monte Carlo μπορεί να αντιμετωπίσει πολυδιάστατα ολοκληρώματα, ασυνεχή διαστήματα στο πεδίο ολοκλήρωσης, ή ασυνεχείς συναρτήσεις.

Το μειονέκτημα της μεθόδου είναι η σχετικά αργή σύγκλισή της. Επιλέγοντας N δείγματα από το πεδίο ολοκλήρωσης, αναμένουμε ένα ρυθμό σύγκλισης της τάξης $1/\sqrt{N}$. Κατά συνέπεια, έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές μείωσης της διασποράς των επιλεγμένων δειγμάτων, πολλές από τις οποίες είναι εξειδικευμένες για το χώρο των αλγορίθμων ολικού φωτισμού.

Έστω ότι ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε το ακόλουθο μονοδιάστατο ολοκλήρωμα, ορισμένο στο μοναδιαίο διάστημα $[0,1]$:

$$I = \int_0^1 f(x)dx. \tag{16.20}$$

Θα επιλέξουμε ομοιόμορφα N δείγματα $x_1, x_2, \ldots, x_N$ από το διάστημα $[0,1]$. Παίρνοντας το μέσο όρο των αποτελεσμάτων της συνάρτησης $f(x_i)$, καταλήγουμε σε μια εκτιμήτρια για το ολοκλήρωμα I:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i). \tag{16.21}$$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι η αναμενόμενη τιμή $E[\langle I \rangle]$ της $\langle I \rangle$ ισούται με την τιμή του ολοκληρώματος I:

$$\begin{aligned} E[\langle I \rangle] &= E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E\left[f(x_i)\right] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{N}\cdot N \cdot \int_0^1 f(x)dx \\ &= \int_0^1 f(x)dx = I. \end{aligned} \tag{16.22}$$

Με αυτό τον τρόπο, ορίσαμε μια στοχαστική διαδικασία της οποίας το αναμενό-

μενο αποτέλεσμα ισούται με την τιμή του ολοκληρώματος I που θα θέλαμε να υπολογίσουμε. Προφανώς κάθε ξεχωριστή εκτίμηση $\langle I \rangle$ θα δώσει διαφορετικό αποτέλεσμα, αλλά, *κατά μέσο όρο*, θα λάβουμε τη σωστή απάντηση.

Η διασπορά σ^2 του αποτελέσματος της παραπάνω στοχαστικής διαδικασίας, η οποία εκφράζει την έκταση του διαστήματος των δυνατών τιμών της εκτιμήτριας $\langle I \rangle$ γύρω από το αναμενόμενο αποτέλεσμα I, μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\begin{aligned}
\sigma^2[\langle I \rangle] &= \sigma^2 \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \right] \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \sigma^2 [f(x_i)] \\
&= \frac{1}{N^2} \cdot N \cdot \int_0^1 (f(x) - I)^2 dx \\
&= \frac{1}{N} \int_0^1 (f(x) - I)^2 dx.
\end{aligned} \tag{16.23}$$

Επομένως, όσο αυξάνει ο αριθμός των δειγμάτων N, η διασπορά σ^2 μειώνεται γραμμικά με το N. Η τυπική απόκλιση σ, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως το σφάλμα που εισάγεται κατά την εκτίμηση του ολοκληρώματος, μειώνεται αντίστοιχα κατά $1/\sqrt{N}$. Αυτό σημαίνει ότι αν θέλουμε να υποδιπλασιάσουμε το σφάλμα της μεθόδου, χρειαζόμαστε τετραπλάσια δείγματα κ.ο.κ. Αυτή η ταχύτητα σύγκλισης είναι τυπικά χαμηλότερη από την ταχύτητα άλλων μεθόδων αριθμητικής ολοκλήρωσης, αλλά δεν εξαρτάται από τον αριθμό των διαστάσεων του ολοκληρώματος. Η εκτίμηση της ίδιας της διασποράς μπορεί να γίνει με μια ξεχωριστή διαδικασία ολοκλήρωσης Monte Carlo, αλλά μπορεί να επαναχρησιμοποιήσει τα ίδια δείγματα x_i με τον υπολογισμό του I. Όμως, στη δεύτερη περίπτωση, χρειάζεται προσοχή για να μην παρουσιαστούν φαινόμενα συσχέτισης των δειγμάτων.

Γενικεύοντας στο πεδίο $[a, b]$ και χρησιμοποιώντας μια μη ομοιόμορφη πυκνότητα πιθανότητας $p(x)$ για την επιλογή των δειγμάτων, παίρνουμε τις ακόλουθες εκφράσεις για την εκτιμήτρια $\langle I \rangle$ και τη διασπορά σ^2:

$$\begin{aligned}
\langle I \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_i)}{p(x_i)}, \\
\sigma^2[\langle I \rangle] &= \frac{1}{N} \int_a^b \left(\frac{f(x)}{p(x)} - I\right)^2 dx.
\end{aligned} \tag{16.24}$$

Και πάλι, μπορεί να αποδειχθεί ότι η αναμενόμενη τιμή της $\langle I \rangle$ ισούται με την τιμή του ολοκληρώματος, ή $E(\langle I \rangle) = I$.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) $p(x)$ πρέπει να πληρεί δύο προϋποθέσεις:

1. Η τιμή της $p(x)$ πρέπει να είναι αυστηρά μεγαλύτερη του 0 για όλο το διάστημα ολοκλήρωσης $[a, b]$.

2. Το ολοκλήρωμα της $p(x)$ πρέπει να ισούται με 1: $\int_a^b p(x)dx = 1$.

Για την επιλογή δειγμάτων που να ακολουθούν την κατανομή $p(x)$, υπάρχουν πολλές τεχνικές. Με αναλυτικό τρόπο, χρειάζεται να υπολογιστεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής $P(x)$:

$$P(x) = \int_a^x p(y)dy. \tag{16.25}$$

Η $P(x)$ είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$ με $P(a) = 0$ και $P(b) = 1$. Αν παραχθεί ένας τυχαίος αριθμός t ομοιόμορφα στο διάστημα $[0, 1]$, τότε η κατανομή των τιμών $x = P^{-1}(t)$ ακολουθεί την κατανομή $p(x)$. Στην πράξη, η αντίστροφη αθροιστική πιθανότητα συχνά υπολογίζεται αριθμητικά από πριν και αποθηκεύονται τιμές της σ' έναν πίνακα, από τον οποίο είναι εύκολο στη συνέχεια να επιλέξουμε τιμές με δυαδική αναζήτηση. Το κύριο πλεονέκτημα της χρήσης μιας μη ομοιόμορφης pdf είναι ότι η διασπορά της ολοκλήρωσης — και κατά συνέπεια το σφάλμα της — μειώνεται. Σαν πρακτικό κανόνα, μπορούμε να έχουμε ότι όσο πιο πολύ μοιάζει η μορφή της pdf με τη συνάρτηση που ολοκληρώνουμε, τόσο πιο μικρή θα είναι η αναμενόμενη διασπορά.

Άλλες στρατηγικές για τη μείωση της διασποράς συνήθως προσανατολίζονται στην κατανομή των σημείων δειγματοληψίας στο πεδίο ολοκλήρωσης με χρήση τεχνικών όπως η επιλογή δειγμάτων από υποδιαστήματα (stratified sampling), η δειγματοληψία σε σχηματισμό N πύργων σε σκακιέρα (N-Rooks sampling), η δειγματοληψία με βάση τη σημαντικότητα των δειγμάτων, ή συνδυασμοί των παραπάνω. Οι [Kalo86] και [Hamm64] περιέχουν μια διεξοδική ανασκόπηση αυτών των μεθόδων.

Η πολυδιάστατη ολοκλήρωση Monte Carlo δουλεύει ακριβώς με τον ίδιο τρόπο με με τη μονοδιάστατη ολοκλήρωση. Συνεπώς, αν το ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι ορισμένο στο διάστημα $[a, b] \times [c, d]$, έχουμε:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \int_c^d f(x, y)dxdy, \\ \langle I \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_i, y_i)}{p(x_i, y_i)}. \end{aligned} \tag{16.26}$$

Το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου ολοκλήρωσης Monte Carlo είναι η απλότητα υλοποίησης και η ευρωστία της. Υπολογίζει μια λύση ανεξάρτητα από την πολυπλοκότητα της ολοκληρούμενης συνάρτησης ή τις διαστάσεις του πεδίου ολοκλήρωσης. Το μειονέκτημά της είναι ότι είναι πολύ δύσκολο να ελέγξουμε το σφάλμα που προκύπτει, καθώς δεν είναι συνήθως δυνατό να προβλέψουμε το άνω και κάτω φράγμα του.

16.4 Υπολογίζοντας τον άμεσο φωτισμό

Ο υπολογισμός του άμεσου φωτισμού με βάση τις διάφορες μορφές της εξίσωσης φωτισμού συνήθως εμπεριέχει μια ολοκλήρωση Monte Carlo. Σε αυτή την ενότητα περιγράφονται διάφορες προσεγγίσεις οι οποίες προϋποθέτουν ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ανακλώμενη λαμπρότητα από το σημείο τομής $\mathbf{x}$ μιας ακτίνας από τον

παρατηρητή και μιας επιφάνειας της σκηνής σύμφωνα με τον αλγόριθμο παρακολούθησης ακτίνων (βλ. Κεφάλαιο 15). Η κατεύθυνση ανάκλασης της λαμπρότητας θεωρείται από το σημείο τομής $\mathbf{x}$ προς τη θέση του παρατηρητή.

16.4.1 Μονή πηγή φωτός

Καταρχήν ας δούμε τι συμβαίνει με τον άμεσο φωτισμό από μια μοναδική φωτεινή πηγή (Εξίσωση (16.10)). Το πεδίο ολοκλήρωσης ορίζεται ως η επιφάνεια S_1 της πηγής φωτός, οπότε χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(\mathbf{y})$ που είναι ικανή να παράγει σημεία $\mathbf{y}_j$ πάνω σε όλη την επιφάνεια της πηγής. Αυτό οδηγεί στην ακόλουθη εκτιμήτρια για την τιμή της λαμπρότητας $L_r(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r)$ όταν χρησιμοποιούμε N σημεία δειγματοληψίας $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N\}$:

$$\langle L_r(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{L_e(\mathbf{y}_j, \phi_{y_j}, \theta_{y_j}) f_r(\phi_r, \theta_r, \phi_i, \theta_i) G(\mathbf{x}, \mathbf{y_j}) V(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j)}{p(\mathbf{y}_j)}. \quad (16.27)$$

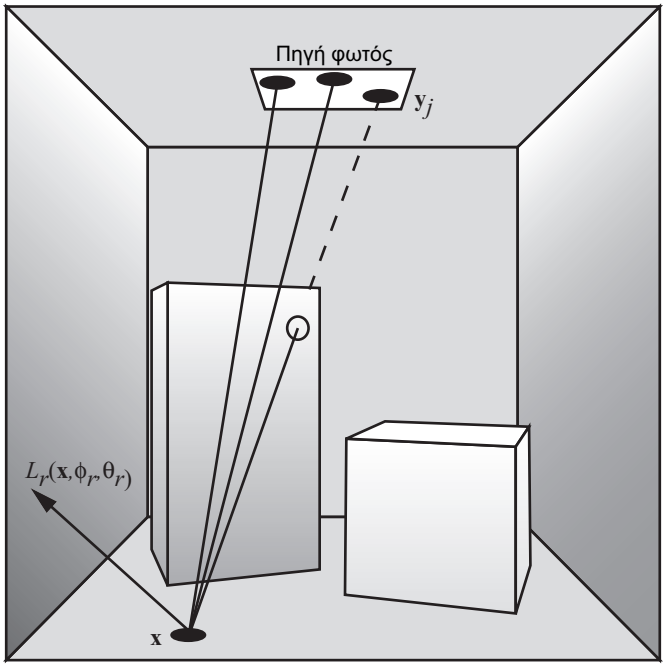
Η $p(\mathbf{y})$ είναι μια διδιάστατη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που πρέπει να παράγει δύο συντεταγμένες u και v, οι οποίες μπορούν να μετασχηματιστούν — με την κατάλληλη απεικόνιση — σ' ένα τριδιάστατο σημείο $\mathbf{y}$ στην επιφάνεια της πηγής. Αυτή η απεικόνιση συνήθως είναι ίδια με αυτή που χρησιμοποιείται στην απεικόνιση υφής (βλ. Ενότητα 14.3). Είναι σημαντικό η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας να είναι μη μηδενική, σε οποιοδήποτε σημείο πάνω στην πηγή φωτός, έτσι, ώστε να μην παραλείψουμε τμήματα της επιφάνειάς της και μεροληπτήσουμε κατά τη δειγματοληψία.

Η διαδικασία για τη δειγματοληψία του άμεσου φωτισμού από μια πηγή φαίνεται στο Σχήμα 16.2 και ο ψευδοκώδικας του αλγορίθμου δίνεται στον Αλγόριθμο 16.1. Από υπολογιστικής άποψης, η εύρεση της τιμής του όρου $V(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j)$ σημαίνει την εκπομπή μιας ακτίνας σκιών από το $\mathbf{x}$ προς το $\mathbf{y}_j$ και τον έλεγχο για το αν παρεμβάλλεται οποιαδήποτε άλλη επιφάνεια που εμποδίζει την ορατότητα μεταξύ των δύο σημείων.

Όπως μπορούμε να δούμε και στο Σχήμα 16.3, υπάρχουν σημαντικές διαφορές στη φωτεινότητα των εικονοστοιχείων που εμφανίζονται ως θόρυβος στην τελική εικόνα. Ο θόρυβος είναι μια αναπόφευκτη παρενέργεια οποιασδήποτε στοχαστικής διεργασίας, όπως η ολοκλήρωση Monte Carlo, αλλά μειώνεται προοδευτικά με την αύξηση των δειγμάτων.

Ο θόρυβος στην εικόνα οφείλεται σε διάφορους παράγοντες:

- Η συνάρτηση ορατότητας $V(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i)$ είναι συνήθως ο σημαντικότερος παράγοντας εισαγωγής θορύβου. Όταν η πηγή είναι ολόκληρη ορατή ($V(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i) = 1$ για όλα τα σημεία $\mathbf{y}_i$), ή πλήρως αποκλεισμένη από την οπτική γωνία του φωτοσκιαζόμενου σημείου $\mathbf{x}$ ($V(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i) = 0$ για όλα τα σημεία $\mathbf{y}_i$), τότε δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα. Όταν όμως το σημείο $\mathbf{x}$ βρίσκεται στην παρασκιά η οποία προκαλείται εξαιτίας της μερικής μόνο απόκρυψης της φωτεινής πηγής από κάποιο εμπόδιο, εμφανίζεται έντονη κοκκίδωση (βλ. Κεφάλαιο 13 σχετικά με

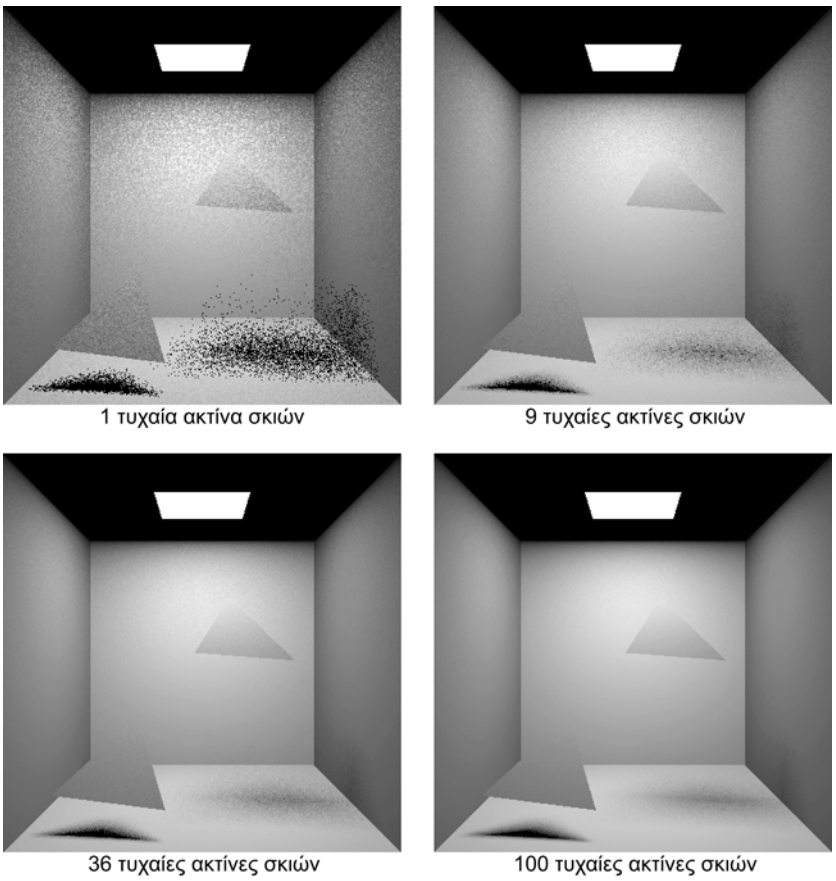


Σχήμα 16.2: *Δειγματοληψία μιας πηγής φωτός.*

τους ορισμούς περί δημιουργίας σκιών). Σε αυτή την περίπτωση, κάποια σημεία pty_i θα φαίνονται από το $\mathbf{x}$ και κάποια όχι. Αν χρησιμοποιούμε μόνο μια ακτίνα σκιών, αυτό σημαίνει πως η εκτιμώμενη λαμπρότητα μπορεί να γίνει ίση με 0 και συνεπώς να καταγραφεί ένα μαύρο εικονοστοιχείο ως αποτέλεσμα στην τελική εικόνα. Αύξηση του αριθμού των δειγμάτων (ακτινών σκιών) συνεπάγεται εξομάλυνση των απαλών σκιών (Σχήμα 16.3). Στην πράξη, ο αριθμός των δειγμάτων εξαρτάται από το μέγεθος της παρασκιάς.

- Ο όρος γεωμετρικής συσχέτισης $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i)$ (16.7) μπορεί κι αυτός να συνεισφέρει σημαντικά στο τυχαίο σφάλμα που εισάγεται στην τελική εικόνα. Ακόμα και αν δεν υπάρχουν θέματα ορατότητας των σημείων της πηγής, οι μεταβολές στα συνημίτονα του όρου ή τη διαίρεση με την απόσταση, μπορούν να προκαλέσουν σημαντικές διακυμάνσεις φωτεινότητας. Ειδικά αν η πηγή έχει μεγάλη επιφάνεια, για σημεία $\mathbf{x}$ κοντά σε αυτή, ο όρος $1/r_{\mathbf{xy}_i}$ μπορεί να πάρει οσοδήποτε μεγάλες τιμές, προκαλώντας τον υπερφωτισμό ορισμένων εικονοστοιχείων. Ο υπολογισμός του $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i)$ συνήθως δεν προκαλεί προβλήματα αν η πηγή είναι μικρή, αφού ο όρος αυτός τείνει να είναι σχεδόν σταθερός για όλα τα σημεία $\mathbf{y}_i$ πάνω στην επιφάνεια της πηγής.

- Όταν χρησιμοποιούμε κατευθυντικές (μη ομοιόμορφες) BRDF, η κατεύθυνση των ακτίνων σκιών (βλ. Κεφάλαιο 15) μπορεί να συμπίπτει ή να μη συμπίπτει με τους λοβούς κατοπτρικής ανακλαστικότητας. Αν οι τιμές της BRDF έχουν



Σχήμα 16.3: *Άμεσος φωτισμός από μια πηγή φωτός. Παρατηρήστε τη διαφορά στην ποιότητα της εικόνας όταν αυξάνει ο αριθμός των δειγμάτων (ακτίνων σκιών). (Δείτε ακόμα την Εικόνα 27.)*

μεγάλη διακύμανση μέσα στη στερεά γωνία που αντιστοιχεί στην επιφάνεια της πηγής φωτός, μπορεί να αυξηθεί ο θόρυβος στην εικόνα.

- Θεωρητικά, μπορούμε να διαλέξουμε οποιαδήποτε έγκυρη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(\mathbf{y})$ για τον υπολογισμό της $\langle L_r(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r)\rangle$. Όμως η $p(\mathbf{y})$ είναι συνήθως ομοιόμορφη πάνω στην επιφάνεια της πηγής και γι' αυτό το λόγο δεν επηρεάζει την κατανομή του θορύβου στην εικόνα.

16.4.2 Πολλαπλές πηγές φωτός

Όταν έχουμε να υπολογίσουμε άμεσο φωτισμό σε περιβάλλοντα με πολλαπλές πηγές, μπορούμε να ακολουθήσουμε δύο τακτικές· η καθεμία με τα δικά της πλεονεκτήματα. Η πρώτη προσέγγιση συνυπολογίζει την κάθε πηγή χωριστά για το φωτισμό ενός σημείου, ενώ η δεύτερη ομαδοποιεί όλες τις πηγές σ' ένα ενιαίο πεδίο ολοκλήρωσης.

```
// άμεσος φωτισμός από μία πηγή φωτός
// για ένα σημείο x, και κατεύθυνση phi, theta
directIllumination (x, phi, theta)
    estimatedRadiance = 0;
    για κάθε ακτίνα σκιών
        δημιούργησε ένα σημείο y πάνω στην πηγή;
        estimatedRadiance +=
            Le(y,phi_y,theta_y)*BRDF*radianceTransfer(x,y)/pdf(y);
    estimatedRadiance = estimatedRadiance / #shadowRays;
    return(estimatedRadiance);

// μετάδοση ενέργειας μεταξύ σημείου x και y
// Λαμβάνονται υπόψη τα 2 συνημίτονα, η απόσταση και η ορατότητα
radianceTransfer(x,y)
    transfer = G(x,y)*V(x,y);
    return(transfer);
```

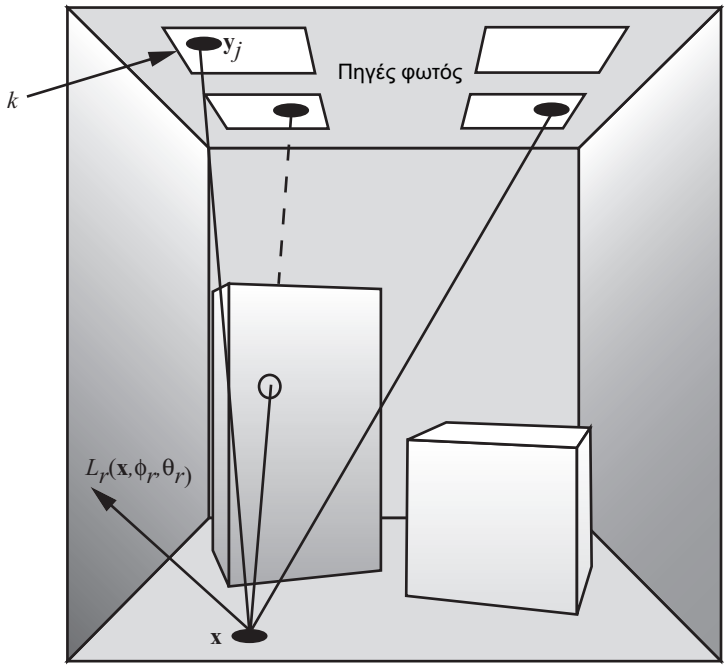
Αλγόριθμος 16.1: *Υπολογισμός άμεσου φωτισμού από μια πηγή φωτός.*

Στον ολικό φωτισμό — όπως και σε όλους τους αλγορίθμους γραφικών — το φως θεωρείται προσθετικό. Συνεπώς, η συνεισφορά κάθε ξεχωριστής πηγής στο συνολικό φωτισμό του σημείου **x** μπορεί να συναθροιστεί με τις υπόλοιπες. Ένας αριθμός από ακτίνες σκιών παράγεται για κάθε πηγή φωτός χωριστά· για παράδειγμα, ίσος αριθμός ακτίνων για κάθε πηγή ή ανάλογα με την ισχύ της κάθε μίας.

Πολλές φορές είναι προτιμότερο να ομαδοποιούμε όλες τις πηγές και να χρησιμοποιούμε ένα κοινό πεδίο ολοκλήρωσης για τη μέθοδο εκτίμησης του ολοκληρώματος φωτισμού Monte Carlo. Κατά συνέπεια, όταν παράγονται ακτίνες σκιών, αυτές μπορούν να κατευθυνθούν προς οποιαδήποτε πηγή χωρίς να πρέπει να προκαθορίσουμε ένα συγκεκριμένο αριθμό δειγμάτων ανά πηγή. Όταν χρησιμοποιούμε αυτή την προσέγγιση, είναι δυνατό να υπολογίσουμε τον άμεσο φωτισμό από έναν οποιοδήποτε αριθμό πηγών με μόνο μια ακτίνα ανά φωτιζόμενο σημείο **x** και να εξακολουθούμε να έχουμε μια αμερόληπτη δειγματοληψία στην τελική εικόνα. Ο λόγος που αυτό δουλεύει είναι ότι παύουμε να θεωρούμε τις πολλαπλές πηγές ως ανεξάρτητες οντότητες και μας ενδιαφέρει μόνο το συνδυασμένο πεδίο ολοκλήρωσης που προκύπτει απ' όλες τις επιφάνειές τους μαζί. Παρόλα αυτά, εξακολουθούμε να χρειαζόμαστε δυνατότητα πρόσβασης σε καθεμία πηγή χωριστά, προκειμένου να μπορεί να δουλέψει ο αλγόριθμος δειγματοληψίας, αφού κάθε πηγή μπορεί να απαιτεί μια διαφορετική στοχαστική διαδικασία για την παραγωγή δειγμάτων στην επιφάνειά της.

Για κάθε ακτίνα σκιών, χρησιμοποιείται μια διαδικασία δειγματοληψίας δύο βημάτων (Σχήμα 16.4):

1. Στο πρώτο βήμα, μια γεννήτρια διακριτών αριθμών με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (ΣΠΠ) $p_L(k)$ επιλέγει μια από τις πηγές k_i. Αναθέτουμε σε καθεμία από τις N_L πηγές μια πιθανότητα επιλογής για αποστολή ακτίνας προς αυτή. Αυτή η πιθανότητα συνήθως δεν αλλάζει ανάλογα με το φωτοσκιαζόμενο σημείο **x**, αλλά θεωρητικά, μπορεί να είναι διαφορετική για κάθε μέρος της σκηνής.



Σχήμα 16.4: *Άμεσος φωτισμός από πολλαπλές πηγές φωτός.*

Αυτή η δυνατότητα μπορεί να αποβεί ευεργετική στην περίπτωση που η σκηνή είναι καλά χωρισμένη σε μικρότερες ανεξάρτητες σκηνές, οι οποίες έχουν η καθεμία τις πηγές της και επιπλέον είναι αμοιβαία κρυφές (π.χ. ξεχωριστοί όροφοι ή δωμάτια ενός κτιρίου).

2. Στο δεύτερο βήμα, επιλέγεται ένα σημείο δειγματοληψίας $\mathbf{y}_i$ στην k πηγή που προκρίθηκε στο προηγούμενο βήμα, χρησιμοποιώντας τη δεσμευμένη πιθανότητα $p(\mathbf{y}|k_i)$. Οποιαδήποτε από τις ΣΠΠ που χρησιμοποιούμε για μεμονωμένες πηγές, μπορεί να χρησιμοποιηθεί κι εδώ.

Η συνδυασμένη ΣΠΠ για ένα σημείο δειγματοληψίας y_i στην ομαδοποιημένη περιοχή όλων των πηγών φωτός ισούται επομένως με $p_L(k)p(\mathbf{y}|k)$. Η ολική εκτιμήτρια, χρησιμοποιώντας N ακτίνες σκιών, εκφράζεται ως:

$$\langle L_r(\mathbf{x},\phi_r,\theta_r)\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{L_e(\mathbf{y}_i,\phi_{y_j},\theta_{y_j})f_r(\phi_r,\theta_r,\phi_i,\theta_i)G(\mathbf{x},\mathbf{y}_i)V(\mathbf{x},\mathbf{y}_i)}{p_L(k_i)p(\mathbf{y}_i|k_i)}. \quad (16.28)$$

Ο Αλγόριθμος 16.2 παρουσιάζει τη διαδικασία για τον υπολογισμό του άμεσου φωτισμού από πολλαπλές πηγές.

Παρά το γεγονός ότι, όποιες και να είναι οι ΣΠΠ $p_L(k)$ και $p(\mathbf{y}|k)$, το αποτέλεσμα

```
// άμεσος φωτισμός από πολλαπλές πηγές φωτός
// για ένα σημείο x, και κατεύθυνση phi,
// thetadirectIllumination (x, phi, theta)
    estimatedRadiance = 0;
    για κάθε ακτίνα σκιών
        επέλεξε μια πηγή k;
        δημιούργησε ένα σημείο y πάνω στην πηγή k;
        estimatedRadiance +=
            Le(y, phi_y, theta_y) * BRDF * radianceTransfer(x,y) /
               (pdf(k) * pdf(y|k));
    estimatedRadiance = estimatedRadiance / #shadowRays;
    return(estimatedRadiance);

// μετάδοση ενέργειας μεταξύ σημείου x και y
// Λαμβάνονται υπόψη τα 2 συνημίτονα, η απόσταση και η ορατότητα
radianceTransfer(x,y)
    transfer = G(x,y)*V(x,y);
    return(transfer);
```

Αλγόριθμος 16.2: *Υπολογισμός άμεσου φωτισμού από πολλαπλές πηγές φωτός.*

θα είναι μια αμερόληπτη εικόνα, εντούτοις, η επιλογή των ΣΠΠ επιδρά στη διασπορά των εκτιμητριών και επομένως στην παρουσία θορύβου στην τελική εικόνα. Δύο από τις πιο κοινές επιλογές για ΣΠΠ είναι οι ακόλουθες:

Ομοιόμορφη επιλογή πηγής. Επιλογή σημείων με ομοιόμορφη δειγματοληψία της επιφάνειας μιας πηγής. Και οι δύο ΣΠΠ είναι ομοιόμορφες, δηλαδή $p_L(k) = 1/N_L$ και $p(\mathbf{y}|k) = 1/S_{L_k}$. Κάθε πηγή φωτός θα λάβει, κατά μέσον όρο, έναν ίδιο αριθμό από ακτίνες και οι ακτίνες αυτές θα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες πάνω στην επιφάνεια των πηγών. Η υλοποίηση αυτής της κατανομής είναι απλή αλλά το μειονέκτημά της είναι ότι ο φωτισμός τόσο από πηγές υψηλής όσο και από χαμηλής φωτοβολίας υπολογίζεται με τον ίδιο ακριβώς αριθμό ακτίνων σκιών. Επίσης, το ίδιο ισχύει και για πηγές που βρίσκονται μακριά από το σημείο που φωτίζεται, σε σχέση με τις πηγές που είναι κοντά του, όπου πάλι λαμβάνουν τον ίδιο αριθμό ακτίνων. Συνεπώς, η σχετική σπουδαιότητα των πηγών ως προς τη συνεισφορά τους στο φωτισμό ενός σημείου δε λαμβάνεται υπόψη. Με αντικατάσταση των ΣΠΠ στην Εξίσωση (16.28), παίρνουμε την ακόλουθη εκτιμήτρια για τον άμεσο φωτισμό:

$$\langle L_r(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r)\rangle = \frac{N_L}{N}\sum_{i=1}^{N} S_{L_k} L_e(\mathbf{y}_i, \phi_{y_j}, \theta_{y_j}) f_r(\phi_r, \theta_r, \phi_i, \theta_i) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i) V(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i). \tag{16.29}$$

Επιλογή πηγής ανάλογη με την ισχύ. Επιλογή σημείων με ομοιόμορφη δειγματοληψία της επιφάνειας μιας πηγής. Εδώ, $p_L(k) = P_k/P_{\text{total}}$, όπου P_k είναι η ολική ισχύς

της πηγής k και P_{total} η ολική ισχύς όλων των πηγών μαζί. Οι ισχυρές πηγές της σκηνής λαμβάνουν περισσότερες ακτίνες, ενώ οι χαμηλής ισχύος πολύ λίγες. Αυτή η διάκριση είναι πιθανό να μειώσει τη διασπορά και το θόρυβο στην εικόνα. Η εκτιμήτρια μπορεί να γραφεί ως:

$$\langle L_r(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r)\rangle = \frac{P_{\text{total}}}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{S_{L_k}L_e(\mathbf{y}_i, \phi_{y_j}, \theta_{y_j})f_r(\phi_r, \theta_r, \phi_i, \theta_i)G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i)V(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i)}{P_k}. \quad (16.30)$$

Αν όλες οι πηγές είναι ομοιόμορφης φωτοβολίας, $P_k = \pi S_k L_{e,k}$, και επομένως

$$\langle L_r(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r)\rangle = \frac{P_{\text{total}}}{\pi N}\sum_{i=1}^{N} f_r(\phi_r, \theta_r, \phi_i, \theta_i)G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i)V(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i). \quad (16.31)$$

Αυτή η προσέγγιση είναι τυπικά ανώτερη από την ομοιόμορφη επιλογή πηγών, αφού δίνει περισσότερα δείγματα προς τις ισχυρές πηγές, αλλά μπορεί να επιφέρει βραδύτερη σύγκλιση σε ζώνες της εικόνας όπου τα έντονα φώτα δε φαίνονται και συνεπώς ο φωτισμός εκεί προκαλείται κυρίως από τις ασθενέστερες πηγές. Τέτοιες περιπτώσεις βελτιώνονται μόνο με στρατηγικές δειγματοληψίας οι οποίες χρησιμοποιούν εκ των προτέρων πληροφορία για την ορατότητα των πηγών σε τμήματα της σκηνής.

Ανεξάρτητα από την επιλογή της $p_L(k)$, πρέπει να είναι κανείς σίγουρος να μην εξαιρέσει πηγές που ενδέχεται να συνεισφέρουν στην $L_r(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r)$. Το να αποκλείουμε απλά όλες τις μικρές, ασθενείς ή μακρινές πηγές μπορεί να οδηγήσει σε μεροληψία, η οποία για ορισμένα τμήματα της σκηνής μπορεί να είναι ιδιαίτερα αισθητή.

Ένα από τα μειονεκτήματα της μεθόδου των δύο σταδίων που περιγράφηκε παραπάνω είναι ότι για τη δημιουργία μιας ακτίνας σκιών χρειάζεται να υπολογίσουμε τρεις τυχαίους αριθμούς: έναν για την επιλογή της πηγής k που θα αποσταλεί η ακτίνα, και άλλους δύο για την επιλογή του σημείου $\mathbf{y}_i$ πάνω στην επιφάνεια της πηγής. Αυτό οδηγεί σε δυσκολίες κατά την υλοποίηση δειγματοληψίας σε υποδιαστήματα (stratified sampling). Στο [Shir00], περιγράφεται μια τεχνική που χρησιμοποιεί μόνο δύο ψευδοτυχαίους αριθμούς για την παραγωγή ακτίνων σκιών σε διακριτές πηγές. Το συνολικό πεδίο ολοκλήρωσης απ' όλες τις επιφάνειες των πηγών μαζί, απεικονίζεται πάνω σε ένα μοναδιαίο τετράγωνο και κάθε πηγή αντιστοιχεί σ' ένα υποδιάστημα αυτού του τετραγώνου. Όταν παράγουμε ένα σημείο πάνω στο τετράγωνο, βρίσκουμε σε ποιο υποδιάστημα ανήκει και μετασχηματίζουμε τις συντεταγμένες του στην πραγματική του θέση πάνω στην επιφάνεια της αντίστοιχης πηγής. Με αυτό τον τρόπο, η δειγματοληψία σ' ένα τριδιάστατο διάστημα, μετατρέπεται σε δειγματοληψία σε ένα φραγμένο διάστημα δύο διαστάσεων, το οποίο διευκολύνει την εφαρμογή τεχνικών δειγματοληψίας κατά υποδιαστήματα, ή άλλων μεθόδων περιορισμού της διασποράς.

16.4.3 Φωτισμός από εικόνα περιβάλλοντος⊛

Οι υπολογιστικές τεχνικές των προηγούμενων ενοτήτων μπορούν να εφαρμοστούν σχεδόν σε κάθε είδος πηγής. Αρκεί να ορίσουμε την κατάλληλη ΣΠΠ για την επιλογή μιας πηγής φωτός την οποία θα δειγματοληπτήσουμε και, στη συνέχεια, να επιλέξουμε μια ΣΠΠ για να προσδιορίσουμε ένα τυχαίο δείγμα πάνω στην επιφάνεια της πηγής. Όπως επισημάνθηκε προηγουμένως, η διασπορά των δειγμάτων και ο θόρυβος της εικόνας εξαρτώνται — σε μεγάλο βαθμό — από την επιλογή των ΣΠΠ.

Η χρήση εικόνων περιβάλλοντος (οι οποίες πολλές φορές αποκαλούνται εικόνες φωτισμού ή εικόνες ανακλάσεων — βλ. Κεφάλαιο 14) ως πηγές, έχει αρχίσει να αντιμετωπίζεται με αυξανόμενο ενδιαφέρον τα τελευταία χρόνια. Μια εικόνα περιβάλλοντος κωδικοποιεί σε κάθε κατεύθυνση πάνω στη σφαίρα τον ολικό φωτισμό που λαμβάνει ένα σημείο από ένα ημισφαίριο γύρω από την κατεύθυνση αυτή. Συνήθως οι εικόνες περιβάλλοντος καταγράφονται από πραγματικά περιβάλλοντα χρησιμοποιώντας ψηφιακές φωτογραφικές μηχανές.

Μιά εικόνα περιβάλλοντος μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά ως μια κατά διαστήματα συνεχής συνάρτηση, στην οποία κάθε εικονοστοιχείο αντιστοιχεί σε μια μικρή στερεά γωνία $\Delta\Omega$ γύρω από ένα σημείο $\mathbf{x}$, στο οποίο είναι κεντραρισμένη η εικόνα. Η ένταση — τότε — του κάθε εικονοστοιχείου αντιστοιχεί σε προσπίπτουσα λαμπρότητα $L(\mathbf{x}, \phi_i, \theta_i)$, με $(\phi_i, \theta_i) \in \Delta\Omega$.

Καταγραφή εικόνων περιβάλλοντος

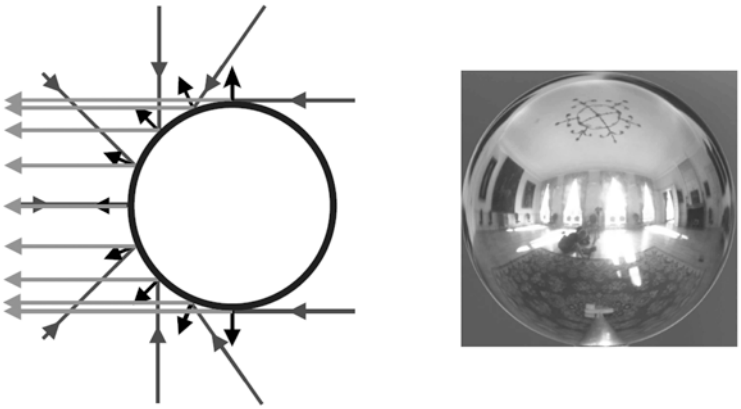
Οι εικόνες περιβάλλοντος συνήθως παριστάνουν καταγεγραμμένες πραγματικές συνθήκες φωτισμού. Μια γυαλιστερή σφαίρα (*light probe*) σε συνδυασμό με μια ψηφιακή φωτογραφική μηχανή, ή μια ψηφιακή μηχανή με υπερ-ευρυγώνιο (fisheye) φακό, είναι ο συνηθέστερος εξοπλισμός για την καταγραφή εικόνων περιβάλλοντος.

Ένας αρκετά πρακτικός τρόπος καταγραφής του φωτός από το περιβάλλον είναι μια γυαλιστερή σφαίρα. Η σφαίρα πρέπει να είναι κατοπτρικά ανακλαστική και να τοποθετηθεί στο σημείο όπου θέλουμε να καταγράψουμε τον εισερχόμενο φωτισμό. Στη συνέχεια, η σφαίρα φωτογραφίζεται χρησιμοποιώντας έναν ορθογραφικό φακό ή εναλλακτικά έναν τηλεφακό με μεγάλη μεγέθυνση, ώστε να προσεγγίζει την ορθογραφική προβολή όσο περισσότερο γίνεται.

Το κεντρικό σημείο κάθε καταγεγραμμένου εικονοστοιχείου αντιστοιχεί σε μια κατεύθυνση πρόσπτωσης. Αυτή η κατεύθυνση μπορεί να υπολογιστεί σχετικά εύκολα αφού το κανονικό διάνυσμα σε κάθε σημείο της γυαλιστερής σφαίρας είναι γνωστό, και υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των εικονοστοιχείων και των κατευθύνσεων πρόσπτωσης. Επομένως, μια φωτογραφία της γυαλιστερής σφαίρας μας δίνει ένα σύνολο ολοκληρωμένων σημείων της συνάρτησης $L(\mathbf{x}, \phi_i, \theta_i)$ (Σχήμα 16.5).

Παρά το γεγονός ότι η διαδικασία της καταγραφής είναι αρκετά απλή, υπάρχουν ορισμένα ζητήματα που θα πρέπει να εξετάσουμε:

- Η αντανάκλαση της ίδιας της φωτογραφικής μηχανής θα φαίνεται στη γυαλιστερή σφαίρα και άρα και στη φωτογραφία· επομένως θα αποκρύπτεται φως



Σχήμα 16.5: *Η φωτογράφηση μιας γυαλιστερής σφαίρας μας δίνει μια εικόνα περιβάλλοντος η οποία παριστάνει την εισερχόμενη λαμπρότητα από μια κατεύθυνση πρόσπτωσης σε αυτή.*

που βρίσκεται σε κατευθύνσεις πίσω από τη μηχανή.

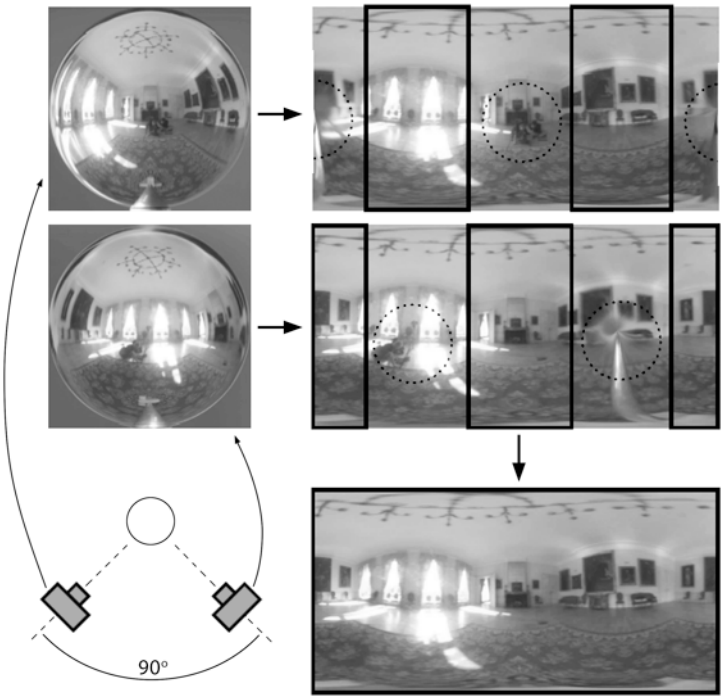
- Η χρήση μιας σφαίρας ως ανακλαστικό μέσο δε μας δίνει ομοιόμορφη δειγματοληψία των κατευθύνσεων του ημισφαιρίου. Οι κατευθύνσεις απέναντι από την κάμερα δειγματοληπτούνται αραιά, ενώ κατευθύνσεις στην ίδια πλευρά με αυτή δειγματοληπτούνται αρκετά πυκνά.

- Όλη η πληροφορία που καταγράφεται από τη σιλουέτα της σφαίρας παριστάνει φωτισμό που προέρχεται από την ίδια περίπου κατεύθυνση. Δεδομένου ότι η γυαλιστερή σφαίρα έχει μία ακτίνα, έστω και μικρή, η ανακλώμενη εικόνα θα διαφέρει λίγο.

- Δεδομένου ότι η φωτογραφική μηχανή δεν μπορεί να καταγράψει όλα τα επίπεδα φωτεινότητας εξαιτίας της μη γραμμικής καμπύλης απόκρισης του αισθητήρα της, απαιτείται η εφαρμογή μιας διαδικασίας φωτογράφησης εικόνων δυναμικού εύρους προκειμένου να πάρουμε μια εικόνα περιβάλλοντος που να αντιστοιχεί σε σωστές τιμές λαμπρότητας.

Ορισμένα από τα παραπάνω προβλήματα μπορούν να αντιμετωπιστούν καταγράφοντας δύο φωτογραφίες της γυαλιστερής σφαίρας υπό γωνία 90 μοιρών μεταξύ τους. Τα δείγματα και από τις δύο φωτογραφίες μπορούν να συνδυαστούν σε μια ενιαία εικόνα περιβάλλοντος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 16.6.

Ένας εναλλακτικός τρόπος καταγραφής μιας εικόνας περιβάλλοντος είναι η χρήση ενός ευρυγώνιου φακού 180 μοιρών. Δύο φωτογραφίες παρμένες από αντίθετες κατευθύνσεις συναποτελούν το ίδιο καλά μια εικόνα περιβάλλοντος. Όμως, οι καλοί φακοί 180 μοιρών είναι γενικά ακριβοί και δύσκολο να ρυθμιστούν για τις συγκεκριμένες συνθήκες λήψης. Οι δύο εικόνες πρέπει να παρθούν από την ακριβώς αντίθετη κατεύθυνση, διαφορετικά ένας μεγάλος αριθμός κατευθύνσεων δεν θα μπορέσει να



Σχήμα 16.6: *Φωτογράφηση μιας γυαλιστερής σφαίρας δύο φορές, με διαφορά* 90 *μοιρών. Ο συνδυασμός και των δύο εικόνων παράγει μια καλά ορισμένη εικόνα περιβάλλοντος, χωρίς να φαίνεται η φωτογραφική μηχανή.*

καταγραφεί. Από την άλλη μεριά, αν μας ενδιαφέρει μόνον η καταγραφή φωτισμού από ένα ημισφαίριο και όχι από ολόκληρη τη σφαίρα, η χρήση ενός ευρυγώνιου φακού μπορεί να αποβεί ιδιαίτερα πρακτική λύση.

Παραμετροποιήσεις

Όταν χρησιμοποιούμε εικόνες περιβάλλοντος σε αλγόριθμους ολικού φωτισμού πρέπει να τις εκφράσουμε σε κάποιον παραμετρικό χώρο. Για το σκοπό αυτό, μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορες παραμετροποιήσεις· η αποτελεσματικότητα της δειγματοληψίας των εικόνων εξαρτάται από την παραμετροποίηση. Στην ουσία, τις ίδιες επιλογές κάνουμε και όταν έχουμε να δειγματοληπτήσουμε το ημισφαίριο πάνω από ένα σημείο για τον υπολογισμό της εξίσωσης φωτισμού.

Στην περίπτωση της απεικόνισης περιβάλλοντος, μπορούν να εφαρμοστούν διάφοροι τύποι παραματροποίησης. Εδώ παρέχεται μια σύνοψη κάποιων από τις τεχνικές, ενώ μια πιο διεξοδική ανάλυση μπορεί κανείς να διαβάσει στο [Mass04].

Παραμετροποίηση κατά πλάτος - ύψος. Αυτές είναι οι κλασικές πολικές συντεταγμένες όπως τις είδαμε και στις συναρτήσεις απεικόνισης υφής (Ενότητα 14.3.3). Το πλεονέκτημά τους είναι η ομοιόμορφη κατανομή της κλίσης θ. Στα αρνητικά

αυτής της παραμετροποίησης συγκαταλέγεται η παρουσία σημείων συσσώρευσης/αοριστίας στους δύο πόλους, οι οποίοι αναπαριστώνται ως μια γραμμή ο καθένας στο επίπεδο της εικόνας (βλ. επίσης Σχήμα 14.10). Επιπλέον, τα εικονοστοιχεία της εικόνας περιβάλλοντος δεν καλύπτουν την ίδια — κατά μέτρο — στερεά γωνία παντού πάνω στη σφαίρα και δεν υπάρχει συνεχής παραμετροποίηση για τα όρια $\phi = 0$ και $\phi = 2\pi$ (Σχήμα 16.7(α)).

Προβολή δίσκου. Αυτή η παραμετροποίηση είναι επίσης γνωστή ως εμφύτευση Nusselt. Το ημισφαίριο των κατευθύνσεων προβάλλεται πάνω σ' έναν κυκλικό δίσκο ακτίνας 1. Το πλεονέκτημα αυτής της παραμετροποίησης είναι η συνεχής απεικόνιση του ύψους (αζιμούθιο) ϕ και το γεγονός ότι ένας πόλος είναι ένα μοναδικό παραμετρικό σημείο. Όμως η γωνία θ δεν κατανέμεται ομοιόμορφα πάνω στην εικόνα (Σχήμα 16.7(β)). Μια παραλλαγή είναι η παραβολική παραμετροποίηση, στην οποία η γωνία της κλίσης κατανέμεται πιο ομοιόμορφα [Heid99] (Σχήμα 16.7(γ)).

Ομόκεντρη παραμετροποίηση. Η ομόκεντρη παραμετροποίηση μετασχηματίζει τον προβεβλημένο μοναδιαίο δίσκο σ' ένα μοναδιαίο τετράγωνο [Shir97]. Αυτό καθιστά τη δειγματοληψία των κατευθύνσεων ευκολότερη, ενώ διατηρεί τη συνέχεια της παραμετροποίησης που υιοθετείται από τον προβεβλημένο δίσκο (Σχήμα 16.7(δ)).

Δειγματοληψία εικόνων περιβάλλοντος

Ο άμεσος φωτισμός ενός σημείου σε μια επιφάνεια που προέρχεται από μια εικόνα περιβάλλοντος μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$L_r(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r) = \int_{\Omega_\mathbf{x}} L_{\text{map}}(\phi_i, \theta_i) f_r(\phi_r, \theta_r, \phi_i, \theta_i) \cos(\theta_i) d\omega_i. \tag{16.32}$$

Η ποσότητα που ολοκληρώνεται είναι η προσπίπτουσα ακτινοβολία $L_{\text{map}}(\phi_i, \theta_i)$ στο σημείο $\mathbf{x}$, η οποία έρχεται από την κατεύθυνση (ϕ_i, θ_i) της εικόνας περιβάλλοντος. Η παρουσία άλλων επιφανειών στη σκηνή ενδέχεται να παρεμποδίζει το φως να φτάσει στο $\mathbf{x}$. Ανεξάρτητα από το αν οι επιφάνειες αυτές ανήκουν σε άλλα αντικείμενα ή στο ίδιο αντικείμενο που βρίσκεται και το σημείο$\mathbf{x}$, χρειάζεται να προσθέσουμε στην παραπάνω σχέση έναν όρο ορατότητας $V(\mathbf{x}, \phi_i, \theta_i)$:

$$L_r(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r) = \int_{\Omega_\mathbf{x}} L_{\text{map}}(\phi_i, \theta_i) f_r(\phi_r, \theta_r, \phi_i, \theta_i) V(\mathbf{x}, \phi_i, \theta_i) \cos(\theta_i) d\omega_i. \tag{16.33}$$

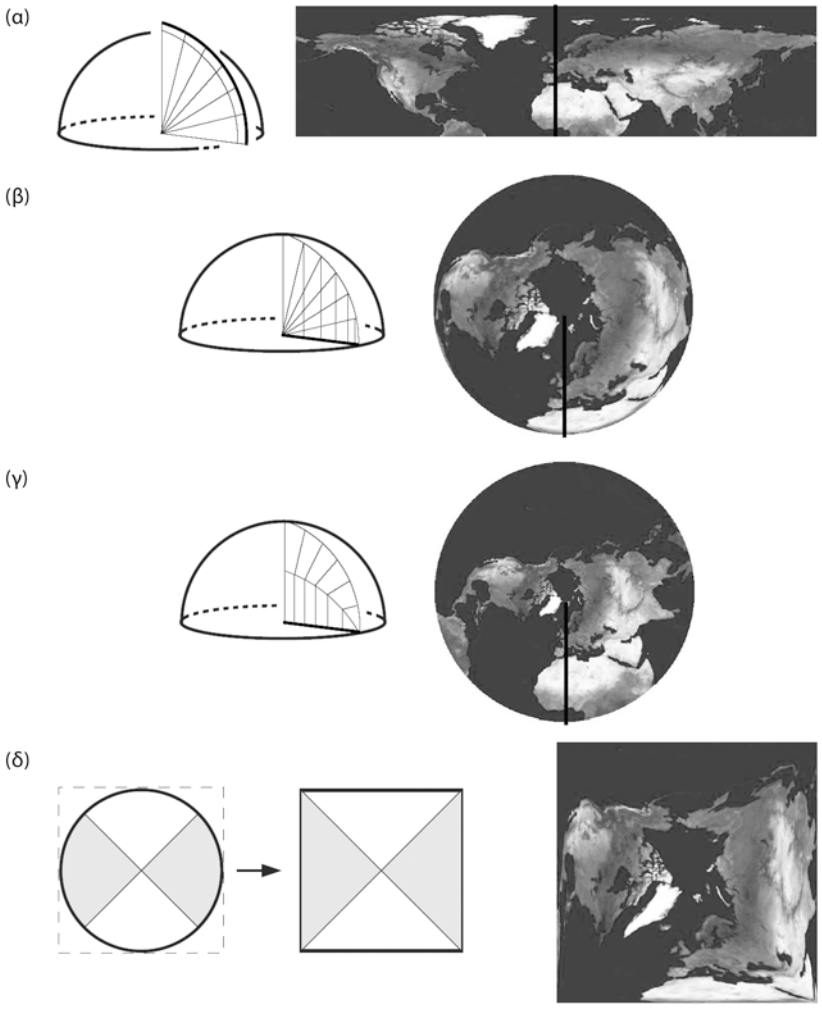
Μια απευθείας εφαρμογή της ολοκλήρωσης Monte Carlo στην παραπάνω σχέση μας δίνει την ακόλουθη εκτιμήτρια:

$$\langle L_r(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{L_{\text{map}}(\mathbf{x}, \phi_{i,j}, \theta_{i,j}) f_r(\phi_r, \theta_r, \phi_{i,j}, \theta_{i,j}) V(\mathbf{x}, \phi_{i,j}, \theta_{i,j}) \cos(\theta_{i,j})}{p(\phi_{i,j}, \theta_{i,j})}, \tag{16.34}$$

στην οποία οι διαφορετικές κατευθύνσεις δειγματοληψίας $(\phi_{i,j}, \theta_{i,j})$ παράγονται απευθείας στην παραμετρική αναπαράσταση της εικόνας περιβάλλοντος χρησιμοποιώντας της ΣΠΠ $p(\phi_{i,j}, \theta_{i,j})$.

Ωστόσο, στην προσπάθεια να προσεγγισθεί το ολοκλήρωμα με τη μέθοδο Monte Carlo, προκύπτουν διάφορα προβλήματα, τα οποία σχετίζονται με τα ακόλουθα ζητήματα:

Πεδίο ολοκλήρωσης. Η εικόνα περιβάλλοντος, παίζοντας το ρόλο της πηγής φωτός, καταλαμβάνει την πλήρη ημισφαιρική στερεά γωνία γύρω από το φωτοσκιαζόμενο σημείο. Συνεπώς, το πεδίο ολοκλήρωσης της εξίσωσης άμεσου φωτισμού



Σχήμα 16.7: *Εναλλακτικές παραμετροποιήσεις για ένα ημισφαίριο: (α) παραμετροποίηση κατά πλάτος-ύψος, (β) προβολή σε δίσκο, (γ) παραβολική παραμετροποίηση, (δ) ομόκεντρη παραμετροποίηση.*

γίνεται μεγάλο, κάτι που οδηγεί σε μεγάλη διασπορά στις τιμές της εκτιμήτριας.

Εικόνα περιβάλλοντος ως πηγή φωτός με υφή. Κάθε εικονοστοιχείο στην εικόνα περιβάλλοντος αντιπροσωπεύει μια μικρή στερεά γωνία μέσα από την οποία εισρέει φως. Η κατανομή της λαμπρότητας στην εικόνα περιβάλλοντος, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως μια τυπική εικόνα υφής, ενδέχεται να περιέχει υψηλές συχνότητες και ασυνέχειες, προκαλώντας αύξηση της διασποράς στην εκτίμηση της τελικής εικόνας και θόρυβο. Ειδικά στην περίπτωση που η εικόνα περιβάλλοντος καταγράφει εφέ όπως το φως του ηλίου ή φως μέσα από ένα παράθυρο, η εικόνα παρουσιάζει έντονες εναλλαγές φωτεινότητας.

Εσωτερικό γινόμενο της εικόνας περιβάλλοντος και της BRDF. Όπως είδαμε, το ολοκλήρωμα της Εξίσωσης (16.33) περιέχει το εσωτερικό γινόμενο της εισερχόμενης λαμπρότητας $L_{\text{map}}(\phi_i, \theta_i)$ και της BRDF $f_r(\phi_r, \theta_r, \phi_i, \theta_i)$. Εκτός από τις πιθανές ασυνέχειες και τις υψηλές συχνότητες της εικόνας περιβάλλοντος, μια BRDF που μοντελοποιεί ένα γυαλιστερό υλικό περιέχει πολύ απότομες κορυφές. Το πρόβλημα είναι ότι οι κορυφές της BRDF και της εικόνας περιβάλλοντος συνήθως δε συμπίπτουν ως προς την κατεύθυνση που εμφανίζονται. Αυτό καθιστά πολύ δύσκολο το σχεδιασμό μιας αποδοτικής μεθόδου δειγματοληψίας, η οποία να λαμβάνει υπόψη αυτά τα χαρακτηριστικά.

Ορατότητα. Αν η εκτιμήτρια συμπεριλαμβάνει και όρο ορατότητας, εισάγονται επιπρόσθετες ασυνέχειες στον εισερχόμενο φωτισμό. Μολονότι αυτή είναι η ίδια περίπτωση που έχουμε και στον άμεσο φωτισμό από απλές πηγές, εδώ ενδέχεται να προκληθούν προβλήματα δειγματοληψίας, εξαιτίας της μεγαλύτερης διασποράς των δειγμάτων.

Σε πρακτικό επίπεδο, επιχειρείται η εύρεση συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας $p(\phi_{i,j}, \theta_{i,j})$ οι οποίες ν' αντιμετωπίζουν τα παραπάνω προβλήματα. Σε γενικές γραμμές, οι ΣΠΠ αυτές χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες: ΣΠΠ που βασίζονται στην κατανομή των τιμών της λαμπρότητας $L_{\text{map}}(\phi_i, \theta_i)$ από την εικόνα περιβάλλοντος, συμπεριλαμβάνοντας και έναν όρο $\cos(\theta_i)$, ο οποίος μπορεί να πολλαπλασιαστεί εκ των προτέρων με τη λαμπρότητα και να ενσωματωθεί στην εικόνα· ΣΠΠ που βασίζονται στην BRDF $f_r(\phi_r, \theta_r, \phi_i, \theta_i)$, οι οποίες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες σε γυαλιστερές BRDF. Τέλος ΣΠΠ που βασίζονται στο γινόμενο και των δύο συναρτήσεων, οι οποίες όμως είναι δυσκολότερο να κατασκευαστούν.

ΣΠΠ με βάση τη δειγματοληψία του άμεσου φωτισμού. Μια πρώτη προσέγγιση για την κατασκευή μιας ΣΠΠ με βάση τις τιμές της λαμπρότητας, είναι να μετασχηματίσουμε ευθέως τα κατά τμήματα συνεχή εικονοστοιχεία σε μια ΣΠΠ, παίρνοντας την αθροιστική κατανομή τους και αντιστρέφοντάς την. Αυτή η διαδικασία τυπικά παράγει έναν πίνακα αναφοράς δύο διαστάσεων και η αποδοτικότητά της κρίνεται από την ταχύτητα ανάκτησης τιμής από αυτό τον πίνακα.

Μια διαφορετική προσέγγιση είναι να απλοποιήσουμε την εικόνα περιβάλλοντος μετασχηματίζοντάς την σ' έναν αριθμό από καλά ορισμένες πηγές φωτός.

Αυτό έχει το πλεονέκτημα ότι υπάρχει ένας καθολικά συνεπής τρόπος δειγματοληψίας για όλα τα σημεία που θα φωτοσκιαστούν· από την άλλη όμως εγκυμονεί τον κίνδυνο εμφάνισης σφαλμάτων ταύτισης, ειδικά με μικρό αριθμό πηγών. Στη [Koll03] προτείνεται ένας κανόνας αριθμητικής ολοκλήρωσης ο οποίος βασίζεται στις τιμές μιας εικόνας υψηλού δυναμικού εύρους. Η ορατότητα λαμβάνεται υπόψη, κατακερματίζοντας την εικόνα περιβάλλοντος σε μικρότερα συμπαγή διαστήματα και εφαρμόζοντας ένα είδος δομημένης δειγματοληψίας με βάση τη σημαντικότητα [Agar03].

ΣΠΠ με βάση τη δειγματοληψία της BRDF. Το κύριο μειονέκτημα της κατασκευής μιας ΣΠΠ με βάση μόνο την εικόνα φωτισμού από το περιβάλλον είναι ότι δε λαμβάνεται στη δειγματοληψία η BRDF, παρά συμμετέχει μόνο στο τέλος, στον υπολογισμό της λαμπρότητας, αφού υπολογιστεί η κατανομή που θα χρησιμοποιηθεί στην εκτιμήτρια. Κάτι τέτοιο μπορεί να είναι ιδιαίτερα προβληματικό στην περίπτωση κατοπτρικών ή γυαλιστερών BRDF με απότομες εκλάμψεις. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η δειγματοληψία της BRDF αντί για τον άμεσο φωτισμό θα έδινε καλύτερα αποτελέσματα.

Η παραπάνω αντιμετώπιση προϋποθέτει ότι η BRDF μπορεί να δειγματοληπτηθεί με αναλυτικό τρόπο, το οποίο όμως ισχύει μόνο για κάποιες απλές και καλά ορισμένες BRDF (π.χ. Phong, Lafortune κλπ). Διαφορετικά, η τεχνική της αντίστροφης αθροιστικής κατανομής θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί κι εδώ.

ΣΠΠ με βάση τη δειγματοληψία του εσωτερικού γινομένου. Η καλύτερη τακτική είναι να κατασκευάσουμε μια στοχαστική διαδικασία δειγματοληψίας για τη λαμπρότητα με βάση τόσο το φωτισμό όσο και την BRDF· ενδεχομένως περιλαμβάνοντας και το συνημίτονο αλλά και την πληροφορία ορατότητας. Στην [Burk05], εισάγεται η *αμφίδρομη δειγματοληψία με βάση τη σημαντικότητα* (bidirectional importance sampling), η οποία παράγει μια διαδικασία δειγματοληψίας με βάση την απόρριψη δειγμάτων (rejection sampling). Το μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι στην απόρριψη δειγμάτων δεν μπορεί κανείς να προβλέψει πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να συγκεντρώσει έναν προκαθορισμένο αριθμό δειγμάτων, με άμεσο αντίκτυπο στην αδυναμία προσδιορισμού άνω φράγματος για το υπολογιστικό κόστος. Μια παραλλαγή της τεχνικής αυτής είναι η *επαναδειγματοληψία με βάση τη σημαντικότητα* [Talb05]. Η *δειγματοληψία κυματιδίων με βάση τη σημαντικότητα* (wavelet importance sampling) – [Clar05]) κατασκευάζει μια ΣΠΠ με βάση την αναπαράσταση τόσο της εικόνας περιβάλλοντος όσο και της BRDF με Wavelets, βάζοντας όμως κάποιους περιορισμούς ως προς το τι είδους εικόνες και BRDF μπορούν να χρησιμοποιηθούν.

16.5 Έμμεσος φωτισμός

16.5.1 Στοχαστική παρακολούθηση ακτίνων

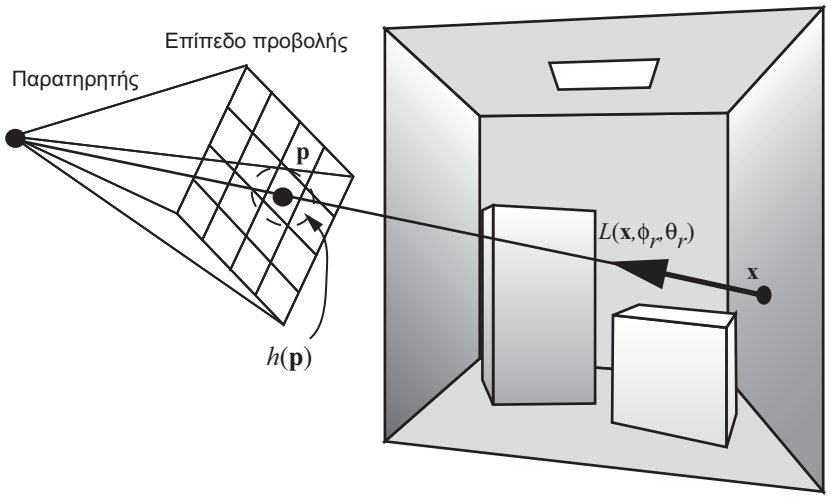
Η στοχαστική παρακολούθηση ακτίνων είναι ένας αλγόριθμος ολικού φωτισμού ο οποίος δεν περιορίζεται μόνο στον άμεσο φωτισμό αλλά ενσωματώνει όλους τους παράγοντες που προσθέτουν έμμεσο φωτισμό σε μια επιφάνεια. Ο μηχανισμός του προκύπτει με την επίλυση της γενικής εξίσωσης φωτισμού επί ημισφαιρίου (16.3), εφαρμόζοντας την ολοκλήρωση Monte Carlo.

Παραμετροποίηση της παρακολούθησης ακτίνων

Για να υπολογίσουμε μια εικόνα από ολικό φωτισμό, απαιτείται να αποδώσουμε μια τιμή λαμπρότητας L_{pixel} σε κάθε εικονοστοιχείο της τελικής εικόνας. Αυτή η τιμή είναι το ζυγισμένο μέτρο των τιμών λαμπρότητας που προσπίπτει στο επίπεδο προβολής από μια κατεύθυνση από τη σκηνή προς το κέντρο προβολής (βλ. Κεφάλαιο 15 και Σχήμα 16.8). Αυτή η κατάσταση περιγράφεται καλύτερα με ένα βεβαρημένο ολοκλήρωμα πάνω στο επίπεδο προβολής,

$$\begin{aligned} L_{\text{pixel}} &= \int_{\text{image plane}} L(\mathbf{p}) h(\mathbf{p}) d\mathbf{p} \\ &= \int_{\text{image plane}} L_r(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r) h(\mathbf{p}) d\mathbf{p}, \end{aligned} \tag{16.35}$$

όπου $\mathbf{p}$ είναι ένα σημείο στο επίπεδο προβολής, $h(\mathbf{p})$ είναι ένα βάρος (συνάρτηση φιλτραρίσματος) (βλ. Παράρτημα Ε), και $\mathbf{x}$ είναι το πρώτο ορατό σημείο στην κατεύθυνση



Σχήμα 16.8: *Παραμετροποίηση της παρακολούθησης ακτίνας.*

```
computeImage(eye)
    για κάθε εικονοστοιχείο
        radiance = 0;
        H = ολοκλήρωμα(h(p));
        για κάθε πρωτεύουσα ακτίνα
            επέλεξε ομοιόμορφα ένα σημείο p τέτοιο ώστε h(p) <> 0;
            κατασκεύασε ακτίνα ray από τον παρατηρητή eye,
                προς το σημείο p;
            radiance = radiance + rad(ray)*h(p);
        radiance = radiance / (#πρωτευουσών ακτίνων*H);

rad(ray)
    βρες την κοντινότερη στην αφετηρία τομή x της ακτίνας με τη σκηνή;
    computeRadiance(x, κατεύθυνση από eye προς p);
```

Αλγόριθμος 16.3: *Αλγόριθμος στοχαστικής σχεδίασης καθοδηγούμενης από τα εικονοστοιχεία.*

από τον παρατηρητή διαμέσου του σημείου **p**. Συχνά η συνάρτηση $h(\mathbf{p})$ ισούται με ένα απλό ορθογώνιο φίλτρο, τέτοιο, ώστε η τελική λαμπρότητα σ' ένα εικονοστοιχείο να αντιστοιχεί με το μέσο όρο της προσπίπτουσας λαμπρότητας στην έκτασή του. Ένα πιο σύνθετο μοντέλο κάμερας περιγράφεται στο [Kolb95]. Για τον προσδιορισμό της $L_r(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r)$, αποστέλλεται μια ακτίνα από τη θέση του παρατηρητή, περνώντας από το σημείο **p** μέσα στο εικονοστοιχείο, προκειμένου να βρεθεί το σημείο τομής **x** με τη σκηνή. Στη συνέχεια, προσδιορίζεται η $L_r(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r)$ με τον υπολογισμό της εξίσωσης φωτισμού στο σημείο αυτό.

Ο πλήρης αλγόριθμος στοχαστικής σχεδίασης, καθοδηγούμενης από τα εικονοστοιχεία (Αλγόριθμος 16.3) αποτελείται από ένα βρόγχο πάνω σε όλα τα εικονοστοιχεία. Για καθένα από αυτά, υπολογίζεται το ολοκλήρωμα πάνω στο επίπεδο παρατήρησης σύμφωνα με τον κατάλληλο μηχανισμό (Εξίσωση (16.35)). Για την ολοκλήρωση, μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια απλή μέθοδος δειγματοληψίας Monte Carlo για όλα τα **p** για τα οποία $h(\mathbf{p}) \neq 0$. Για κάθε σημείο **p** χρειάζεται να κατασκευάσουμε μια πρωτεύουσα ακτίνα. Η λαμπρότητα πάνω σε αυτή την ακτίνα έστω ότι υπολογίζεται με μια συνάρτηση `rad(ray)`. Η συνάρτηση αυτή βρίσκει το σημείο τομής **x** και στη συνέχεια υπολογίζει τη λαμπρότητα που φεύγει από το σημείο επιφάνειας x προς την κατεύθυνση του παρατηρητή `eye` . Η τελική εκτίμηση για τη λαμπρότητα του εικονοστοιχείου εξάγεται από το μέσο όρο όλων των ακτίνων που διέρχονται μέσα από αυτό, λαμβάνοντας όμως επιπλέον υπόψη τον παράγοντα κανονικοποίησης της ομοιόμορφης ΣΠΠ στο πεδίο ολοκλήρωσης ($h(\mathbf{p}) \neq 0$).

Πραγματικά τυχαία μονοπάτια.

Η συνάρτηση `computeRadiance(x, direction eye to p)` του αλγορίθμου στοχαστικής σχεδίασης καθοδηγούμενης από τα εικονοστοιχεία χρησιμοποιεί την εξίσωση φωτισμού για τον υπολογισμό της κατάλληλης τιμής της λαμπρότητας. Ο απλούστερος τρόπος να γίνει αυτό είναι με εφαρμογή της μεθόδου ολοκλήρωσης Monte

Carlo στη βασική μορφή της εξίσωσης φωτισμού (16.3). Σύμφωνα με αυτήν, το ολοκλήρωμα μπορεί να προσεγγιστεί παράγοντας N τυχαίες κατευθύνσεις (ϕ_i, θ_i) μέσα στο ημισφαίριο $\Omega_{\mathbf{x}}$, με βάση κάποια κατανομή $p(\phi_i, \theta_i)$. Η εκτιμήτρια για τη λαμπρότητα $L_r(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r)$ δίνεται τότε από την

$$\langle L_r(\mathbf{x}, \phi_r, \theta_r)\rangle = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{L(\mathbf{x}, \phi_{i,j}, \theta_{i,j}) f_r(\phi_r, \theta_r, \phi_{i,j}, \theta_{i,j})\cos(\theta_{i,j})}{p(\phi_{i,j}, \theta_{i,j})}. \tag{16.36}$$

Ο όρος του συνημιτόνου και η BRDF μπορούν να υπολογιστούν από τα δεδομένα της σκηνής.Ωστόσο, η προσπίπτουσα λαμπρότητα $L(\mathbf{x}, \phi_{i,j}, \theta_{i,j})$ στο σημείο $\mathbf{x}$ είναι άγνωστη. Αφού η λαμπρότητα πάνω σε μια ευθεία γραμμή παραμένει αναλλοίωτη, αρκεί να παρακολουθήσουμε μια ακτίνα που φεύγει από το $\mathbf{x}$ προς την κατεύθυνση $(\phi_{i,j}, \theta_{i,j})$ μέσα στο περιβάλλον και να βρούμε το κοντινότερο σημείο τομής $\mathbf{y}$ σε αυτό· εκεί, επαναλαμβάνουμε τον υπολογισμό της λαμπρότητας κ.ο.κ. Συνεπώς, καταλήγουμε σε μια αναδρομική διαδικασία για τον υπολογισμό της $L(\mathbf{x}, \phi_{i,j}, \theta_{i,j})$ και ένα μονοπάτι, ή, ακριβέστερα, ένα δένδρο μονοπατιών, το οποίο το παρακολουθούμε μέσα στη σκηνή[1].

Οποιονδήποτε από τους υπολογισμούς, με βάση την εξίσωση φωτισμού και αν χρησιμοποιήσουμε, αυτός θα επιφέρει ένα μη μηδενικό αποτέλεσμα μόνο αν το μονοπάτι συναντήσει ένα τμήμα επιφανείας για το οποίο η φωτοεκπομπή L_e είναι μεγαλύτερη του μηδενός. Με άλλα λόγια, το αναδρομικό μονοπάτι πρέπει να πετύχει κάποια από τις πηγές της σκηνής. Με δεδομένο ότι οι πηγές φωτός είναι συνήθως μικρές συγκριτικά με τις άλλες επιφάνειες, αυτό δε συμβαίνει συχνά· οπότε πολύ λίγα μονοπάτια από αυτά που παράγονται θα συνεισφέρουν στην τελική λαμπρότητα. Η τελική εικόνα θα είναι σχεδόν ολοκληρωτικά μαύρη, αφού σε κάθε εικονοστοιχείο θα αποδοθεί κάποιο χρώμα μόνο όταν το αντίστοιχο μονοπάτι πετύχει μια πηγή. Ο παραπάνω αλγόριθμος παράγει μονοπάτια μέσα στη σκηνή ξεκινώντας από το σημείο που μας ενδιαφέρει να φωτίσουμε και προχωρώντας προς τις πηγές με έναν εντελώς ασυντόνιστο και τυχαίο τρόπο.

Θεωρητικά αυτός ο αλγόριθμος θα μπορούσε να βελτιωθεί κάπως, αν επιλέγαμε την ΣΠΠ $p(\phi_i, \theta_i)$ να είναι ανάλογη προς τον όρο συνημιτόνου ή τη BRDF, σύμφωνα με την αρχή της δειγματοληψίας με βάση τη σπουδαιότητα. Στην πράξη, το γεγονός ότι για τα περισσότερα δείγματα κατευθύνσεων καταλήγουμε να παίρνουμε μηδενικές τιμές λαμπρότητας, δεν αλλάζει το αποτέλεσμα αισθητά. Να σημειωθεί παρόλα αυτά ότι, δεδομένου ενός επαρκώς μεγάλου αριθμού μονοπατιών ανά εικονοστοιχείο, αυτή η απλή προσέγγιση παράγει αμερόληπτα αποτελέσματα.

[1] Αν εκπέμπουμε πάντα το πολύ μια ακτίνα με μη τυχαίο τρόπο, αλλά προς την κατεύθυνση τέλειας ανάκλασης ή/και τέλειας διάθλασης, όπως και σε καθεμία πηγή φωτός, τότε ο στοχαστικός αλγόριθμος εκφυλίζεται στο βασικό αναδρομικό αλγόριθμο της παρακολούθησης ακτίνων (βλ. Κεφάλαιο 15)

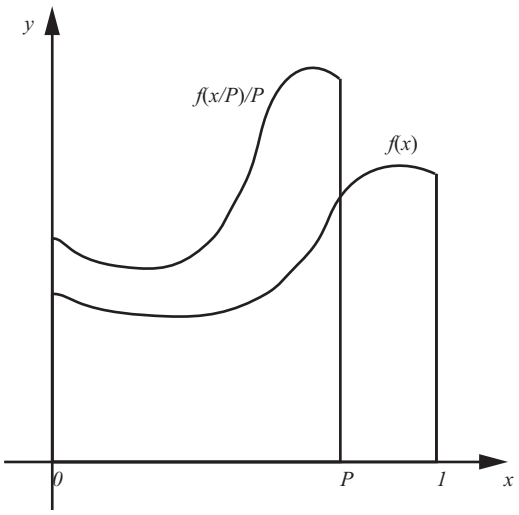
Τερματισμός της αναδρομής

Η αναδρομική μέθοδος παραγωγής μονοπατιών που περιγράφηκε στην απλή στοχαστική παρακολούθηση ακτίνων χρειάζεται ένα κριτήριο τερματισμού. Διαφορετικά, τα παραγόμενα μονοπάτια είναι απείρου μήκους και ο αλγόριθμος δεν τερματίζει ποτέ. Όταν προσθέτουμε κάποιο κριτήριο, θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί να μην εισάγουμε κάποια μορφή μεροληψίας στη δειγματοληψία για την παραγωγή της τελικής εικόνας. Θεωρητικά, το φως ανακλάται άπειρες φορές μέσα σε μια σκηνή και συνεπώς, δεν μπορούμε να αγνοήσουμε αυτά τα μακριά μονοπάτια, ορισμένα από τα οποία ενδέχεται να είναι πολύ σημαντικά. Επομένως χρειάζεται να εντοπίσουμε έναν τρόπο να περιορίσουμε το μήκος των μονοπατιών, συνεχίζοντας να παίρνουμε μια σωστή λύση για το φωτισμό.

Όπως ειπώθηκε και στην Ενότητα 15.3, στις υλοποιήσεις του βασικού αλγόριθμου παρακολούθησης ακτίνων, δύο είναι οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται για να αποφύγουμε το υπερβολικό μεγάλωμα των μονοπατιών. Η πρώτη τεχνική αφορά στη διακοπή της αναδρομής κάτω από ένα επίπεδο. Με άλλα λόγια, τα μονοπάτια επιτρέπεται να μεγαλώσουν μέχρι ένα προκαθορισμένο μήκος. Αυτή η τακτική επιβάλει ένα άνω φράγμα για τον αριθμό των ακτίνων που θα παραχθούν, αλλά ενδέχεται να μη λάβουμε υπόψη σημαντικό ποσοστό από τη μετάδοση ενέργειας μέσα στη σκηνή. Έτσι, η εικόνα δε θα είναι αμερόληπτα δειγματοληπτημένη. Μια σκηνή με πολλές κατοπτρικές επιφάνειες απαιτεί τυπικά ένα μεγάλο βάθος αναδρομής, ενώ για σκηνές όπου κυριαρχούν οι επιφάνειες διάχυσης φωτισμού αρκούν μικρά μονοπάτια.

Η δεύτερη προσέγγιση που είδαμε στο Κεφάλαιο 15 για τον περιορισμό του μήκους των μονοπατιών είναι η προσαρμοστική αποκοπή. Όταν ένα μονοπάτι διασταυρωθεί με μια πηγή φωτός, η υπολογισμένη λαμπρότητα εξακολουθεί να πρέπει να πολλαπλασιαστεί με όλους του όρους συνημιτόνου και τις τιμές των BRDF. Επίσης πρέπει να διαιρεθεί με τις τιμές των κατανομών σε όλα τα προηγούμενα σημεία τομής, πριν συνυπολογισθεί στην τελική εκτίμηση λαμπρότητας που καταγράφεται από ένα εικονοστοιχείο. Αυτός ο σωρευτικός πολλαπλασιαστικός συντελεστής (σθένος μονοπατιού) μπορεί να σώζεται μέσα στο ολοένα αυξανόμενο μονοπάτι (βλ. Ενότητα 15.3.1). Αν το σθένος του μονοπατιού πέσει κάτω από ένα προκαθορισμένο κατώφλι, σταματά η αναδρομική επέκταση του μονοπατιού. Σε σχέση με την τεχνική του σταθερού μέγιστου μονοπατιού, αυτή η μεθοδολογία είναι πιο αποδοτική, αφού πολλά μονοπάτια διακόπτονται νωρίτερα και περιορίζονται τα σφάλματα. Το γεγονός όμως είναι ότι η τελική εικόνα θα εξακολουθεί να μην είναι αμερόληπτα δειγματοληπτημένη.

Η *ρώσικη ρουλέτα* είναι μια τεχνική που αντιμετωπίζει το πρόβλημα της διατήρησης του μήκους των μονοπατιών σ' ένα διαχειρίσιμο επίπεδο, αλλά ταυτόχρονα αφήνει περιθώριο για την εξερεύνηση όλων των πιθανών μονοπατιών οποιουδήποτε μήκους. Αποτέλεσμα αυτού είναι το να μπορεί να παραχθεί μια αμερόληπτη τελική εικόνα. Για να εξηγήσουμε τη λογική πίσω από τη ρώσικη ρουλέτα, ας δούμε πρώτα ένα μικρό παράδειγμα. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το παρακάτω μονοδιάστατο ολοκλήρωμα:



Σχήμα 16.9: *Η αρχή της ρώσικης ρουλέτας.*

$$I = \int_0^1 f(x)dx.$$

Η τυπική διαδικασία ολοκλήρωσης Monte Carlo παράγει τυχαία σημεία x_i στο διάστημα $[0,1]$, και υπολογίζει το βεβαρημένο μέσο όρο όλων των τιμών της συνάρτησης $f(x_i)$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $f(x)$ είναι δύσκολο ή πολύ δαπανηρό να υπολογιστεί (π.χ., η $f(x)$ να είναι άλλο ένα ολοκλήρωμα). Θα θέλαμε να περιορίσουμε όσο γίνεται τον αριθμό των τιμών της $f(x)$ που απαιτούνται για να προσεγγίσουμε το I. Με αλλαγή κλίμακας της $f(x)$ κατά έναν παράγοντα P στο πεδίο ορισμού κι έναν παράγοντα $1/P$ στο πεδίο τιμών, μπορούμε εναλλακτικά να εκφράσουμε την ποσότητα I ως:

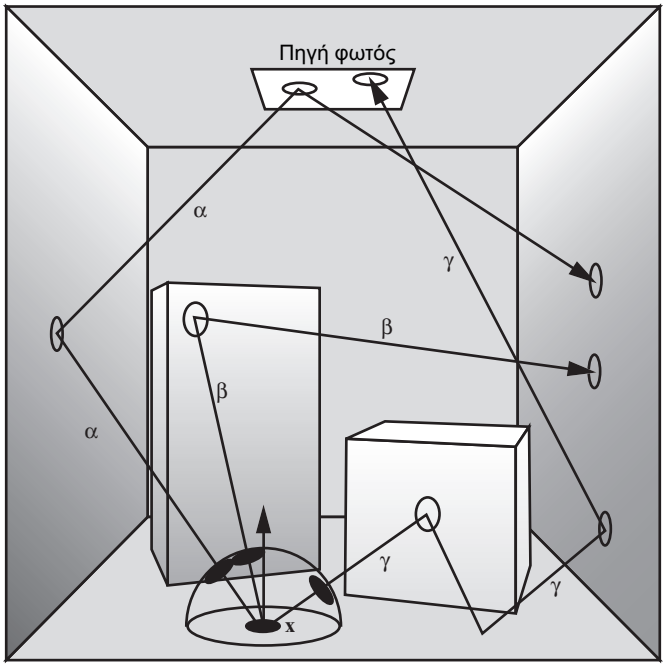
$$I_{\mathrm{RR}} = \int_0^P \frac{1}{P} f(\frac{x}{P})dx,$$

με $P \leq 1$ (Σχήμα 16.9).

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Monte Carlo για τον υπολογισμό του νέου ολοκληρώματος με μία ομοιόμορφη κατανομή $p(x) = 1$ για την παραγωγή των δειγμάτων στο διάστημα $[0,1]$, παίρνουμε την ακόλουθη εκτιμήτρια για το ολοκλήρωμα I_{PP}:

$$\langle I_{\mathrm{RR}} \rangle = \begin{cases} \frac{1}{P} f(\frac{x}{P}) & \text{if } x \leq P, \\ 0 & \text{if } x > P. \end{cases}$$

Είναι εύκολο να πιστοποιήσουμε ότι η αναμενόμενη τιμή της $\langle I_{\mathrm{PP}} \rangle$ ισούται με I. Αν η $f(x)$ είναι άλλο ένα (αναδρομικά) φωλιασμένο ολοκλήρωμα, όπως στην περίπτωση της εξίσωσης φωτισμού εδώ, το αποτέλεσμα της εφαρμογής της ρώσικης ρουλέτας είναι ότι η αναδρομή σταματάει με πιθανότητα $\alpha = 1 - P$ σε κάθε σημείο υπολογισμού



Σχήμα 16.10: *Παρακολούθηση μονοπατιών με τη χρήση απλής στοχαστικής παρακολούθησης ακτίνων.*

της εξίσωσης φωτισμού. Η τιμή α αποκαλείται πιθανότητα απορρόφησης. Δείγματα που παράγονται στο διάστημα $[P, 1]$ θα παράγουν τιμές ίσες με 0, αλλά αυτό αντισταθμίζεται βαρύνοντας τα δείγματα του διαστήματος $[0, P]$ με έναν παράγοντα $1/P$. Έτσι η συνολική εκτιμήτρια παραμένει αμερόληπτη.

Αν το α είναι μικρό, η αναδρομή θα συνεχιστεί αρκετές φορές και η τελική εκτίμηση του φωτισμού θα είναι πιο ακριβής. Αν το α είναι μεγάλο, η αναδρομή θα τερματίσει συντομότερα, αλλά η εκτιμήτρια θα έχει μεγαλύτερη διασπορά. Για τον απλό αλγόριθμο παρακολούθησης μονοπατιών αυτό σημαίνει ότι είτε θα έχουμε ακριβή μονοπάτια μεγάλου μήκους είτε μικρά μονοπάτια και μικρότερης ακρίβειας αποτέλεσμα. Σε κάθε περίπτωση όμως, η εκτιμήτρια που θα πάρουμε θα είναι αμερόληπτη.

Με βάση την παραπάνω θεώρηση, μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε τιμή για το α και — ανάλογα — να ελέγξουμε το χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου. Στους αλγόριθμους ολικού φωτισμού πάντως είναι αρκετά κοινή πρακτική το $1 - \alpha$ να ισούται με την ημισφαιρική ανακλαστικότητα του υλικού μιας επιφάνειας (μέση λευκαύγεια - αντικειμενικό χρώμα). Έτσι οι σκοτεινές επιφάνειες θα απορροφούν ευκολότερα τα μονοπάτια ενώ οι ανοιχτόχρωμες θα έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα να δημιουργήσουν ένα νέο μονοπάτι εξ ανακλάσεως. Αυτό προφανώς είναι απόλυτα σύμφωνο και με τη φυσική συμπεριφορά των αντίστοιχων επιφανειών.

```
computeRadiance(x, dir)
    βρες το κοντινότερο σημείο τομής x της ακτίνας με τη σκηνή;
    estimatedRadiance = simpleStochasticRT(x, phi, theta);
    return(estimatedRadiance);

simpleStochasticRT (x, phi, theta)
    estimatedRadiance = 0;
    αν (δεν έχουμε απορρόφηση)              // ρώσικη ρουλέτα
        για όλα τα μονοπάτια                // N ακτίνες
            πάρε δείγμα στην κατεύθυνση phi_i, theta_i του ημισφαιρίου;
            y = trace(x, phi_i, theta_i);
            estimatedRadiance +=
                simpleStochasticRT(y, phi_i, theta_i)*BRDF
                    *cos(theta_i)/pdf(phi_i, theta_i);
        estimatedRadiance /= #μονοπατιών;
        estimatedRadiance /= (1-absorption);
    estimatedRadiance += Le(x, phi_i, theta_i);
    return(estimatedRadiance);
```

Αλγόριθμος 16.4: *Αλγόριθμος απλής στοχαστικής παρακολούθησης ακτίνων.*

Απλή στοχαστική παρακολούθηση ακτίνων

Ο πλήρης αλγόριθμος για την απλή στοχαστική παρακολούθηση ακτίνων δίνεται στον Αλγόριθμο 16.4 και παρουσιάζεται στο Σχήμα 16.10. Ξεκινώντας από το σημείο **x** ανιχνεύονται μονοπάτια μέσα στη σκηνή. Το μονοπάτι α συνεισφέρει στον υπολογισμό της λαμπρότητας στο **x**,δεδομένου ότι απορροφάται αφού πρώτα ανακλαστεί στην επιφάνεια της πηγής φωτός και άρα μαζέψει από αυτή μη μηδενική λαμπρότητα. Το μονοπάτι γ συμβάλλει κι αυτό στο φωτισμό του **x**, έστω κι αν απορροφάται στην επιφάνεια της πηγής. Το μονοπάτι β δε συνεισφέρει τίποτα, με δεδομένο ότι απορροφάται πριν φτάσει σε πηγή φωτός.

16.5.2 Συνδυάζοντάς τα όλα μαζί

Έχουμε πλέον όλους τους αλγόριθμους στη διάθεσή μας για να κατασκευάσουμε μια πλήρη μέθοδο ολικού φωτισμού με τη χρήση στοχαστικής παρακολούθησης μονοπατιών. Η αποδοτικότητα κι η ακρίβεια του ολοκληρωμένου αλγορίθμου θα εξαρτηθεί από τις παρακάτω ρυθμίσεις:

Αριθμός πρωτευουσών ακτίνων. Ο αριθμός N_p των ακτίνων που εκπέμπονται από το κέντρο προβολής μέσα από το κάθε εικονοστοιχείο, ή γενικότερα, το πεδίο στήριξης της $h(\mathbf{p})$ (Εξίσωση (16.35)). Ένας μεγάλος αριθμός από πρωτεύουσες ακτίνες εξαλείφει τα σφάλματα ταύτισης και μειώνει το θόρυβο.

Άμεσος φωτισμός. Για τον άμεσο φωτισμό έχουμε στη διάθεσή μας μια σειρά από επιλογές, οι οποίες επηρεάζουν τη συνολική απόδοση του αλγορίθμου και είναι οι ακόλουθες:

- ο συνολικός αριθμός N_d των ακτίνων σκιών που εκπέμπονται από κάθε σημείο $\mathbf{x}$·
- ο τρόπος επιλογής μιας πηγής ανάμεσα σε πολλαπλές πηγές φωτός για κάθε ακτίνα σκιών·
- η κατανομή των ακτίνων σκιών πάνω στην επιφάνεια μιας πηγής φωτός.

Έμμεσος φωτισμός. Ο όρος του έμμεσου φωτισμού συνήθως υλοποιείται με δειγματοληψία του ημισφαιρίου πάνω από το σημείο:

- αριθμός ακτίνων έμμεσου φωτισμού N_i που κατανέμονται στο ημισφαίριο $\Omega_{\mathbf{x}}$·
- ακριβής μορφή κατανομής των ακτίνων στο ημισφαίριο·
- πιθανότητες απορρόφησης για τη μέθοδο της ρώσικης ρουλέτας με σκοπό τον έγκαιρο τερματισμό της αναδρομής.

Ο πλήρης αλγόριθμος για τον υπολογισμό του ολικού φωτισμού σε όλη την εικόνα δίνεται σε απλοποιημένη έκδοση στον Αλγόριθμο 16.5.

Είναι σαφές ότι με όσες περισσότερες ακτίνες δειγματοληπτήσουμε το χώρο από κάθε σημείο, τόσο πιο ακριβές θα είναι το αποτέλεσμα. Επιπλέον, όσο καλύτερη χρήση κάνουμε στη δειγματοληψία με βάση τη σπουδαιότητα (importance sampling), τόσο καλύτερη εικόνα θα πάρουμε, με λιγότερο έντονο θόρυβο. Το ενδιαφέρον ερώτημα είναι το εξής: πώς κατανέμουμε τις ακτίνες, όταν έχουμε ένα συγκεκριμένο μέγιστο αριθμό από αυτές να ξοδέψουμε ανά εικονοστοιχείο, προκειμένου να πετύχουμε τη μέγιστη δυνατή ποιότητα εικόνας ολικού φωτισμού γι' αυτό τον αριθμό ακτίνων;

Η απάντηση εξακολουθεί να είναι ένα ανοιχτό ζήτημα στο χώρο των αλγορίθμων ολικού φωτισμού. Υπάρχουν κάποιες κοινά αποδεκτές «τυπικές» επιλογές που χρησιμοποιούνται παντού αλλά δεν υπάρχουν καθαροί κανόνες. Είναι γενικά αποδεκτό ότι οι συνεχείς διακλαδώσεις (δηλαδή η αναδρομική δημιουργία πολλαπλών ακτίνων από κάθε σημείο σε κάθε επίπεδο αναδρομής) δεν είναι αποδοτικές. Πράγματι, η παραγωγή ακτίνων ολοένα και αυξάνει γεωμετρικά όσο το βάθος αναδρομής μεγαλώνει, ενώ στην ουσία η επίδραση αυτών των δειγμάτων στο τελικό αποτέλεσμα μειώνεται. Για έμμεσο φωτισμό συχνά χρησιμοποιείται ένας συντελεστής διακλάδωσης ίσος με 1 μετά το πρώτο επίπεδο. Πολλές υλοποιήσεις περιορίζουν τον αριθμό των ακτίνων σε μία ανά σημείο τομής με επιφάνεια, αλλά αντισταθμίζουν αυτό το γεγονός παράγοντας περισσότερες ακτίνες στο πρώτο επίπεδο (πρωτεύουσες ακτίνες). Αυτή η προσέγγιση είναι γνωστή ως *παρακολούθηση μονοπατιού* (path tracing): εκπέμπονται πολλά μονοπάτια χωρίς διακλαδώσεις, με εξαίρεση τις ακτίνες άμεσου φωτισμού. Καθένα μονοπάτι από μόνο του αποτελεί μια κακή εκτίμηση της συνολικής αντιληπτής λαμπρότητας από τον παρατηρητή, αλλά πολλά μονοπάτια μαζί δίνουν μια καλή προσέγγιση.

16.5.3 Αμφίδρομη παρακολούθηση ακτίνων⊛

Η στοχαστική παρακολούθηση ακτίνων ακολουθεί μονοπάτια μέσα στη σκηνή ξεκινώντας από τα σημεία επί των επιφανειών, τα οποία τελικά καταλήγουν στις πηγές

```
computeImage(eye)
    για κάθε εικονοστοιχείο
        radiance = 0;
        H = integral(h(p));
        για κάθε δείγμα               // Np πρωτεύουσες ακτίνες
            επέλεξε δείγμα p στο πεδίο στήριξης της h;
            κατασκεύασε μια ακτίνα από τον παρατηρητή eye,
                με κατεύθυνση προς το p;
            radiance = radiance + rad(ray)*h(p);
        radiance = radiance/(#δειγμάτων*H);

rad(ray)
    βρες το κοντινότερο σημείο τομής x της ακτίνας με τη σκηνή;
    return Le(x,dir) + computeRadiance(x, dir);

computeRadiance(x, dir)
    estimatedRadiance += directIllumination(x, dir);
    estimatedRadiance += indirectIllumination(x, dir);
    return(estimatedRadiance);

directIllumination (x, dir)
    estimatedRadiance = 0;
    για όλες τις ακτίνες σκιών        // Nd ακτίνες σκιών
        επέλεξε μια πηγή φωτός k;
        πάρε ένα δείγμα (σημείο) y πάνω στην πηγή k;
        estimatedRadiance +=
            Le * BRDF * G(x,y) * V(x,y) /(pdf(k)pdf(y|k));
    estimatedRadiance = estimatedRadiance / #μονοπατιών;
    return(estimatedRadiance);

indirectIllumination (x, dir)
    estimatedRadiance = 0;
    αν (δεν έχουμε απορρόφηση)               // ρώσικη ρουλέτα
        για όλα τα έμμεσα μονοπάτια          // Ni ακτίνες
            πάρε δείγμα στην τυχαία κατεύθυνση
                randomDirection του ημισφαιρίου;
            y = trace(x, randomDirection);
            estimatedRadiance +=
                compute_radiance(y, randomDirection) *
                    BRDF * cos / pdf(randomDirection);
        estimatedRadiance = estimatedRadiance / #μονοπατιών;
    return(estimatedRadiance/(1-absorption));
```

Αλγόριθμος 16.5: *Ο πλήρης αλγόριθμος ολικού φωτισμού.*

φωτός (ανεξάρτητα από το αν γίνεται ρητά δειγματοληψία των πηγών). Η *παρακολούθηση φωτός*, μια παραλλαγή του αλγόριθμου παρακολούθησης μονοπατιών, υλοποιεί την αντίστροφη διαδικασία: δημιουργούνται μονοπάτια από τις πηγές φωτός και καταγράφονται οι συνεισφορές τους στα εικονοστοιχεία που ορισμένα από αυτά καταλήγουν. Στην ουσία πρόκειται για το δυϊκό αλγόριθμο της στοχαστικής παρακολούθησης ακτίνων.

Η *αμφίδρομη παρακολούθηση ακτίνων* συνδυάζει και τις δύο προσεγγίσεις σ' έναν ενιαίο αλγόριθμο δύο περασμάτων τα οποία είναι πεπλεγμένα μεταξύ τους. Η αμφίδρομη παρακολούθηση ακτίνων παράγει μονοπάτια που ξεκινούν ταυτόχρονα από τις πηγές φωτός *και* τα σημεία τομής πάνω στις επιφάνειες, και συνδέει τα δύο μονοπάτια στο μέσο της πορείας τους προκειμένου να βρει την ενέργεια που μεταδίδεται μεταξύ μιας πηγής και του σημείου στο οποίο υπολογίζεται η λαμπρότητα. Η αμφίδρομη παρακολούθηση ακτίνων αναπτύχθηκε ανεξάρτητα τόσο από τον Lafortune [Lafo94] όσο και από τον Veach [Veac94].

Η κεντρική ιδέα του αλγορίθμου είναι ότι υπάρχει η επιλογή μεταξύ δύο γεννητριών κατά τον υπολογισμό της φαινόμενης ισχύος μέσα από ένα εικονοστοιχείο με τη μέθοδο Monte Carlo:

- Παρακολουθείται ένα μονοπάτι από τον παρατηρητή το οποίο ξεκινά από το πρώτο σημείο τομής της πρωτεύουσας ακτίνας με τη σκηνή $\mathbf{y}_0$. Αν το συνολικό μήκος του μονοπατιού έχει μήκος k, το μονοπάτι αποτελείται από μια σειρά από σημεία επιφανειών $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$. Το μήκος του μονοπατιού ελέγχεται με τη μέθοδο της ρώσικης ρουλέτας. Η πιθανότητα να προκύψει αυτό το μονοπάτι είναι η συνδυασμένη πιθανότητα όλων των τιμών των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας σε κάθε διαδοχικό σημείο του μονοπατιού.

- Παρόμοια ένα μονοπάτι από το φως μήκους l παράγεται ξεκινώντας από την πηγή φωτός. Αυτό το μονοπάτι, $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_l$, ακολουθεί κι αυτό την αντίστοιχη κατανομή.

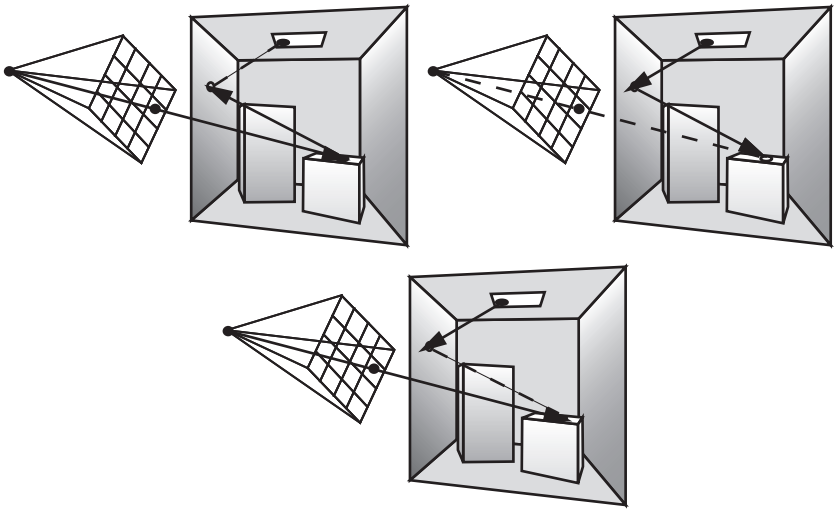
Συνδέοντας το άκρο $\mathbf{y}_k$ του μονοπατιού από τον παρατηρητή με το άκρο του μονοπατιού $\mathbf{x}_l$ από το φως, δημιουργείται ένα συνολικό μονοπάτι μήκους $k+l+1$ μεταξύ του εικονοστοιχείου και κάθε φωτεινής πηγής. Η ΣΠΠ αυτού του μονοπατιού είναι το γινόμενο των επιμέρους ΣΠΠ των σημείων στα δύο μονοπάτια.

Επομένως, μια εκτιμήτρια για τη λαμπρότητα μέσα από ένα εικονοστοιχείο, χρησιμοποιώντας αυτό το ενιαίο μονοπάτι, δίνεται από τη σχέση

$$L = \frac{K}{\mathrm{pdf}(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k, \mathbf{x}_l, \ldots, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0)}, \tag{16.37}$$

με

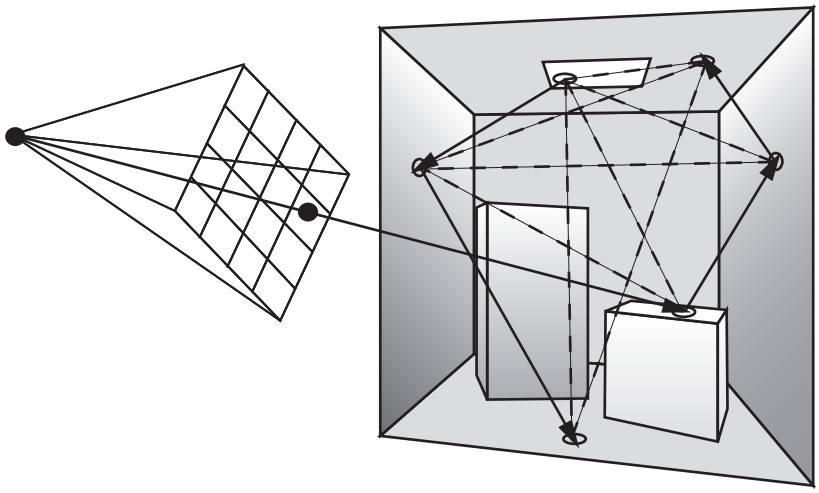
$$\begin{aligned} K = L_e(\mathbf{x}_0, \ldots) G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) V(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) f_r(\mathbf{x}_1, \ldots) \ldots \\ G(\mathbf{x}_l, \mathbf{y}_k) V(\mathbf{x}_l, \mathbf{y}_k) f_r(\mathbf{y}_k, \ldots) \ldots \\ f_r(\mathbf{y}_1, \ldots) G(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_0) V(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_0) h(\mathbf{p}). \end{aligned} \tag{16.38}$$



Σχήμα 16.11: *Διάφοροι συνδυασμοί για ένα μονοπάτι μήκους 3. Πάνω αριστερά: το μονοπάτι από τον παρατηρητή έχει μήκος 2, ενώ από το φως έχει μήκος 0. Μέση: και τα δύο μονοπάτια έχουν μήκος 1. Πάνω δεξιά: το μονοπάτι από τον παρατηρητή έχει μήκος 0, ενώ από το φως έχει μήκος 2.*

Μπορούν πλέον να καθοριστούν μονοπάτια με συγκεκριμένο μήκος χρησιμοποιώντας διάφορους συνδυασμούς τμημάτων. Για παράδειγμα, ένα μονοπάτι μήκους 3 μπορεί να προκύψει από ένα μονοπάτι από την πηγή μήκους 2 και ένα μονοπάτι από τον παρατηρητή μήκους 0· ή από ένα μονοπάτι μήκους 1 τόσο από την πηγή όσο και από τον παρατηρητή· ή από ένα μονοπάτι μήκους 0 (απλά ένα σημείο πάνω στην πηγή φωτός) και ένα μονοπάτι από τον παρατηρητή μήκους 2. Αυτοί οι διαφορετικοί συνδυασμοί παραγωγής μονοπατιού, με δεδομένο μήκος, φαίνονται και στο Σχήμα 16.11.

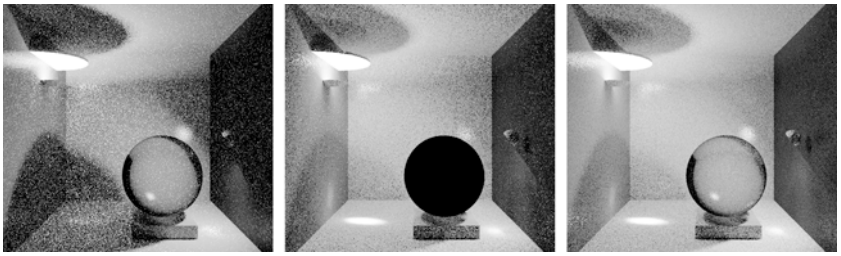
Ανάλογα με τον τρόπο μετάδοσης του φωτός που χρησιμοποιούμε και την ακολουθία των συναρτήσεων G, V και f_r, κάποια εφέ φωτισμού αποδίδονται καλύτερα είτε με μονοπάτια από τον παρατηρητή είτε με μονοπάτια από την πηγή. Για παράδειγμα, όταν σχεδιάζεται μια κατοπτρική έκλαμψη σε γυαλιστερή επιφάνεια η οποία είναι εμφανής στην εικόνα, είναι προτιμότερο να δημιουργήσουμε τα δείγματα στην πλευρά του μονοπατιού από τον παρατηρητή. Παρομοίως, οι εκλάμψεις που προκαλούνται από καυστικές ακτίνες είναι προτιμότερο να παραχθούν στην πλευρά του μονοπατιού από την πηγή φωτός. Γενικά, είναι καλύτερα να χρησιμοποιείται η BRDF f_r για τη δειγματοληψία του επόμενου σημείου ή της κατεύθυνσης, αν η f_r εμφανίζει απότομες κορυφώσεις. Αν η f_r προκαλεί κυρίως διάχυση, η μετάδοση ενέργειας στη σύνδεση μεταξύ των δύο μονοπατιών δε θα επηρεαστεί από την τιμή της BRDF και επομένως — κατά πάσα πιθανότητα — δε θα έχει χαμηλή συνεισφορά στη συνολική εκτίμηση της λαμπρότητας. Ένα άλλο πλεονέκτημα είναι ότι αν έχουμε κρυφές (ως προς τον παρατηρητή) πηγές, ενδέχεται να είναι ευκολότερο να παράγουμε μονοπάτια από την πλευρά του φωτός για την κατανομή της ενέργειάς του στο χώρο (αντί να βασιστούμε στο να μας οδηγήσουν οι ακτίνες σκιών στις πηγές αυτές).



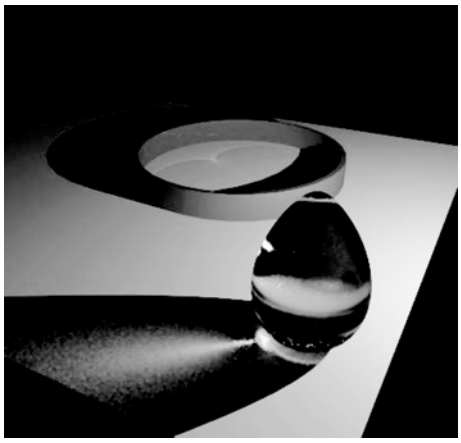
Σχήμα 16.12: *Επαναχρησιμοποίηση όλων των τμημάτων των μονοπατιών από τον παρατηρητή και το φως σ' έναν αλγόριθμο αμφίδρομης παρακολούθησης ακτίνων.*

Όταν υλοποιούμε μια αμφίδρομη παρακολούθηση ακτίνων, ένα μονοπάτι μήκους $k-1$, είτε από την πηγή είτε από τον παρατηρητή, μπορεί να επεκταθεί σ' ένα νέο, μήκους k. Επομένως χρησιμοποιούμε ένα υπολογισμένο τμήμα ενός μονοπατιού πάνω από μία φορά. Διαισθητικά, αυτό σημαίνει ότι αν έχουμε ένα μονοπάτι από το φως και ένα από τον παρατηρητή, δε συνδέουμε μόνο τα άκρα τους, αλλά όλα τα δυνατά μονοπάτια μεταξύ τους (Σχήμα 16.12). Σ' αυτή την περίπτωση πρέπει να προσέξουμε οι εκτιμήτριες Monte Carlo να συνεχίσουν να είναι σωστές. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με το βέλτιστο συνδυασμό των μεθόδων δειγματοληψίας των δύο κλάδων. Περισσότερες λεπτομέρειες και μια εκτενή συζήτηση για το θέμα μπορεί κανείς να βρει στην [Veac97].

Το Σχήμα 16.13 απεικονίζει μια απλή σκηνή όπως αυτή έχει σχεδιαστεί με στοχαστική παρακολούθηση ακτίνων, παρακολούθηση φωτός και αμφίδρομη παρακολούθηση ακτίνων. Σε όλες τις εικόνες ο αριθμός των μονοπατιών είναι ο ίδιος, οπότε χρειάστηκε ο ίδιος χρόνος για να υπολογιστεί το αποτέλεσμα. Το Σχήμα 16.14 δείχνει μια εικόνα που δημιουργήθηκε με αμφίδρομη παρακολούθηση ακτίνων στην οποία υπάρχει πολύ



Σχήμα 16.13: *Αριστερά: στοχαστική παρακολούθηση ακτίνων. Μέση: αμφίδρομη παρακολούθηση ακτίνων μόνο με μονοπάτια από την πηγή. Δεξιά: πλήρης αμφίδρομη παρακολούθηση ακτίνων.*



Σχήμα 16.14: *Αμφίδρομη παρακολούθηση ακτίνων. Παρατηρήστε τις εκτενείς καυστικές ακτίνες, ένα φαινόμενο που είναι δύσκολο να πετύχουμε με στοχαστική παρακολούθηση ακτίνων.*

έντονη παρουσία καυστικών ακτίνων. Η ίδια εικόνα θα είχε πάρει πολύ περισσότερο χρόνο να παραχθεί με την ίδια ποιότητα αν χρησιμοποιούσαμε μόνο στοχαστική παρακολούθηση ακτίνων.

16.5.4 Απεικόνιση φωτονίων⊛

Η απεικόνιση φωτονίων (photon mapping), η οποία προτάθηκε από τον Jensen [Jens01, Jens95, Jens96b, Jens96a], είναι ένας εύρωστος και πρακτικός αλγόριθμος δύο περασμάτων, ο οποίος, όπως και η αμφίδρομη παρακολούθηση μονοπατιών, παρακολουθεί μονοπάτια τόσο από τον παρατηρητή όσο και από τις πηγές. Αντίθετα όμως από την αμφίδρομη παρακολούθηση ακτίνων, αυτή η προσέγγιση αποθηκεύει και επαναχρησιμοποιεί τις τιμές φωτισμού αυξάνοντας πολύ την απόδοση. Στο πρώτο πέρασμα, εκπέμπονται *φωτόνια* (σωματίδια) από τις πηγές και παρακολουθείται η πορεία τους μέσα στη σκηνή. Αυτά τα φωτόνια, τα οποία μεταφέρουν πληροφορία ισχύος, αποθηκεύονται σε μια ειδική δομή, την *εικόνα φωτονίων* (photon map). Στο δεύτερο πέρασμα σχεδιάζεται η τελική εικόνα, επαναχρησιμοποιώντας την πληροφορία που είναι αποθηκευμένη στην εικόνα φωτονίων.

Η τεχνική της απεικόνισης φωτονίων αποσυσχετίζει την αποθήκευση της ενέργειας των φωτονίων και την παραμετροποίηση των επιφανειών. Αυτή η αναπαράσταση επιτρέπει στην απεικόνιση φωτονίων να εργάζεται με οποιαδήποτε μορφή γεωμετρικών δεδομένων — ακόμα και με συναρτησιακά παραγόμενη γεωμετρία — αυξάνοντας έτσι τη χρησιμότητα της μεθόδου. Επιπλέον, σε αντίθεση με άλλες μεθόδους, δεν επηρεάζεται από τυχόν προβλήματα στην κατασκευή και υποδιαίρεση των πολυγωνικών επιφανειών.

Παρακολουθώντας ή αποθηκεύοντας μόνο συγκεκριμένους τύπους σωματιδίων (δηλαδή αυτούς που ακολουθούν μονοπάτια ειδικού, κάθε φορά, τύπου από την πηγή), είναι δυνατό να παράγουμε εξειδικευμένες εικόνες φωτονίων, οι οποίες αφορούν

ένα συγκεκριμένο σκοπό. Το καλύτερο παράδειγμα αυτής της διάκρισης είναι η *εικόνα καυστικών ακτίνων*, η οποία είναι σχεδιασμένη έτσι ώστε να καταγράφει φωτόνια που αλληλεπιδρούν με μία ή περισσότερες κατοπτρικές επιφάνειες πριν συγκρουστούν με μια σκεδαστική επιφάνεια. Στη φύση αυτές οι τροχιές παράγουν καυστικές ακτίνες. Η κλασική δειγματοληψία Monte Carlo μπορεί να αργήσει πάρα πολύ να συγκλίνει σε μια εικόνα που απεικονίζει αυτό το φαινόμενο. Καταγράφοντας όμως αποκλειστικά μόνο τέτοια μονοπάτια σε μια εικόνα καυστικών ακτίνων, η τεχνική της απεικόνισης φωτονίων μπορεί πολύ αποδοτικά να αποδώσει το φαινόμενο των καυστικών ακτίνων με αρκετή πιστότητα.

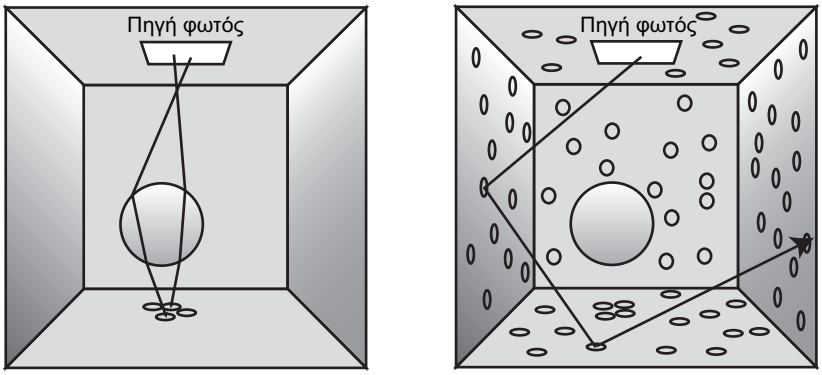
Ένα σημείο που χρήζει προσοχής είναι ότι η απεικόνιση φωτονίων είναι μια μεροληπτική τεχνική. Θυμηθείτε ότι, σε μια τέτοια περίπτωση, η μεροληψία είναι η πιθανή διαφορά μεταξύ της πραγματικής τιμής του ολοκληρώματος και της αναμενόμενης τιμής της εκτιμήτριας. Ωστόσο, από τη στιγμή που οι εικόνες φωτονίων δε χρησιμοποιούνται απευθείας στο τελικό αποτέλεσμα αλλά στον υπολογισμό του έμμεσου φωτισμού, μια αύξηση των φωτονίων εξαφανίζει τα περισσότερα σφάλματα.

Πέρασμα 1: Παρακολούθηση φωτονίων.

Η χρήση μικρών δομών, οι οποίες παριστάνουν σημειακά φωτόνια, για τη μετάδοση της ισχύος μέσα στη σκηνή είναι το κλειδί για την αποδοτικότητα της απεικόνισης φωτονίων. Στο πρώτο πέρασμα, δημιουργούνται και παρακολουθούνται φωτόνια από τις πηγές με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως οι ακτίνες στον αλγόριθμο παρακολούθησης ακτίνων· δηλαδή μεταδίδονται (και διαθλώνται), ανακλώνται, και απορροφώνται. Για τη μετάδοση των φωτονίων χρησιμοποιούνται όλες οι τυπικές τεχνικές που είδαμε στις προηγούμενες ενότητες, όπως η ρώσικη ρουλέτα και η δειγματοληψία Monte Carlo. Όταν τα φωτόνια συναντούν μη κατοπτρικές επιφάνειες, αποθηκεύονται στην εικόνα φωτονίων. Για να γίνει γρηγορότερη η αναζήτηση των καταγεγραμμένων φωτονίων στο επόμενο πέρασμα, η εικόνα φωτονίων υλοποιείται συνήθως ως ένα ζυγισμένο kd-δένδρο.

Όπως ειπώθηκε και προηγουμένως, η απεικόνιση φωτονίων είναι πολύ αποδοτική για τον υπολογισμό των καυστικών ακτίνων. Μια καυστική ακτίνα σχηματίζεται όταν το φως, μετά από μετάδοση ή ανάκλαση σε μία ή περισσότερες κατοπτρικές επιφάνειες, φτάνει σε μια σκεδαστική επιφάνεια. Για τη βελτίωση της σχεδίασης σκηνών που περιλαμβάνουν καυστικές ακτίνες, ο αλγόριθμος πραγματοποιεί τον υπολογισμό τους χωριστά από τα υπόλοιπα φαινόμενα ολικού φωτισμού. Συνεπώς για κάθε σκηνή δημιουργούνται δύο εικόνες φωτονίων, μια εικόνα καυστικών ακτίνων και μια εικόνα φωτονίων ολικού φωτισμού (Σχήμα 16.15).

Οι εικόνες φωτονίων για καυστικές ακτίνες μπορούν να υπολογιστούν πολύ αποδοτικά, γιατί οι καυστικές ακτίνες προκαλούνται όταν το φως είναι εστιασμένο· συνεπώς δεν απαιτούνται πολλά φωτόνια για να πάρουμε μια καλή εκτίμηση της συγκέντρωσης καυστικών ακτίνων. Επιπρόσθετα, ο αριθμός των επιφανειών οι οποίες προκαλούν καυστικές ακτίνες, είναι μικρός σε μια τυπική σκηνή. Η μεγάλη απόδοση της εικόνας καυστικών ακτίνων προκύπτει αποστέλλοντας ακτίνες μόνο σε επιφάνειες με



Σχήμα 16.15: *Εικόνα καυστικών ακτίνων και εικόνα ολικού φωτισμού. Η εικόνα καυστικών ακτίνων καταγράφει φωτόνια που μεταδίδονται στη σκηνή από κατοπτρικές επιφάνειες, ενώ η εικόνα ολικού φωτισμού περιέχει φωτόνια από όλα τα μονοπάτια μετάδοσης.*

κατοπτρική ανακλαστικότητα.

Η ανακλώμενη λαμπρότητα σε κάθε σημείο της σκηνής μπορεί να υπολογιστεί με βάση την εικόνα φωτονίων ως εξής: η εικόνα φωτονίων παριστάνει την εισερχόμενη ισχύ σε κάθε σημείο της σκηνής· άρα, η πυκνότητα των φωτονίων σ' ένα σημείο καθορίζει το φωτισμό (irradiance) σ' αυτό. Η ανακλώμενη λαμπρότητα μπορεί να υπολογιστεί πολλαπλασιάζοντας τον εισερχόμενο φωτισμό με τη BRDF της επιφάνειας.

Για τον υπολογισμό της πυκνότητας των φωτονίων σ' ένα σημείο, αναζητούμε τα n κοντινότερα φωτόνια που είναι αποθηκευμένα στην εικόνα φωτονίων. Στη συνέχεια υπολογίζεται η πυκνότητα των φωτονίων προσθέτοντας την ισχύ από αυτά τα n φωτόνια και διαιρώντας τη με την προβολή στο επίπεδο του σημείου της σφαίρας μέσα στην οποία εντοπίστηκαν τα n φωτόνια.

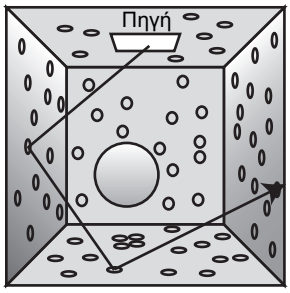
Πέρασμα 2: Υπολογισμός της εικόνας.

Η απλούστερη χρήση της εικόνας φωτονίων θα ήταν να απεικονίσουμε κατευθείαν την υπολογισμένη λαμπρότητα σε κάθε ορατό, από την οπτική γωνία του παρατηρητή, σημείο. Όμως, αυτή η απεικονιστική τακτική θα είχε ως αποτέλεσμα το υπερβολικό θόλωμα της λαμπρότητας και άρα την παραγωγή μιας εικόνας αρκετά χαμηλής ποιότητας (εκτός και αν χρησιμοποιούσαμε πάρα πολλά φωτόνια). Οι εικόνες φωτονίων είναι πιο αποτελεσματικές αν συνδυαστούν μ' έναν αλγόριθμο παρακολούθησης ακτίνων, ο οποίος υπολογίζει τον άμεσο φωτισμό και ζητάει πληροφορία από την εικόνα φωτονίων μόνο μετά από την πρώτη αναπήδηση των ακτίνων από τον παρατηρητή προς τη σκηνή.

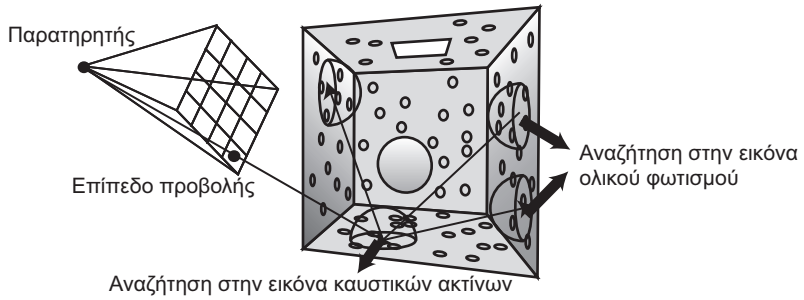
Η τελική σχεδίαση της εικόνας θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί ως εξής: παρακολουθούνται ακτίνες μέσα από κάθε εικονοστοιχείο προκειμένου να βρεθούν τα κοντινότερα σημεία επιφανειών ως προς τον παρατηρητή. Η υπολογισμένη λαμπρότητα για ένα ορατό σημείο χωρίζεται σε συνιστώσες άμεσου φωτισμού, κατοπτρικού

φωτισμού, φωτισμού εξαιτίας καυστικών ακτίνων και ολικού φωτισμού. Καθεμία από τις παραπάνω συνιστώσες υπολογίζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

- Ο άμεσος φωτισμός για τις ορατές επιφάνειες υπολογίζεται με δειγματοληψία Monte Carlo.
- Οι κατοπτρικές ανακλάσεις και το διαθλώμενο φως εξάγεται με τυπική παρακολούθηση ακτίνων.
- Οι καυστικές ακτίνες υπολογίζονται από την εικόνα καυστικών φωτονίων.
- Ο υπόλοιπος ολικός φωτισμός υπολογίζεται δειγματοληπτώντας το ημισφαίριο πάνω από το σημείο. Εκεί που οι ακτίνες που αποστέλλονται μέσα στο ημισφαίριο συναντούν άλλες επιφάνειες, χρησιμοποιείται ο υπολογισμένος φωτισμός από την εικόνα φωτονίων ολικού φωτισμού.



Πέρασμα 1: Εκπομπή φωτονίων



Πέρασμα 2: Εύρεση κοντινότερων γειτόνων

Σχήμα 16.16: *Τα δύο περάσματα της μεθόδου απεικόνισης φωτονίων στη σκηνή «Cornel Box» με μια σφαίρα από γυαλί. Κατά το πρώτο πέρασμα γεννώνται και παρακολουθούνται φωτόνια, τα οποία στη συνέχεια αποτίθενται στις σκεδαστικές επιφάνειες. Κατά το δεύτερο πέρασμα χρησιμοποιώντας την εικόνα φωτονίων ολικού φωτισμού, υπολογίζεται ο έμμεσος φωτισμός. Για κάθε ακτίνα που εκπέμπεται σε αυτή τη φάση εντοπίζονται τα κοντινότερα φωτόνια. Η αντίστοιχη διαδικασία γίνεται για τη δημιουργία εκλάμψεων από τις καυστικές ακτίνες, χρησιμοποιώντας την εικόνα καυστικών ακτίνων αυτή τη φορά. Για τον άμεσο φωτισμό και το φως από ανάκλαση και διάθλαση χρησιμοποιείται παρακολούθηση ακτίνων.*

Στο Σχήμα 16.16 φαίνονται τα δύο παραπάνω περάσματα της μεθόδου απεικόνισης φωτονίων.

16.6 Radiosity

Σε προηγούμενη ενότητα, καταλήξαμε στο γραμμικό σύστημα εξισώσεων radiosity για να περιγράψουμε την ισορροπία ενέργειας στη σκηνή. Στην τρέχουσα ενότητα θα δούμε διάφορες στρατηγικές επίλυσης του προβλήματος αυτού.

16.6.1 Κλασσική μέθοδος Radiosity

Η κλασσική μέθοδος radiosity αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

1. Διαμέριση της αρχικής γεωμετρίας της σκηνής σε διακριτά τμήματα επιφάνειας i. Για κάθε τμήμα επιφάνειας i, θα υπολογιστεί μια τιμή για τη radiosity B_i.

2. Υπολογισμός των συντελεστών αλληλεπίδρασης F_{ij} για κάθε ζεύγος τμημάτων επιφάνειας i και j (Εξίσωση (16.19)).

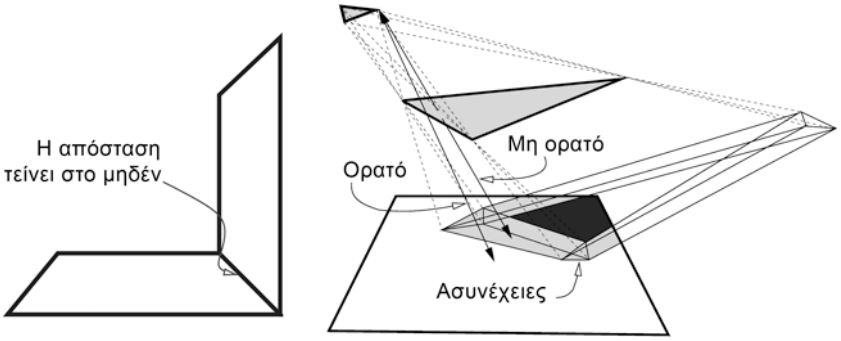
3. Αριθμητική επίλυση του συστήματος radiosity (Εξίσωση (16.18)).

4. Απεικόνιση της λύσης με χρήση οποιουδήποτε αλγόριθμου μπορεί να σχεδιάσει πολύγωνα μ' ένα προκαθορισμένο χρώμα ακτινοβολίας (υπολογισμένη radiosity) B_i.

Στις πρακτικές υλοποιήσεις της μεθόδου radiosity, αυτά τα βήματα συνδέονται σε μεγάλο βαθμό. Για παράδειγμα, οι συντελεστές αλληλεπίδρασης υπολογίζονται μόνον όταν χρειάζονται για την επίλυση του συστήματος· τα ενδιάμεσα αποτελέσματα της επίλυσης του συστήματος μπορούν να σχεδιαστούν επί της τελικής εικόνας· κατά την προσαρμοστική ή ιεραρχική μέθοδο radiosity [Cohe86, Hanr91], η κατάτμηση των επιφανειών σε τμήματα γίνεται δυναμικά (κατά την επίλυση του συστήματος), κλπ.

Καθένα από τα παραπάνω βήματα της κλασσικής μεθόδου radiosity δεν είναι καθόλου τετριμμένο. Με μια πρώτη ματιά, θα περίμενε κανείς ότι το Βήμα 3, δηλαδή η επίλυση του συστήματος εξισώσεων radiosity, θα ήταν το κύριο πρόβλημα. Πράγματι, το μέγεθος των γραμμικών συστημάτων που πρέπει να λυθούν μπορεί να γίνει πολύ μεγάλο (μία εξίσωση ανά τμήμα επιφάνειας· 100.000 τμήματα ή περισσότερα για μια τυπική σκηνή). Όμως το σύστημα εξισώσεων έχει πολύ καλή συμπεριφορά έτσι, ώστε απλές επαναληπτικές μέθοδοι, όπως είναι η Jacobi ή η Gauss-Seidel, να συγκλίνουν μετά από μικρό αριθμό επαναλήψεων.

Τα κύρια προβλήματα της μεθόδου radiosity σχετίζονται α) με τη διαμέριση της σκηνής σε τμήματα επιφάνειας και β) με τον υπολογισμό των συντελεστών αλληλεπίδρασης. Τα τμήματα πρέπει να είναι αρκετά μικρά ώστε να εμφανίζουν σωστά τις αλλαγές φωτισμού (όπως τα όρια των σκιών). Μια από τις βασικές παραδοχές της μεθόδου radiosity είναι ότι η ακτινοβολία $B(x)$ πάνω σε ένα τμήμα επιφάνειας είναι κατά



Σχήμα 16.17: *Δυσκολίες υπολογισμού των συντελεστών αλληλεπίδρασης: το ολοκλήρωμα των συντελεστών περιέχει την αντίστροφη τετραγωνική απόσταση μεταξύ σημείων των δύο τμημάτων επιφάνειας. Αυτή προκαλεί ιδιομορφίες (singularities) για γειτονικά τμήματα. Αλλαγές στην ορατότητα μεταξύ των τμημάτων μπορούν να επιφέρουν ασυνέχειες διαφόρων βαθμών στη συνάρτηση προς ολοκλήρωση.*

προσέγγιση σταθερή. Ένας μεγάλος αριθμός από τμήματα εξασφαλίζει την ομαλότητα της εικόνας και καταστέλλει την εμφανή παρουσία διακριτών πολυγώνων στην εικόνα. Όμως ο αριθμός των τμημάτων επιφάνειας δε θα πρέπει να αυξάνει υπερβολικά, καθώς αυτό θα οδηγήσει σε πολύ μεγάλες απαιτήσεις σε μνήμη και υπερβολικούς χρόνους υπολογισμών. Για κάθε ζεύγος τμημάτων επιφάνειας πρέπει να υπολογιστεί ένας συντελεστής αλληλεπίδρασης. Αυτό σημαίνει πως ο τελικός αριθμός όλων των υπολογισμένων συντελεστών μπορεί να γιγαντωθεί, προκαλώντας ακόμα και προβλήματα αποθήκευσης. Ο υπολογισμός δε του καθενός συντελεστή αλληλεπίδρασης απαιτεί την επίλυση ενός μη τετριμμένου τετραπλού ολοκληρώματος (Εξίσωση (16.19)). Το ολοκλήρωμα αυτό θα απειρίζεται για γειτονικά τμήματα για τα οποία η απόσταση r_{xy} στον παρονομαστή της Εξίσωσης (16.4) μπορεί να γίνει 0. Η ποσότητα προς ολοκλήρωση ενδέχεται επίσης να εμφανίσει ασυνέχειες διαφόρων βαθμών λόγω της αλλαγής ορατότητας μεταξύ των τμημάτων (Σχήμα 16.17).

Έχει γίνει εκτεταμένη έρευνα για την αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων. Οι λύσεις που έχουν προταθεί περιλαμβάνουν εξειδικευμένους αλγόριθμους για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος των συντελεστών αλληλεπίδρασης, όπως είναι ο αλγόριθμος του ημικύβου (hemicube), η περικοπή δεσμίδων φωτός στην παρακολούθηση ακτίνων (shaft culling), η δυναμική διάσπαση πλέγματος, η προσαρμοστική και ιεραρχική υποδιαίρεση τμημάτων επιφάνειας, η ομαδοποίηση τμημάτων, διάφορες στρατηγικές προσωρινής αποθήκευσης των συντελεστών, η χρήση βεβαρημένης σπουδαιότητας με βάση την οπτική γωνία του παρατηρητή, καθώς και προσεγγίσεις υψηλότερου βαθμού της radiosity.

16.6.2 Συντελεστές αλληλεπίδρασης

Η ακτινοβολία B_i ενός μεμονωμένου τμήματος επιφάνειας i (βλ. Εξίσωση (16.18)) εκφράζεται ως:

$$B_i = B_{ei} + \rho_i \sum_j F_{ij} B_j. \tag{16.39}$$

Η B_i είναι το άθροισμα δύο συνιστωσών. Η πρώτη είναι η εγγενής (αυτόφωτη) ακτινοβολία B_{ei}. Η δεύτερη συνιστώσα είναι το ποσοστό της (προσπίπτουσας) ακτινοβολίας $\sum_j F_{ij} B_j$ στην επιφάνεια i που ανακλάται. Ο συντελεστής αλληλεπίδρασης F_{ij} φανερώνει το ποσοστό της εισερχόμενης ακτινοβολίας πάνω στην επιφάνεια i η οποία προέρχεται από το τμήμα επιφάνειας j.

Μπορούμε να ξαναγράψουμε την παραπάνω εξίσωση μετασχηματίζοντας την ακτινοβολία σε ισχύ: $\Phi_i = A_i B_i$ και $\Phi_{ei} = A_i B_{ei}$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με A_i και εκμεταλλευόμενοι τη συμμετρία μεταξύ F_{ij} και F_{ji}, παίρνουμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned}
& B_i = B_{ei} + \rho_i \sum_j F_{ij} B_j \\
\Leftrightarrow \quad & A_i B_i = A_i B_{ei} + \rho_i \sum_j A_i F_{ij} B_j \\
\Leftrightarrow \quad & A_i B_i = A_i B_{ei} + \rho_i \sum_j A_j F_{ji} B_j \\
\Leftrightarrow \quad & \Phi_i = \Phi_{ei} + \sum_j \Phi_j F_{ji} \rho_i.
\end{aligned} \tag{16.40}$$

Αυτό το σύστημα εξισώσεων δηλώνει ότι η συνολική ισχύς Φ_i που εκπέμπεται από ένα τμήμα επιφάνειας i αποτελείται από δύο μέρη: την εγγενή εκπεμπόμενη ισχύ Φ_{ei} και την ισχύ που λαμβάνεται απ' όλα τα άλλα τμήματα j και ανακλάται. Ο συντελεστής F_{ji} παριστάνει το ποσοστό της ισχύος που εκπέμπεται από το τμήμα j και φτάνει στο i.

Με δεδομένο ότι ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας, η συνολική ισχύς που εκπέμπεται από το i και λαμβάνεται από άλλα τμήματα j πρέπει να ισούται με Φ_i στο κλειστό περιβάλλον που είναι η σκηνή. Συνεπώς, μια σημαντική ιδιότητα των συντελεστών αλληλεπίδρασης είναι ότι αθροίζονται σε 1:

$$\sum_j F_{ij} = 1. \tag{16.41}$$

Η ερμηνεία που δώσαμε στο συντελεστή αλληλεπίδρασης F_{ij}, δηλαδή ότι αποτελεί το ποσοστό της ισχύος που εκπέμπεται από ένα τμήμα i, το οποίο φτάνει σ' ένα δεύτερο τμήμα επιφάνειας j, παραπέμπει στον υπολογισμό τέτοιων συντελεστών μέσω μιας απλής προσομοίωσης (Σχήμα 16.18). Έστω i η πηγή ενός αριθμού N_i από εικονικά σωματίδια (μικρά πακέτα ενέργειας) τα οποία ξεκινούν από μια σκεδαστική επιφάνεια. Ο αριθμός N_{ij} των σωματιδίων που φτάνουν στο δεύτερο τμήμα επιφάνειας j, μας δίνει μια εκτίμηση για το συντελεστή ισχύος: $F_{ij} \approx F_{ij} N_{ij} / N_i$. Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που ξεκινάει από μια θέση $\mathbf{x}$ πάνω στο S_i που έχει επιλεγεί με ομοιόμορφη κατανομή και μεταδίδεται προς μια κατεύθυνση με μια πιθανότητα εξαρτώμενη από το



Σχήμα 16.18: *Το ποσοστό των ημιευθειών που πετυχαίνουν ένα συγκεκριμένο τμήμα επιφάνειας προορισμού αποτελεί μια εκτίμηση του συντελεστή αλληλεπίδρασης μεταξύ εκπέμποντος τμήματος και τμήματος προορισμού.*

συνημίτονο της γωνίας μεταξύ της κατεύθυνσής του και του κανονικού διανύσματος N_x στο $\mathbf{x}$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(\mathbf{x}, \phi, \theta)$ είναι η

$$p(\mathbf{x}, \phi, \theta) = \frac{\cos(\theta)}{\pi A_i}. \tag{16.42}$$

Έστω $\chi_j(\mathbf{x}, \phi, \theta)$ μια συνάρτηση που παίρνει τιμή 1 ή 0 ανάλογα με το αν προσπίπτει το σωματίδιο ή όχι στην επιφάνεια j. Η πιθανότητα P_{ij} να πέσει το σωματίδιο στο τμήμα επιφάνειας j δίνεται τότε από την

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \int_{S_i} \int_{\Omega_x} \chi_j(\mathbf{x}, \phi, \theta) p(\mathbf{x}, \phi, \theta) dA_x d\omega & (16.43) \\ &= \frac{1}{A_i} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\cos(\theta_i)\cos(\theta_j)}{\pi r_{xy}^2} V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA_y dA_x & (16.44) \\ &= F_{ij}. & (16.45) \end{aligned}$$

Συνεπώς, όταν δημιουργούμε N_i σωματίδια στο τμήμα i, ο αναμενόμενος αριθμός προσκρούσεων στο τμήμα j ισούται με $N_i F_{ij}$. Όσα περισσότερα σωματίδια χρησιμοποιούμε, τόσο καλύτερα ο λόγος N_{ij}/N_i προσεγγίζει το συντελεστή F_{ij}. Η διασπορά της εκτιμήτριας είναι $F_{ij}(1 - F_{ij})/N_i$. Όπως ειπώθηκε και προηγουμένως, δε θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τους συντελεστές αλληλεπίδρασης αναλυτικά. Με δεδομένο ένα τμήμα επιφάνειας i, μπορούμε να διαλέξουμε ένα τμήμα j ανάμεσα σε όλα τα τμήματα της σκηνής, με πιθανότητα ίση με το συντελεστή αλληλεπίδρασης F_{ij}, αποστέλλοντας μια ακτίνα από το i.

16.6.3 Η επαναληπτική μέθοδος Jacobi για Radiosity®

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε την επαναληπτική μέθοδο Jacobi, μια πολύ διαδεδομένη μέθοδο επίλυσης του συστήματος radiosity, η οποία είναι μια μέθοδος για

την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων $\mathbf{x} = e + \mathbf{A}\mathbf{x}$ χρησιμοποιώντας ένα απλό επαναληπτικό σχήμα. Έστω ένα σύστημα με n εξισώσεις και n αγνώστους, όπου e, $\mathbf{x}$, και οποιαδήποτε προσέγγιση του $\mathbf{x}$ είναι n-διάστατα διανύσματα ή σημεία. Η βασική ιδέα είναι ότι ξεκινάμε από ένα τυχαίο αρχικό διάνυσμα $\mathbf{x}^{(0)}$. Σε κάθε επανάληψη, το τρέχον διάνυσμα $\mathbf{x}^{(k)}$ μετασχηματίζεται σ' ένα νέο $\mathbf{x}^{(k+1)}$ υπολογίζοντας τις $\mathbf{x}^{(k+1)} = e + \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, η ακολουθία των διαδοχικών διανυσμάτων $\mathbf{x}^{(k)}$ θα συγκλίνει πάντα στο ίδιο διάνυσμα $\mathbf{x}$, το οποίο είναι και η λύση του συστήματος. Η μέθοδος συγκλίνει εάν η φασματική ακτίνα του πίνακα $\mathbf{A}$ είναι αυστηρά μικρότερη του 1.

Ο πίνακας συντελεστών του συστήματος εξισώσεων ισχύος ή radiosity πληρεί την παραπάνω προϋπόθεση. Στη μέθοδο radiosity τα διανύσματα $\mathbf{x}$ και e αντιστοιχούν σε μια κατανομή ισχύος φωτός πάνω στις επιφάνειες της σκηνής. Κάθε βήμα της επαναληπτικής μεθόδου Jacobi αποτελείται από τον υπολογισμό μιας επιπρόσθετης αναπήδησης φωτός, ακολουθούμενη από την υπέρθεση της ισχύος που εγγενώς εκπέμπεται από ένα τμήμα επιφάνειας. Η λύση στην οποία καταλήγει η παραπάνω διαδικασία είναι η ισορροπία της κατανομής φωτισμού στη σκηνή.

Θα δούμε στη συνέχεια τρεις ελαφρώς διαφορετικούς τρόπους για το πως επαναλαμβανόμενα βήματα μονής αναπήδησης μπορούν να χρησιμοποιηθούν, προκειμένου να λύσουμε το πρόβλημα radiosity.

Ομοιόμορφη συγκέντρωση ακτινοβολίας

Καταρχήν, ας εφαρμόσουμε την παραπάνω ιδέα στο σύστημα εξισώσεων radiosity. Ως αρχική συνθήκη, μπορούμε να επιλέξουμε $B_i^{(0)} = B_{ei}$. Η επόμενη προσέγγιση $B_i^{(k+1)}$ προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τους αγνώστους στο δεξί μέλος των Εξισώσεων (16.18) με τις τιμές του προηγούμενου βήματος $B^{(k)}$:

$$\begin{aligned} B_i^{(0)} &= B_{ei}, \\ B_i^{(k+1)} &= B_{ei} + \rho_i \sum_j F_{ij} B_j^{(k)}. \end{aligned} \tag{16.46}$$

Ο υπολογισμός των στοχαστικών προσεγγίσεων των συντελεστών αλληλεπίδρασης F_{ij} που είδαμε προηγουμένως μπορεί να γίνει ταυτόχρονα για ένα σταθερό τμήμα επιφάνειας i. Τα αλλεπάλληλα βήματα της επαναληπτικής μεθόδου μπορούν να θεωρηθούν βήματα συγκέντρωσης ακτινοβολίας (gathering). Σε κάθε βήμα οι προηγούμενες προσεγγίσεις των τιμών radiosity $B_j^{(k)}$ για όλα τα τμήματα j *συγκεντρώνονται*, προκειμένου να υπολογίσουμε μια νέα προσέγγιση για την $B^{(k+1)}$ στο τμήμα i.

Ομοιόμορφη εκπομπή ισχύος

Όταν εφαρμόζουμε την επαναληπτική μέθοδο Jacobi στο σύστημα εξισώσεων ισχύος, προκύπτει μια παραλλαγή *εκπομπής ισχύος* (shooting):

$$\begin{aligned} \Phi_i^{(0)} &= \Phi_{ei}, \\ \Phi_i^{(k+1)} &= \Phi_{ei} + \sum_j \Phi_j^{(k)} F_{ji} \rho_i. \end{aligned} \tag{16.47}$$

Σε κάθε βήμα αυτού του αλγορίθμου η προσέγγιση της ισχύος $\Phi_i^{(k+1)}$ όλων των τμημάτων i, τα οποία είναι ορατά από το j, θα ενημερωθεί με βάση τη $\Phi_j^{(k)}$: Το τμήμα j *εκπέμπει* την ισχύ του προς όλα τα άλλα τμήματα i.

Αυξητική εκπομπή ισχύος

Κάθε επανάληψη ομοιόμορφης εκπομπής ισχύος στην παραπάνω παραλλαγή αντικαθιστά την προηγούμενη προσέγγιση της ισχύος $\Phi^{(k)}$ με μια καινούρια $\Phi^{(k+1)}$. Παρόμοια με την τακτική που ακολουθεί η μέθοδος σταδιακής βελτίωσης (progressive refinement) [Cohe88], είναι δυνατό να κατασκευαστούν κατάλληλα οι επαναλήψεις έτσι ώστε κάθε φορά να διαχέεται μόνο η *εναπομένουσα* ισχύς αντί για την ολική. Μια προσέγγιση της ολικής ισχύος που λαμβάνεται από κάθε τμήμα επιφάνειας είναι το άθροισμα των διαδοχικών διαφορών ισχύος $\Delta\Phi^{(k)}$ που υπολογίζονται σε κάθε βήμα:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_i^{(0)} &= \Phi_{ei}, \\ \Delta\Phi_i^{(k+1)} &= \sum_j \Delta\Phi_j^{(k)} F_{ji} \rho_i, \\ \Phi_i^{(k)} &= \sum_{l=0}^{k} \Delta\Phi_i^{(l)}. \end{aligned}$$

16.7 Συμπεράσματα

Οι αλγόριθμοι ολικού φωτισμού είναι σε συνεχή εξέλιξη από τότε που δημοσιεύθηκε ο πρώτος αναδρομικός αλγόριθμος παρακολούθησης ακτίνων το 1979. Η πρόοδος υπήρξε σταδιακή, με την εμφάνιση αλγορίθμων από τους πιο απλούς για τα σημερινά δεδομένα, μέχρι τις πολύπλοκες προσομοιώσεις της φυσικής του φωτός που συναντάμε στις μέρες μας.

Διερευνώντας και υλοποιώντας προσεκτικά τις φυσικές διαδικασίες που διέπουν τη φωτορεαλιστική απεικόνιση, δηλαδή την αλληλεπίδραση φωτός-υλικού και τη μετάδοση του φωτός, κατέστη πια δυνατό να παράγουμε εικόνες που δεν ξεχωρίζουν από φωτογραφίες μιας πραγματικής σκηνής. Σε καθεμία από αυτές τις δύο περιοχές υπάρχει πλέον εκτενής βιβλιογραφία. Στο κεφάλαιο αυτό, είδαμε μια σύνοψη της θεωρίας των δύο αντικειμένων, εστιάζοντας πιο πολύ στους μηχανισμούς μετάδοσης του φωτός. Όπως στους περισσότερους μοντέρνους αλγόριθμους, μια καλή κατανόηση των θεμελιωδών αρχών στις οποίες βασίζεται η μετάδοση του φωτός είναι το κλειδί για το σχεδιασμό και την υλοποίηση καλών μεθόδων προσομοίωσης ολικού φωτισμού.

Αν και οι μέθοδοι ολικού φωτισμού δεν έχουν ακόμα υιοθετηθεί μαζικά στις κοινές εφαρμογές τριδιάστατων γραφικών, ωστόσο χρησιμοποιούνται στις κινηματογραφικές παραγωγές και — σε περιορισμένη έκταση — σε παιχνίδια υπολογιστών. Πολύ κοινή είναι η εφαρμογή τους στον αρχιτεκτονικό σχεδιασμό, ενώ οι κατασκευαστές αυτοκινήτων χρησιμοποιούν εκτεταμένα αλγόριθμους ολικού φωτισμού για να επιδείξουν τα μοντέλα τους σε φωτορεαλιστικά εικονικά περιβάλλοντα για διαφημιστικούς σκοπούς. Επομένως αναμένεται ότι στο μέλλον τέτοιοι αλγόριθμοι θα αρχίσουν να χρησιμοποιούνται ολοένα και περισσότερο στις εφαρμογές γραφικών.

16.8 Ασκήσεις

1. Γράψτε ένα πρόγραμμα για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μιας μονοδιάστατης συνάρτησης χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση Monte Carlo. Σχεδιάστε την καμπύλη του απόλυτου σφάλματος ως συνάρτηση των δειγμάτων που χρησιμοποιήσατε. Αυτή η άσκηση απαιτεί να ξέρετε την αναλυτική τιμή του ολοκληρώματος, γι' αυτό χρησιμοποιήστε γνωστές και καλά ορισμένες συναρτήσεις, όπως πολυώνυμα.

2. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω αλγόριθμο, προσπαθήστε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα ημιτονοειδών συναρτήσεων με αυξανόμενη συχνότητα. Πώς επιδρά η συχνότητα στο σφάλμα για το ίδιο διάστημα ολοκλήρωσης;

3. Υλοποιήστε έναν αλγόριθμο για την παραγωγή ομοιόμορφα κατανεμημένων τυχαίων σημείων μέσα σ' ένα τρίγωνο στο επίπεδο. Ξεκινήστε την προσπάθεια με ένα απλό τρίγωνο πρώτα (όπως το $(0,0)$, $(1,0)$ ανδ $(0,1)$). Στη συνέχεια δοκιμάστε να τον γενικεύσετε σε τυχαία τρίγωνα στο επίπεδο.

   Πώς μπορεί ένας τέτοιος αλγόριθμος να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή τυχαίων σημείων σε ένα τρίγωνο στο χώρο;

4. Επιλέξτε ένα ενδιαφέρον γεωμετρικό στερεό στο χώρο: μια σφαίρα, έναν κώνο, έναν κύλινδρο.... Σχεδιάστε και υλοποιήστε έναν αλγόριθμο ο οποίος να παράγει τυχαία σημεία με ομοιόμορφη κατανομή στην επιφάνεια αυτών των στερεών. Οπτικοποιήστε τα αποτελέσματά σας για να βεβαιωθείτε πως είναι όντως ομοιόμορφη η κατανομή.

5. Μελετήστε την αρχική μορφή της εξίσωσης φωτισμού του Kajiya [Kaji86b]. Θα δείτε ότι διαφέρει σε σχέση με την εξίσωση της λαμπρότητας που συνήθως χρησιμοποιούμε. Εξηγήστε τις διαφορές. Θα μπορούσαν αυτές οι διαφορές να επηρεάσουν τους τελικούς αλγόριθμους που χρησιμοποιούν αυτή την εξίσωση;

6. Υλοποιήστε έναν απλό αλγόριθμο στοχαστικής παρακολούθησης ακτίνων, ο οποίος να μπορεί να σχεδιάσει σκηνές μόνο με τη χρήση άμεσου φωτισμού. Ο τύπος των γεωμετρικών στοιχείων που θα υποστηρίζει δεν έχει σημασία. Θα

μπορούσε να περιορίζεται μόνο σε τρίγωνα και σφαίρες. Οι επιφάνειες θα πρέπει να έχουν Lambertian BRDF (σκεδαστικές), ενώ θα πρέπει να υποστηρίζει και φώτα μη αμελητέου εμβαδού.

7. Προσθέστε υπολογισμό έμμεσου φωτισμού στην υλοποίηση του παραπάνω αλγόριθμου παρακολούθησης ακτίνων. Αυτός απαιτεί την υλοποίηση ενός μηχανισμού δειγματοληψίας στο ημισφαίριο πάνω από ένα σημείο επιφάνειας. Πειραματιστείτε με διάφορες τιμές απορρόφησης για το κριτήριο τερματισμού της ρώσικης ρουλέτας.

8. Συνδυάστε την έμμεση και άμεση συνιστώσα του φωτισμού για να σχεδιάσετε την πλήρη προσομοίωση ολικού φωτισμού για μια σκηνή. Σχεδιάστε μια γραφική διεπαφή για τον προσδιορισμό όλων των παραμέτρων δειγματοληψίας πριν την εκκίνηση της σχεδίασης.

9. Μια γυάλινη σφαίρα ακουμπάει σε μια σκεδαστική επιφάνεια. Η διαφανής BRDF της σφαίρας είναι σχεδόν τέλεια κατευθυντική (specular). Στην επίπεδη επιφάνεια σχηματίζονται καυστικές ακτίνες, εξαιτίας της εστίασης του φωτός μέσα από τη σφαίρα. Τι προβλήματα θα προκύψουν κατά τη σχεδίαση των καυστικών ακτίνων;

10. Θα θέλαμε να σχεδιάσουμε μια νυχτερινή εξωτερική σκηνή, στην οποία ο μόνος φωτισμός προέρχεται από την πανσέληνο. Το φεγγάρι καταλαμβάνει μια σχετικά μικρή στερεά γωνία του στερεώματος. Όμως, όντας παθιασμένοι με την αστρονομία, μοντελοποιήσαμε το φεγγάρι ως μια σκεδαστική σφαίρα, χωρίς αυτόφωτα χαρακτηριστικά, και η μόνη πηγή φωτός είναι ο (μη ορατός) ήλιος. Με άλλα λόγια, όλος ο φωτισμός που φτάνει στη σκηνή μας προέρχεται από το φως του ηλίου που ανακλάται στο φεγγάρι. Σκεφτείτε πως θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα ότι ο Monte Carlo αλγόριθμος παρακολούθησης μονοπατιών δε γνωρίζει την έννοια της πανσέληνου.

11. Έστω ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε μια πόλη τη νύχτα, η οποία περιέχει εκατοντάδες πηγές φωτός (λάμπες του δρόμου, φωτεινές επιγραφές, φωτισμένα παράθυρα, …). Η αποστολή ακτίνων σκιών σε καθεμία από αυτές τις πηγές δε θα ήταν πολύ αποδοτική, δεδομένου ότι είναι σαφές πως δε συνεισφέρουν όλες οι πηγές σημαντικά στο φωτισμό κάθε ορατού σημείου. Ποιες τεχνικές βελτιστοποίησης θα χρησιμοποιούσατε για να σχεδιάζονται σκηνές σαν κι αυτή σε εφικτό χρόνο;

    Ένα παρόμοιο πρόβλημα προκύπτει αν έχουμε πηγές καλυμμένες με υφή (π.χ. ένα παράθυρο με βιτρώ φωτισμένο από έξω), το οποίο σημαίνει ότι θα πρέπει να χωρίσουμε την επιφάνεια της πηγής σε μικρότερης περιοχής πηγές, οι οποίες θα είχαν ενιαίο πια χρώμα στην επιφάνειά τους.

17

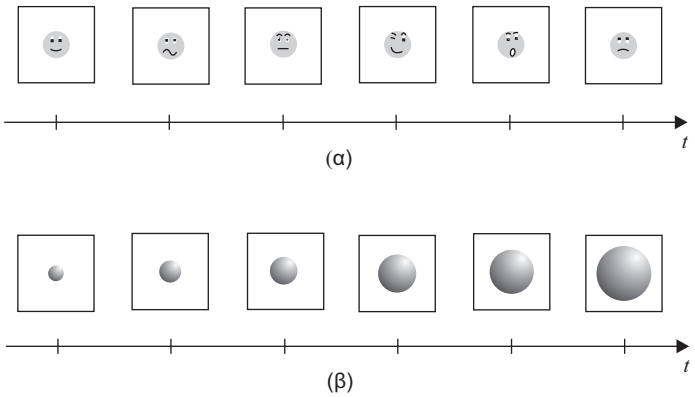
Βασικές τεχνικές συνθετικής κίνησης

Μια κινούμενη εικόνα αξίζει όσο εκατομμύρια λέξεις.
—Ανώνυμος

17.1 Εισαγωγή

Η κίνηση δίνει ζωή στην εικόνα. Τόσο στο βίντεο (φυσική κίνηση) όσο και στην κινούμενη εικόνα που δημιουργείται με υπολογιστή ή άλλα μέσα (*συνθετική κίνηση*), η αίσθηση της κίνησης δίνεται παρουσιάζοντας μια ακολουθία στατικών εικόνων (ή *καρέ*) με ταχεία εναλλαγή. Αν αυτή η ακολουθία μοιάζει με την αντίληψη που έχουμε για την κίνηση και τα καρέ εναλλάσσονται με αρκετά μεγάλη συχνότητα, τότε το ανθρώπινο οπτικό σύστημα τα εκλαμβάνει ως ομαλή κίνηση (Σχήμα 17.1). Η ελάχιστη συχνότητα εναλλαγής καρέ που δημιουργεί την αίσθηση της ομαλής κίνησης είναι περίπου 12 καρέ ανά δευτερόλεπτο (καδ ή fps). Κάτω από αυτό το όριο η κίνηση φαίνεται σπασμωδική καθώς τα κινούμενα αντικείμενα «πηδούν» μεταξύ διαδοχικών καρέ. Ουσιαστικά, τα απαιτούμενα καδ δεν είναι ένας σταθερός αριθμός· εξαρτάται από την ταχύτητα των κινούμενων αντικειμένων καθώς και από παραμέτρους φωτισμού. Στο σινεμά συνήθως χρησιμοποιούνται 24 καδ, αλλά υπάρχουν και συστήματα που χρησιμοποιούν 48 ή ακόμα και 72 καδ. Συχνότητες μεγαλύτερες των 70 καδ δεν βελτιώνουν την ποιότητα της κίνησης για το ανθρώπινο οπτικό σύστημα.

Η τεχνολογία της κινούμενης εικόνας άρχισε να αναπτύσσεται στα τέλη του 19ου αιώνα. Ανακαλύψεις όπως το φωτογραφικό φιλμ (Goodwin, 1887), το κινετοσκόπιο που έδινε τη δυνατότητα παρουσίασης ταινιών σ' έναν παρατηρητή (Edison, 1893), και ο κινηματογράφος, που επέτρεπε την παρουσίαση σε μεγάλα ακροατήρια προβάλλοντας πάνω σε μια οθόνη (Lumière, 1894), έδωσαν το έναυσμα. Οι πρώτες προσπάθειες για την δημιουργία συνθετικής κίνησης έγιναν στις αρχές του 20-ου αιώνα· αρχικές δημιουργίες περιλαμβάνουν *The Enchanted Drawing* και *Humorous Phases of Funny Faces* (Blackton, 1900 και 1906), *Fantasmagorie* (Cohl, 1908), *Little Nemo* (McCay, 1911), και τα γνωστά κινούμενα σχέδια του Disney της δεκαετίας του 1920. Καθώς η παραγωγή των κινούμενων σχεδίων βασιζόταν στην *παρεμβολή καρέ-κλειδιών* (tweening between keyframes), η ανάληψη του ρόλου της παρεμβολής από υπολογιστές ήταν θέμα χρόνου (βλ. Ενότητα 17.2.1). Όταν τα γραφικά έφτασαν σε επίπεδο να μπορούν να δημιουργήσουν ρεαλιστικές εικόνες, εισήχθη η συνθετική κίνηση σε ταινίες· οι *Tron* και



Σχήμα 17.1: *Παραδείγματα κινούμενης εικόνας: (α) ακολουθία καρέ από ένα πρόσωπο που αλλάζει εκφράσεις (β) καρέ από ακολουθία όπου κινείται ο παρατηρητής.*

Star Trek (1982) είναι τα πρώτα παραδείγματα ταινιών με σημαντικά ποσοστά συνθετικής κίνησης. Αργότερα δημιουργήθηκαν ολόκληρες ταινίες με συνθετική κίνηση· η *Tin Toy* (1989) ήταν η πρώτη.

Εκτός από τις ταινίες η συνθετική κίνηση είναι βασικό συστατικό διαδραστικών εφαρμογών των γραφικών όπως τα παιχνίδια. Επίσης βρίσκει εφαρμογές στην οπτικοποίηση, καθώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παραστήσει την εξαρτώμενη από το χρόνο συμπεριφορά ενός συστήματος.

Στον υπολογιστή η συνθετική κίνηση μπορεί να δημιουργηθεί μεταβάλλοντας ένα πλήθος παραμέτρων που επηρεάζουν την αλλαγή της εικόνας μεταξύ καρέ. Τυπικά παραδείγματα είναι:

1. Οι παράμετροι παρατήρησης, που ορίζουν τη θέση και την κατεύθυνση παρατήρησης.

2. Οι θέσεις των αντικειμένων μέσα στη συνθετική σκηνή που μπορούν να αλλάζουν δυναμικά μεταξύ των καρέ.

3. Τα χαρακτηριστικά των ίδιων των αντικειμένων όπως το χρώμα ή το μέγεθος.

Αυτές οι παράμετροι κωδικοποιούνται σ' ένα μεγάλο πλήθος *μεταβλητών κίνησης*. Καθώς είναι πρακτικά αδύνατο για τον δημιουργό συνθετικής κίνησης να ορίζει όλες αυτές τις μεταβλητές για κάθε καρέ, έχουν αναπτυχθεί *συστήματα ελέγχου κίνησης* που δίνουν τη δυνατότητα στον δημιουργό να εργάζεται σε υψηλότερο επίπεδο. Τέτοια παραδείγματα, όπως θα δούμε παρακάτω, είναι οι διαδικασιακές και παραστατικές μέθοδοι για στερεά σώματα και οι σκελετικές μέθοδοι για την κίνηση ανθρωπόμορφων ή ζωόμορφων χαρακτήρων. Οι μέθοδοι αυτές χρησιμοποιούν κοινές τεχνικές χαμηλού επιπέδου όπως η παρεμβολή, η ανίχνευση συγκρούσεων και το θόλωμα κίνησης.

Το υπόλοιπο του παρόντος κεφαλαίου είναι οργανωμένο ως εξής: πρώτα αναπτύσσονται τεχνικές χαμηλού επιπέδου οι οποίες έχουν γενική εφαρμογή σε συστήματα

ελέγχου κίνησης. Στη συνέχεια παρουσιάζονται συστήματα ελέγχου κίνησης (ένα επίπεδο παραπάνω). Αυτά ομαδοποιούνται σε *συστήματα ελέγχου κίνησης στερεών σωμάτων, σκελετικά συστήματα, παραμορφώσιμα μοντέλα* και *συστήματα σωματιδίων* και συχνά αλληλοεπικαλύπτονται.

Επιπρόσθετα, στις παραπάνω μεθόδους ελέγχου κίνησης ο όρος *διαδικασιακή συνθετική κίνηση* χρησιμοποιείται για αναφορά στην κίνηση ενός αντικειμένου μέσω μιας διαδικασίας. Έτσι μπορούν να δημιουργηθούν ακολουθίες καρέ συνθετικής κίνησης αυτόματα και —συχνά— σε πραγματικό χρόνο. Τα συστήματα σωματιδίων (βλ. Ενότητα 17.6) αποτελούν το μεγαλύτερο τμήμα αυτής της κατηγορίας. Ο σχεδιασμός της κίνησης στερεών σωμάτων (βλ. Ενότητα 17.3) και η σκελετική κίνηση (βλ. Ενότητα 17.4) μπορούν επίσης να γίνουν διαδικασιακά. Η *συνθετική κίνηση μέσω συμπεριφοράς* είναι επίσης υποκατηγορία της διαδικασιακής συνθετικής κίνησης όπου τα αντικείμενα (χαρακτήρες) αυτο-καθορίζουν τις ενέργειές τους, λαμβάνοντας υπόψη το περιβάλλον τους. Τυπικά παραδείγματα συνθετικής κίνησης μέσω συμπεριφοράς, περιλαμβάνουν σμήνη πουλιών [Reyn87], συνθετικά ψάρια [Tu94] και αυτόνομους πεζούς [Shao06, Shao07]. Η συνθετική κίνηση μέσω συμπεριφοράς επιτρέπει την αυτόματη παραγωγή κινούμενων εικόνων.

Η συνθετική κίνηση με υπολογιστή είναι ένα ευρύ πεδίο, το οποίο περιλαμβάνει γνώσεις από την πληροφορική, την παραγωγή ταινιών, την φυσική, τα μαθηματικά και την φυσιολογία. Το κεφάλαιο αυτό δεν καλύπτει το θέμα εξαντλητικά, μολονότι δίνει τα απαραίτητα στοιχεία για ένα μάθημα γραφικών ή οπτικοποίησης. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει σε κάποιο εξειδικευμένο σύγγραμμα.

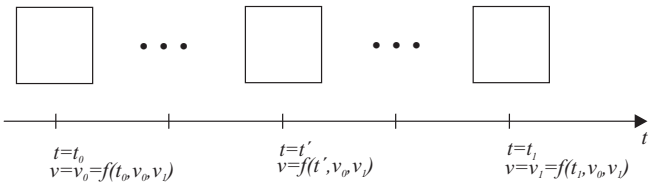
17.2 Τεχνικές χαμηλού επιπέδου για συνθετική κίνηση

Οι τεχνικές που περιγράφονται εδώ είναι χρήσιμες στα περισσότερα συστήματα ελέγχου κίνησης και μπορούν να θεωρηθούν ως ένα κοινό επίπεδο εργαλείων. Για παράδειγμα οι τεχνικές *παρεμβολής* είναι το βασικό εργαλείο για την παρεμβολή καρέ-κλειδιών. Οι αλγόριθμοι *ανίχνευσης συγκρούσεων* είναι απαραίτητοι για να αποδοθεί ρεαλιστικά η συμπεριφορά ενός πλήθους αντικειμένων μετά από συγκρούσεις. Η αντιταύτιση στη διάσταση του χρόνου, ή *θόλωμα κίνησης*, είναι απαραίτητη στις περισσότερες εφαρμογές κίνησης. Η *μεταμόρφωση* επιτρέπει την ομαλή μετάβαση από ένα γεωμετρικό αντικείμενο σ' ένα άλλο.

17.2.1 Παρεμβολή και καρέ-κλειδιά

Στις αρχές του 20ου αιώνα έμπειροι καλλιτέχνες παρήγαγαν τα *καρέ-κλειδιά* της κινούμενης εικόνας. Στα καρέ-κλειδιά γίνονται σημαντικές μεταβολές στις μεταβλητές κίνησης, όπως αλλαγή στην κατεύθυνση κίνησης. Στη συνέχεια λιγότερο έμπειροι καλλιτέχνες δημιουργούσαν τα ενδιάμεσα καρέ, ώστε να επιτευχθεί το επιθυμητό πλήθος καδ.

Σήμερα οι μέθοδοι ελέγχου κίνησης χρησιμοποιούν τεχνικές παρεμβολής για την αυτόματη δημιουργία των ενδιάμεσων καρέ. Οι ακραίες τιμές των μεταβλητών κίνη-



Σχήμα 17.2: *Παρεμβολή μεταξύ καρέ-κλειδιών στα t_0 και t_1.*

σης ορίζονται από τον χρήστη. Οι τιμές των μεταβλητών αυτών αντιστοιχούνται σε συγκεκριμένα καρέ της κίνησης και συνεπώς σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, αφού υπάρχει ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ των καρέ και του χρόνου. Συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε παραμετρικές συναρτήσεις $f(t)$ για να παρεμβάλλουμε τις μεταβλητές κίνησης μεταξύ ακραίων τιμών, π.χ. v_0 και v_1, που αποτελούν τα σημεία ελέγχου της παρεμβολής (Σχήμα 17.2).

Η επιλογή των μεταβλητών που θα παρεμβληθούν χρειάζεται προσοχή. Κλασσικό παράδειγμα αποτελεί η κίνηση μιας ράβδου που είναι καθηλωμένη στο ένα άκρο της (Σχήμα 17.3). Αν παρεμβληθεί η *θέση* του ελεύθερου άκρου μεταξύ των ακραίων σημείων, τότε η ράβδος θα φαίνεται ότι κονταίνει καθώς περνά από το μέσο της τροχιάς της, επανακτώντας το αρχικό της μήκος προς το τέλος της κίνησης (Σχήμα 17.3(α)). Αντίθετα, αν παρεμβληθεί η *γωνία περιστροφής* παίρνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα (Σχήμα 17.3(β)).

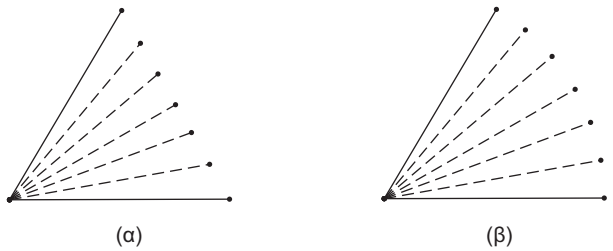
Η παρεμβολή γίνεται με βάση την παράμετρο t που παριστά τον χρόνο. Οι συναρτήσεις παρεμβολής περνούν από τα σημεία ελέγχου παρεμβολής, οπότε:

$$f(t_0) = v_0, \qquad f(t_1) = v_1,$$

για κάποιο t_0 και t_1. Η απλούστερη παραμετρική συνάρτηση παρεμβολής είναι η γραμμική:

$$L(t) = (1-t)v_0 + tv_1, \qquad t \in [0,1]. \tag{17.1}$$

Η γραμμική παρεμβολή χρησιμοποιείται συχνά αλλά, όταν απαιτείται πιο σύνθετη μεταβολή, πρέπει να επιστρατεύσουμε πιο περίπλοκες μεθόδους. Για παράδειγμα, η



Σχήμα 17.3: *Σημασία επιλογής της κατάλληλης μεταβλητής παρεμβολής. Επιλογή της θέσης του άκρου (α) και της γωνίας περιστροφής (β) ως μεταβλητής παρεμβολής.*

ομαλή κίνηση ενός αντικειμένου που δεν κινείται σε ευθεία θα μπορούσε να περιγραφεί καλύτερα από μια συνάρτηση σαν την Bézier (βλ. Κεφάλαιο 7). Η τετραγωνική συνάρτηση Bézier παρεμβάλει μεταξύ των τιμών ελέγχου v_0 και v_2 χρησιμοποιώντας μια επιπλέον τιμή v_1 ως «ελκυστή»:

$$B^2(t) = (1-t)^2 v_0 + 2t(1-t)v_1 + t^2 v_2, \qquad t \in [0,1]. \tag{17.2}$$

Η συνάρτηση Bézier n-οστού βαθμού παρεμβάλει μεταξύ των v_0 και v_n χρησιμοποιώντας $n-1$ τιμές-ελκυστές v_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Οι τιμές αυτές ελκύουν την παρεμβολή προς αυτές, και παρουσιάζουν τη μέγιστη έλξη τους στο σημείο i/n της παραμέτρου t· για παράδειγμα η τετραγωνική Bézier παίρνει την πλησιέστερη τιμή στο v_1 για την παραμετρική τιμή $t = 0.5$.

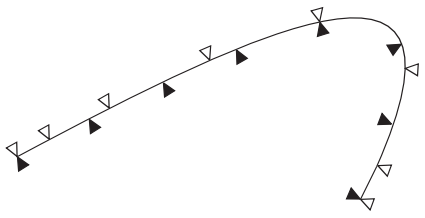
Γενικά οι συναρτήσεις των παραμετρικών καμπύλων $\mathbf{X}(t)$ είναι κατάλληλες συναρτήσεις παρεμβολής (βλ. Παράρτημα Β). Το εφαπτομενικό τους διάνυσμα $\mathbf{X}'(t)$ ορίζει την ταχύτητα η οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη αν αυτές χρησιμοποιούνται για κίνηση. Το μήκος τόξου που έχει διανυθεί πάνω σε μια τέτοια καμπύλη (βλ. Ενότητα Β.1.1) μπορεί να υπολογισθεί ολοκληρώνοντας την ταχύτητα (Εξίσωση (Β.4)).

Δυστυχώς το μήκος τόξου που έχει διανυθεί δεν είναι ανάλογο της παραμέτρου χρόνου t. Έτσι, γενικά, σταθερές διαφορές της παραμέτρου t δεν μας δίνουν σταθερές διαφορές στο μήκος τόξου που έχει διανυθεί. Απαιτείται τότε επαναπαραμετροποίηση της καμπύλης με παράμετρο το μήκος τόξου s (Σχήμα 17.4, βλ. Ενότητα Β.1.2).

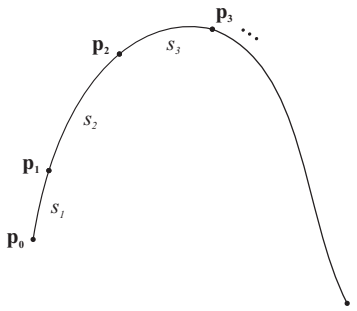
Σημείο	**Μήκος τόξου**
$\mathbf{p_0}$	0
$\mathbf{p_1}$	s_1
$\mathbf{p_2}$	$s_1 + s_2$
$\mathbf{p_3}$	$s_1 + s_2 + s_3$
...	...

Δυστυχώς, η επαναπαραμετροποίηση με το μήκος τόξου δεν είναι δυνατή για κάθε καμπύλη. Σε τέτοιες περιπτώσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα προϋπολογισμένο σύνολο μηκών τόξου s_i για σημεία της καμπύλης όπως φαίνεται στον Πίνακα 17.2.1 και στο Σχήμα 17.5.

Τότε το σημείο $\mathbf{p}'$ της καμπύλης που αντιστοιχεί σε μήκος τόξου s' μπορεί να προσεγγιστεί με γραμμική παρεμβολή των σημείων που αντιστοιχούν στα δύο (εκατέρω-



Σχήμα 17.4: *Σημεία καμπύλης για σταθερές διαφορές της παραμέτρου t (△: όχι ισαπέχοντα) και, μετά από επαναπαραμετροποίηση, για σταθερές διαφορές της παραμέτρου s (▲: ισαπέχοντα).*



Σχήμα 17.5: *Μήκος τόξου μεταξύ σημείων μιας καμπύλης.*

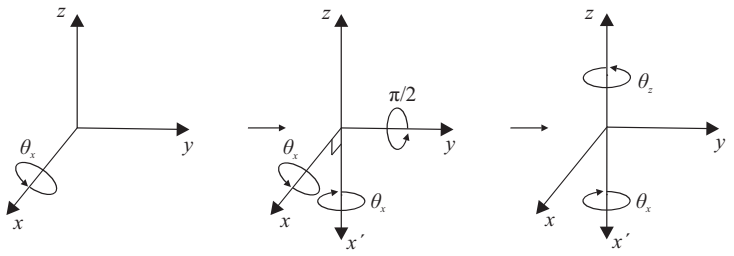
θεν) πλησιέστερα μήκη τόξου s_i και s_{i+1} ($s_i \leq s' \leq s_{i+1}$):

$$\mathbf{p}' = \frac{s_{i+1} - s'}{s_{i+1} - s_i}\mathbf{p_i} + \frac{s' - s_i}{s_{i+1} - s_i}\mathbf{p_{i+1}}. \tag{17.3}$$

Παρεμβολή περιστροφής.$^{\circledast}$

Έστω ότι μια τυχαία περιστροφή εκφράζεται ως σύνθεση τριών βασικών περιστροφών $\mathbf{R_x}(\theta_x) \rightarrow \mathbf{R_y}(\theta_y) \rightarrow \mathbf{R_z}(\theta_z)$. Αν προσδώσουμε κίνηση με σταδιακή αύξηση των θ_x, θ_y και θ_z θα συναντήσουμε αρκετά προβλήματα. Πρώτον, είναι γενικά δύσκολο να προσδιορίσουμε τις γωνίες των βασικών περιστροφών που συνθέτουν την περιστροφή γύρω από τυχαίο άξονα. Δεύτερον, το αποτέλεσμα της κίνησης αυτής δεν θα ήταν απαραίτητα ομαλό καθώς το αντικείμενό μας θα περιστρέφεται εναλλάξ γύρω από τους τρεις βασικούς άξονες. Και τρίτον, μπορεί να εμφανιστεί το πρόβλημα του *κλειδώματος αντιζύγων*. Για παράδειγμα, έστω ότι περιστρέφουμε γύρω από τον x κατά θ_x, γύρω από τον y κατά $\frac{\pi}{2}$ και γύρω από τον z κατά θ_z. Τότε, όπως δείχνει και το Σχήμα 17.6, η αρχική περιστροφή γύρω από τον x κατά θ_x είναι περιττή αφού μπορεί να αντικατασταθεί στο τρίτο βήμα περιστρέφοντας κατά $-\theta_x$ γύρω από τον z. Έτσι χάνεται ένας βαθμός ελευθερίας επειδή η μεσαία περιστροφή (κατά $\frac{\pi}{2}$ γύρω από τον y) ταυτίζει τον θετικό άξονα x με τον αρνητικό z.

Μια λύση είναι να χρησιμοποιήσουμε σύνθετο πίνακα περιστροφής γύρω από τυχαίο άξονα, όπως αυτός που προτείνεται στην Ενότητα 3.13. Μια καλύτερη λύση είναι



Σχήμα 17.6: *Κλείδωμα αντιζύγων.*

τα quaternions. Συγκριτικά με τον σύνθετο πίνακα περιστροφής η περιστροφή μέσω quaternions είναι πιο σταθερή, απαιτεί λιγότερους υπολογισμούς και διαδοχικές περιστροφές μπορούν να γίνουν ομαλά όπως θα εξηγηθεί παρακάτω.

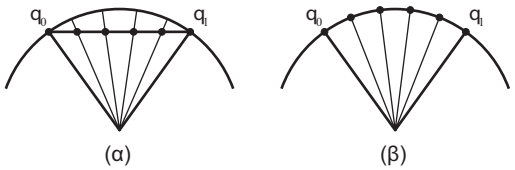
Οι δύο ακραίες θέσεις της περιστροφής μπορούν να αναπαρασταθούν από δύο μοναδιαία quaternions: το $q_0 = (1, \overrightarrow{\mathbf{0}})$ που αντιστοιχεί στην αρχική θέση (μηδενική περιστροφή) και το $q_1 = (\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}\hat{\mathbf{n}})$ που αντιστοιχεί στη θέση μετά την περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από τον δεδομένο άξονα με διεύθυνση $\hat{\mathbf{n}}$. Δυστυχώς, μία γραμμική παρεμβολή της μορφής $q_L(t) = (1-t)q_0 + tq_1$ μεταξύ αυτών των δύο quaternions δεν θα παρήγαγε την αναμενόμενη ομαλή περιστροφή μεταξύ των δύο θέσεων αλλά μία κίνηση που θα επιταχυνόταν προς τη μέση της διαδρομής. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα quaternions που αντιπροσωπεύουν περιστροφές είναι μοναδιαία, ενώ τα ενδιάμεσα $q_L(t)$ που παράγονται από τη σχέση γραμμικής παρεμβολής δεν είναι και πρέπει να κανονικοποιηθούν (δηλαδή να διαιρεθούν με το μέτρο τους)· έτσι ισαπέχοντα χρονικά διαστήματα αντιστοιχούν σε μη ισαπέχουσες περιστροφές. Γεωμετρικά, όλα τα μοναδιαία quaternions που αντιπροσωπεύουν περιστροφές ευρίσκονται πάνω στην επιφάνεια της τετραδιάστατης μοναδιαίας υπερσφαίρας, ενώ η γραμμική παρεμβολή δημιουργεί σημεία πάνω στη χορδή που τα ενώνει (βλ. Σχήμα 17.7(α) για το διδιάστατο ανάλογο).

Η ζητούμενη ομαλή παρεμβολή της περιστροφής μπορεί να επιτευχθεί μέσω *σφαιρικής γραμμικής παρεμβολής* (spherical linear interpolation – slerp), δηλαδή παρεμβολή πάνω στην επιφάνεια της 4Δ μοναδιαίας υπερσφαίρας κατά μήκος του μεσημβρινού που διέρχεται από τα q_0 και q_1 (το Σχήμα 17.7(β) δείχνει το διδιάστατο ανάλογο). Οι συνήθεις τριγωνομετρικές σχέσεις ισχύουν πάνω στο 4Δ τόξο· έτσι η σφαιρική γραμμική παρεμβολή δίνεται από τη σχέση (βλ. Σχήμα 17.8):

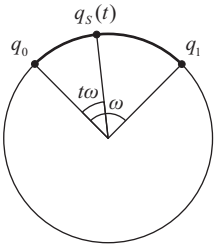
$$q_S(t) = q_0\frac{\sin(1-t)\omega}{\sin\omega} + q_1\frac{\sin t\omega}{\sin\omega}, \quad t \in [0,1], \tag{17.4}$$

όπου $\omega = \frac{\theta}{2}$ είναι η γωνία μεταξύ των δύο quaternions.

Η σφαιρική γραμμική παρεμβολή λύνει επαρκώς το πρόβλημα της ομαλής παρεμβολής της περιστροφής μεταξύ δύο θέσεων. Παρόλα αυτά, αν μία κίνηση περιλαμβάνει διαδοχικές περιστροφές γύρω από διαφορετικούς άξονες (οι οποίοι διέρχονται όλοι από ένα κοινό σημείο) η εφαρμογή σφαιρικών γραμμικών παρεμβολών μεταξύ των διαδοχικών quaternions θα παραγάγει κίνηση με απότομες μεταβολές· ακριβώς όπως η απλή γραμμική παρεμβολή μεταξύ διαδοχικών σημείων παράγει μία πολυγω-



Σχήμα 17.7: *(α) Γραμμική παρεμβολή, (β) σφαιρική γραμμική παρεμβολή.*



Σχήμα 17.8: *Παρεμβολή περιστροφής χρησιμοποιώντας σφαιρική γραμμική παρεμβολή.*

νική γραμμή. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί χρησιμοποιώντας *ομαλές σφαιρικές καμπύλες* [Shoe85], οι οποίες είναι παρόμοιες με τις καμπύλες Bézier και spline (Κεφάλαιο 7) αλλά χρησιμοποιούν σφαιρική γραμμική παρεμβολή αντί για (απλή) γραμμική παρεμβολή.

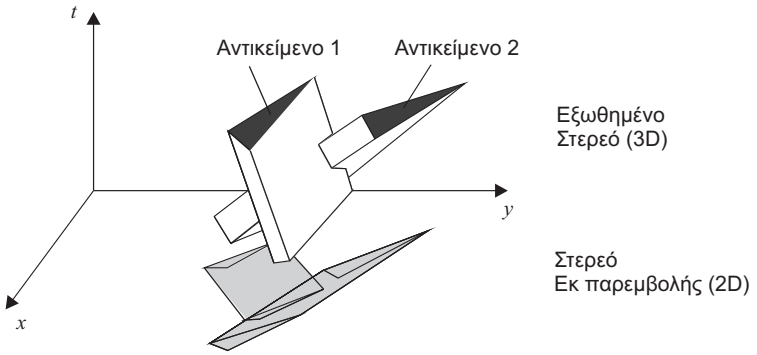
Η παρεμβολή περιστροφής με τη χρήση quaternions εξαλείφει τα προβλήματα που αναφέρθηκαν παραπάνω σχετικά με την χρήση βασικών περιστροφών κατά την παραγωγή συνθετικής κίνησης. Καθώς οποιαδήποτε περιστροφή εκφράζεται άμεσα μέσω ενός άξονα και μίας γωνίας, οι ενδιάμεσες γωνίες μπορούν να υπολογιστούν εύκολα χρησιμοποιώντας σφαιρική γραμμική παρεμβολή. Η εφαρμογή των αντίστοιχων περιστροφών παράγει το επιθυμητό αποτέλεσμα και η «περιστρεφόμενη» κίνηση και το κλείδωμα αντιζύγων παύουν να αποτελούν προβλήματα, καθώς η περιστροφή πραγματοποιείται σ' ένα βήμα και όχι ως σύνθεση βασικών περιστροφών.

17.2.2 Ανίχνευση συγκρούσεων

Η *ανίχνευση συγκρούσεων*, εκτός από την συνθετική κίνηση, έχει τύχει μεγάλης προσοχής σε περιοχές όπως η ρομποτική και τα CAD/CAM. Σε κάθε περιοχή όμως οι απαιτήσεις είναι διαφορετικές. Στη συνθετική κίνηση μια προσεγγιστική λύση είναι προτιμότερη από μια αργή λύση. Έχουν αναπτυχθεί βιβλιοθήκες για την ανίχνευση συγκρούσεων που μπορούν να μειώσουν σημαντικά τον χρόνο υλοποίησης.

Λόγω της σημασίας της ανίχνευσης συγκρούσεων, υπάρχουν τόσο θεωρητικά αποτελέσματα από την υπολογιστική γεωμετρία όσο και αποτελεσματικοί πρακτικοί αλγόριθμοι. Η ενότητα αυτή δεν προσπαθεί να εξαντλήσει το εκτενές αυτό θέμα (που αξίζει ένα βιβλίο από μόνο του)· διερευνά εναλλακτικές στρατηγικές ανίχνευσης συγκρούσεων για πολυεδρικά αντικείμενα. Ο αναγνώστης που θέλει να εμβαθύνει μπορεί να χρησιμοποιήσει κάποιο από τα σχετικά άρθρα επισκόπησης. Ο Lin κατατάσσει τις τεχνικές ανίχνευσης συγκρούσεων ανάλογα με την παράσταση των αντικειμένων που χρησιμοποιείται [Lin98], ενώ ο Jimenez βασίζεται στα αλγοριθμικά τους χαρακτηριστικά [Jime01].

Η ανίχνευση συγκρούσεων μεταξύ N αντικειμένων απαιτεί τη λύση του προβλήματος των 2 αντικειμένων $O(N^2)$ φορές. Είναι δυνατόν να γίνουν κάποιες βελτιστοποιήσεις με εκμετάλλευση της *χρονικής συνάφειας*, δηλαδή την ιδιότητα των περισσότερων αντικειμένων να μην μεταβάλλονται σημαντικά, ή να μεταβάλλονται με προβλέψιμο



Σχήμα 17.9: *Η τομή εξωθημένων στερεών (πάνω) είναι ικανή και αναγκαία για την ανίχνευση σύγκρουσης. Η τομή στερεών εκ παρεμβολής (κάτω) είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή (παράδειγμα 2Δ αντικείμενων).*

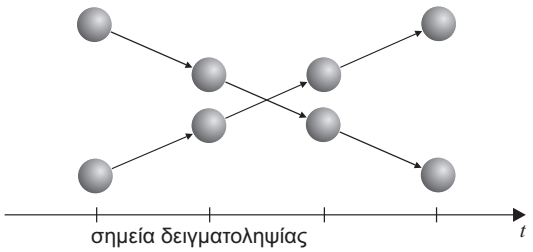
τρόπο, μεταξύ διαδοχικών καρέ. Εδώ θα εξετάσουμε το βασικό πρόβλημα της σύγκρουσης δύο αντικειμένων.

Ένας γενικός τρόπος ανίχνευσης συγκρούσεων είναι ο υπολογισμός του 4Δ *εξωθημένου στερεού* για κάθε κινούμενο 3Δ αντικείμενο, το οποίο αποτελείται από το σύνολο των χωροχρονικών σημείων που καταλαμβάνει το κινούμενο αντικείμενο [Came90]. Υπάρχει σύγκρουση μεταξύ δύο αντικειμένων αν και μόνο αν τέμνονται τα εξωθημένα στερεά τους· το Σχήμα 17.9 δείχνει ένα παράδειγμα για 2Δ αντικείμενα.

Δυστυχώς ο υπολογισμός του εξωθημένου στερεού για τυχαίο αντικείμενο δεν είναι απλός· έχουν αναπτυχθεί δύο απλουστεύσεις του.

Η πρώτη χρησιμοποιεί το *στερεό εκ παρεμβολής* απορρίπτοντας την παράμετρο του χρόνου· το Σχήμα 17.9 δίνει ένα παράδειγμα για 2Δ αντικείμενα. Το στερεό εκ παρεμβολής ενός 3Δ αντικειμένου αποτελείται από τα 3Δ σημεία που ορίζονται από την κίνησή του. Η τομή στερεών εκ παρεμβολής είναι αναγκαία, αλλά όχι ικανή, συνθήκη για την ύπαρξη σύγκρουσης. Για να γίνει ικανή πρέπει να εξεταστεί η σχετική κίνηση των δύο αντικειμένων, πράγμα που μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκο.

Η δεύτερη απλούστευση είναι η *δειγματοληψία διακριτών χρονικών σημείων* και ο έλεγχος για σύγκρουση ανάμεσα στα ίδια τα 3Δ αντικείμενα. Αν τα σημεία δειγματοληψίας είναι πολύ αραιά, μπορεί να μην ανιχνευτεί μια υπάρχουσα σύγκρουση (Σχή-



Σχήμα 17.10: *Μη εντόπιση σύγκρουσης λόγω αραιών χρονικών σημείων δειγματοληψίας.*

μα 17.10), ενώ αν είναι πολύ πυκνά αυξάνεται έντονα το υπολογιστικό κόστος. Μια λύση είναι η προσαρμοστική δειγματοληψία, όπου ως επόμενο χρονικό σημείο δειγματοληψίας επιλέγεται εκείνο στο οποίο είναι δυνατόν να υπάρξει σύγκρουση. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί συσχετίζοντας το κάτω όριο της απόστασης των δύο αντικειμένων με το άνω όριο των σχετικών ταχυτήτων τους [Cull86].

Σε κάθε περίπτωση, στον εσωτερικό βρόχο απαιτείται ένας βασικός έλεγχος τομής μεταξύ πολυεδρικών αντικειμένων. Για δύο κυρτά πολυεδρικά αντικείμενα με m και n κορυφές αντίστοιχα, αυτός ο έλεγχος έχει πολυπλοκότητα $O(n+m)$ [Lin91, Jime01], καθώς ανάγεται στην εύρεση επιπέδου που διαχωρίζει τα κυρτά περιβλήματα των δύο σημειοσυνόλων. Για γενικά πολυεδρικά αντικείμενα με κυρτές πλευρές ο έλεγχος σύγκρουσης μπορεί να αντικατασταθεί από την ανίχνευση της τομής των επιφανειών των δύο αντικειμένων[1]. Για την ανίχνευση της τομής των επιφανειών μπορεί να εξεταστεί κάθε ακμή ενός αντικειμένου για τομή με κάθε πλευρά του άλλου αντικειμένου. Αυτό έχει κόστος $O(nm)$ αλλά είναι δυνατό να γίνουν βελτιστοποιήσεις. Για την περίπτωση γενικών πολυέδρων —που είναι πρακτικά σπάνια— υπάρχουν λίγες λύσεις. Μια από αυτές είναι η αποσύνθεση των γενικών πολυέδρων στα κυρτά τμήματά τους.

Ακόμα και για τα απλούστερα αντικείμενα, η ανίχνευση συγκρούσεων είναι ακριβή διαδικασία καθώς πρέπει να επαναληφθεί για κάθε ζεύγος αντικειμένων και για κάθε καρέ. Συχνά χρησιμοποιούνται *περιβάλλοντες όγκοι* για να αποφασισθεί αν δύο αντικείμενα A και B εν δυνάμει συγκρούονται (βλ. Ενότητα 5.6.1). Στην συνθετική κίνηση, οι περιβάλλοντες όγκοι συχνα επεκτείνονται ώστε να περιλαμβάνουν το εξωθημένο στερεό στον 4Δ χώρο ή το στερεό εκ περιστροφής στον 3Δ χώρο.

17.2.3 Χρονική αντιταύτιση

Στις κινηματογραφικές ταινίες συχνά παρατηρείται το φαινόμενο όπου αντικείμενα με μεγάλη ταχύτητα αφήνουν πίσω τους μια θαμπή ουρά. Αυτό προκαλείται όταν η ταχύτητα του κλείστρου[2] της μηχανής λήψης είναι μικρή σε σχέση με την ταχύτητα των κινούμενων αντικειμένων και, συνεπώς, τα συλλαμβάνει σε πολλαπλές θέσεις (Σχήμα 17.11). Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως *θόλωμα κίνησης*. Αν παρατηρήσουμε ένα καρέ του φιλμ, τα αντικείμενα με μεγάλη ταχύτητα φαίνονται θολά κι' έχουν «ουρά». Το θόλωμα κίνησης συνήθως δεν είναι ενοχλητικό καθώς και το ανθρώπινο οπτικό σύστημα λειτουργεί με παρόμοιο τρόπο.

Στη συνθετική κίνηση τα πράγματα είναι λίγο διαφορετικά. Ένα καρέ δημιουργείται για μια χρονική στιγμή που αντιστοιχεί σε άπειρη ταχύτητα κλείστρου, ή απείρως μικρό χρόνο έκθεσης. Το αποτέλεσμα είναι να εμφανίζονται τα κινούμενα αντικείμενα σαν να «πηδούν» με διακριτό τρόπο μεταξύ των καρέ. Αυτό το φαινόμενο είναι γνωστό ως *χρονική ταύτιση*. Εμφανίζεται επειδή τα καρέ της συνθετικής κίνησης αντιστοιχούν σε διακριτοποίηση του χρόνου, κατά τον ίδιο τρόπο που τα εικονοστοιχεία αντιστοιχούν σε διακριτοποίηση του χώρου στην δημιουργία σταθερών εικόνων.

[1] Αγνοώντας την περίπτωση που το ένα αντικείμενο περικλείεται μέσα στο άλλο· αυτή μπορεί να ανιχνευτεί εύκολα ελέγχοντας τους περιβάλλοντες όγκους τους.

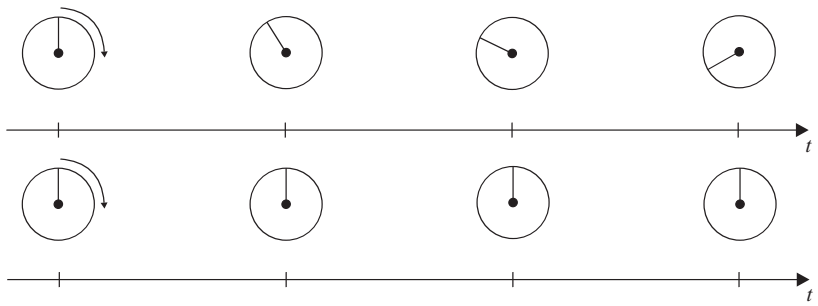
[2] Όσο πιο μικρή η ταχύτητα του κλείστρου, τόσο μεγαλύτερος ο χρόνος έκθεσης κάθε καρέ του φιλμ.



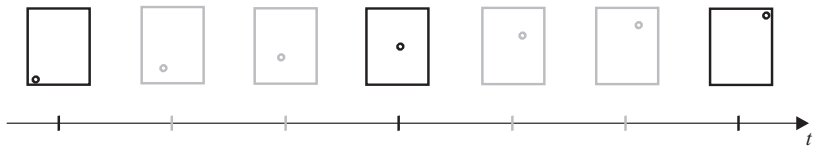
Σχήμα 17.11: *Θόλωμα κίνησης.*

Μια άλλη κλασσική εμφάνιση της χρονικής ταύτισης είναι το φαινόμενο του τροχού του κάρου, που παρουσιάζεται τόσο στις ταινίες όσο και στη συνθετική κίνηση. Ένας τροχός που γυρίζει και η εικόνα του καταγράφεται με σταθερή συχνότητα, είτε με απεικόνιση σε φιλμ είτε φωτίζοντάς τον με στροβοσκοπικό φως, μπορεί να φαίνεται ότι γυρίζει πιο αργά, προς τα πίσω ή και καθόλου. Αυτό είναι γνωστό φαινόμενο για τους λάτρεις των ταινιών western και μπορεί να εμφανιστεί σε οποιονδήποτε ακτινωτό τροχό, π.χ. έλικα ελικοπτέρου. Συμβαίνει επειδή το μυαλό μας συνδυάζει διαδοχικές θέσεις των ακτίνων με βάση την ελάχιστη απόσταση που τις χωρίζει. Έτσι, αν ο τροχός γυρίζει με συχνότητα λίγο χαμηλότερη από τα καδ, εμφανίζεται να στρέφεται ανάποδα (Σχήμα 17.12 (πάνω))· αν γυρίζει ακριβώς με τη συχνότητα καδ, φαίνεται στατικός (Σχήμα 17.12 (κάτω))· αν γυρίζει με συχνότητα λίγο υψηλότερη από τα καδ εμφανίζεται να γυρίζει με πολύ μικρότερη συχνότητα απ' όση πραγματικά γυρίζει.

Ένας τρόπος αντιμετώπισης της χρονικής ταύτισης στη συνθετική κίνηση είναι να αυξήσουμε την συχνότητα δειγματοληψίας, δηλαδή τα καδ· αυτό όμως συχνά είναι δεδομένο και εκτός του ελέγχου του παραγωγού συνθετικής κίνησης. Συνεπώς πρέπει



Σχήμα 17.12: *Φαινόμενο τροχού κάρου. Για απλούστευση φαίνεται τροχός με μία ακτίνα.*



Σχήμα 17.13: *Εικονικά καρέ (όλα) και τελικά καρέ (μαύρα μόνο).*

να καταφύγουμε σε τεχνικές *χρονικής αντιταύτισης* οι οποίες ουσιαστικά εισάγουν το θόλωμα κίνησης στη συνθετική κίνηση.

Η χρονική αντιταύτιση γίνεται με μέθοδο παρόμοια με την (χωρική) αντιταύτιση με μετα-φιλτράρισμα (βλ. Ενότητα 2.8.2). Η βασική διαφορά είναι ότι γίνεται στη διάσταση του χρόνου (Σχήμα 17.13). Τα βήματά της είναι τα εξής:

1. Δειγματοληψία με συχνότητα k φορές μεγαλύτερη των καδ δημιουργώντας εικονικά καρέ I_v.

2. Πέρασμα των εικονικών καρέ από χαμηλοπερατό φίλτρο με σκοπό την απόρριψη των υψηλών συχνοτήτων που προκαλούν την χρονική ταύτιση.

3. Νέα δειγματοληψία των εικονικών καρέ στα απαιτούμενα καδ για την παραγωγή του τελικού καρέ I_f.

Το χαμηλοπερατό φιλτράρισμα επιτυγχάνεται μ' ένα μονοδιάστατο φίλτρο συνέλιξης h (βλ. Παράρτημα Ε), π.χ.

1	2	4	2	1

.

Εκτελείται μια κλασική πράξη συνέλιξης. Τα βάρη του φίλτρου πολλαπλασιάζονται με τα εικονικά καρέ και προστίθενται για να δώσουν το τελικό καρέ:

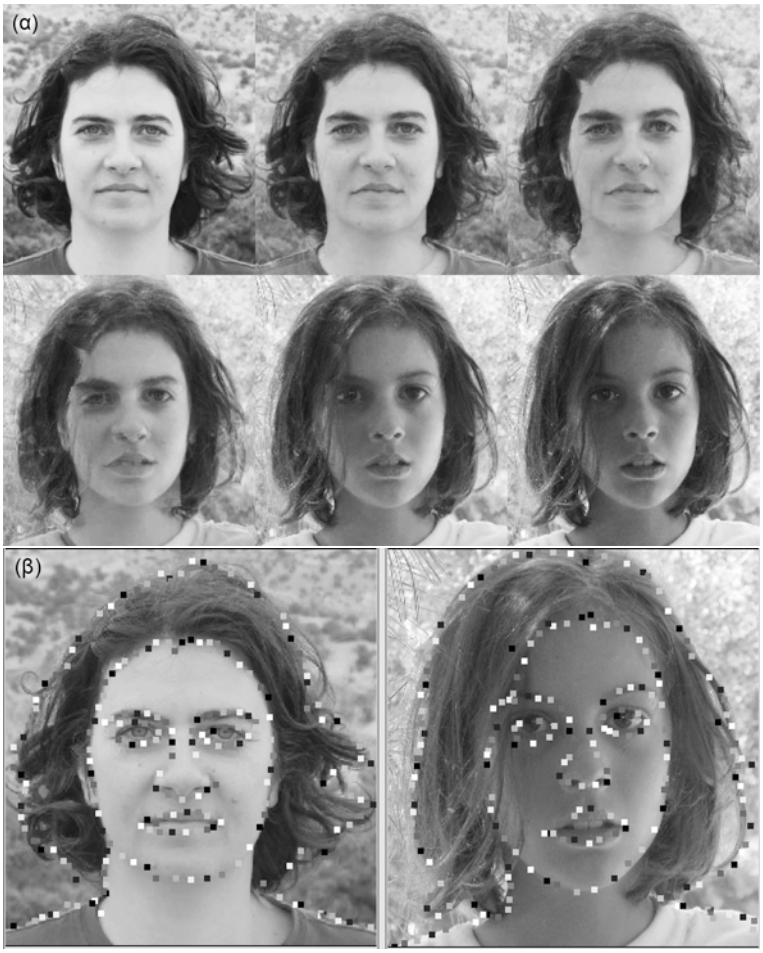
$$I_f^i = \sum_{p=0}^{k-1} I_v^{i*k+p} \cdot h(p). \tag{17.5}$$

Όπως και στη χωρική αντιταύτιση, το k επιλέγεται μονό ώστε να υπάρχει ένα κεντρικό σημείο δειγματοληψίας *επάνω* στο τελικό καρέ. Τα βάρη του φίλτρου συνέλιξης πρέπει συνεπώς να είναι κανονικοποιημένα, δηλ. $\sum_{p=0}^{k-1} h(p) = 1$.

17.2.4 Μεταμόρφωση

Η *μεταμόρφωση* (morphing) είναι μια τεχνική που μετατρέπει ένα *γραφικό αντικείμενο*[3] σε ένα άλλο. Έχει εφαρμοστεί εκτενώς σε εικόνες· συχνά για την μεταμόρφωση μεταξύ προσώπων (Σχήμα 17.14(α)). Η μεταμόρφωση όμως είναι πιο γενική και τα γραφικά αντικείμενα στα οποία μπορεί να εφαρμοστεί κυμαίνονται από 2Δ εικόνες σε 3Δ

[3]Με τον όρο *γραφικό αντικείμενο* εννοούμε την παράσταση ενός αντικειμένου με κάποια μέθοδο που χρησιμοποιείται στα γραφικά, π.χ. 2Δ εικόνα, 3Δ μοντέλο.

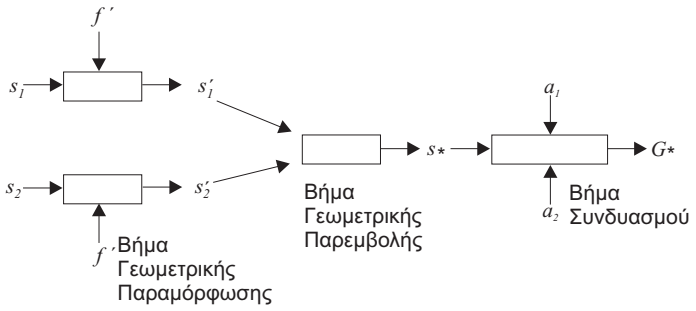


Σχήμα 17.14: *Παράδειγμα ακολουθίας μεταμόρφωσης μεταξύ δύο εικόνων προσώπων: (α) διαδοχικά καρέ της ακολουθίας μεταμόρφωσης (β) χρήση σημείων για την σημείωση αντίστοιχων χαρακτηριστικών στις δύο εικόνες.*

μοντέλα επιφάνειας και 3Δ μοντέλα όγκου. Η μεταμόρφωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτόνομα για την ομαλή μετάβαση μεταξύ γραφικών αντικειμένων σε τεχνικές συνθετικής κίνησης υψηλού επιπέδου.

Η μεταμόρφωση είναι διάδοχος της *σταδιακής εναλλαγής* (σκηνών), μιας παραδοσιακής τεχνικής των ταινιών που σταδιακά «σβήνει» μια εικόνα «ανάβοντας» μια άλλη. Η μεταμόρφωση όμως είναι πιο γενική αφού περιλαμβάνει την αλλαγή τόσο του *σχήματος* όσο και των *οπτικών ιδιοτήτων* (όπως το χρώμα και η υφή)· είναι εφαρμόσιμη σε διάφορα γραφικά αντικείμενα, όχι μόνο εικόνες. Στις εικόνες, η μεταμόρφωση παράγει πιο πειστικά αποτελέσματα από την απλή σταδιακή εναλλαγή.

Η μεταμόρφωση χρησιμοποιεί την *παραμόρφωση*, μια μοναδιαία συνάρτηση που αλλάζει το σχήμα ενός γραφικού αντικειμένου. Δοθέντος ενός γραφικού αντικειμένου



Σχήμα 17.15: *Μεταμόρφωση μεταξύ δύο γραφικών αντικειμένων* $G_1 = (a_1, s_1)$ *και* $G_2 = (a_2, s_2)$ *για την παραγωγή νέου γραφικού αντικειμένου* $G* = (a*, s*)$.

G το οποίο παριστάνεται από ένα σύνολο σημείων s στον n-διάστατο χώρο ($s \subseteq \mathbb{R}^n$), η συνάρτηση παραμόρφωσης W παράγει ένα νέο σύνολο σημείων που ορίζουν το μετασχηματισμένο σχήμα, $s' = W(s)$.

Η μεταμόρφωση είναι μια δυαδική συνάρτηση που παίρνει δύο γραφικά αντικείμενα ως είσοδο και παράγει ένα άλλο γραφικό αντικείμενο ως έξοδο. Έστω $G_1 = (a_1, s_1)$ και $G_2 = (a_2, s_2)$ τα δύο γραφικά αντικείμενα· τα σχήματα των οποίων παριστάνονται με s_1 και s_2 και οι ιδιότητές τους με a_1 και a_2, αντίστοιχα. Η μεταμόρφωση μεταξύ του G_1 και του G_2 απαρτίζεται από 4 βήματα (Σχήμα 17.15):

1. *Προσδιορισμός χαρακτηριστικών.* Προσδιορίζονται τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά στα G_1 και G_2, συνήθως χειρωνακτικά. Έστω f_1 και f_2 τα αντίστοιχα σύνολα χαρακτηριστικών.

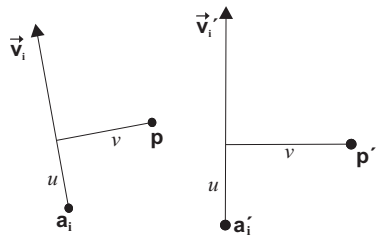
2. *Παραμόρφωση* των σχημάτων s_1 και s_2 στα s'_1 και s'_2 με βάση το σύνολο των χαρακτηριστικών παρεμβολής f'.

3. *Γεωμετρική παρεμβολή* των s'_1 και s'_2, δηλαδή ορισμός ενός ενδιάμεσου σχήματος $s*$.

4. *Συνδυασμός* των a_1 και a_2 για το $s*$, παράγοντας το $a*$ και συνεπώς το νέο γραφικό αντικείμενο $G* = (a*, s*)$.

Στο βήμα προσδιορισμού χαρακτηριστικών, αντιστοιχούνται τα χαρακτηριστικά των δύο γραφικών αντικειμένων. Αυτό συχνά εμπλέκει τον χρήστη που καθορίζει αντίστοιχα σημεία, ευθύγραμμα τμήματα ή καμπύλες στα δύο γραφικά αντικείμενα (Σχήμα 17.14(β)). Υπάρχουν επίσης και κάποιες αυτόματες μέθοδοι προσδιορισμού χαρακτηριστικών.

Το βήμα παραμόρφωσης W: $s \to s'$ μετασχηματίζει ένα σχήμα σύμφωνα με το μετασχηματισμένο σύνολο χαρακτηριστικών f', που είναι το αποτέλεσμα παρεμβολής μεταξύ των f_1 και f_2· η παραμόρφωση μετασχηματίζει τα s_1 και s_2 σύμφωνα με το f'. Υπάρχουν πολλοί τρόποι ορισμού του W που περιλαμβάνουν την βαρυκεντρική απεικόνιση, την απεικόνιση με βάση πεδίο και το πλέγμα καμπύλων spline.



Σχήμα 17.16: *Γεωμετρική παραμόρφωση οριζόμενη από ζεύγος διανυσμάτων.*

Στην βαρυκεντρική απεικόνιση, τα f_1 και f_2 είναι αντιστοιχισμένα σύνολα σημείων πάνω στα οποία υπολογίζονται τριγωνοποιήσεις. Τότε ένα σημείο $\mathbf{p}$ του s_1 απεικονίζεται στο $\mathbf{p}'$ του s_1' με τις ίδιες βαρυκεντρικές συντεταγμένες σε σχέση με το τρίγωνο που το περιέχει. Έστω $\mathbf{p} = b_1\mathbf{v_1} + b_2\mathbf{v_2} + b_3\mathbf{v_3}$[4], όπου $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ και $\mathbf{v_3}$ οι κορυφές του τριγώνου του συνόλου χαρακτηριστικών f_1 που περιέχει το $\mathbf{p}$ στο s_1. Τότε $\mathbf{p}' = b_1\mathbf{v_1'} + b_2\mathbf{v_2'} + b_3\mathbf{v_3'}$, όπου $\mathbf{v_1'}$, $\mathbf{v_2'}$ και $\mathbf{v_3'}$ τα αντίστοιχα σημεία χαρακτηριστικών του f'. Παρόμοια ισχύουν για το s_2.

Στην απεικόνιση με βάση πεδίο, τα χαρακτηριστικά μπορούν να είναι σημεία, διανύσματα ή και πιο πολύπλοκα αντικείμενα. Κάθε ζεύγος αντίστοιχων χαρακτηριστικών ορίζει μια διαφορετική απεικόνιση για ένα σημείο του s_1. Η τελική απεικόνιση υπολογίζεται με συγκερασμό των πεδίων όλων των ζευγών χαρακτηριστικών στα οποία δίνονται βάρη από παραμέτρους, όπως η απόσταση από το χαρακτηριστικό και το μέγεθος του χαρακτηριστικού.

Για παράδειγμα, αν για τα χαρακτηριστικά χρησιμοποιούνται διανύσματα, η απεικόνιση με βάση πεδίο μπορεί να οριστεί ως εξής: έστω $\vec{\mathbf{v}_i}$ ένα διάνυσμα χαρακτηριστικών στο f_1 και $\vec{\mathbf{v}_i'}$ το αντίστοιχο μετασχηματισμένο διάνυσμα στο f' (δηλ. το αποτέλεσμα της παρεμβολής μεταξύ του $\vec{\mathbf{v}_i}$ και του αντίστοιχου διανύσματος του f_2). Η απεικόνιση ενός σημείου $\mathbf{p}$ του s_1 που ορίζεται από αυτό το διάνυσμα χαρακτηριστικών είναι (βλ. Σχήμα 17.16):

$$W_i(\mathbf{p}) = \mathbf{a_i'} + u\vec{\mathbf{v}_i'} + v\perp\hat{\mathbf{v}}_i', \tag{17.6}$$

όπου $\mathbf{a_i'}$ η βάση (αρχή) του $\vec{\mathbf{v}_i'}$, $\perp\hat{\mathbf{v}}_i'$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο $\vec{\mathbf{v}_i'}$ και τα u, v ορίζουν το $\mathbf{p}$ σε σχέση με το $\vec{\mathbf{v}_i}$ (σε αναλογία με το μήκος του). Η τελική απεικόνιση για το $\mathbf{p}$, λαμβάνοντας υπόψη όλα τα διανύσματα χαρακτηριστικών, είναι τότε:

$$W(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i(W_i(\mathbf{p}) - \mathbf{p})}{\sum_{i=1}^{n} b_i}, \tag{17.7}$$

όπου $W_i(\mathbf{p}) - \mathbf{p}$ η μετατόπιση που ορίζεται από το χαρακτηριστικό i, n το πλήθος των

[4] $b_1 + b_2 + b_3 = 1$.

χαρακτηριστικών και b_i το βάρος του χαρακτηριστικού i, το οποίο ορίζεται ως:

$$b_i = \frac{|\overrightarrow{\mathbf{v_i}}|^m}{d(\overrightarrow{\mathbf{v_i}}, \mathbf{p})^2}, \tag{17.8}$$

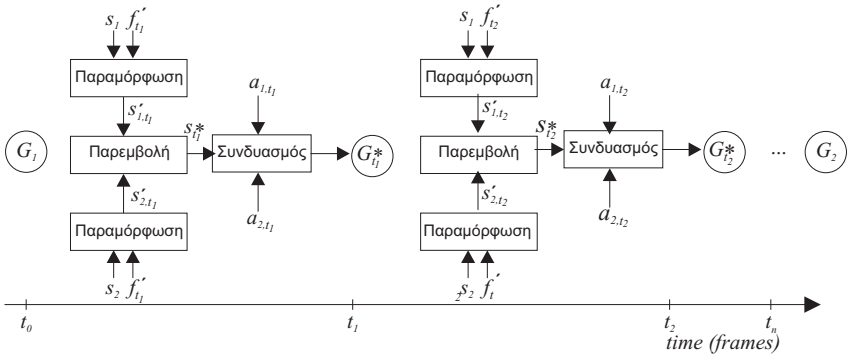
όπου $d(\overrightarrow{\mathbf{v_i}}, \mathbf{p})$ η απόσταση από το σημείο $\mathbf{p}$ στο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathbf{v_i}}$. Παρόμοια ισχύουν για το s_2. Σημειώνουμε ότι η απεικόνιση με βάση πεδίο δεν είναι ένα-προς-ένα. Είναι συνεπώς πιθανό κάποιες περιοχές του νέου γραφικού αντικειμένου $G*$ να μην έχουν οριστεί· γι' αυτό χρησιμοποιείται *αντίστροφη απεικόνιση* από το $G*$ στα G_1 και G_2. Για παράδειγμα, στην περίπτωση εικόνων, τα εικονοστοιχεία του $G*$ απεικονίζονται σε εικονοστοιχεία των G_1 και G_2.

Έχοντας παραμορφώσει το s_1 στο s_1' και το s_2 στο s_2', πρέπει να παρεμβάλλουμε τα s_1' και s_2' για να παράγουμε το ενδιάμεσο σχήμα $s*$. Αυτό δεν είναι πάντα απλό καθώς τα δύο σχήματα μπορεί να διαφέρουν σε χαρακτηριστικά όπως η τοπολογία τους· αυτό πρέπει να λαμβάνεται υπόψη από την τεχνική που θα χρησιμοποιηθεί. Στην περίπτωση των εικόνων το βήμα αυτό μπορεί να παραληφθεί.

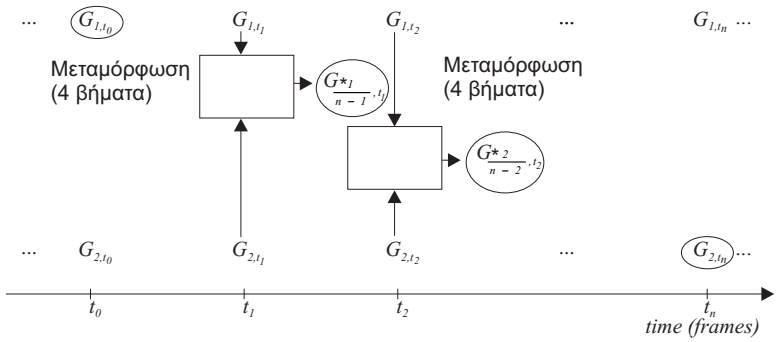
Τέλος τα σύνολα ιδιοτήτων a_1 και a_2 συνδυάζονται στο $a*$ και αντιστοιχούνται σε περιοχές του $s*$ (π.χ. σε κορυφές ή σε εικονοστοιχεία). Ο συνδυασμός αυτός συνήθως εμπλέκει τεχνικές παρεμβολής, και οι ιδιότητες που θα συνδυαστούν καθορίζονται από την αντιστοίχιση των τοπολογιών των G_1 και G_2.

Ένα στατικό γραφικό αντικείμενο G_1 (π.χ. εικόνα) μπορεί να μεταμορφωθεί σ' ένα άλλο στατικό γραφικό αντικείμενο G_2 σ' ένα χρονικό διάστημα. Επαναλαμβάνονται τα τελευταία τρία βήματα της διαδικασίας μεταμόρφωσης για τιμές των χαρακτηριστικών που προκύπτουν από παρεμβολή δημιουργώντας έτσι μια ακολουθία καρέ συνθετικής κίνησης $G_1, G*_{t_1}, G*_{t_2}, ..., G_2$ (Σχήμα 17.17).

Ένα δυναμικό γραφικό αντικείμενο $G_{1,t_0}, G_{1,t_1}, G_{1,t_2}, ..., G_{1,t_n}$ (π.χ. μια κινούμενη εικόνα που παριστάνει ένα πρόσωπο που μιλά) μπορεί να μεταμορφωθεί σ' ένα άλλο δυναμικό γραφικό αντικείμενο $G_{2,t_0}, G_{2,t_1}, G_{2,t_2}, ..., G_{2,t_n}$ επαναλαμβάνοντας και τα τέσσερα βήματα της μεταμόρφωσης για τα αντίστοιχα (στατικά) στιγμιότυπα των



Σχήμα 17.17: *Μεταμόρφωση στατικών γραφικών αντικειμένων· τα κυκλωμένα αντικείμενα αποτελούν την ακολουθία μεταμόρφωσης.*



Σχήμα 17.18: *Μεταμόρφωση δυναμικών γραφικών αντικειμένων· τα κυκλωμένα αντικείμενα αποτελούν την ακολουθία μεταμόρφωσης.*

δυναμικών αντικειμένων (π.χ. αντίστοιχα καρέ). Έτσι δημιουργείται ένα νέο δυναμικό αντικείμενο $G_{1,t_0}, G*_{\frac{1}{n-1},t_1}, G*_{\frac{2}{n-2},t_2}, \ldots, G_{2,t_n}$ που σταδιακά απομακρύνεται από το πρώτο και πλησιάζει το δεύτερο γραφικό αντικείμενο (Σχήμα 17.18). Ο πρώτος δείκτης του $G*$ παριστάνει την απόσταση μεταμόρφωσης από τα G_1 και G_2, η οποία αντιστοιχεί στον παράγοντα παρεμβολής για τα σύνολα χαρακτηριστικών.

Η μεταμόρφωση έχει μελετηθεί εκτενώς εξαιτίας των πολλών εφαρμογών της. Οι εφαρμογές αυτές δεν περιορίζονται στην συνθετική κίνηση και στα ειδικά εφέ αλλά περιλαμβάνουν την ιατρική απεικόνιση, τη διόρθωση της παραμόρφωσης φακών και την επιτάχυνση της δημιουργίας εικόνας. Έχουν επίσης προταθεί αρκετές γενικεύσεις, όπως η μεταμόρφωση μεταξύ περισσότερων των δύο αντικειμένων. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται σε εξειδικευμένες πηγές, όπως το [Gome99].

17.3 Συνθετική κίνηση στερεών σωμάτων

Οι τεχνικές *συνθετικής κίνησης στερεών σωμάτων* χρησιμοποιούν μόνο στερεούς μετασχηματισμούς αντικειμένων για τη δημιουργία της κίνησης. Οι στερεοί μετασχηματισμοί είναι υποσύνολο των συσχετισμένων μετασχηματισμών και απαρτίζονται από μεταφορά, περιστροφή και συνθέσεις τους (βλ. Ενότητα 3.10). Οι στερεοί μετασχηματισμοί δεν παραμορφώνουν τα αντικείμενα.

Κεντρικό θέμα στη συνθετική κίνηση στερεών σωμάτων είναι ο *σχεδιασμός κίνησης*. Αυτός αφορά στον καθορισμό της τροχιάς ενός αντικειμένου καθώς και φυσικών παραμέτρων όπως η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του κατά μήκος της τροχιάς. Σχετίζεται με τον *σχεδιασμό διαδρομής* — μια σημαντική περιοχή της ρομποτικής για την εύρεση διαδρομής χωρίς συγκρούσεις κατά την κίνηση ενός ρομπότ. Αυτό είναι ένα πολύπλοκο πρόβλημα[5] κι' έχουν αναπτυχθεί πιθανοτικές προσεγγίσεις [Barr97, Plak05].

[5]Είναι γνωστό ως *πρόβλημα του μεταφορέα* (mover's problem), και σκοπός του είναι να αποφασισθεί αν υπάρχει μια διαδρομή χωρίς συγκρούσεις για την μεταφορά ενός πολυεδρικού αντικειμένου από μια αρχική σε μια τελική θέση μέσα σ' ένα περιβάλλον στατικών πολυεδρικών εμποδίων. Στη γενική περίπτωση, όπου το μεταφερόμενο αντικείμενο αποτελείται από ένα σύνολο πολυέδρων συνδεδεμένων σε κάποιες κορυφές (βλ. Ενότητα 17.4), το πρόβλημα του μεταφορέα είναι *PXΩPO*-δύσκολο (PSPACE-hard)

Στο βασικό σχεδιασμό κίνησης είναι επιθυμητό να εξασφαλιστεί η *συνέχεια* της κίνησης και να υπάρχει η δυνατότητα *ορισμού φυσικών παραμέτρων* κατά μήκος της τροχιάς. Η συνέχεια μπορεί να εξασφαλιστεί χρησιμοποιώντας μια συνεχή παραμετρική καμπύλη για τον ορισμό της τροχιάς· όπως μια Bézier ή B-spline. Δυστυχώς αυτές οι καμπύλες δεν είναι παραμετροποιημένες κατά μήκος τόξου, και έτσι δεν είναι άμεσα δυνατόν να ορίσουμε φυσικές παραμέτρους (όπως ταχύτητα) επί της τροχιάς. Αν η επαναπαραμετροποίηση κατά μήκος τόξου δεν είναι απλή για κάποια καμπύλη, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε παρεμβολή πάνω σ' έναν πίνακα προϋπολογισμένων μηκών τόξου (βλ. Ενότητα 17.2.1).

Για να μειωθεί ο κοπιαστικός καθορισμός τροχιάς αλλά και για την παροχή ρεαλιστικής κίνησης έχουν αναπτυχθεί περιβάλλοντα που επιτρέπουν στον δημιουργό συνθετικής κίνησης να καθορίσει το *τι* της κίνησης (π.χ. αρχική και τελική θέση)· αυτά συμπληρώνουν το *πώς* της κίνησης (π.χ. τροχιά με εφικτές παραμέτρους κίνησης) χρησιμοποιώντας ένα *φυσικό μοντέλο* [Witk88, Ngo93]. Τα περιβάλλοντα αυτά εκμεταλλεύονται ένα σύνολο φυσικών περιορισμών για την επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων. Έστω $q(t)$ το διάνυσμα κατάστασης που περιγράφει τα χαρακτηριστικά της κίνησης (π.χ. θέση και ταχύτητα) ενός ή παραπάνω αντικειμένων την χρονική στιγμή t. Η διαφορική συμπεριφορά της κίνησης μπορεί να περιγραφεί από

$$\frac{d}{dt}q(t) = F(t, q(t)), \tag{17.9}$$

όπου F είναι το φυσικό μοντέλο. Τα χαρακτηριστικά της κίνησης την χρονική στιγμή t λαμβάνονται με ολοκλήρωση του F:

$$q(t) = q_0 + \int_{t_0}^{t} F(t, q(t))dt, \tag{17.10}$$

όπου q_0 είναι το αρχικό διάνυσμα κατάστασης την t_0.

Πρόσφατα τα συστήματα αυτά έγιναν διαδραστικά, επιτρέποντας στο δημιουργό συνθετικής κίνησης να επεξεργαστεί τις παραμέτρους της κίνησης σε διάφορα σημεία της τροχιάς [Popo00]· το σύστημα στη συνέχεια επαναπροσδιορίζει μια φυσικά δυνατή κίνηση.

17.4 Σκελετική κίνηση

Στο Κεφάλαιο 9 είδαμε πώς διάφορες γεωμετρικές οντότητες μπορούν να συνδεθούν μεταξύ τους με ιεραρχικό τρόπο, προκειμένου να σχηματίσουν ένα γράφο σκηνής. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να πετύχουμε σύνθετα αποτελέσματα κίνησης για άκαμπτα σώματα (rigid body animation) ως το σωρευτικό αποτελέσματα των απλών γεωμετρικών μετασχηματισμών που εφαρμόζονται στους γεωμετρικούς κόμβους — καθώς διατρέχεται ο γράφος. Μάλιστα, οι γεωμετρικοί κόμβοι δε χρειάζεται να είναι φύλλα της ιεραρχίας (καταληκτικοί κόμβοι) στο δικτύωμα των συσχετίσεων του γράφου σκηνής. Τα αντικείμενα μπορούν να είναι συνδεδεμένα σε μια αλυσίδα ελέγχου

[Reif79].

που καθιστά την κίνηση μιας ή περισσοτέρων γεωμετρικών οντοτήτων εξαρτημένη από την κίνηση μιας ιεραρχικά υψηλότερης οντότητας, δημιουργώντας έτσι μια *κινηματική αλυσίδα*. Σε μια τέτοια διάταξη, οι κόμβοι-παιδιά κινούνται αναφορικά με το σύστημα συντεταγμένων των προγόνων τους. Η τελική κίνηση κάθε κόμβου σε μια κινηματική αλυσίδα καθορίζεται απ' όλους τους μετασχηματισμούς που βρίσκονται μεταξύ του προγόνου του και της ρίζας του γράφου σκηνής· αυτού του είδους η μοντελοποίηση έχει πολλά πλεονεκτήματα σε σχέση με τον αυτόνομο προσδιορισμό του μετασχηματισμού κάθε οντότητας —ειδικά για αρθρωτά αντικείμενα ή τμήματα που συνδέονται με συνδέσμους και μεντεσέδες.

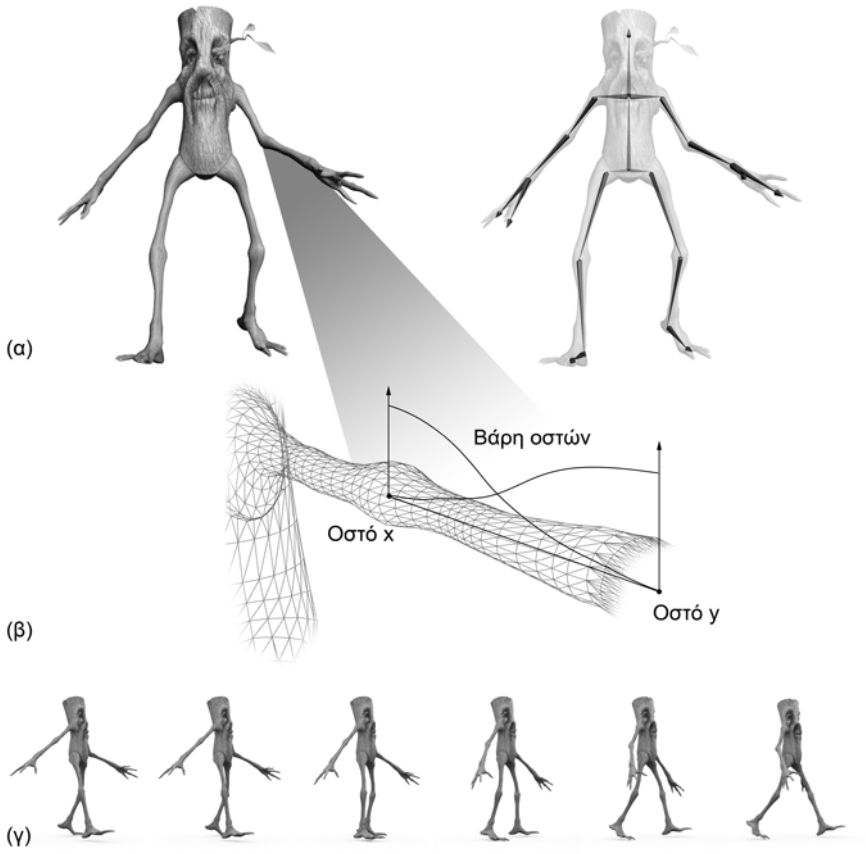
Η χρησιμότητα μιας ιεραρχίας κινηματικών αλυσίδων ως εργαλείο άμεσης μοντελοποίησης της κίνησης («στήσιμο» των κινούμενων οντοτήτων - *rigging*) περιορίζεται σε διακριτά, άκαμπτα τμήματα αντικειμένων (π.χ., σε ένα ρομποτικό βραχίωνα). Τα περισσότερα όμως αρθρωτά αντικείμενα που προορίζονται να κινηθούν είναι εύκαμπτα, παραμορφώσιμα σώματα χωρίς διακριτά μέρη, όπως χαρακτηριστικά έχουμε στην περίπτωση της *κίνησης χαρακτήρων*. Στην περίπτωση αυτή ανθρωπόμορφα ή άλλης μορφής οργανικά μοντέλα εκτελούν μια σύνθετη κίνηση με παραμόρφωση ενός συνεχούς πλεγματικού μοντέλου, σύμφωνα με κατασκευαστικούς περιορισμούς που συνδέονται με την εσωτερική τους σκελετική δομή και τη συμπεριφορά των μαλακών ιστών.

Η κύρια μέθοδος κίνησης χαρακτήρων και άλλων παραμορφώσιμων αρθρωτών οντοτήτων είναι η *σκελετική κίνηση* (skeletal animation). Ένα πλεγματικό μοντέλο, το οποίο είναι και αυτό μέρος του χαρακτήρα που σχεδιάζεται αποκαλείται *φλοιός* - skin. Κινείται μετακινώντας τις επιμέρους κορυφές από τις οποίες αποτελείται, σύμφωνα με την κίνηση μιας ιεραρχίας από κόμβους σε μια κινηματική αλυσίδα που σχηματίζουν ένα *σκελετό* για το σώμα (Σχήμα 17.19). Αυτοί οι κόμβοι αποκαλούνται *οστά* (bones) και κινούνται ο καθένας σε σχέση με τον πρόγονό του με απλούς, μη παραμορφωτικούς γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, προσδιορίζοντας έτσι μια σύνθετη αρθρωτή κίνηση ως προς το χρόνο. Οι κορυφές του φλοιού είναι συσχετισμένες μ' ένα ή περισσότερα οστά με χρήση βαρών που προσδιορίζουν πως η κίνηση κάθε οστού επηρεάζει την εκάστοτε κορυφή. Αν η κορυφή $\mathbf{v}$ ακολουθεί αποκλειστικά την κίνηση του οστού J_i, τότε το βάρος w_j είναι 1 μόνο για $j = i$. Όταν οι κορυφές του φλοιού είναι συσχετισμένες μόνο με ένα βάρος η καθεμιά, το αποτέλεσμα της κίνησης θυμίζει την κίνηση συνδεδεμένων άκαμπτων σωμάτων και εμφανίζει αφύσικες πτυχές και παραμορφωμένα πολύγωνα. Για να πετύχουμε ένα ρεαλιστικό αποτέλεσμα, με σταδιακή παραμόρφωση των πολυγώνων κοντά στις αρθρώσεις και ομαλή αλλαγή της κίνησης ανάμεσα σε δύο οστά, κάθε κορυφή πρέπει να εξαρτάται από πολλαπλά κοντινά οστά· επομένως, πρέπει να έχει πάνω από ένα μη μηδενικό βάρος w_j. Το άθροισμα όλων των βαρών w_j για μια κορυφή $\mathbf{v}$ πρέπει να ισούται με 1.

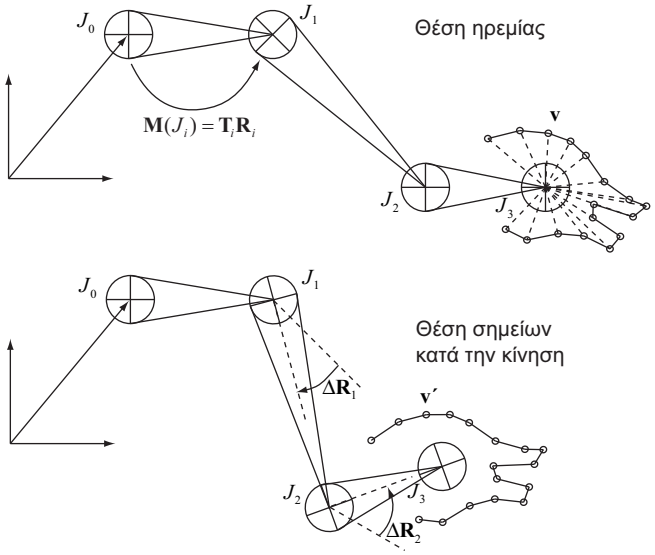
Προκειμένου να δημιουργήσουμε αποτελεσματικά μια ακολουθία από καρέ κίνησης τοποθετούμε οστά μέσα στο φλοιό, χρησιμοποιώντας το ίδιο σύστημα συντεταγμένων αναφοράς με αυτόν, έτσι, ώστε να σχηματισθεί ένας σκελετός για το μοντέλο. Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας κατασκευής του σκελετού και της ανάθεσης των βαρών, το μοντέλο βρίσκεται σε *στάση ηρεμίας* (rest pose), η οποία χρησιμοποιείται μόνο για το στήσιμο του χαρακτήρα και την επένδυσή του με βάρη (skinning)· επιλέγεται

δε με τέτοιον τρόπο ώστε να διευκολύνεται η απρόσκοπτη ανάθεση των βαρών. Συνήθως, η αρχική ανάθεση των βαρών γίνεται επιλέγοντας τα κοντινότερα σε μια κορυφή οστά και παίρνοντας βάρη που εξαρτώνται από τις κανονικοποιημένες αποστάσεις της κορυφής από αυτά· για όλες τις υπόλοιπες εξαρτήσεις αναθέτουμε μηδενικά βάρη. Για δίποδους χαρακτήρες, η πιο βολική στάση ηρεμίας, στην οποία δημιουργείται αρχικά το μοντέλο, είναι η στάση της σταύρωσης με τα πόδια στη διάσταση· αυτή εξασφαλίζει την ελάχιστη παρεμβολή μεταξύ των άκρων του μοντέλου. Διαφορετικά αν, για παράδειγμα, ένα χέρι βρίσκεται κατεβασμένο δίπλα στον κορμό κάποιες από τις κορυφές του θα πάρουν κατά λάθος μη μηδενικά βάρη από τα οστά του κορμού και αντίστροφα.

Ας εξετάσουμε τώρα πως η κίνηση της κορυφής **v** εξάγεται από την αντίστοιχη κίνηση της κινηματικής αλυσίδας των οστών (Σχήμα 17.20). Προς το παρόν, θα εστιά-



Σχήμα 17.19: *Σκελετική κίνηση. (α) Το στήσιμο του πλέγματος (φλοιού) ενός κινούμενου χαρακτήρα μ' ένα σύστημα οστών. (β) Μεταβολή των βαρών του φλοιού για δύο οστά x και y. (γ) Ο φλοιός του χαρακτήρα σε κίνηση υπό την επιρροή των μετασχηματισμών της κινηματικής αλυσίδας των οστών.*



Σχήμα 17.20: *Ο υπολογισμός του γεωμετρικού μετασχηματισμού των κορυφών του φλοιού του μοντέλου με βάση το μετασχηματισμό των κόμβων της κινηματικής αλυσίδας των οστών.*

σουμε σε μια μονή εξάρτηση μεταξύ της κορυφής **v** και του οστού J_i. Το τοπικό σύστημα συντεταγμένων του J_i στη στάση ηρεμίας καθορίζεται αναφορικά με το σύστημα συντεταγμένων του προγόνου J_{i-1} του στην αλυσίδα με βάση ένα γεωμετρικό μετασχηματισμό (Σχήμα 17.20):

$$\mathbf{M}(J_i) = \mathbf{T}_i\mathbf{R}_i. \tag{17.11}$$

Εφαρμόζοντας αναδρομικά όλους τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς μέχρι τη ρίζα των οστών J_0, παίρνουμε τις συντεταγμένες για το οστό J_i στη στάση ηρεμίας σε ΣΣΚ:

$$J_i = (\prod_{j=0}^{i} \mathbf{T}_j\mathbf{R}_j) \cdot \mathbf{o} = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{o}, \tag{17.12}$$

όπου **o** είναι η αρχή των αξόνων στο ΣΣΚ. Αν ο προσανατολισμός ενός οστού δε συμμετέχει σε κάποιον υπολογισμό, (π.χ., έλεγχος ορίων κάμψης αρθρώσεων), ο σκελετός μπορεί να «παγώσει» στη στάση ηρεμίας μετά την κατασκευή του. Δηλαδή να μηδενιστούν όλοι οι μετασχηματισμοί περιστροφής μεταξύ των οστών και να κρατήσουμε μόνο τος σχετικές μετακινήσεις τους (T_i), οι οποίες απαιτούνται από τις Εξισώσεις (17.11) και (17.12).

Αν το μήκος των οστών (απόσταση μεταξύ διαδοχικών κόμβων) παραμένει σταθερό κατά την κίνηση (οποίος είναι και ένας φυσιολογικός περιορισμός για πραγματικούς αρθρωτούς χαρακτήρες), ο μόνος παράγοντας που διαφοροποιεί τη στάση ενός κόμβου σε σχέση με τον πρόγονό του σε μια χρονική στιγμή της κίνησης είναι μια

διαφορική περιστροφή $\Delta\mathbf{R}_i$ ως προς τη στάση ηρεμίας [Kava03]. Η νέα θέση J_i' του κόμβου ως προς τον πρόγονό του εκφράζεται με τον ακόλουθο μετασχηματισμό:

$$\mathbf{M}'(J_i) = \mathbf{T}_i\mathbf{R}_i\Delta\mathbf{R}_i. \tag{17.13}$$

Όπως και στην Εξίσωση (17.12), το κινούμενο οστό J_i' εκφράζεται αναφορικά με το σύστημα αναφοράς ΣΣΚ (Σχήμα 17.20):

$$J_i' = (\prod_{j=0}^{i} \mathbf{T}_j\mathbf{R}_j\Delta\mathbf{R}_j) \cdot \mathbf{o}. \tag{17.14}$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε τη νέα θέση $\mathbf{v}'$ της κορυφής $\mathbf{v}$ στο φλοιό σε ΣΣΚ, αφού μετακινήσουμε τα οστά στην κινηματική αλυσίδα, χρειάζεται —καταρχήν— να εκφράσουμε την κορυφή ως προς το τοπικό σύστημα συντεταγμένων του οστού από το οποίο εξαρτάται:

$$\mathbf{v}(J_i) = (\prod_{j=0}^{i} \mathbf{T}_j\mathbf{R}_j)^{-1} \cdot \mathbf{v} = (\prod_{j=i}^{0} \mathbf{R}_j^{-1}\mathbf{T}_j^{-1}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{A}_i^{-1} \cdot \mathbf{v}. \tag{17.15}$$

Στη συνέχεια, μπορούμε να εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό της Εξίσωσης (17.14) στη σχετική αυτή θέση και να πάρουμε την τροποποιημένη θέση της κορυφής στη δεδομένη χρονική στιγμή:

$$\mathbf{v}' = (\prod_{j=0}^{i} \mathbf{T}_j\mathbf{R}_j\Delta\mathbf{R}_j) \cdot \mathbf{v}(J_i) = \mathbf{F}_i\mathbf{A}_i^{-1} \cdot \mathbf{v}. \tag{17.16}$$

Όταν μια κορυφή εξαρτάται από περισσότερα οστά του σκελετού, οι πίνακες $\mathbf{F}_i\mathbf{A}_i^{-1}$ των κόμβων συμμετέχουν σε ένα βεβαρημένο άθροισμα ανάλογα με τα βάρη w_i έτσι ώστε να δώσουν συνολικό σύνθετο μετασχηματισμό ο οποίος εφαρμόζεται στην αρχική θέση (ηρεμίας) της κορυφής του πλεγματικού μοντέλου του φλοιού:

$$\mathbf{v}' = \sum_{i=0}^{N} (w_i\mathbf{F}_i\mathbf{A}_i^{-1}) \cdot \mathbf{v}, \tag{17.17}$$

όπου $\sum_{i=0}^{N} w_i = 1$. Η σκελετική κίνηση είναι ένα ανεκτίμητο εργαλείο τόσο για τα γραφικά πραγματικού χρόνου όσο και για κινούμενη φωτορεαλιστική εικόνα. Οι διαφορικές περιστροφές $\Delta\mathbf{R}_i$ μπορούν να υπολογιστούν είτε με ευθεία είτε με αντίστροφη κινηματική. Εναλλακτικά, μπορούν να υπολογιστούν έμμεσα από τις σχετικές θέσεις των οστών, στην περίπτωση που οι συντεταγμένες αυτές είναι διαθέσιμες απευθείας ως δεδομένα από καταγραφή κίνησης (*motion capture - mocap*) με χρήση αισθητήρων κίνησης ή βιντεοσκόπηση ειδικών σημαδιών πάνω σε πραγματικούς ανθρώπους ή ζώα. Στην ευθεία κινηματική (*forward kinematics*), το τοπικό σύστημα συντεταγμένων κάθε οστού καθορίζεται από το συνολικό μετασχηματισμό της Εξίσωσης (17.14), χρησιμοποιώντας ως είσοδο τις παραμέτρους περιστροφής (γωνίες ή quaternions). Στην αντίστροφη κινηματική (*inverse kinematics*), ένα καταληκτικό οστό που αποκαλείται end-effector τοποθετείται στην επιθυμητή θέση στο ΣΣΚ. Οι παράμετροι των περι-

στροφών που οδηγούν την κινηματική αλυσίδα σε μια τέτοια στάση, ώστε να παίρνει ο end-effector τη δεδομένη θέση, υπολογίζονται λύνοντας ένα σύστημα εξισώσεων που εμπεριέχει τις σχετικές θέσεις των οστών και τις γωνιακές ταχύτητες περιστροφής. Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε την [Pare01].

17.5 Παραμορφώσιμα μοντέλα βασισμένα στη φυσική

Για τη μοντελοποίηση και συνθετική κίνηση περίπλοκων αντικειμένων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραμόρφωση των καμπυλών και επιφανειών B-spline (δείτε τις Ενότητες 7.3 και 7.6), και την γενίκευσή τους σε μη ομοιόμορφες ρητές καμπύλες και επιφάνειες B-spline (δείτε την Ενότητα 7.4.2). Αυτές οι γεωμετρικές κατασκευές χρησιμοποιούνται εκτενώς στη βιομηχανία CAD —και σε κάποιο ποσοστό— στη συνθετική κίνηση. Σχεδιαστές και δημιουργοί συνθετικών κινήσεων αλλάζουν την μορφή αυτών των τύπων καμπυλών και επιφανειών με την αλλαγή των βαθμών ελευθερίας τους, κυρίως των σημείων ελέγχου τους (και για την ρητή περίπτωση με την αλλαγή και των συντελεστών βαρύτητας). Περισσότερες διαφοροποιήσεις είναι δυνατές μέσω αλλαγών των διανυσμάτων των κόμβων τους. Γενικά τέτοιες καμπύλες και επιφάνειες δημιουργούνται με προσέγγιση ή παρεμβολή κάποιων αρχικών σημείων ή, στην περίπτωση επιφανειών, με την περαιτέρω παρεμβολή κάποιου συνόλου καμπυλών. Ως αποτέλεσμα αυτών των διαδικασιών, η γεωμετρική σχεδίαση και η συνθετική κίνηση είναι δύσκολες λόγω της έμμεσης φύσης των σχετικών πράξεων αλλά και της ανάγκης εκτέλεσης περαιτέρω πράξεων στις οντότητες που προκύπτουν, ώστε να γίνουν πιο λείες και καλαίσθητες.

Τα παραμορφώσιμα μοντέλα βασισμένα στη φυσική αναπτύχθηκαν για την αντιμετώπιση των περιορισμών αυτών, όπως αναφέρεται στα άρθρα [Barr84, Meta96b, Terz87, Celn90, Terz91, Terz94]. Αυτά τα μοντέλα συνδυάζουν έννοιες και μεθόδους της γεωμετρικής μοντελοποίησης με κανόνες της φυσικής (όπως αδράνεια, απόσβεση και ελαστικότητα) καθιστώντας αυτά τα μοντέλα ικανά να αντιδράσουν σε συγκεντρωμένες και κατανεμημένες δυνάμεις με τρόπο φυσικό και ευνόητο. (Δείτε και την Ενότητα 8.7 για το παράδειγμα μίας αρχικά ευθύγραμμης ράβδου στην οποία παρουσιάζονται τα αποτελέσματα κάμψης). Το προκύπτον υπόδειγμα μοντελοποίησης επιτρέπει την εύκολη κατασκευή και συνθετική κίνηση πολύπλοκων και γλυπτών σχημάτων (καμπυλών, επιφανειών, και στερεών) με εγγενή λειότητα και καλαισθησία· χαρακτηριστικά που απορρέουν από την ίδια τη διαδικασία κατασκευής των παραμορφώσιμων μοντέλων βασισμένων στη φυσική.

Παρακάτω παρουσιάζουμε συνοπτικά ένα παράδειγμα της κατασκευής μίας ελαστικά παραμορφώσιμης καμπύλης. Σε εξειδικευμένα συγγράμματα όπως το [Meta96a], υπάρχει περιεκτική ανάλυση των καμπυλών, επιφανειών και στερεών η οποία εξηγεί τις εφαρμογές τους στα γραφικά, στην συνθετική κίνηση, στην τεχνητή όραση και στις ιατρικές τομογραφίες. Στην περίπτωση μίας καμπύλης (μοντελοποιημένης αρχικά ως ευθύγραμμη ράβδος), η μερική διαφορική εξίσωση που περιγράφει την παραμόρφωση της ράβδου όταν επηρεάζεται από κατανεμημένες δυνάμεις είναι η ακόλουθη (δείτε το

[Celn90]):

$$\mu \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\beta \mathbf{w}_{uu})_{uu} - (\alpha \mathbf{w}_u)_u = \mathbf{f}(u,t), \tag{17.18}$$

όπου

το $\mathbf{w}(u,t)$ είναι το διάνυσμα θέσης της καμπύλης, ως συνάρτηση της παραμέτρου u και του χρόνου t.

το $\mu = \mu(u)$ είναι η πυκνότητα μάζας, ως συνάρτηση του u.

το $\gamma = \gamma(u)$ παριστάνει τον συντελεστή απόσβεσης, ως συνάρτηση της παραμέτρου u.

τα $\alpha = \alpha(u)$ και $\beta = \beta(u)$ προσομοιώνουν τους συντελεστές της ελαστικής δύναμης ελατηρίου που σχετίζονται με τις επιδράσεις κάμψης και τάσης αντίστοιχα.

το $\mathbf{f}(u,t)$ παριστάνει την εξωτερική δύναμη ως συνάρτηση της παραμέτρου u και του χρόνου t.

το u είναι μία παράμετρος που περιγράφει ένα σημείο στην καμπύλη, προσεγγίζοντας το μήκος του τόξου. Οι δείκτες u και uu συμβολίζουν την πρώτη και δεύτερη παράγωγο ως προς u, αντίστοιχα.

Η παραπάνω μερική διαφορική εξίσωση μπορεί να λυθεί αποτελεσματικά με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων [Zien05]. Τα αποτελέσματα μπορούν να απεικονιστούν για οπτική ανάλυση από σχεδιαστές ή τεχνικούς συνθετικής κίνησης. Η γενίκευση αυτής της μεθόδου στα ελαστικά ή πλαστικά μοντέλα επιφανειών και στερεών είναι εφικτή και πολλές από τις πηγές που αναφέρονται σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουν περισσότερες λεπτομέρειες. Οι παραμορφώσιμες επιφάνειες μπορούν επίσης να ιδωθούν ως κατανεμημένα, γραμμικά και ελαστικά ελατήρια τα οποία επεξεργάζονται με διακριτές μεθόδους. Η έρευνα σε αυτόν τον τομέα επεκτείνεται γρήγορα κι' έχουν εμφανιστεί εφαρμογές της συνθετικής κίνησης οι οποίες περιλαμβάνουν μη γραμμική κίνηση υφασμάτων, ενδυμάτων, μαλλιών, θραύσης στερεών, διάδοσης ρωγμών, ρευστών (υγρών και αερίων), συμπαρασυρόμενων σωματιδίων και ελευθέρων επιφανειών σε κύματα βαρύτητας. Στον τομέα της προσομοίωσης των ρευστών εμφανίστηκαν πρόσφατα μέθοδοι για την συνθετική κίνηση πιδάκων, νεφών, καπνού και θαλασσίων κυμάτων.

17.6 Συστήματα σωματιδίων

Στις προηγούμενες ενότητες παρουσιάστηκαν τεχνικές για την απόδοση κίνησης σε αντικείμενα συγκεκριμένου και σαφώς ορισμένου σχήματος· κατά την κίνησή τους το σχήμα τους μπορεί είτε να παραμείνει αμετάβλητο (συνθετική κίνηση στερεών σωμάτων) είτε να υφίσταται συγκεκριμένες μεταβολές (σκελετικά ή παραμορφώσιμα μοντέλα). Δυστυχώς, καμία από αυτές τις τεχνικές δεν είναι ικανή να αποδώσει ρεαλιστικά την κίνηση αντικειμένων ασαφούς μορφής όπως πυροτεχνήματα, καπνός, νερό

ή σύννεφα, των οποίων το σχήμα δεν μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά με ευκολία και μεταβάλλεται φαινομενικά τυχαία με την πάροδο του χρόνου.

Τα *συστήματα σωματιδίων* αναπτύχθηκαν ακριβώς γι' αυτό τον σκοπό. Η αρχική εφαρμογή τους [Reev83] ήταν η συνθετική απόδοση της κίνησης ενός κύματος φωτιάς που επεκτεινόταν στην επιφάνεια ενός πλανήτη για την ταινία *Star Trek II*. Ένα αντικείμενο ή φαινόμενο που αναπαρίσταται ως σύστημα σωματιδίων αντιπροσωπεύεται από ένα (συνήθως μεγάλο) πλήθος ανεξάρτητων σωματιδίων, τα οποία έχουν το καθένα το δικό του σύνολο χαρακτηριστικών, όπως θέση, ταχύτητα, χρώμα, διαφάνεια, σχήμα, και μέγεθος. Τα σωματίδια κινούνται διαδικαστικά και τα χαρακτηριστικά τους μεταβάλλονται με το χρόνο, σύμφωνα με κανόνες που προσπαθούν να προσομοιώσουν τη συμπεριφορά του αντίστοιχου πραγματικού συστήματος.

Για κάθε πλαίσιο εικόνας της συνθετικής κίνησης πραγματοποιούνται τα ακόλουθα βήματα:

1. Νέα σωματίδια δημιουργούνται και προστίθενται στο σύστημα.

2. Σε κάθε νέο σωματίδιο αποδίδονται τα αρχικά χαρακτηριστικά του.

3. Σωματίδια που έχουν ξεπεράσει τον χρόνο ζωής τους αφαιρούνται από το σύστημα.

4. Σε κάθε σωματίδιο που βρίσκεται στο σύστημα αποδίδονται νέα χαρακτηριστικά.

5. Τα σωματίδια που βρίσκονται στο σύστημα απεικονίζονται στο τρέχον πλαίσιο εικόνας.

Καθώς πρέπει να αποδοθεί η «ασάφεια» του αντίστοιχου αντικειμένου ή φαινομένου, τα παραπάνω βήματα υλοποιούνται με τη βοήθεια τυχαίων μεταβλητών, με όσους βαθμούς ελευθερίας επιθυμεί ο σχεδιαστής της συνθετικής κίνησης και μπορεί να υποστηρίξει το υπολογιστικό σύστημα που χρησιμοποιείται. Για το πλαίσιο f, μία τυχαία μεταβλητή X που χρησιμοποιείται για οποιοδήποτε από τα χαρακτηριστικά μπορεί να έχει την μορφή:

$$X(f) = X_{\text{mean}}(f) + \text{rand}() \cdot X_{\text{var}}(f),$$

όπου X_{mean} είναι η μέση τιμή της, X_{var} είναι η διακύμανσή της και $\text{rand}()$ είναι μία γεννήτρια τυχαίων αριθμών. Οι τυχαίες μεταβλητές X_{mean} και X_{var} μπορεί επίσης να διαφέρουν μεταξύ πλαισίων, εφόσον το φαινόμενο που μοντελοποιείται διαθέτει αντίστοιχη μεταβλητότητα.

Τα σωματίδια μπορούν να απεικονίζονται με διάφορους τρόπους, ανάλογα με την εφαρμογή· καθώς ένα τέτοιο σύστημα αποτελείται συνήθως από μεγάλο πλήθος σωματιδίων, η απεικόνισή τους θα πρέπει να είναι κατά το δυνατόν οικονομική για πρακτικούς λόγους. Στην αρχική εφαρμογή των συστημάτων σωματιδίων για την εμφάνιση του κύματος φωτιάς, κάθε σωματίδιο απεικονιζόταν ως μία σημειακή φωτεινή πηγή που εξέπεμπε μία μικρή ποσότητα φωτός (του οποίου το χρώμα άλλαζε με τον

χρόνο) και επηρέαζε τα γειτονικά του εικονοστοιχεία. Το φως από γειτονικά σωματίδια συσσωρευόταν και επομένως δεν χρειαζόταν ταξινόμηση ως προς το βάθος, ούτε δημιουργούνταν σκιές στα σωματίδια. Εναλλακτικά, τα σωματίδια συχνά απεικονίζονται ως χρωματισμένα σημεία ή μικρά ευθύγραμμα τμήματα· για παράδειγμα κατά την απόδοση πυροτεχνημάτων. Τέλος μπορεί να είναι απαραίτητο να απεικονίζεται κάθε σωματίδιο ως 3Δ αντικείμενο, όπως σφαίρα. Σ' αυτή την περίπτωση πρέπει να εφαρμοστούν οι πλήρεις υπολογισμοί φωτισμού και σκίασης για κάθε σωματίδιο και το υπολογιστικό κόστος είναι αναπόφευκτα μεγάλο. Σε κάθε περίπτωση, για να αυξηθεί ο ρεαλισμός ενός συστήματος σωματιδίων είναι απαραίτητη η εφαρμογή τόσο χρονικής όσο και χωρικής αντιταύτισης στη σκηνή.

Ως ένα παράδειγμα συστήματος σωματιδίων ας θεωρήσουμε το συντριβάνι που απεικονίζεται στο Σχήμα 17.21. Νερό εκτοξεύεται από ένα στόμιο σε γωνία α_0 ως προς το έδαφος. Κάθε σωματίδιο νερού ξεκινάει σε μία τυχαία γωνία:

$$\alpha = \alpha_0 + \text{rand}() \cdot \alpha_{\text{var}}$$

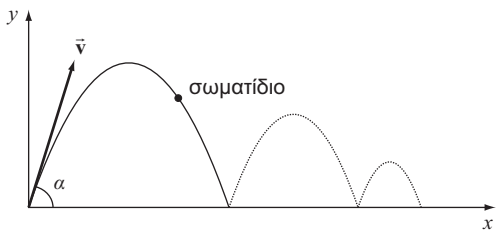
με μία τυχαία αρχική ταχύτητα:

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_0 + \text{rand}() \cdot \vec{\mathbf{v}}_{\text{var}}.$$

Αυτή η κίνηση μπορεί να αναλύθεί σε δύο συνιστώσες: μία κατακόρυφη που υπόκειται στη βαρύτητα και μία οριζόντια που είναι σταθερή, παράγοντας έτσι την παραβολική τροχιά του σωματιδίου μέχρι αυτό να συναντήσει την επιφάνεια του νερού. Συνεπώς η θέση του σωματιδίου ως προς τον χρόνο δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} x(t) &= |\vec{\mathbf{v}}| \cos\alpha \; t, \\ y(t) &= |\vec{\mathbf{v}}| \sin\alpha \; t - \tfrac{1}{2} g t^2, \end{aligned}$$

όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας, η οποία είναι ως γνωστόν σταθερή. Για μία χρονική στιγμή t αυτές οι σχέσεις παρέχουν τη θέση του σωματιδίου και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να παραχθεί η εικόνα του συστήματος σωματιδίων. Το μοντέλο μπορεί να γίνει πιο ρεαλιστικό αν το χρώμα των σωματιδίων μεταβάλλεται με τον χρόνο (για παράδειγμα, να είναι πιο άσπρο στα πρώτα πλαίσια της εικόνας ώστε να προσομοιώνει τη μεγαλύτερη πίεση και πιο μπλε αργότερα), αν τα σωματίδια αναπη-



Σχήμα 17.21: *Ένα σωματίδιο από ένα σύστημα σωματιδίων που αναπαριστά συντριβάνι.*

δούν στην επιφάνεια του νερού, κλπ.

17.7 Ασκήσεις

1. Αν κάθε καρέ συνθετικής κίνησης χρειάζεται 10 λεπτά για να δημιουργηθεί σε ανάλυση $1024 \times 1024 \times 24$ ψηφία/εικονοστοιχείο, προσδιορίστε τον χρόνο και τον χώρο που απαιτούνται για 20 λεπτά συνθετικής κίνησης με 30 καδ.

2. Δημιουργήστε το φαινόμενο του τροχού του κάρου. Επιλέξτε ένα κυκλικό 2Δ αντικείμενο με μία ή περισσότερες ακτίνες και υλοποιήστε την περιστροφή του με συχνότητα που μπορεί να αυξάνεται και να μειώνεται από τον χρήστη διαδραστικά. Σημειώνεται ότι πρέπει να εμφανίζεται η συχνότητα περιστροφής.

3. Χρησιμοποιήστε χρονική αντιταύτιση στην προηγούμενη άσκηση. Χρησιμοποιήστε ένα απλό 1Δ φίλτρο συνέλιξης, όπως αυτό που δίνεται στην Ενότητα 17.2.3.

4. Υλοποιήστε ένα απλό 2Δ σύστημα συνθετικής κίνησης στερεών σωμάτων. Ο χρήστης πρέπει να μπορεί να ορίσει την κίνηση ενός 2Δ αντικειμένου χρησιμοποιώντας καμπύλη Bézier ή B-spline, η οποία καθορίζει την τροχιά του αντικειμένου. Επιπλέον, η εφαπτομένη της καμπύλης καθορίζει τον προσανατολισμό του αντικειμένου.

5. Υλοποιήστε ένα απλό 2Δ σύστημα συνθετικής κίνησης με καρέ-κλειδιά. Υποθέστε ότι τα αντικείμενα αποτελούνται από 2Δ ευθύγραμμα τμήματα. Ο χρήστης δημιουργεί ένα αρχικό καρέ-κλειδί F_0 αποτελούμενο από ευθύγραμμα τμήματα. Στη συνέχεια, διαδοχικά καρέ-κλειδιά F_i $(i > 0)$ δημιουργούνται με επεξεργασία (μεταφορά, περιστροφή, αλλαγή κλίμακας) των ευθυγράμμων τμημάτων του προηγούμενου καρέ-κλειδιού F_{i-1}. Ο χρήστης πρέπει επίσης να μπορεί να ορίζει την απόσταση, σε πλήθος καρέ, μεταξύ των καρέ-κλειδιών. Το σύστημα τέλος δημιουργεί αυτόματα τα ενδιάμεσα καρέ με παρεμβολή ολοκληρώνοντας έτσι την συνθετική κίνηση.

6. (Μεταμόρφωση Εικόνων.) Υλοποιήστε ένα απλό σύστημα μεταμόρφωσης χρησιμοποιώντας διανύσματα ως χαρακτηριστικά. Ο χρήστης εισάγει δύο εικόνες G_1 και G_2 και ορίζει αντίστοιχα ζεύγη διανυσμάτων πάνω τους (βήμα προσδιορισμού χαρακτηριστικών). Για το βήμα παραμόρφωσης, χρησιμοποιήστε μια αντίστροφη απεικόνιση από το $G*$ στο G_1 και στο G_2. Για το βήμα συνδυασμού, χρησιμοποιήστε μόνο το χρώμα των εικονοστοιχείων ως οπτική ιδιότητα και εκτελέστε παρεμβολή χρησιμοποιώντας την απόσταση του $G*$ από τα G_1 και G_2 ως παράμετρο παρεμβολής. Αγνοήστε το βήμα της γεωμετρικής παρεμβολής.

7. Υλοποιήστε ένα απλό σύστημα σωματιδίων. Περιορίστε τα σωματίδια σε απλά σχήματα, όπως σημεία και ευθύγραμμα τμήματα. Ο χρήστης πρέπει να μπορεί να ορίσει τις ιδιότητες των σωματιδίων, τις αρχικές τιμές τους και τον τρόπο που αυτές μεταβάλλονται με τον χρόνο.

18

Αλγόριθμοι Οπτικοποίησης

Η δημιουργική οπτικοποίηση χρησιμοποιείται από όλους τους πετυχημένους ανθρώπους.
—Marisa D'Vari

18.1 Εισαγωγή

Οι εφαρμογές της οπτικοποίησης είναι εκτενείς και συνήθως κατατάσσονται ανάλογα με τον *τύπο* των δεδομένων που χρησιμοποιούν (π.χ. διανυσματικά ή βαθμωτά). Αλγόριθμοι οπτικοποίησης για τέτοιους γενικούς τύπους δεδομένων είναι συχνά υλοποιημένοι σε συστήματα οπτικοποίησης. Το κεφάλαιο αυτό εξετάζει καθιερωμένους αλγόριθμους οπτικοποίησης για συνήθεις τύπους δεδομένων.

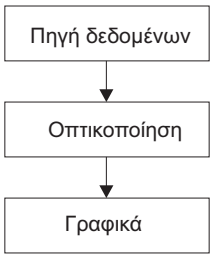
Πριν από την εφαρμογή ενός αλγορίθμου οπτικοποίησης είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τα χαρακτηριστικά των δεδομένων που θέλουμε να αναδείξουμε. Για παράδειγμα, κατά την οπτικοποίηση βαθμωτών δεδομένων, μπορούμε να επιλέξουμε μεταξύ αλγορίθμων που εμφανίζουν ολόκληρο το σύνολο δεδομένων ή αλγορίθμων που εμφανίζουν μόνο ισοεπιφάνειες εντός του συνόλου δεδομένων· κάθε είδος αλγορίθμου έχει τα πλεονεκτήματά του. Αυτά τα πλεονεκτήματα αναλύονται στις ενότητες αλγορίθμων που ακολουθούν.

Η επιλογή αλγορίθμου οπτικοποίησης εξαρτάται από δύο βασικούς παράγοντες:

- τον τύπο των δεδομένων
- τα χαρακτηριστικά των δεδομένων που θέλουμε να αναδείξουμε.

Για παράδειγμα, αν έχουμε ένα μεγάλο σύνολο βαθμωτών δεδομένων που πρέπει να εμφανιστεί ολόκληρο για να αποκτήσουμε μια γενική άποψή του, καλές επιλογές θα ήταν ο αλγόριθμος εκπομπής ακτίνων ή ο αλγόριθμος splatting. Αντίθετα, αν θέλουμε να εξετάσουμε περιοχές με συγκεκριμένες τιμές πεδίου, μια καλή επιλογή είναι ο αλγόριθμος marching cubes που εξάγει ισοεπιφάνειες από τα δεδομένα.

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να συνδέσουμε την οπτικοποίηση με τα γραφικά (Σχήμα 18.1). Οι αλγόριθμοι οπτικοποίησης εφαρμόζονται σε μια πηγή δεδομένων και η οπτικοποίηση μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκεται ένα επίπεδο πάνω από τα γραφικά. Ένας αλγόριθμος οπτικοποίησης δημιουργεί το *αντικείμενο οπτικοποίησης* από τα αρχικά δεδομένα και προσδιορίζει τις παραμέτρους απεικόνισής του (παράμετροι παρα-



Σχήμα 18.1: *Οπτικοποίηση και γραφικά.*

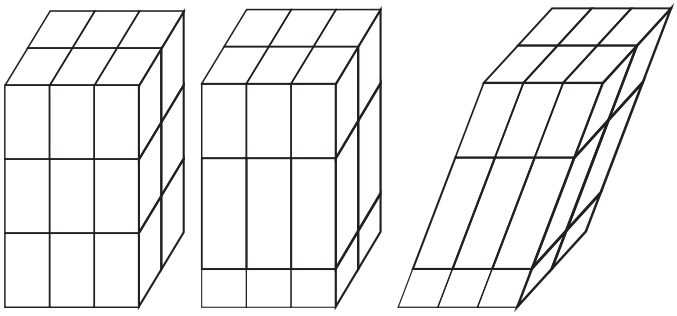
τήρησης, χρωματικοί χάρτες, χάρτες διαφάνειας, χάρτης υφής, παράμετροι φωτισμού, κλπ.). Οι αλγόριθμοι γραφικών υλοποιούν τα παραπάνω και δημιουργούν εικόνες.

Πιο συγκεκριμένα ας ορίσουμε το *αντικείμενο οπτικοποίησης* ως μια συνάρτηση $V(S)$ [Brod92]. Το πεδίο ορισμού της (S) είναι ο χώρος στον οποίο έγινε το πείραμα ή η προσομοίωση. Για παράδειγμα το S μπορεί να αποτελείται από δομημένα σημεία στον 1Δ, 2Δ, 3Δ ή σε κάποιο πολυδιάστατο χώρο. Το σύνολο των σημείων αυτών είναι συνήθως γνωστό ως *πλέγμα* και αποτελεί το πιο σύνηθες πεδίο ορισμού. Εναλλακτικά, το S μπορεί να αποτελείται από συνεκτικές περιοχές του χώρου (π.χ. περιοχές ενός χάρτη) ή μπορεί να είναι ένα απαριθμήσιμο σύνολο (π.χ. είδη μουσικών οργάνων). Συχνά, το πεδίο ορισμού περιέχει και μεταβλητή χρόνου. Το πεδίο τιμών της $V(S)$ αποτελείται από τα δεδομένα που παράγονται από το πείραμα ή την προσομοίωση για τα στοιχεία του πεδίου τιμών. Ο *τύπος* του πεδίου τιμών της $V(S)$ διαχωρίζει τις μεθόδους οπτικοποίησης. Συνήθεις τύποι του πεδίου τιμών είναι: *βαθμωτός, διανυσματικός* και *τανυστής*. Για τον ορισμό του τύπου ενός αντικειμένου οπτικοποίησης O θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο συμβολισμό [Spiv92]:

$$O : \text{domtype1} \times \text{domtype2} \times \ldots \times \text{domtypeN} \rightarrow \text{rangetype}.$$

Για παράδειγμα η οπτικοποίηση ενός αντικειμένου που αντιστοιχεί 2Δ διανύσματα (πεδίο τιμών) πάνω σε ένα 3Δ πλέγμα συν χρόνο (πεδίο ορισμού) έχει τύπο $X \times Y \times Z \times T \rightarrow$ vector2. Αν το αποτέλεσμα μιας προσομοίωσης πάνω σε παρόμοιο πλέγμα είναι ένα διάνυσμα και μια βαθμωτή τιμή σε κάθε σημείο, ο τύπος θα είναι η πολύτιμη συνάρτηση $X \times Y \times Z \times T \rightarrow$ vector $\times$ scalar. (Κατά σύμβαση τα διανύσματα έχουν την διάσταση του πλέγματος ορισμού). Χρησιμοποιούμε την συντομογραφία $O^{\text{range_type}}_{\text{domain_type}}$ για να δώσουμε πιο συνοπτικά τον τύπο του αντικειμένου οπτικοποίησης. Έτσι, για παράδειγμα, ένα 3Δ διανυσματικό πεδίο επί ενός 3Δ πλέγματος (Εικόνα 34) έχει τύπο $O^{\text{vector3}}_{X \times Y \times Z}$.

Στο σημείο αυτό πρέπει να ορίσουμε πώς ακριβώς παριστάνονται τα δεδομένα στο πεδίο ορισμού. Διατηρώντας τη γενικότητα, ας θεωρήσουμε ως πεδίο ορισμού τον 3Δ διακριτό χώρο $X \times Y \times Z$. Ένα *πλέγμα* ονομάζεται *κανονικό* αν τα βασικά στοιχεία όγκου του είναι ισομεγέθεις κύβοι, *ορθογώνιο* αν τα βασικά στοιχεία όγκου του είναι ορθογώνια παραλληλεπίπεδα και *δομημένο* αν αυτά είναι γενικά παραλληλεπίπεδα (Σχήμα 18.2). Τα βασικά στοιχεία όγκου του πλέγματος δεν χρειάζεται καν να είναι



Σχήμα 18.2: *Κανονικό, ορθογώνιο και δομημένο πλέγμα.*

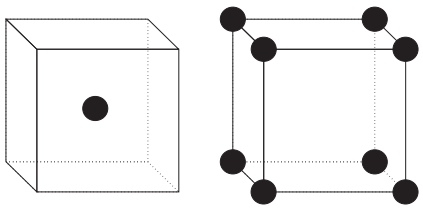
παραλληλεπίπεδα· εναλλακτικά θα μπορούσαν να είναι τετραεδρικά στοιχεία όγκου (Εικόνα 35).

Το πεδίο τιμών μπορεί να απεικονιστεί στο πλέγμα ορισμού με δύο τρόπους (Σχήμα 18.3):

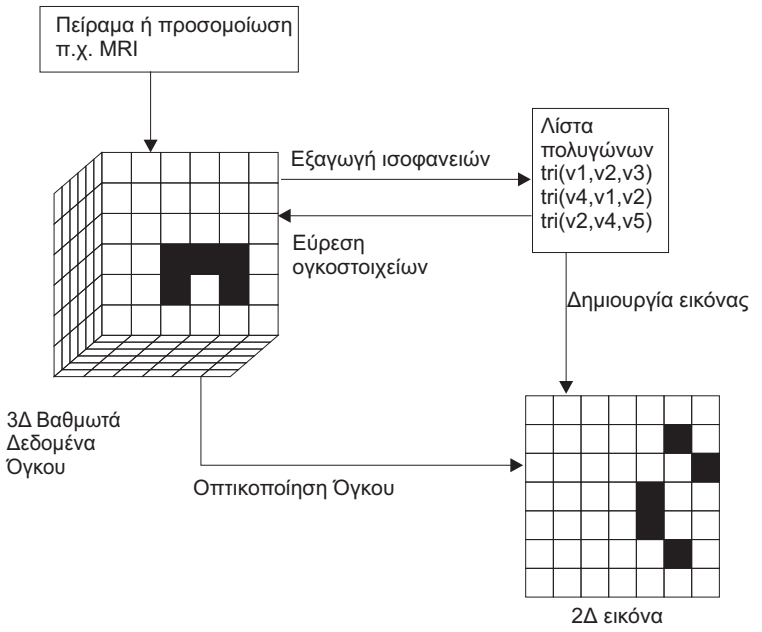
- οι τιμές αντιστοιχούνται σε ολόκληρα στοιχεία όγκου (τα οποία ονομάζονται *ογκοστοιχεία*)
- οι τιμές αντιστοιχούνται σε κορυφές του πλέγματος (τότε τα στοιχεία όγκου ονομάζονται *κελιά*).

Για να βρεθεί η τιμή ενός τυχαίου 3Δ σημείου, υπάρχουν δύο εναλλακτικές που αντιστοιχούν στις παραπάνω απεικονίσεις: να δώσουμε στο σημείο την σταθερή τιμή του ογκοστοιχείου στο οποίο περιέχεται ή να παρεμβάλλουμε τις τιμές των κορυφών του σχετικού κελιού.

Η διακριτή φύση των δεδομένων οπτικοποίησης (πλέγμα) είναι προβληματική όταν πρέπει να δημιουργηθούν εικόνες με διαφορετικές παραμέτρους παρατήρησης ή όταν πρέπει να γίνουν υπολογισμοί οι οποίοι απαιτούν τιμές πεδίου σε τυχαία 3Δ σημεία (αντί για σημεία του πλέγματος). Αυτά ξεπερνώνται με τεχνικές *παρεμβολής* (Ενότητα 17.2.1), οι οποίες αποτελούν το σημαντικότερο μαθηματικό εργαλείο στην οπτικοποίηση.



Σχήμα 18.3: *Ογκοστοιχεία (αριστερά) και κελιά (δεξιά).*



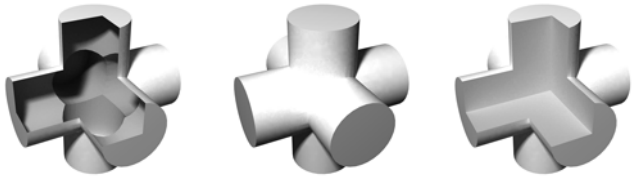
Σχήμα 18.4: *Οπτικοποίηση βαθμωτών δεδομένων όγκου.*

18.2 Οπτικοποίηση βαθμωτών δεδομένων

Υπάρχουν δύο βασικές προσεγγίσεις για την οπτικοποίηση βαθμωτών δεδομένων πάνω σε πλέγμα (Σχήμα 18.4). Αν μας ενδιαφέρει η παρατήρηση μιας ή περισσότερων επιφανειών όπου το πεδίο έχει σταθερή τιμή (*ισοεπιφάνειες*), τότε χρησιμοποιούμε αλγορίθμους εξαγωγής ισοεπιφανειών. Αυτό πλεονεκτεί στο ότι μπορεί να δώσει καθαρές εικόνες ενώ παράλληλα, χρησιμοποιώντας καθιερωμένες μεθόδους παράστασης (πολυγωνικές λίστες), μπορεί να εκμεταλλευτεί τις δυνατότητες των επεξεργαστών γραφικών. Όμως, μόνο ένα τμήμα της πληροφορίας του βαθμωτού πεδίου γίνεται αντιληπτό μέσω των ισοεπιφανειών (Σχήμα 18.5).

Εναλλακτικά, μπορούμε να εμφανίσουμε ολόκληρο το βαθμωτό πεδίο με μεθόδους άμεσης οπτικοποίησης όγκου· αυτές οι τεχνικές είναι αργές και γενικά παράγουν θαμπές εικόνες. Η επιλογή εξαρτάται από την εφαρμογή. Στην ενότητα αυτή θα υποθέσουμε το αντικείμενο οπτικοποίησης $O^{\text{scalar}}_{X\times Y\times Z}$, παρόλο που είναι δυνατό να γενικεύσουμε και σε άλλες διαστάσεις.

Όποια μέθοδο οπτικοποίησης κι αν επιλέξουμε είναι επιθυμητό να χρησιμοποιούμε απλοποιημένα βαθμωτά πεδία [Chia03, Cign00]. Η απλοποίηση ενός πεδίου μπορεί να γίνει με βάση το πλέγμα ορισμού και περιγράφεται για διανυσματικά πεδία στην Ενότητα 18.3.6.



Σχήμα 18.5: *Ένα στερεό αντικείμενο (μέση) μπορεί να οπτικοποιηθεί ως ισοεπιφάνεια (κρούστα όγκου (αριστερά)). Δεν μπορεί να οπτικοποιηθεί όλη η πληροφορία του όγκου με την εξαγωγή ισοεπιφανειών (δεξιά).*

18.2.1 Αλγόριθμοι εξαγωγής ισοεπιφανειών

Τα βαθμωτά δεδομένα όγκου έχουν συχνά μεγάλη πολυπλοκότητα η οποία δεν επιτρέπει την άμεση οπτικοποίησή τους. Τέτοια δεδομένα περιέχουν πολλή πληροφορία πάνω σε κάθε ακτίνα παρατήρησης η οποία δεν μπορεί να αποτυπωθεί πάνω σ' ένα εικονοστοιχείο με ένα χρώμα. Επίσης συνήθως περιέχουν συστάδες τιμών οι οποίες διαχωρίζονται από επιφάνειες, σαν 3Δ διαγράμματα Voronoi. Οι αλγόριθμοι εξαγωγής ισοεπιφανειών ανιχνεύουν αυτές τις διαχωριστικές επιφάνειες αφού ο χρήστης ορίσει μια ή περισσότερες *τιμές ισοεπιφάνειας*. Αυτές οι τιμές αντιστοιχούν σε σύνορα, μέσω των οποίων τα δεδομένα περνούν από μικρότερες σε μεγαλύτερες τιμές. Οι ισοεπιφάνειες συνήθως αποτελούνται από πολύγωνα· οπότε η παράστασή τους με κλασικές τεχνικές γραφικών είναι απλή και γρήγορη.

Ο αλγόριθμος *marching cubes* [Lore87], αρχικά, προτάθηκε για την αποτελεσματική οπτικοποίηση 3Δ ιατρικών δεδομένων από μαγνητική τομογραφία (ΜΤ) ή από άλλες απεικονιστικές τεχνικές για πολύπλοκους σχηματισμούς οστών, αιμοφόρων αγγείων ή άλλων ανατομικών δομών. Ο χρήστης δίνει το 3Δ σύνολο δεδομένων όγκου και την/τις τιμή(ές) της ισοεπιφάνειας που προσδιορίζει την επιθυμητή δομή (π.χ. οστική πυκνότητα). Στη συνέχεια ο αλγόριθμος υπολογίζει την ισοεπιφάνεια η οποία αποτελείται από τρίγωνα που μπορούν να απεικονιστούν αποτελεσματικά. Το βασικό μειονέκτημα του marching cubes είναι ότι δημιουργεί μεγάλο αριθμό περιττών τριγώνων. Ο αλγόριθμος splitting box [Mull93, Star97] αποτελεί βελτίωση ως προς αυτό.

Marching cubes.

Η είσοδος του αλγορίθμου marching cubes (MC) είναι ένα σύνολο βαθμωτών δεδομένων όγκου $O^{\text{scalar}}_{X\times Y\times Z}$ και η βαθμωτή τιμή της επιθυμητής ισοεπιφάνειας. Η έξοδος είναι μια λίστα πολυγώνων που αποτελούν την ισοεπιφάνεια. Ο αλγόριθμος MC επισκέπτεται κάθε *κύβο* (βασικό στοιχείο) του συνόλου δεδομένων όγκου. Για παράδειγμα, οι κύβοι μπορεί να δημιουργηθούν από διαδοχικές τομές μιας σάρωσης ΜΤ. Για κάθε κύβο, οι τιμές του βαθμωτού πεδίου στις 8 κορυφές του συγκρίνονται με την τιμή της ισοεπιφάνειας. Έτσι οι κορυφές σημαίνονται σαν 1 (*εντός*, με μικρότερη τιμή από την ισοεπιφάνεια) ή 0 (*εκτός*, με μεγαλύτερη τιμή από την ισοεπιφάνεια). Στη συνέχεια, οι σημάνσεις των κορυφών συνενώνονται με συγκεκριμένη σειρά και χρη-

σιμοποιούνται ως δείκτης σε μια λίστα προ-υπολογισμένων τομών επιφάνειας-κύβου. Πιο συγκεκριμένα τα βήματα του αλγορίθμου είναι:

```
Void MC() {
   for (i= 0; i<maxcubeI; i++)
      for (j= 0; j<maxcubeJ; j++)
         for (k= 0; k<maxcubeK; k++) {
         // επεξεργασία κύβου (i,j,k)

            // σήμανση κορυφών ως
            // εντός (1) ή εκτός (0)
            l1=get_label (i,j,k);
            l2=get_label (i+1,j,k);
            ...
            l8=get_label (i+1,j+1,k+1);

            // συνένωση σημάνσεων 8 κορυφών
            // (++ είναι η συνένωση συμβολοσειρών)
            index=l1++l2++l3++l4++l5++l6++l7++l8;

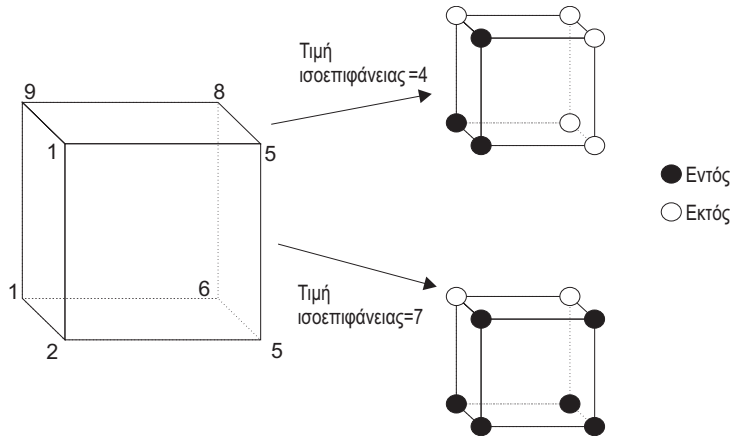
            // χρήση δείκτη για εύρεση βασικής
            // περίπτωσης και μετασχηματισμού κύβου
            bindex=map_2_basic_index(index);
            transform=map_2_basic_trans(index);

            // επιλογή κατάλληλης προ-υπολογισμένης τομής
            // με χρήση bindex και αντίστροφος μετασχηματισμός της
            surface_list=precomputed_surfaces(bindex,transform^-1);

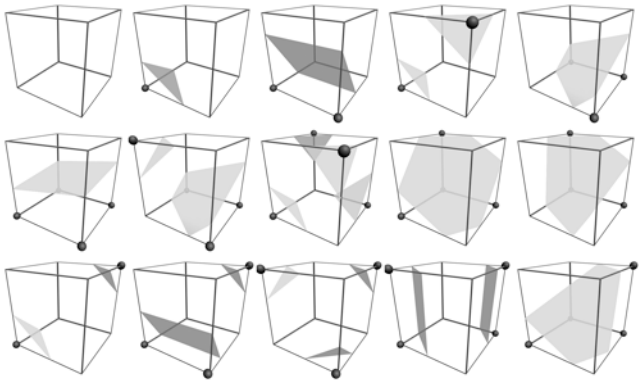
            // ακριβής τοποθέτηση της επιφάνειας τομής
            // με χρήση παρεμβολής
            for (p=0; p<num_vertices(surface_list); p++)
               compute_precise_edge_position(p,
                   cube_field_values(i,j,k));
               // υπολογισμός κανονικών διανυσμάτων στις κορυφές
               // της επιφάνειας τομής για τη δημιουργία εικόνων
            for (p=0; p<num_vertices(surface_list) p++)
               compute_normal(p, cube_field_values(i,j,k));
         }
}
```

Ένα παράδειγμα σήμανσης κορυφών δίνεται στο Σχήμα 18.6· οι κύβοι αντιστοιχούν στο μοντέλο κελιού του Σχήματος 18.3.

Υποθέτοντας ότι η σειρά συνένωσης των σημάνσεων των κορυφών είναι από εμπρός-προς-πίσω, από επάνω-προς-κάτω και από αριστερά-προς-δεξιά, οι δείκτες του πάνω και του κάτω κύβου του Σχήματος 18.6 είναι 10100010 και 11110011 αντίστοιχα. Υπάρχουν συνολικά 2^8 δυνατοί τρόποι σήμανσης των κορυφών ενός κύβου με την παραπάνω



Σχήμα 18.6: *Σήμανση κορυφών.*

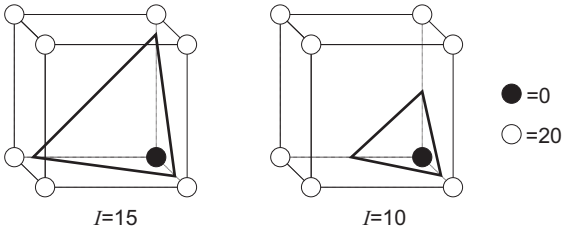


Σχήμα 18.7: *Οι 15 τύποι τομής επιφάνειας-κύβου.*

σύμβαση· συνεπώς χρειαζόμαστε 256 προ-υπολογισμένους τύπους τομής επιφάνειας-κύβου. Αυτές μειώνονται σε μόλις 15 (Σχήμα 18.7) με εκμετάλλευση:

- της καθρεπτικής συμμετρίας,
- της περιστροφικής συμμετρίας και
- της συμμετρίας εντός/εκτός.

Καθένας από τους 15 τύπους τομής ουσιαστικά δίνει την τοπολογία της πολυγωνικής επιφάνειας τομής (δηλ. ένα ή περισσότερα πολύγωνα) *σε σχέση με τις ακμές του κύβου*. Οι συμμετρίες που χρησιμοποιούνται για τη μετάβαση από μια πραγματική τομή σε μια από τις 15 βασικές περιπτώσεις αποτελούν τον μετασχηματισμό ενός κύβου. Στη συνέχεια υπολογίζονται τα ακριβή σημεία τομής πάνω στις ακμές του κύβου με παρεμβολή. Αν οι κορυφές μιας ακμής έχουν τιμές πεδίου v και v' και η τιμή της ισοεπιφάνειας είναι I ($v < I < v'$), τότε το σημείο τομής p (Σχήμα 18.8) μπορεί να εκφραστεί



Σχήμα 18.8: *Παρεμβολή πάνω σε ακμή.*

ως ποσοστό του μήκους της ακμής:

$$p = \frac{I - v}{v' - v}.$$

Η γραμμική αυτή παρεμβολή υποθέτει ότι το πεδίο μεταβάλλεται γραμμικά· διαφορετικά το σημείο τομής που υπολογίζεται είναι μόνο μια προσέγγιση στο πραγματικό σημείο τομής. Σημειώνουμε ότι η παρεμβολή σε κοινή ακμή γειτονικών κύβων θα δώσει το ίδιο αποτέλεσμα· πράγμα που εξασφαλίζει την C^0 συνέχεια της ισοεπιφάνειας.

Τα κανονικά διανύσματα της ισοεπιφάνειας πάνω στις κορυφές των πολυγώνων της (χρήσιμα για τη ρεαλιστική παράστασή της) υπολογίζονται απευθείας από το πεδίο με δύο βήματα:

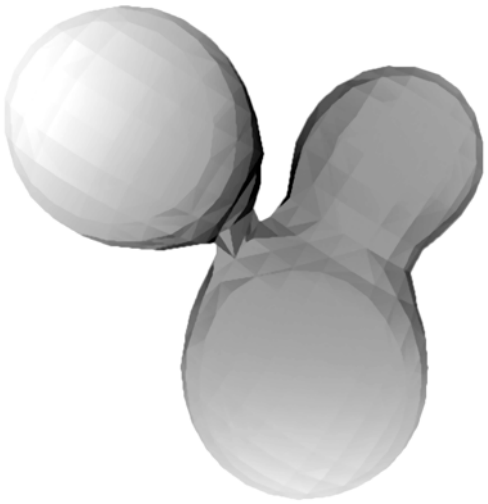
- Υπολογισμός των διανυσμάτων κλίσης του βαθμωτού πεδίου στις κορυφές του κύβου
- Παρεμβολή των διανυσμάτων κλίσης κατά μήκος των ακμών του κύβου, στις κορυφές των πολυγώνων (παρόμοιο με τον υπολογισμό του ακριβούς σημείου τομής p).

Τα διανύσματα κλίσης στις κορυφές του κύβου υπολογίζονται με κεντρικές διαφορές των τιμών του πεδίου μεταξύ γειτονικών κορυφών. Αν $v(i, j, k)$ και $g(i, j, k)$ είναι η τιμή πεδίου και το διάνυσμα κλίσης στην κορυφή κύβου (i, j, k) αντίστοιχα,

$$g_x(i, j, k) = \frac{v(i+1, j, k) - v(i-1, j, k)}{\Delta x},$$
$$g_y(i, j, k) = \frac{v(i, j+1, k) - v(i, j-1, k)}{\Delta y},$$
$$g_z(i, j, k) = \frac{v(i, j, k+1) - v(i, j, k-1)}{\Delta z},$$

όπου Δx, Δy και Δz οι διαφορές της x, y και z συντεταγμένης των σχετικών κορυφών. Το Σχήμα 18.9 δίνει ένα παράδειγμα των ισοεπιφανειών οι οποίες εξάγονται από ένα βαθμωτό πεδίο με τον αλγόριθμο MC.

Ο MC μπορεί να βελτιωθεί με διάφορους τρόπους· ένας είναι η αποφυγή του πολλαπλού υπολογισμού σημείων τομής πάνω σε κοινές ακμές γειτονικών κύβων. Τα μεγαλύτερα μειονεκτήματα του αλγορίθμου είναι α) το μεγάλο πλήθος πολυγώνων που



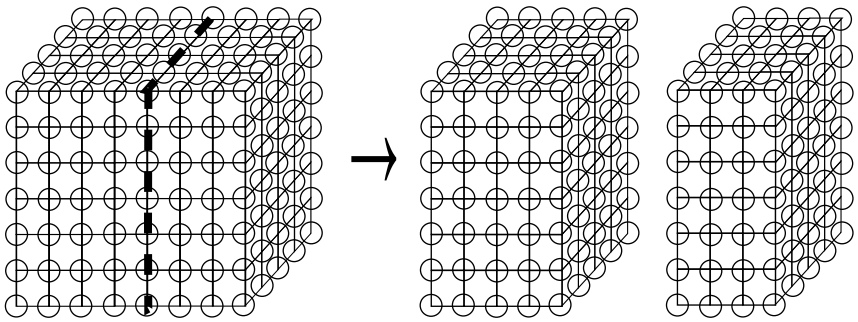
Σχήμα 18.9: *Δημιουργία ισοεπιφάνειας με τον αλγόριθμο MC.*

δημιουργούνται για την ισοεπιφάνεια και β) το γεγονός ότι το πλήθος αυτό δεν είναι ανάλογο της πολυπλοκότητας της ισοεπιφάνειας, αλλά εξαρτάται —κυρίως— από την πυκνότητα του πλέγματος.

Παρόλα αυτά, οι ισοεπιφάνειες που δημιουργεί ο MC δεν εξαρτώνται από τις παραμέτρους παρατήρησης και, ως εκ τούτου, μπορούν να υπολογιστούν μια φορά για συγκεκριμένη πυκνότητα πλέγματος και να βελτιστοποιηθούν με αλγορίθμους απλοποίησης πολυγωνικών μοντέλων [Hopp98, Hopp96, Garl99, Redd96] για μεγαλύτερη απόδοση. Λόγω της πολυγωνικής τους φύσης, οι ισοεπιφάνειες-αποτέλεσμα του MC μπορούν να εκμεταλλευτούν τις δυνατότητες επιτάχυνσης που προσφέρουν οι επεξεργαστές γραφικών. Τέλος, εγγενές μειονέκτημα του MC είναι ότι μπορεί να οπτικοποιήσει μόνο ισοεπιφάνειες (ή φλοιούς) και δεν μπορεί να δείξει τις μεταβολές του πεδίου.

Splitting box.

Ο αλγόριθμος splitting box (SB) επίσης δημιουργεί μια ισοεπιφάνεια από ένα σύνολο βαθμωτών δεδομένων όγκου. Δημιουργεί λιγότερα τρίγωνα από τον MC, υποδιαιρώντας αναδρομικά τον αρχικό όγκο όσπου οι υποδιαιρέσεις να γίνουν αρκετά απλές. Ένα *κιβώτιο* είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με ακμές παράλληλες προς τους κύριους άξονες του χώρου (πλέγματος). Το *μήκος* μιας ακμής ισοδυναμεί με το πλήθος των κορυφών πλέγματος που αυτή περιέχει. Μια ακμή έχει την *ιδιότητα MC* αν τέμνει —το πολύ μια φορά— την ισοεπιφάνεια· αυτή την υπόθεση κάνει και ο αλγόριθμος MC για γειτονικές κορυφές ενός κύβου. Ο αλγόριθμος SB χρησιμοποιεί αυτή τη γενικευμένη ιδιότητα για να διακόψει την διαδικασία υποδιαίρεσης, όσο γίνεται ψηλότερα, στην ιεραρχία των κιβωτίων. Μια έδρα (πλευρά) ενός κιβωτίου είναι MC αν και οι 4 ακμές της είναι MC. Τέλος ένα κιβώτιο είναι MC αν οι 6 έδρες του (ή οι 12 ακμές του)



Σχήμα 18.10: *Διαίρεση κιβωτίου.*

είναι όλες MC.

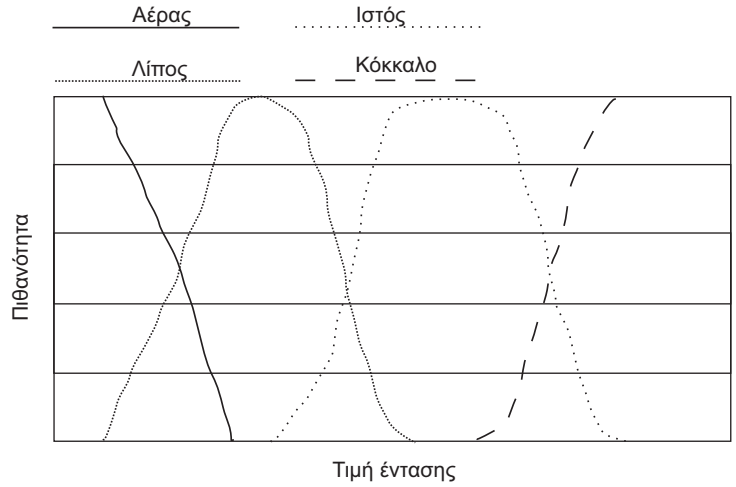
Ο αλγόριθμος SB υποδιαιρεί αναδρομικά ένα κιβώτιο κατά μήκος της μεγαλύτερης ακμής του ώσπου να φθάσει σε κιβώτια με την ιδιότητα MC (Σχήμα 18.10). Ξεκινά με παράμετρο ένα κιβώτιο που παριστάνει ολόκληρο τον όγκο οπτικοποίησης:

```
void SB (box); {
   if  MC_property(box)
      δημιουργία πολυγώνων με τις 15 περιπτώσεις του MC;
   else if  size(box)=2^3
      δημιουργία πολυγώνων με αναλυτική επεξεργασία;
   else {
      διαίρεση κιβωτίου κατά μήκος μεγαλύτερης ακμής σε box1, box2;
      SB(box1);
      SB(box2);
   }
}
```

18.2.2 Άμεση οπτικοποίηση όγκου

Όταν χρειάζεται να εξετάσουμε πολύπλοκες εσωτερικές δομές συνόλων δεδομένων, οι αλγόριθμοι οπτικοποίησης όγκου είναι το κατάλληλο εργαλείο. Αυτοί οι αλγόριθμοι παρουσιάζουν —ταυτόχρονα— ολόκληρο το σύνολο δεδομένων. Το κόστος της ταυτόχρονης παρουσίασης τόσης πληροφορίας είναι, γενικά, θαμπές εικόνες που συχνά περιέχουν σύγχυση.

3Δ βαθμωτά δεδομένα που είναι προϊόντα δειγματοληψίας ή παριστάνουν άμορφα φαινόμενα (π.χ. MT, καπνός, φωτιά) δύσκολα παριστάνονται με επιφάνειες. Σε τέτοιες περιπτώσεις επιστρατεύουμε αλγόριθμους οπτικοποίησης που παρουσιάζουν τα δεδομένα με άμεση εξέτασή τους (Εικόνα 36). Υπάρχουν δύο κατηγορίες τέτοιων αλγορίθμων. Οι αλγόριθμοι *αντίστροφης προβολής*, ή *εκπομπής ακτίνων*, εκπέμπουν μια ακτίνα για κάθε εικονοστοιχείο προς το σύνολο δεδομένων, δειγματοληπτούν πάνω στην ακτίνα αυτή και συνδυάζουν τα δείγματα σ' ένα τελικό χρώμα. Οι αλγόριθμοι *έμπροσθεν προβολής*, ή *splatting* κάνουν το αντίθετο· προβάλλουν κάθε ογκοστοιχείο



Σχήμα 18.11: *Πιθανοτικές κατανομές έντασης υλικού.*

του συνόλου δεδομένων στο επίπεδο της εικόνας και υπολογίζουν ποια εικονοστοιχεία επηρεάζει η προβολή με χρήση ενός φίλτρου.

Εκπομπή ακτίνων.

Ο αλγόριθμος εκπομπής ακτίνων αποτελείται από 3 βήματα:

1. Κατηγοριοποίηση των ογκοστοιχείων ανάλογα με το περιεχόμενό τους.

2. Μετασχηματισμός των ακτίνων ή των δεδομένων ώστε να είναι ευθυγραμμισμένα με την κατεύθυνση παρατήρησης.

3. Υπολογισμός του αποτελέσματος για κάθε ακτίνα.

Το πρώτο βήμα κατηγοριοποιεί κάθε ογκοστοιχείο ανάλογα με το υλικό του περιεχόμενό· το αποτέλεσμα είναι ένα χρώμα και μια τιμή διαφάνειας. Για παράδειγμα, σε μια ιατρική εφαρμογή μπορούμε να δώσουμε τιμές χρώματος και διαφάνειας σε υλικά ανάλογα με τις τιμές απορρόφησης των ακτίνων X. Στο [Dreb88] προτείνεται ένα σχήμα κατηγοριοποίησης όπου οι τιμές απορρόφησης δεν κατατάσσονται με απλά όρια αλλά με μια πιθανοτική προσέγγιση. Έστω ότι το σύνολο των υλικών είναι:

$$\text{υλικό} = \{\text{αέρας}, \text{λίπος}, \text{ιστός}, \text{κόκκαλο}\}$$

και ότι το υλικό i, που έχει μια προκαθορισμένη πιθανοτική κατανομή $P_i(I)$, έχει τιμή έντασης I αν είναι ομογενές (Σχήμα 18.11). Τότε το ερώτημα είναι, δοθείσης μιας μέτρησης έντασης ογκοστοιχείου I, ποιο υλικό (ή υλικά) περιέχει το ογκοστοιχείο και σε ποια αναλογία; Αν συμβολίσουμε με $P(I)$ την πιθανότητα να έχει ένα ογκοστοιχείο

τιμή έντασης I τότε:

$$P(I) = \sum_{i=1}^{m} \rho_i P_i(I),$$

όπου ρ_i το ποσοστό του υλικού i στο ογκοστοιχείο (η τιμή που αναζητούμε) και m το πλήθος των διαφορετικών υλικών. Συνεπώς η πιθανοτική εκτίμηση $\rho_i(I)$ του ποσοστού του υλικού i σ' ένα ογκοστοιχείο με ένταση I μπορεί να υπολογισθεί ως:

$$\rho_i(I) = \frac{P_i(I)}{\sum_{j=1}^{m} P_j(I)}$$

και

$$\sum_{j=1}^{m} \rho_j(I) = 1.$$

Το χρώμα/διαφάνεια C του ογκοστοιχείου υπολογίζεται στη μορφή RGBA (χρώμα RGB συν διαφάνεια):

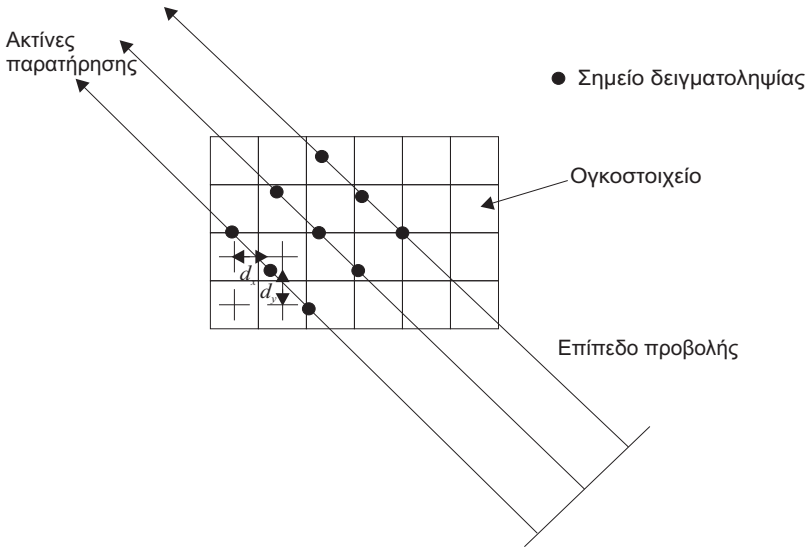
$$C = \sum_{i=1}^{m} \rho_i C_i,$$

όπου $C_i = (\alpha_i R_i, \alpha_i G_i, \alpha_i B_i, \alpha_i)$ η τιμή χρώματος και διαφάνειας που αντιστοιχεί στο υλικό i.

Υπάρχουν δύο τρόποι ευθυγράμμισης των δεδομένων με την κατεύθυνση παρατήρησης (δεύτερο βήμα του αλγορίθμου): *μετασχηματισμός ακτίνας* και *μετασχηματισμός δεδομένων*. Ο μετασχηματισμός ακτίνας εκπέμπει ακτίνες προς τα δεδομένα όγκου και δειγματοληπτεί σε ισαπέχοντα σημεία πάνω στις ακτίνες αυτές (Σχήμα 18.12). Οι τιμές των δειγμάτων υπολογίζονται με τριγραμμική παρεμβολή από τις τιμές των οκτώ πλησιέστερων ογκοστοιχείων. Ισοδύναμα, αν χρησιμοποιείται η παράσταση με κελιά, τα δείγματα υπολογίζονται από τις τιμές των οκτώ κορυφών του κελιού που περιέχει το σημείο δειγματοληψίας. Για παράδειγμα, αν $v_{i,j,k} | i, j, k \in \{-, +\}$ αντιπροσωπεύουν τις τιμές των οκτώ πλησιέστερων ογκοστοιχείων σ' ένα σημείο δειγματοληψίας s και d_x^-, d_y^-, d_z^- αντιπροσωπεύουν τις αποστάσεις από το s στα κέντρα των τριών ογκοστοιχείων με τους μικρότερους δείκτες σε κάθε άξονα ως ποσοστό της απόστασης μεταξύ κέντρων ογκοστοιχείων (Σχήμα 18.12), τότε η τιμή στο s υπολογίζεται ως:

$$\begin{aligned} v_s =& (1 - d_x^-) \left[(1 - d_y^-) \left[(1 - d_z^-) v_{---} + d_z^- v_{--+} \right] + d_y^- \left[(1 - d_z^-) v_{-+-} + d_z^- v_{-++} \right] \right] \\ &+ d_x^- \left[(1 - d_y^-) \left[(1 - d_z^-) v_{+--} + d_z^- v_{+-+} \right] + d_y^- \left[(1 - d_z^-) v_{++-} + d_z^- v_{+++} \right] \right]. \end{aligned}$$

Ο μετασχηματισμός δεδομένων ευθυγραμμίζει τα δεδομένα όγκου με την κατεύθυνση παρατήρησης. Αν ο άξονας παρατήρησης είναι ο z, τα δεδομένα όγκου επανευθυγραμμίζονται έτσι ώστε ογκοστοιχεία με την ίδια συντεταγμένη z να βρίσκονται πάνω στην ίδια ακτίνα παρατήρησης. Το Σχήμα 18.13 δείχνει την πράξη αυτή τόσο για παράλληλη όσο και για προοπτική προβολή. Ο μετασχηματισμός των δεδομένων μπορεί να επιτευχθεί με μια στρέβλωση-παραμόρφωση [Came92, Lacr94]. Τα τεμάχια των



Σχήμα 18.12: *Μετασχηματισμός ακτίνας (για παράλληλη προβολή στις 2Δ).*

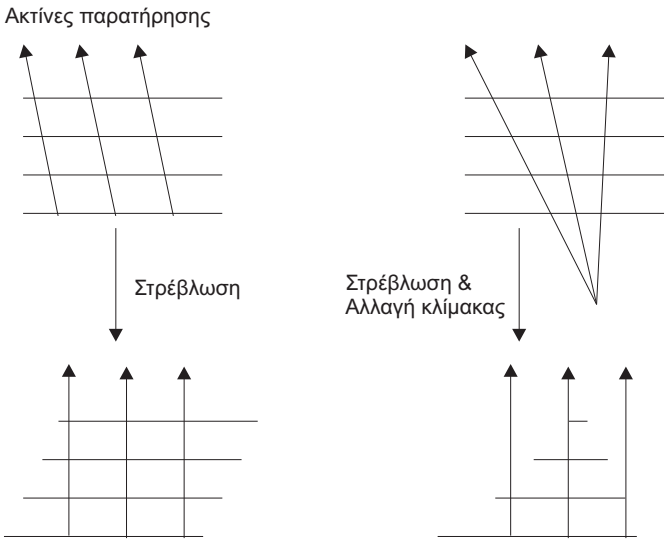
δεδομένων όγκου στρεβλώνονται πρώτα στο επίπεδο xy με παράγοντες στρέβλωσης s_x και s_y (που υπολογίζονται από τον μετασχηματισμό παρατήρησης) και τα δεδομένα κάθε τεμαχίου επαναδειγματοληπτούνται με διγραμμική παρεμβολή. Ο πίνακας στρέβλωσης (βλ. Κεφάλαιο 3) για την παράλληλη προβολή είναι:

$$SH_{\text{par}} = SH_{xy}(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s_x & 0 \\ 0 & 1 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Στην περίπτωση της προοπτικής προβολής πρέπει επίσης να αλλάξουμε την κλίμακα κάθε τεμαχίου (Σχήμα 18.13(δεξιά)). Ο παράγοντας αλλαγής κλίμακας s υπολογίζεται και πάλι από τον μετασχηματισμό παρατήρησης και η αλλαγή κλίμακας ενσωματώνεται στον πίνακα στρέβλωσης μεταβάλλοντας την ομογενή συντεταγμένη:

$$SH_{\text{pers}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s'_x & 0 \\ 0 & 1 & s'_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s & 1 \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς η κλίμακα ενός τεμαχίου δεδομένων όγκου στο $z = z_0$ αλλάζει κατά $1/(1+sz_0)$ για να επιστρέψει στην κανονική ομογενή μορφή ($w = 1$), επιτυγχάνοντας την επιθυμητή αλλαγή κλίμακας για την προοπτική προβολή. Ένα πρόβλημα της προοπτικής προβολής είναι η μη ομοιόμορφη δειγματοληψία του χώρου που προέρχεται από τις αποκλίνουσες ακτίνες (Σχήμα 18.13 (δεξιά))· με άλλα λόγια η πυκνότητα δειγματοληψί-



Σχήμα 18.13: *Στρέβλωση για παράλληλη (αριστερά) και προοπτική (δεξιά) προβολή.*

ας είναι συνάρτηση του βάθους. Αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί με εισαγωγή επιπλέον ακτίνων ως συνάρτηση του βάθους [Kree98]· αυτές οι ακτίνες στη συνέχεια υποδειγματοληπτούνται κατά τεμάχια ώστε να καταλήξουμε στην αρχική ανάλυση ακτίνων.

Μια 2Δ παραμόρφωση και επαναδειγματοληψία ολοκληρώνει τον μετασχηματισμό δεδομένων. Η παραμόρφωση αντιμετωπίζει την πλάγια τοποθέτηση του επίπεδου της εικόνας, σε σχέση με τους άξονες των δεδομένων όγκου, και γίνεται μετά τον συνδυασμό των δεδομένων όγκου σε μια εικόνα XY (τρίτο βήμα του αλγορίθμου).

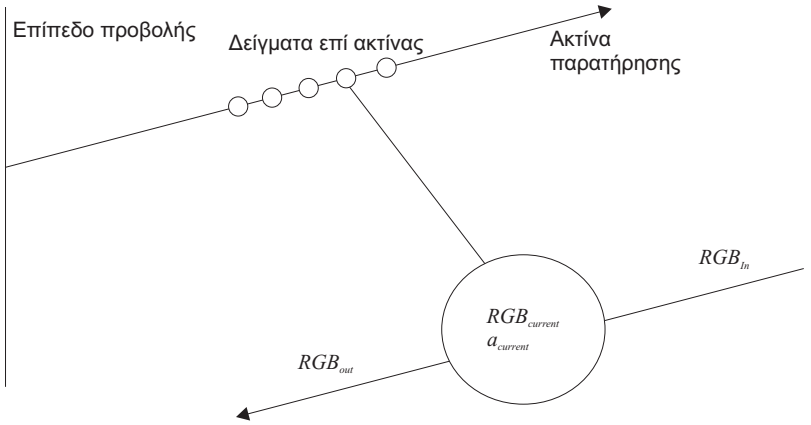
Το τρίτο και τελευταίο βήμα του αλγορίθμου υπολογίζει το χρώμα που προκύπτει από κάθε ακτίνα. Αυτό γίνεται συνδυάζοντας τις τιμές διαδοχικών σημείων δειγματοληψίας (μετασχηματισμός ακτίνας) ή διαδοχικών ογκοστοιχείων στην κατεύθυνση Z (μετασχηματισμός δεδομένων). Θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο *δείγματα επί ακτίνας* και για τις δύο περιπτώσεις. Καθώς η τιμή κάθε δείγματος είναι σε μορφή RGBA επεξεργαζόμαστε τα δείγματα επί ακτίνας από πίσω προς τα εμπρός (Σχήμα 18.14). Σε κάθε δείγμα υπολογίζουμε την τιμή του εξερχόμενου χρώματος RGB_{out} ως συνάρτηση της εισερχόμενης τιμής RGB_{in}, του χρώματος και της διαφάνειας του τρέχοντος δείγματος επί ακτίνας:

$$RGB_{\text{out}} = RGB_{\text{in}}(1 - \alpha_{\text{current}}) + RGB_{\text{current}} \cdot \alpha_{\text{current}},$$

όπου το α_{current} κείται από 0 (απολύτως διαφανές) ως 1 (απολύτως αδιαφανές).

Splatting.

Ο αλγόριθμος εκπομπής ακτίνων έχει έναν εξωτερικό βρόχο για κάθε εικονοστοιχείο του χώρου εικόνας και διατρέχει το χώρο των ογκοστοιχείων για να βρεί ποια από



Σχήμα 18.14: *Συνδυασμός των δειγμάτων μιας ακτίνας.*

αυτά επηρεάζουν το εικονοστοιχείο. Αντίθετα, ο αλγόριθμος splatting [West90] δίνει την προτεραιότητα στα ογκοστοιχεία εξετάζοντας την προβολή κάθε ογκοστοιχείου στο επίπεδο της εικόνας (δηλ. στα εικονοστοιχεία).

Ο διακριτός χώρος των ογκοστοιχείων αντιπροσωπεύει ένα συνεχή χώρο· οι τιμές $f(x, y, z)$ του χώρου αυτού μπορούν να ανακατασκευαστούν με την συνάρτηση:

$$f(x, y, z) = \sum_i \sum_j \sum_k v(i, j, k) \cdot h(x - i, y - j, z - k),$$

όπου $v(i, j, k)$ οι διακριτές τιμές των ογκοστοιχείων, h ο πυρήνας ανακατασκευής (συνέλιξης) ενώ το άθροισμα γίνεται εντός 3Δ όγκου με μέγεθος ίσο με αυτό του πυρήνα ανακατασκευής (βλ. Παράρτημα Ε).

Ας εξετάσουμε τη συνεισφορά $\text{contri}(x, y, z)$ *ενός* ογκοστοιχείου (i, j, k) σε τυχαίο σημείο (x, y, z). Αυτή η συνεισφορά είναι ανεξάρτητη από τις συνεισφορές άλλων ογκοστοιχείων στο σημείο και είναι ίση με:

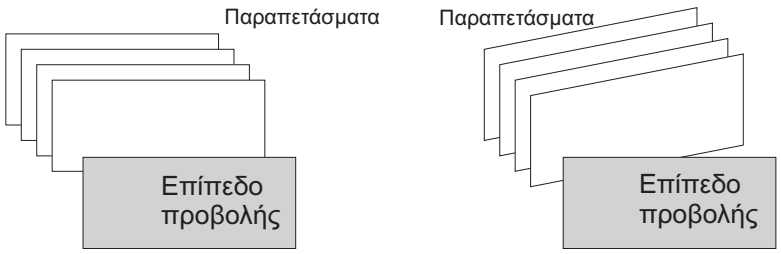
$$\text{contri}(x, y, z) = v(i, j, k) \cdot h(x - i, y - j, z - k).$$

Η συνολική συνεισφορά στη θέση (x, y) της εικόνας είναι το άθροισμα των συνεισφορών όλων των σημείων που βρίσκονται πάνω στην ακτίνα που είναι κάθετη στο επίπεδο της εικόνας στο (x, y). Υποθέτοντας ότι ο άξονας z είναι κάθετος στο επίπεδο της εικόνας, το ολοκλήρωμα υπολογίζεται πάνω στον άξονα z (γι' αυτό το λόγο το $z - k$ αντικαθίσταται με z):

$$\text{contri}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} v(i, j, k) \cdot h(x - i, y - j, z) dz.$$

Καθώς το $v(i, j, k)$ δεν εξαρτάται από το z μπορεί να βγεί εκτός του ολοκληρώματος:

$$\text{contri}(x, y) = v(i, j, k) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(x - i, y - j, z) dz.$$



Σχήμα 18.15: *Παραπετάσματα ογκοστοιχείων και επίπεδο εικόνας.*

Ένας πυρήνας συνέλιξης επικεντρώνεται σε κάθε ογκοστοιχείο και η συνεισφορά του στα εικονοστοιχεία υπολογίζεται προβάλλοντάς τον στο χώρο της εικόνας. Όλοι οι πυρήνες έχουν την ίδια μορφή προβολής που ονομάζεται *αποτύπωμα* (footprint):

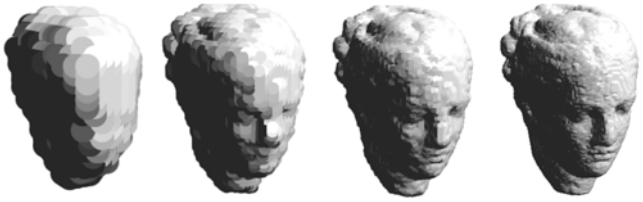
$$\text{footprint}(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha, \beta, z)dz,$$

όπου α, β παριστάνουν την X και Y μετατόπιση (σε εικονοστοιχεία του χώρου εικόνας) από το κεντρικό εικονοστοιχείο της προβολής του πυρήνα. Αν το επίπεδο της εικόνας δεν είναι ευθυγραμμισμένο με τους άξονες του χώρου των ογκοστοιχείων, τότε η συνάρτηση του αποτυπώματος είναι πιο πολύπλοκη [West90].

Η επεξεργασία των ογκοστοιχείων γίνεται κατά *παραπετάσματα*. Ένα παραπέτασμα είναι ένα επίπεδο ογκοστοιχείων παράλληλο με το επίπεδο της εικόνας (Σχήμα 18.15(αριστερά)). Αν το επίπεδο της εικόνας δεν είναι ευθυγραμμισμένο με τους άξονες του χώρου ογκοστοιχείων, τότε τα παραπετάσματα ορίζονται από το ζεύγος των αξόνων αυτού του χώρου και οι οποίοι είναι περισσότερο παράλληλοι με το επίπεδο της εικόνας (Σχήμα 18.15(δεξιά)). Η επεξεργασία ξεκινά με το πλησιέστερο παραπέτασμα στον παρατηρητή:

```
για κάθε παραπέτασμα s από εμπρός προς τα πίσω
    για κάθε ογκοστοιχείο (x,y,s) στο παραπέτασμα s
        για όλες τις μετατοπίσεις (a,b) στο αποτύπωμα (footprint)
            frame_buffer(x+a,y+b)=
                frame_buffer(x+a,y+b)+
                voxel(x+a,y+b,s)*footprint(a,b)*
                transparency_buffer(x+a,y+b)
            transparency_buffer(x+a,y+b)=
                transparency_buffer(x+a,y+b)+
                transp(voxel(x+a,y+b,s))
                *footprint(a,b)
        }
```

Σε σύγκριση με την εκπομπή ακτίνων, το splatting είναι υπολογιστικά ακριβότερο καθώς επεξεργάζεται ολόκληρο τον χώρο των ογκοστοιχείων και δεν εκμεταλλεύεται τους περιβάλλοντες όγκους. Από την άλλη πλευρά, η επεξεργασία κάθε ογκοστοιχείου είναι ανεξάρτητη και έτσι το splatting μπορεί ευκολότερα να υλοποιηθεί παράλληλα.



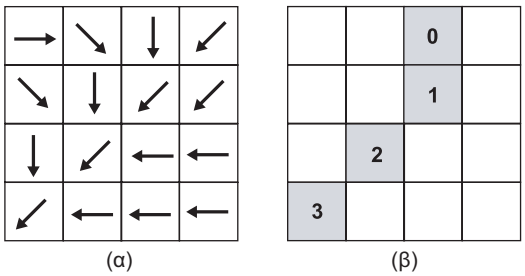
Σχήμα 18.16: *Οπτικοποίηση όγκου σε πολλαπλές αναλύσεις με χρήση προϋπολογισμένων επιπέδων λεπτομέρειας και ένα απλό πυρήνα splatting.*

Μια άλλη χρήσιμη ιδιότητα του αλγορίθμου splatting είναι η δυνατότητα θεώρησης των δεδομένων όγκου σε πολλαπλές αναλύσεις κατά τη δημιουργία της εικόνας. Το Σχήμα 18.16 δείχνει την παράσταση του ίδιου συνόλου δεδομένων όγκου σε 4 αναλύσεις.

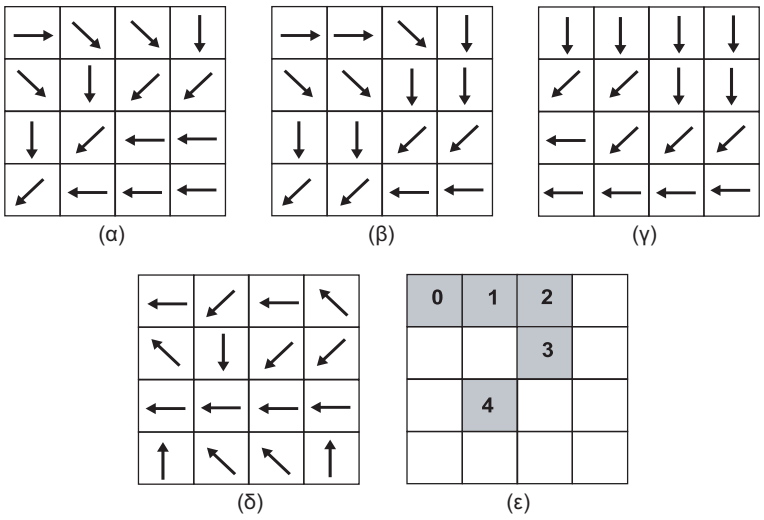
18.3 Οπτικοποίηση διανυσματικών δεδομένων

Τα πειράματα και οι προσομοιώσεις έχουν συχνά ως αποτέλεσμα διανυσματικά πεδία· για παράδειγμα ηλεκτρομαγνητικά πεδία ή κατεύθυνση ανέμου στην προσομοίωση καιρού. Η οπτικοποίηση διανυσματικών δεδομένων έχει μεγαλύτερη πολυπλοκότητα σε σχέση με τα βαθμωτά δεδομένα, καθώς τα στοιχεία του πεδίου έχουν γενικά περισσότερες διαστάσεις. Μπορεί λοιπόν να οπτικοποιηθεί ένα τμήμα του διανυσματικού πεδίου που να περιλαμβάνει μόνο κάποια από τα χαρακτηριστικά του, να χρησιμοποιηθεί κάποια έξυπνη τεχνική χρωματικής απεικόνισης των χαρακτηριστικών, ή, ακόμα και να απλοποιηθεί το διανυσματικό πεδίο πριν από την οπτικοποίηση.

Η διάσταση του πλέγματος ορισμού και αυτή των διανυσμάτων του πεδίου είναι ανεξάρτητες. Παρότι πεδία σαν το $O_{X\times Y}^{\text{vector3}}$ και το $O_{X\times Y\times Z}^{\text{vector2}}$ είναι δυνατά συνήθως η διάσταση των διανυσμάτων αντιστοιχεί σε αυτή του πλέγματος. Οι τύποι $O_{X\times Y}^{\text{vector2}}$ και $O_{X\times Y\times Z}^{\text{vector3}}$ απαντώνται συχνά σε πειράματα και σε προσομοιώσεις. Τα διανυσματικά πεδία χωρίζονται σε *στατικά* και σε *δυναμικά*. Ένα στατικό πεδίο δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο και μπορεί, για παράδειγμα, να παριστάνει το σταθερό βαρυτικό πεδίο μετα-



Σχήμα 18.17: *(α) Ένα στατικό διανυσματικό πεδίο $O_{X\times Y}^{vector2}$. (β) Μια ρευματογραμμή (βλ. Ενότητα 18.3.2).*



Σχήμα 18.18: *(α)–(δ) Τέσσερα στιγμιότυπα ενός δυναμικού πεδίου $O^{vector2}_{X\times Y\times T}$ στις $t = t_1, t_2, t_3, t_4$· (ε) Μια τροχιογραμμή (βλ. Ενότητα 18.3.2).*

ξύ ενός συνόλου σταθερών αντικειμένων. Το Σχήμα 18.17(α) απεικονίζει ένα 2Δ στατικό διανυσματικό πεδίο.

Αντίθετα, ένα δυναμικό διανυσματικό πεδίο παριστάνει ένα δυναμικό διανυσματικό φαινόμενο, π.χ. ταχύτητα και κατεύθυνση ανέμου στον ευρωπαϊκό χώρο κατά τη διάρκεια μιας ημέρας. Όπως ακριβώς τα καρέ της συνθετικής κίνησης, το δυναμικό διανυσματικό πεδίο μπορεί να παρασταθεί με στιγμιότυπα που αντιστοιχούν σε διακριτά χρονικά σημεία. Κάθε στιγμιότυπο αντιστοιχεί σ' ένα στατικό διανυσματικό πεδίο. Το Σχήμα 18.18 (α)–(δ) παριστάνει 4 στιγμιότυπα ενός 2Δ δυναμικού διανυσματικού πεδίου.

Χωρίς απώλεια γενικότητας, μπορούμε να ορίσουμε τους τύπους συνάρτησης 3Δ διανυσματικών πεδίων πάνω σε 3Δ πλέγμα ως

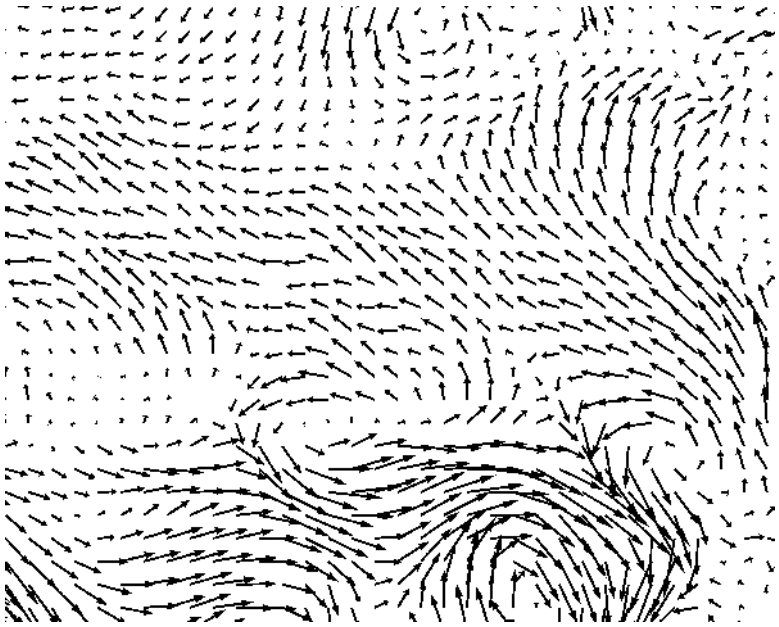
$$V_{\text{static}} : O^{\text{vector3}}_{X\times Y\times Z},$$
$$V_{\text{dynamic}} : O^{\text{vector3}}_{X\times Y\times Z\times T},$$

όπου η τελευταία παράμετρος του V_{dynamic} αντιστοιχεί στον χρόνο.

18.3.1 Σκατζόχοιροι

Οι *σκατζόχοιροι* (ή *διαγράμματα βελών*, *διανυσματικά σύμβολα*) αναφέρονται στην καθιερωμένη παράσταση των διανυσμάτων με βέλη που χρησιμοποιείται εκτεταμένα για την παράσταση διανυσματικών πεδίων.

Το μήκος και η κατεύθυνση ενός βέλους παριστάνουν τις αντίστοιχες ποσότητες ενός διανύσματος. Το Σχήμα 18.19 και η Εικόνα 37 δείχνουν ένα αντικείμενο $O^{\text{vector2}}_{X\times Y}$ και $O^{\text{vector3}}_{X\times Y\times Z}$ αντίστοιχα.



Σχήμα 18.19: *Σκατζόχοιρος για* $O^{vector2}_{X\times Y}$. *(Η εικόνα δημιουργήθηκε με το OpenDX.)*

Τα δυναμικά διανυσματικά πεδία μπορούν να παρασταθούν με συνθετική κίνηση, όπου το κάθε καρέ είναι ο σκατζόχοιρος του δυναμικού πεδίου σε μια χρονική στιγμή.

Τα βασικά προβλήματα των σκατζόχοιρων είναι:

- ο *οπτικός συνωστισμός* που παρουσιάζεται σε σκατζόχοιρους πυκνών διανυσματικών πεδίων.
- η *προοπτική παραμόρφωση* που παρουσιάζεται όταν πολυδιάστατα διανυσματικά πεδία προβάλλονται στις 2Δ για παράσταση στην οθόνη.

18.3.2 Μεταφορά σωματιδίων

Η παράσταση πυκνών διανυσματικών πεδίων στην ολότητά τους συχνά δημιουργεί σύγχυση· είναι δύσκολο να αναδειχθούν τα σημαντικά χαρακτηριστικά του πεδίου, όπως οι ροές, μέσα στη μεγάλη ποσότητα πληροφορίας. Ένας τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος αυτού είναι η παρακολούθηση της τροχιάς συγκεκριμένων σωματιδίων μέσω του διανυσματικού πεδίου· αυτό μπορεί να παρομοιαστεί μ' ένα πείραμα αεροσήραγγας όπου εισάγουμε μια μικρή και ελαφριά μπάλα πινγκ-πονγκ σε κάποιο σημείο και παρακολουθούμε την τροχιά της. Ακόμα καλύτερα, μπορούμε να εισάγουμε μικρό πλήθος από έγχρωμες μπάλες σε διάφορα σημεία της αεροσήραγγας και να παρατηρήσουμε την κοινή τους συμπεριφορά. Αυτή η αρχή βρίσκει εφαρμογή στην οπτικοποίηση διανυσματικών πεδίων και ονομάζεται *μεταφορά σωματιδίων*.

Οι τεχνικές μεταφοράς σωματιδίων βασίζονται στην ύπαρξη σχημάτων ροής στα διανυσματικά πεδία. Αντί για την εμφάνιση ολόκληρου του διανυσματικού πεδίου,

εμφανίζεται μόνο το αποτέλεσμα των σχημάτων ροής πάνω σε σωματίδια χωρίς βάρος και τριβή, τα οποία μεταφέρονται μέσω του πεδίου από τις αρχικές τους θέσεις [IBM07]. Έτσι αποφεύγεται η οπτική σύγχυση καθώς το πλήθος των σωματιδίων που εισάγονται στο πεδίο είναι απόλυτα ελεγχόμενο. Αν το βάρος ή η τριβή δεν μπορούν να θεωρηθούν αμελητέα, είναι δυνατόν να εισαχθούν ως παράμετροι στην προσομοίωση που παρήγαγε το διανυσματικό πεδίο.

Ας ορίσουμε το *σημείο οπτικοποίησης* ως μια τριάδα συντεταγμένων και την *γραμμή οπτικοποίησης* ως ένα σύνολο σημείων (δεν είναι απαραίτητα ευθεία γραμμή):

$$\text{vispoint} : [X\ Y\ Z],$$
$$\text{visline} : \{\text{vispoint}\}.$$

Μια *ρευματογραμμή* (streamline) μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση που παίρνει ένα στατικό διανυσματικό πεδίο και ένα σύνολο αρχικών σημείων και παράγει ένα σύνολο γραμμών οπτικοποίησης, μία για κάθε σημείο:

$$\text{streamline} : V_{\text{static}} \times \{\text{vispoint}\} \rightarrow \{\text{visline}\}$$

.

Η ρευματογραμμή είναι το ίχνος ενός σωματιδίου καθώς αυτό μεταφέρεται μέσα από το στατικό διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{S}$ ξεκινώντας από την αρχική του θέση. Μια ρευματογραμμή για το απλό στατικό πεδίο του Σχήματος 18.17 (α) παρουσιάζεται στο Σχήμα 18.17 (β) ενώ η Εικόνα 39 (αριστερά) δείχνει ένα σύνολο ρευματογραμμών. Αν π είναι η παράμετρος της ρευματογραμμής και $\mathbf{s}$ ένα σημείο πάνω της, τότε πρέπει να ικανοποιείται η ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

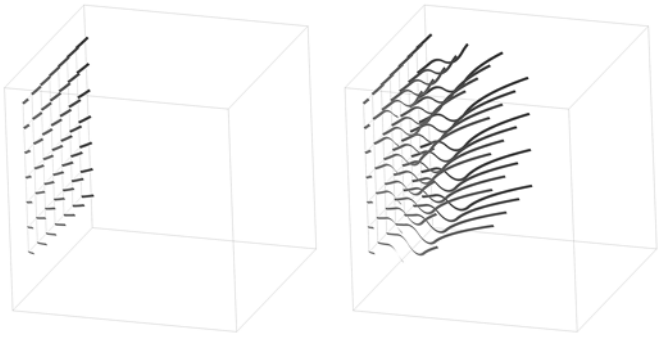
$$\frac{d\mathbf{s}}{d\pi} = \overrightarrow{S}(\mathbf{s}(\pi)).$$

Η *συστροφή* ενός διανυσματικού πεδίου κατά μήκος των ρευματογραμμών μπορεί να οπτικοποιηθεί με *λωρίδες* που δημιουργούνται όταν ενωθούν τα ίχνη που δημιουργούν γειτονικά ζεύγη σωματιδίων (Εικόνα 39 (δεξιά)). Μια επιπλέον παράμετρος μπορεί να οπτικοποιηθεί κατά μήκος μιας ρευματογραμμής (π.χ. μέγεθος διανύσματος), με απεικόνισή της στο χρώμα της ρευματογραμμής (Εικόνα 39). Άλλη μια παραλλαγή σχηματίζει ένα σωλήνα γύρω από κάθε ρευματογραμμή· έτσι μπορούν να απεικονιστούν δύο παράμετροι κατά μήκος της ρευματογραμμής, η μία στο χρώμα και η άλλη στη διάμετρο του σωλήνα.

Οι ρευματογραμμές μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για την οπτικοποίηση ενός χρονικού στιγμιότυπου t δυναμικού διανυσματικού πεδίου $\overrightarrow{D}$:

$$\frac{d\mathbf{s}}{d\pi} = \overrightarrow{D}(\mathbf{s}(\pi), t).$$

Οι *γραμμές θέσεων* (streaklines) χρησιμοποιούνται για την οπτικοποίηση δυναμικού διανυσματικού πεδίου αποτυπώνοντας τις θέσεις σωματιδίων καθώς αυτά μεταφέρον-



Σχήμα 18.20: *Γραμμές θέσεων για δυναμικά διανυσματικά πεδία: μετά την εφαρμογή του πρώτου πεδίου (αριστερά) και μετά την εφαρμογή του τελευταίου πεδίου (δεξιά). (Οι εικόνες δημιουργήθηκαν με το OpenDX.)*

ται από το δυναμικό πεδίο· σε κάθε διακριτό βήμα μεταφοράς το διανυσματικό πεδίο που εφαρμόζεται στα σωματίδια είναι συνάρτηση του χρόνου. Το Σχήμα 18.20 δίνει ένα παράδειγμα.

Ας ορίσουμε όμως πρώτα την έννοια της *τροχιογραμμής* (pathline), μιας συνάρτησης που, δοθέντος ενός αρχικού σημείου $\mathbf{s}_0$ σε μια αρχική χρονική στιγμή t_0, παράγει το ίχνος του σημείου μέσω του δυναμικού πεδίου:

$$\text{pathline} : V_{\text{dynamic}} \times \text{initial} \rightarrow \text{visline},$$

όπου initial = (vispoint, time). Αυτό γίνεται με διαδοχικές αντικαταστάσεις του αρχικού σημείου από το αποτέλεσμα της μεταφοράς του μέσω κάθε χρονικού στιγμιότυπου του δυναμικού διανυσματικού πεδίου:

$$\frac{dp(\text{init}, t)}{dt} = \overrightarrow{D}(p(\text{init}, t), t)$$

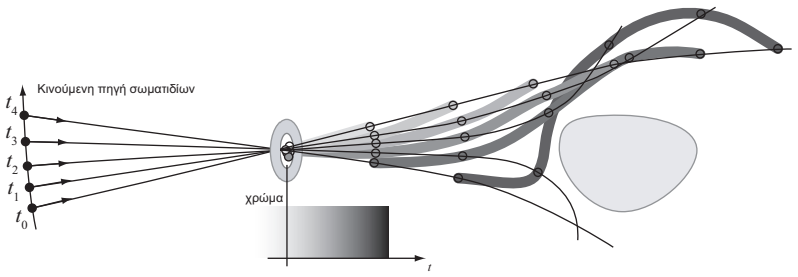
όπου $p(\text{init}, t)$ είναι το σημείο της τροχιογραμμής που ξεκινά από το init = $(\mathbf{s}_0, t_0)$ την παραμετρική χρονική στιγμή t. Αρχικά $p(\text{init}, t_0) = \mathbf{s}_0$. Μια τροχιογραμμή για το απλό δυναμικό διανυσματικό πεδίο του Σχήματος 18.18 (α)–(δ) παρουσιάζεται στο Σχήμα 18.18 (ε).

Η γραμμή θέσεων μπορεί τότε να θεωρηθεί ως συνάρτηση που παίρνει ένα δυναμικό διανυσματικό πεδίο και ένα σύνολο αρχικών θέσεων σε δοσμένους αρχικούς χρόνους· παράγει ένα σύνολο γραμμών οπτικοποίησης που είναι οι τόποι των σωματιδίων που αφέθηκαν από κάθε αρχική θέση. Μπορεί να παρομοιαστεί με το αποτέλεσμα της ένεσης χρωματιστής μπογιάς σε διάφορα σημεία του δυναμικού πεδίου:

$$\text{streakline} : V_{\text{dynamic}} \times \{\text{initial}\} \rightarrow \{\text{visline}\},$$

όπου initial = (vispoint, time). Παρόλο που έχει τον ίδιο τύπο με την τροχιογραμμή[1]

[1]Παίρνει και αυτή ένα δυναμικό πεδίο και κάποιες αρχικές θέσεις σε αρχικούς χρόνους και παράγει γραμμές οπτικοποίησης.



Σχήμα 18.21: *Παράδειγμα γραμμών θέσεων. Οι γραμμές θέσεων σε αποχρώσεις του γκρι σχηματίζονται από το χρονικά μεταβαλλόμενο χρωματισμό σωματιδίων, καθώς αυτά τίθενται σε κίνηση μέσα στο δυναμικό πεδίο. Με μαύρες γραμμές απεικονίζονται οι τροχιογραμμές των σωματιδίων.*

το αποτέλεσμά της είναι διαφορετικό καθώς οι παρελθούσες θέσεις της επηρεάζονται δυναμικά από το πεδίο, όπως ακριβώς συμβαίνει με την μπογιά.

Η γραμμή θέσεων S από την init = $(\mathbf{s}_0, t_0)$ την χρονική στιγμή t είναι $S(\text{init}, t) = p(\text{init}, t)$. Οι γραμμές θέσεων δεν ξεκινούν απαραίτητα στην αρχή της προσομοίωσης.

Ένα παράδειγμα γραμμών θέσεων για ένα δυναμικό διανυσματικό πεδίο απεικονίζεται στο Σχήμα 18.21. Στο συγκεκριμένο σχήμα, οι διαφορετικές αποχρώσεις του γκρι αντιστοιχούν σε διαφορετικές χρονικές στιγμές της εξέλιξης του πεδίου.

18.3.3 Συνέλιξη γραμμικών ολοκληρωμάτων

Οι τεχνικές μεταφοράς σωματιδίων παρουσιάζουν μόνο ένα μικρό τμήμα της πληροφορίας που περιέχει ένα διανυσματικό πεδίο· μια εσφαλμένη επιλογή σωματιδίων μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα για το πεδίο. Η συνέλιξη γραμμικών ολοκληρωμάτων (ΣΓΟ) [Cabr93] αναπτύχθηκε για την συνολική επισκόπηση πυκνών στατικών διανυσματικών πεδίων σε 2Δ ή 3Δ πλέγματα. Μια υφή εισόδου με ανάλυση που υπαγορεύεται από το πλήθος των κελιών του πλέγματος «θαμπώνεται τοπικά» για να παράγει μια υφή εξόδου με την ίδια ανάλυση. Το διανυσματικό πεδίο οπτικοποιείται μέσω του θαμπώματος που προκαλεί στην υφή. Η υφή εισόδου μπορεί να σχετίζεται με το διανυσματικό πεδίο (π.χ. μια φωτογραφία θάλασσας για πεδίο που δείχνει θαλάσσια ρεύματα) ή να είναι εντελώς άσχετη, όπως μια εικόνα θορύβου (Σχήμα 18.22).

Έστω ένα διανυσματικό πεδίο $O^{\text{vector2}}_{X\times Y}$. Η τοπική συμπεριφορά του διανυσματικού πεδίου μπορεί να προσεγγιστεί υπολογίζοντας μια ρευματογραμμή που ξεκινά από το κέντρο ενός κελιού (εικονοστοιχείου), έστω (x, y), και εκτείνεται τόσο προς τη θετική όσο και προς την αρνητική κατεύθυνση του πεδίου, προσομοιώνοντας έτσι το αποτέλεσμα του διανυσματικού πεδίου πάνω σε ένα σωματίδιο στο (x, y). Η τιμή της εικόνας (υφής) εξόδου στο (x, y) υπολογίζεται με συνέλιξη μιας 1Δ λωρίδας της εικόνας εισόδου με ένα 1Δ φίλτρο συνέλιξης. Η συνέλιξη γίνεται πάνω σε L κελιά της ρευματογραμμής του (x, y) σε κάθε κατεύθυνση. Το Σχήμα 18.23 δείχνει τον υπολογισμό μιας 2Δ εικόνας εξόδου από ένα 2Δ διανυσματικό πεδίο και μια 2Δ εικόνα εισόδου· και τα τρία έχουν τις ίδιες διαστάσεις.

Πιο συγκεκριμένα, αν I και O είναι οι εικόνες εισόδου και εξόδου αντίστοιχα, η συνάρτηση ΣΓΟ είναι:

$$O(x, y) = \sum_{p \in A} I(p) \cdot h(p),$$

όπου A το σύνολο κελιών της ρευματογραμμής με διακριτή απόσταση μέχρι L κελιά από το (x, y) (σκιασμένη στο Σχήμα 18.23 (αριστερά)) και L το μισό του μήκους του πυρήνα συνέλιξης:

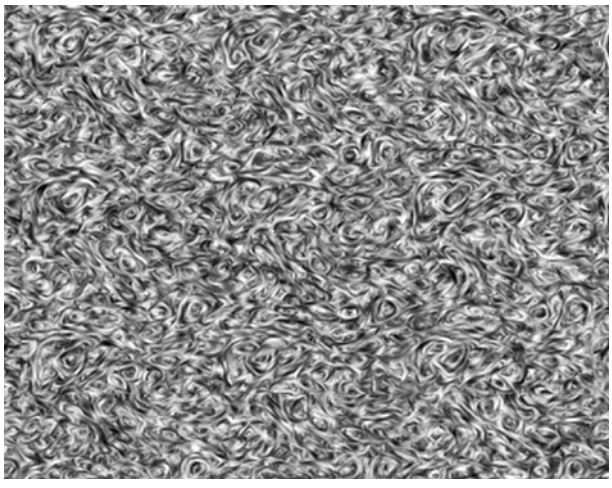
$$h(p) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} k(w)dw$$

, όπου λ_1 το μήκος τόξου της ρευματογραμμής από το (x, y) ως το σημείο όπου εισέρχεται στο κελί p, λ_2 το μήκος τόξου της ρευματογραμμής από το (x, y) ως το σημείο όπου εξέρχεται από το κελί p και $k(w)$ η συνάρτηση του φίλτρου συνέλιξης.

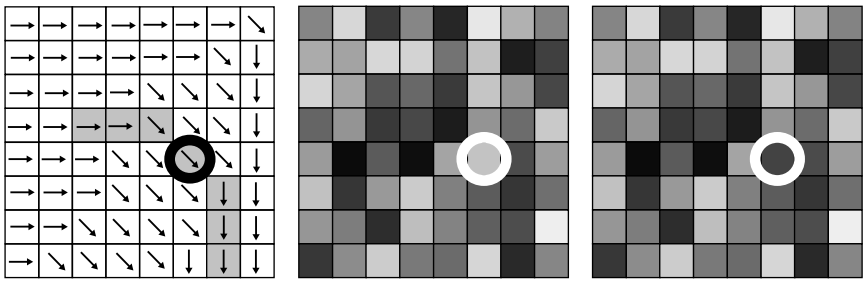
Το μήκος του φίλτρου συνέλιξης $(2L)$ είναι κρίσιμη παράμετρος. Μεγάλο L κάνει τις συναρτήσεις ΣΓΟ των κελιών να έχουν παρόμοιες τιμές (περισσότερο θάμπωμα), ενώ μικρό L έχει ως αποτέλεσμα ανεπαρκές φιλτράρισμα (όχι θάμπωμα) (Εικόνα 40).

Ως εδώ αναφερόμαστε μόνο στην οπτικοποίηση της *κατευθυντικής* συνιστώσας των διανυσματικών πεδίων. Ένας τρόπος οπτικοποίησης του *μεγέθους* τους είναι η διακύμανση του L (που ως τώρα ήταν σταθερό) ανάλογα με τα μεγέθη των τοπικών διανυσμάτων. Τότε η ένταση του θαμπώματος είναι ανάλογη του διανυσματικού μεγέθους πράγμα χρήσιμο σε κάποιες εφαρμογές. Για παράδειγμα, το L μπορεί να κλιμακωθεί ανάλογα με την τοπική ταχύτητα του ανέμου και η εικόνα εξόδου να συνδυαστεί με ένα 2Δ γεωγραφικό χάρτη. Ισχυρότεροι άνεμοι θα οπτικοποιούνται τότε με περισσότερο θάμπωμα.

Είναι επίσης δυνατό να δημιουργηθεί συνθετική κίνηση από την τεχνική ΣΓΟ εμφανίζοντας σωματίδια που ακολουθούν τις γραμμές του πεδίου [Fors95]. Μια απλή



Σχήμα 18.22: *ΣΓΟ σε υφή θορύβου.*



Σχήμα 18.23: *2Δ διανυσματικό πεδίο (αριστερά) με σκιασμένη την περιοχή συνέλιξης, 2Δ εικόνα εισόδου (μέση) και 2Δ εικόνα εξόδου (δεξιά).*

επέκταση απεικονίζει το διανυσματικό μέγεθος σε ταχύτητα συνθετικής κίνησης.

Η γενίκευση της τεχνικής ΣΓΟ σε πεδία $O^{\text{vector3}}_{X\times Y\times Z}$ είναι σχετικά απλή. Όμως, καθώς το πλήθος των ογκοστοιχείων τέτοιων πεδίων μπορεί να είναι τεράστιο (π.χ. 512×512×512), το υπολογιστικό κόστος θα είναι αντίστοιχα μεγάλο και επιπλέον είναι δύσκολο να οπτικοποιηθεί ένα τόσο πυκνό 3Δ σύνολο εξόδου. Οι 3Δ τεχνικές ΣΓΟ χρησιμοποιούν την έννοια της περιοχής ενδιαφέροντος (ΠΕ) [Helg04, Inte98]. Ο χρήστης ορίζει μια 3Δ ΠΕ θέτοντας περιορισμούς σε κάποια βαθμωτή τιμή του πεδίου, όπως το διανυσματικό μέγεθος. Αυτοί οι περιορισμοί χρησιμοποιούνται σαν μάσκα για να αποκλείσουν (θέτοντας στο 0) περιοχές της 3Δ υφής εισόδου. Οι υπολογισμοί ΣΓΟ γίνονται μόνο σε ογκοστοιχεία που αντιστοιχούν σε μη-μηδενικά στοιχεία της υφής εισόδου (Εικόνα 38):

```
για κάθε ογκοστοιχείο v
   if (scalar_test(v) ∉ ΠΕ) set input_texture(v) to 0
για κάθε ογκοστοιχείο v
   if (input_texture(v) ≠ 0) compute ΣΓΟ function output O(v)
```

18.3.4 Οπτικοποίηση της τοπολογίας του διανυσματικού πεδίου

Μία λύση για να μειωθεί η οπτική σύγχυση που είναι έμφυτη στην οπτικοποίηση διανυσματικών πεδίων είναι να επικεντρωθούμε μόνο στα σημαντικά χαρακτηριστικά του πεδίου και να οπτικοποιήσουμε την *τοπολογία* του.

Για ένα στατικό διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{S}$ (είτε $O^{\text{vector2}}_{X\times Y}$ είτε $O^{\text{vector3}}_{X\times Y\times Z}$), τα πιο σημαντικά στοιχεία της τοπολογίας του είναι τα *κρίσιμα σημεία*, τα σημεία στα οποία το πεδίο έχει μηδενική τιμή. Τα κρίσιμα σημεία αντιπροσωπεύουν ιδιαιτερότητες του διανυσματικού πεδίου και η συμπεριφορά (ροή) αυτού γύρω από τα κρίσιμα σημεία παρουσιάζει ενδιαφέρον. Τα κρίσιμα σημεία μπορούν να ταξινομηθούν ανάλογα με τις ιδιοτιμές του πίνακα Jacobi του πεδίου αποτιμημένου στη θέση τους [Helm91].

Για ένα 2Δ διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{S}(x,y) = \big(S_x(x,y),\ S_y(x,y)\big)$ ο πίνακας του Jacobi είναι:

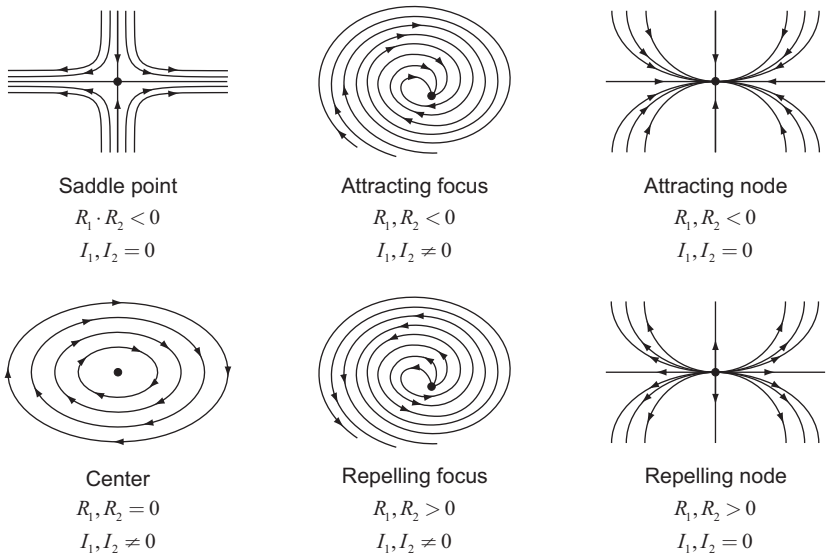
$$J_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_x}{\partial x} & \frac{\partial S_x}{\partial y} \\ \frac{\partial S_y}{\partial x} & \frac{\partial S_y}{\partial y} \end{bmatrix},$$

και έχει δύο ιδιοτιμές που είναι είτε και οι δύο πραγματικές είτε και οι δύο μιγαδικές και συζυγείς μεταξύ τους (δηλαδή τα πραγματικά μέρη τους είναι ίσα και τα φανταστικά μέρη τους είναι αντίθετα). Στο Σχήμα 18.24 παρουσιάζονται όλες οι δυνατές περιπτώσεις. Φαίνεται ότι ένα θετικό πραγματικό μέρος της ιδιοτιμής αντιστοιχεί σε απωθητική συμπεριφορά του πεδίου γύρω από το κρίσιμο σημείο, ενώ μία αρνητική τιμή αντιστοιχεί σε ελκτική συμπεριφορά· επομένως το πεδίο κατευθύνεται προς αλλά και απομακρύνεται από ένα *σαγματικό σημείο* (saddle point) και γύρω από ένα *κέντρο*. Επιπλέον, ένα (μη μηδενικό) φανταστικό σημείο αντιστοιχεί σε περιστροφική συμπεριφορά γύρω από το κρίσιμο σημείο.

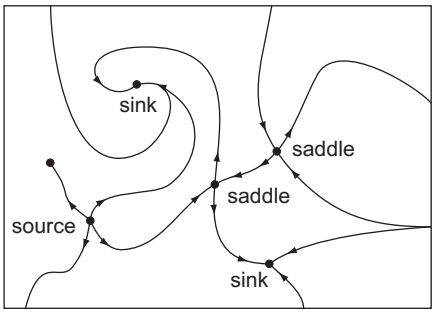
Για ένα 3Δ διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{S}(x, y, z) = \big(S_x(x, y, z),\ S_y(x, y, z),\ S_z(x, y, z)\big)$, ο πίνακας του Jacobi μπορεί να έχει είτε τρεις πραγματικές ιδιοτιμές ή μία πραγματική και ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών ιδιοτιμών οι οποίες αντιστοιχούν σε συμπεριφορές του πεδίου ανάλογες προς την περίπτωση των 2Δ.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 18.24, υπάρχουν διαφορετικοί τύποι ροής στην περιοχή των κρίσιμων σημείων, οι οποίοι ορίζουν τομείς διαφορετικών ειδών στο πεδίο. Τα όρια αυτών των τομέων είναι καμπύλες (για 2Δ πεδία) ή επιφάνειες (για 3Δ πεδία) που καλούνται *διαχωριστικές* (separatrices). Ένα γράφημα των κρίσιμων πεδίων και των διαχωριστικών ενός διανυσματικού πεδίου καλείται *σκελετός* του και παρέχει μία απλοποιημένη αναπαράσταση του πεδίου (Σχήμα 18.25).

Παρόλα αυτά ακόμη και αυτή η απλοποιημένη αναπαράσταση του πεδίου μπορεί να είναι προβληματική, εφόσον το πεδίο περιέχει υπερβολικά μεγάλο πλήθος πυκνά διατεταγμένων κρίσιμων σημείων. Για να αντιμετωπιστούν τέτοιες καταστάσεις, έχουν γίνει προσπάθειες απλοποίησης της τοπολογίας ενός διανυσματικού πεδίου [dL99,



Σχήμα 18.24: *Ταξινόμηση κρίσιμων σημείων στις 2Δ. Τα R_1, R_2 είναι τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών του πίνακα Jacobi και τα I_1, I_2 είναι τα αντίστοιχα φανταστικά μέρη.*



Σχήμα 18.25: *Ο σκελετός ενός διανυσματικού πεδίου.*

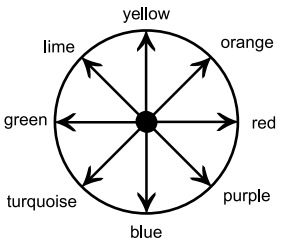
Tric00]. Συνήθως συγχωνεύονται κοντινά κρίσιμα σημεία με κατάλληλα κριτήρια και περιορισμούς ώστε να μειωθεί ο αριθμός του διατηρώντας τα χαρακτηριστικά του πεδίου.

Η τοπολογική ανάλυση αυτού του τύπου έχει αναπτυχθεί για στατικά διανυσματικά πεδία· μπορεί επίσης να εφαρμοστεί για την οπτικοποίηση δυναμικών διανυσματικών πεδίων. Συγκεκριμένα, αν δίνονται διαδοχικά στιγμιότυπα ενός δυναμικού διανυσματικού πεδίου, οι σκελετοί τους μπορούν να ενωθούν συνδέοντας διαδοχικές θέσειω των κρίσιμων σημείων και τις αντίστοιχες διαχωριστικές. Οι επιφάνειες που προκύπτουν επιτρέπουν την παρακολούθηση της εξέλιξης του πεδίου και της τοπολογίας του με τον χρόνο. Έτσι μπορούν να φανούν αλλαγές στην τοπολογία του πεδίου (*διακλαδώσεις* — bifurcations)· για παράδειγμα αλλαγές στον τύπο κάποιων κρίσιμων σημείων, συγχωνεύσεις, δημιουργίες ή απαλοιφές κρίσιμων σημείων, κλπ.

18.3.5 Απόδοση ως βαθμωτό πεδίο

Μια απλή μέθοδος αποφυγής της οπτικής σύγχυσης (που οδηγεί σε απώλεια πληροφορίας) είναι η απομάκρυνση των περισσότερων συνιστωσών του διανυσματικού πεδίου και η δημιουργία έτσι ενός βαθμωτού πεδίου. Αυτό το βαθμωτό πεδίο μπορεί να οπτικοποιηθεί άμεσα με μια απλή συσχέτιση χρώματος-τιμών και κάποια από τις τεχνικές οπτικοποίησης βαθμωτών πεδίων που παρουσιάστηκαν. Για παράδειγμα, μπορεί να επιλεγεί μόνον η οπτικοποίηση του διανυσματικού μεγέθους, αγνοώντας όλη την πληροφορία κατεύθυνσης.

Ο Hall [Hall93] εισήγαγε μια πληρέστερη μέθοδο για την απεικόνιση των διανυσματικών χαρακτηριστικών σε χρώμα. Αντί για απόρριψη διανυσματικών χαρακτηριστικών, απεικονίζει την κατεύθυνση και το μέγεθος σε διαφορετικά χρωματικά χαρακτηριστικά. Έστω ότι τα διανύσματα ενός πεδίου $O_{X\times Y}^{\text{vector2}}$ παριστάνονται σε πολικό σύστημα συντεταγμένων σαν τριάδες (ρ,θ,ϕ) όπου ρ το κανονικοποιημένο διανυσματικό μέγεθος και θ,ϕ οι πολικές γωνίες κατεύθυνσης. Αυτά μπορούν να απεικονισθούν άμεσα σ' ένα σφαιρικό σύστημα χρωματικών συντεταγμένων. Για παράδειγμα, το θ μπορεί να αντιπροσωπεύει την χρωματική απόχρωση (οι χρωματικές αποχρώσεις ορίζουν τον ισημερινό της χρωματικής σφαίρας (Σχήμα 18.26)), το ϕ την ένταση και το



Σχήμα 18.26: *Οι χρωματικές αποχρώσεις απεικονίζονται στον ισημερινό (θ) της χρωματικής σφαίρας.*

ρ τον κορεσμό. Έτσι τα κορεσμένα χρώματα αντιστοιχούν σε διανύσματα μεγίστου μεγέθους, ενώ η κατεύθυνση απεικονίζεται στη χρωματικότητα και στην ένταση.

Παρόλο που η τεχνική αυτή αποφεύγει τον οπτικό κορεσμό και την προοπτική παραμόρφωση είναι δύσκολο να συνδέσουμε άμεσα τα χρωματικά με τα διανυσματικά χαρακτηριστικά. Η κατάσταση βελτιώνεται κάπως αν τα χρώματα κβαντοποιηθούν πριν την απεικόνιση (κατεύθυνση ή / και μέγεθος), καθώς αυτό κατατάσσει τα διανύσματα σε λίγες βασικές κατηγορίες (Εικόνα 41).

18.3.6 Απλοποίηση διανυσματικού πεδίου

Στην περίπτωση πολύπλοκων διανυσματικών πεδίων μια χρήσιμη τεχνική είναι η απλοποίησή τους πριν την οπτικοποίηση. Οι τεχνικές απλοποίησης μειώνουν το πλήθος των διανυσμάτων μ' έναν ελεγχόμενο τρόπο και με κριτήριο τη διατήρηση σημαντικών χαρακτηριστικών του πεδίου, όπως τα κρίσιμα σημεία ή το σύνορο του πεδίου. Έτσι μειώνεται η πιθανότητα απώλειας σημαντικής πληροφορίας (όπως στη μεταφορά σωματιδίων). Έχουν αναπτυχθεί αρκετές τεχνικές απλοποίησης και οι περισσότερες από αυτές βασίζονται στην ομαδοποίηση των διανυσμάτων [Garc01, Heck99, Tele99, Tric00].

Στην περίπτωση διανυσματικών πεδίων που ορίζονται πάνω σε τετραεδρικά πλέγματα (δηλαδή τα διανύσματα δίνονται πάνω στις κορυφές ενός τέτοιου πλέγματος), μπορεί να γίνει απλοποίησή τους χρησιμοποιώντας μια γενίκευση της κλασικής πράξης *κατάρρευσης ακμής* [Plat04] (βλ. Κεφάλαιο 6). Μια κατάρρευση ακμής στο τετραεδρικό πλέγμα υποβιβάζει τα τετράεδρα που μοιράζονται την ακμή αυτή σε απλά τρίγωνα τα οποία και διαγράφονται. Τετράεδρα που είχαν κοινή κορυφή με την ακμή που κατέρρευσε πρέπει να ενημερώσουν τη θέση της κορυφής αυτής. Συνοπτικά, ο αλγόριθμος είναι ο ακόλουθος:

- Δημιουργία ουράς υποψήφιων καταρρεύσεων ακμών με ταξινόμηση όλων των ακμών του τετραεδρικού πλέγματος σύμφωνα με ένα μέτρο σφάλματος που υπολογίζει την υποβάθμιση του πλέγματος ως αποτέλεσμα κάθε υποψήφιας κατάρρευσης.

- Επανάληψη ώσπου να επιτευχθεί ο στόχος απλοποίησης:

	Σκατζόχοιροι	Μεταφορά σωματιδίων	ΣΓΟ	Τοπολογία διανυσματικού πεδίου	Απόδοση ως βαθμωτό	Απλοποίηση
Οπτικοποίηση πλήρους πεδίου	ν		ν		ν	
Οπτικοποίηση κατεύθυνσης	ν	ν	ν	ν	ν[2]	ν
Οπτικοποίηση μεγέθους	ν	ν	ν		ν[1]	ν
Οχι σημαντική απώλεια πληροφορίας	ν		ν			ν
Αποφυγή οπτικής σύγχυσης		ν	ν	ν	ν	ν

[1]Αυτή η τεχνική οπτικοποιεί είτε διανυσματική κατεύθυνση είτε μέγεθος.

Πίνακας 18.1: *Σύνοψη τεχνικών οπτικοποίησης διανυσματικών πεδίων.*

- Εξαγωγή ακμής από την αρχή της ουράς,
- Κατάρρευση της ακμής,
- Επανυπολογισμός του μέτρου σφάλματος για τις ακμές της ουράς που επηρεάζονται από την κατάρρευση και αναταξινόμηση της ουράς.

Προφανώς το μέτρο σφάλματος που χρησιμοποιείται στον παραπάνω αλγόριθμο είναι κρίσιμης σημασίας. Ο Πλατής [Plat04] προτείνει ένα σύνθετο μέτρο σφάλματος το οποίο περιλαμβάνει τόσο το τετραεδρικό πεδίο ορισμού (μεταβολή του συνόρου) όσο και το διανυσματικό πεδίο (διαφορές στις διανυσματικές τιμές ή στις θέσεις των κρίσιμων σημείων). Η Εικόνα 42 δίνει ένα παράδειγμα ενός πολύπλοκου διανυσματικού πεδίου (αριστερά) απλοποιημένο στο 50%, 25% και 10% του αρχικού πλήθους τετραέδρων του με τη μέθοδο αυτή.

Τα βασικά χαρακτηριστικά των τεχνικών οπτικοποίησης διανυσματικών πεδίων που παρουσιάστηκαν δίνονται στον Πίνακα 18.1.

18.4 Ασκήσεις

Οι ακόλουθες ασκήσεις είναι, αναγκαστικά, πρακτικής φύσεως. Μπορούν όμως να υλοποιηθούν σε οποιοδήποτε καλό σύστημα οπτικοποίησης.

1. Κατασκευάστε πρόγραμμα που να δημιουργεί διανυσματικό πεδίο $O_{X\times Y}^{\text{vector2}}$ με βάση τη βαρυτική έλξη που ασκούν τρεις σημειακές μάζες. Το διανυσματικό πεδίο ορίζεται πάνω σε 2Δ κανονικό πλέγμα 500×500. Οι τρεις σημειακές μάζες πρέπει να έχουν διαφορετικές τιμές μάζας και να είναι τοποθετημένες σε τρία σημεία της επιλογής σας, εντός του περιβάλλοντος ορθογωνίου του πλέγματος 500×500. Θεωρήστε ότι το βαρυτικό πεδίο είναι ανάλογο της μάζας ενός σημείου και μειώνεται ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης. Η τιμή του βαρυτικού πεδίου σ' ένα σημείο του πλέγματος είναι ένα διάνυσμα του οποίου το μέγεθος και η κατεύθυνση είναι το διανυσματικό άθροισμα των τριών δυνάμεων που ασκούνται πάνω του από τις τρεις σημειακές μάζες.

   Εισάγετε το πεδίο σας στο σύστημα οπτικοποίησής σας και οπτικοποιήστε το με σκατζόχοιρους και κατάλληλο χρωματικό χάρτη.

2. Επεκτείνετε το πρόγραμμα της προηγούμενης άσκησης ώστε να λειτουργεί σε 3Δ κανονικό πλέγμα και να παράγει πάνω σ' αυτό ένα διανυσματικό πεδίο $O^{\text{vector3}}_{X\times Y\times Z}$, και πάλι από 3 σημειακές μάζες που βρίσκονται σε σημεία εντός του περιβάλλοντος κιβωτίου του 3Δ πλέγματος. Οπτικοποιήστε το πεδίο αυτό μετατρέποντάς το σε βαθμωτό και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες τεχνικές:

   - επίπεδα τομής (Εικόνα 32),
   - ισοεπιφάνειες.

   Για τη μετατροπή τού διανυσματικού σας πεδίου σε βαθμωτό μπορείτε να χρησιμοποιήσετε:

   - την επιλογή του διανυσματικού μεγέθους,
   - την τεχνική απόδοσης ως βαθμωτό πεδίο που περιγράφεται σ' αυτό το Κεφάλαιο.

3. Το σύνολο δεδομένων *Blunt Fin* (διατίθεται από τη NASA) χρησιμοποιείται συχνά για δοκιμές προγραμμάτων οπτικοποίησης. Είναι το αποτέλεσμα αεροναυπηγικής προσομοίωσης και αποτελείται από τρία πεδία πάνω σε ένα 3Δ πλέγμα. Τα τρία πεδία είναι:

   - πυκνότητα, βαθμωτό πεδίο,
   - ορμή, 3Δ διανυσματικό πεδίο,
   - στασιμότητα, βαθμωτό πεδίο.

   Να εισάγετε στο σύστημα οπτικοποίησής σας το σύνολο Blunt Fin και να δείξετε *ταυτόχρονα* τα εξής:

   - μια ισοεπιφάνεια του πεδίου πυκνότητας,
   - το πεδίο στασιμότητας με οπτικοποίηση όγκου,
   - τα διανύσματα του πεδίου ορμής που πηγάζουν από την ισοεπιφάνεια του πεδίου πυκνότητας, με διανυσματικά σύμβολα.

   Επιπλέον, προσθέστε συνθετική κίνηση για να οπτικοποιήσετε κάποια άλλη παράμετρο της επιλογής σας (π.χ. την τιμή της ισοεπιφάνειας).

   Σημείωση: στην οπτικοποίηση ένα «σύμβολο» (glyph) είναι ένα αντικείμενο που χρησιμοποιείται για να παραστήσει συγκεκριμένο τύπο δεδομένων. Στην περίπτωση διανυσματικών δεδομένων ένα σύνηθες σύμβολο είναι το βέλος.

A

Διανυσματικοί και συσχετισμένοι χώροι

Τα σημεία και τα διανύσματα είναι τα πιο βασικά στοιχεία που χρησιμοποιούνται στα γραφικά. Σε αυτό το παράρτημα παρουσιάζουμε τη μαθηματική τους θεμελίωση και τις πιο σημαντικές τους ιδιότητες. Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει σε ένα εξειδικευμένο σύγγραμμα γραμμικής άλγεβρας (για παράδειγμα το [Stra03]) για μία πληρέστερη παρουσίαση.

A.1 Διανυσματικοί χώροι

Ένα σύνολο V με στοιχεία που καλούνται *διανύσματα* και συμβολίζονται $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, κ.λπ. είναι ένας *διανυσματικός χώρος* αν ορίζονται δύο πράξεις:

1. *διανυσματική πρόσθεση* μεταξύ δύο διανυσμάτων, που συμβολίζεται $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$, και της οποίας το αποτέλεσμα είναι επίσης διάνυσμα, και

2. *βαθμωτός πολλαπλασιασμός* μεταξύ ενός βαθμωτού (πραγματικού αριθμού) και ενός διανύσματος, που συμβολίζεται $\lambda \cdot \vec{\mathbf{a}}$ ή απλά $\lambda \vec{\mathbf{a}}$, και του οποίου το αποτέλεσμα είναι επίσης διάνυσμα,

και ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. Για τη διανυσματική πρόσθεση:

   (α) *Αντιμεταθετικότητα*: $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}$ για κάθε $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in V$.

   (β) *Προσεταιρισμός*: $\vec{\mathbf{a}} + (\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}) = (\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) + \vec{\mathbf{c}}$ για κάθε $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}} \in V$.

   (γ) Υπάρχει ένα *ουδέτερο (μηδενικό) στοιχείο* $\vec{\mathbf{0}} \in V$ τέτοιο ώστε $\vec{\mathbf{0}} + \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{a}}$ για κάθε $\vec{\mathbf{a}} \in V$.

(δ) Για κάθε $\vec{\mathbf{a}} \in V$ το *αντίθετο* αυτού υπάρχει στο V, δηλαδή ένα στοιχείο $-\vec{\mathbf{a}} \in V$ τέτοιο ώστε $\vec{\mathbf{a}} + (-\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

2. Για τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό:

(α) *Προσεταιρισμός*: $(\lambda\mu)\vec{\mathbf{a}} = \lambda(\mu\vec{\mathbf{a}})$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\vec{\mathbf{a}} \in V$.

(β) Το 1 είναι το *ουδέτερο (μοναδιαίο) στοιχείο*: $1 \cdot \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}$ για κάθε $\vec{\mathbf{a}} \in V$.

(γ) *Επιμερισμός* του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως προς την διανυσματική πρόσθεση:
$\lambda(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = \lambda\vec{\mathbf{a}} + \lambda\vec{\mathbf{b}}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in V$.

(δ) *Επιμερισμός* της διανυσματικής πρόσθεσης ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό: $(\lambda + \mu)\vec{\mathbf{a}} = \lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{a}}$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\vec{\mathbf{a}} \in V$.

Τα πιο οικεία παραδείγματα διανυσματικών χώρων είναι οι χώροι $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ των διδιάστατων διανυσμάτων στο επίπεδο και των τριδιάστατων διανυσμάτων στο χώρο, με τις συνηθισμένες πράξεις μεταξύ διανυσμάτων. Για τα τριδιάστατα διανύσματα αυτές είναι

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} &= [a_x, a_y, a_z]^{\mathrm{T}} + [b_x, b_y, b_z]^{\mathrm{T}} = [a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z]^{\mathrm{T}},\\ \lambda \cdot \vec{\mathbf{a}} &= \lambda[a_x, a_y, a_z]^{\mathrm{T}} = [\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z]^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

Ένα άλλο παράδειγμα διανυσματικού χώρου είναι το σύνολο των πολυωνύμων βαθμού k· οι πράξεις ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_kx^k)\\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_k + b_k)x^k.\\ \lambda \cdot \vec{\mathbf{a}} &= \lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k)\\ &= (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + (\lambda a_2)x^2 + \cdots + (\lambda a_k)x^k.\end{aligned}$$

Α.1.1 Γραμμικοί συνδυασμοί και γραμμική ανεξαρτησία

Ας θεωρήσουμε διανύσματα $\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{a}}_m$ ενός διανυσματικού χώρου V. Μία έκφραση της μορφής

$$\vec{\mathbf{a}} = \lambda_1\vec{\mathbf{a}}_1 + \lambda_2\vec{\mathbf{a}}_2 + \cdots + \lambda_m\vec{\mathbf{a}}_m$$

για $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ καλείται *γραμμικός συνδυασμός* των $\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{a}}_m$. Καθώς η διανυσματική πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός παράγουν διανύσματα, ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων είναι επίσης ένα διάνυσμα. Ειδικές μορφές γραμμικών συνδυασμών είναι οι *συσχετισμένοι συνδυασμοί* (affine combinations) (ή *βαρυκεντρικοί συνδυασμοί*) για τους οποίους οι συντελεστές αθροίζουν στη μονάδα, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, και οι *κυρτοί συνδυασμοί* οι οποίοι είναι συσχετισμένοι συνδυασμοί για τους οποίους οι συντελεστές είναι μη αρνητικοί, $\lambda_i \geq 0$.

Τα διανύσματα $\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{a}}_m$ καλούνται *γραμμικά ανεξάρτητα* αν η εξίσωση

$$\lambda_1 \vec{\mathbf{a}}_1 + \lambda_2 \vec{\mathbf{a}}_2 + \cdots + \lambda_m \vec{\mathbf{a}}_m = \vec{\mathbf{0}}$$

έχει ως μοναδική λύση $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$. Διαφορετικά, τα διανύσματα καλούνται *γραμμικά εξαρτημένα*· σε αυτή την περίπωση τουλάχιστον ένα από τα λ_i είναι μη μηδενικό και επομένως τουλάχιστον ένα από τα $\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{a}}_m$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπόλοιπων $(m-1)$ διανυσμάτων.

Ως συνέπεια αυτού του ορισμού παρατηρούμε ότι αν ένα διάνυσμα $\vec{\mathbf{a}}$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός κάποιων γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων $\vec{\mathbf{a}}_1$, $\vec{\mathbf{a}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{a}}_m$, τότε αυτή η έκφραση είναι *μοναδική*. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι το $\vec{\mathbf{a}}$ μπορεί να εκφραστεί με δύο διαφορετικούς τρόπους ως γραμμικός συνδυασμός αυτών των διανυσμάτων,

$$\vec{\mathbf{a}} = \lambda_1 \vec{\mathbf{a}}_1 + \lambda_2 \vec{\mathbf{a}}_2 + \cdots + \lambda_m \vec{\mathbf{a}}_m = \mu_1 \vec{\mathbf{a}}_1 + \mu_2 \vec{\mathbf{a}}_2 + \cdots + \mu_m \vec{\mathbf{a}}_m.$$

Τότε

$$\vec{\mathbf{0}} = (\lambda_1 - \mu_1)\vec{\mathbf{a}}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\vec{\mathbf{a}}_2 + \cdots + (\lambda_m - \mu_m)\vec{\mathbf{a}}_m,$$

όμως καθώς τα $\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{a}}_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, όλοι οι συντελεστές σε αυτή την έκφραση πρέπει να είναι μηδέν:

$$\lambda_i - \mu_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_i = \mu_i \quad \text{για όλα τα } i,$$

επομένως η έκφραση του $\vec{\mathbf{a}}$ ως προς τα $\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{a}}_m$ είναι στην πραγματικότητα μοναδική.

Α.1.2 Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Μία *βάση* ενός διανυσματικού χώρου είναι ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων τα οποία έχουν επιπρόσθετα την ιδιότητα ότι κάθε διάνυσμα του χώρου μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός τους.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η έκφραση κάθε διανύσματος ως γραμμικού συνδυασμού των στοιχείων μίας βάσης είναι μοναδική. Οι (μοναδικοί) συντελεστές με τους οποίους ένα διάνυσμα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων μίας βάσης καλούνται *συντεταγμένες* του διανύσματος ως προς αυτή τη βάση.

Κάθε διανυσματικός χώρος έχει βάση. Στην πραγματικότητα κάθε διανυσματικός χώρος μπορεί να έχεις πολλές διαφορετικές βάσεις. Μπορεί, όμως, να αποδειχθεί ότι όλες οι βάσεις ενός διανυσματικού χώρου έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Το πλήθος των στοιχείων της βάσης ενός διανυσματικού χώρου καλείται *διάσταση* του διανυσματικού χώρου

Στον τριδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$, η πιο γνωστή βάση είναι η

$$\vec{\mathbf{i}} = [1,0,0]^{\mathrm{T}}, \quad \vec{\mathbf{j}} = [0,1,0]^{\mathrm{T}}, \quad \vec{\mathbf{k}} = [0,0,1]^{\mathrm{T}}.$$

Κάθε διάνυσμα γράφεται ως προς αυτή τη βάση με τις συνήθεις συντεταγμένες του· για παράδειγμα ένα διάνυσμα $\vec{\mathbf{a}} = x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}$ έχει συντεταγμένες $[x, y, z]^{\mathrm{T}}$. Μία άλλη βάση αυτού του χώρου είναι η

$$\vec{\mathbf{i}'} = [1,1,1]^{\mathrm{T}}, \quad \vec{\mathbf{j}'} = [1,2,3]^{\mathrm{T}}, \quad \vec{\mathbf{k}'} = [2,3,7]^{\mathrm{T}},$$

και, για παράδειγμα, το διάνυσμα $\vec{\mathbf{a}} = [2,1,-6]^{\mathrm{T}}$ έχει συντεταγμένες $\vec{\mathbf{a}'} = [5,1,-2]^{\mathrm{T}}$ ως προς αυτή τη βάση.

Για τον διανυσματικό χώρο των πολυωνύμων βαθμού k η συνήθης βάση είναι αυτή που αποτελείται από τα μονώνυμα

$$1,\ t,\ t^2,\ \ldots,\ t^k,$$

και επομένως αυτός ο χώρος έχει διάσταση $(k+1)$. Μία άλλη βάση αυτού του χώρου αποτελείται από τα πολυώνυμα Bernstein βαθμού k,

$$B_i^k(t) = \binom{k}{i} t^i (1-t)^{k-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Ανατρέξτε στο Κεφάλαιο 7 για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με αυτή τη βάση.

Γενικά, αν οι συντεταγμένες ενός διανύσματος δίνονται ως προς μία αρχική βάση, είναι δυνατό να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του ως προς μία διαφορετική βάση· αρκεί να είναι γνωστές οι συντεταγμένες των διανυσμάτων της νέας βάσης ως προς την αρχική βάση. Στην Ενότητα 3.15 δίνεται ένα παράδειγμα και μία εφαρμογή στον $\mathbb{R}^3$.

Στις επόμενες ενότητες θα εστιάσουμε σε 2Δ και 3Δ διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ και του $\mathbb{R}^3$, καθώς είναι χρήσιμα στα γραφικά και την οπτικοποίηση. Θα συμβολίζουμε αυτά τα διανύσματα με τις συνήθεις συντεταγμένες τους σε στήλη· για παράδειγμα:

$$\vec{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x, y, z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Αρκετές από τις ιδιότητες που αναφέρουμε παρακάτω ισχύουν εξίσου για οποιονδήποτε διανυσματικό χώρο· ωστόσο ο αναγνώστης θα πρέπει να ανατρέξει σε ένα σύγγραμμα γραμμικής άλγεβρας για λεπτομέρειες.

Α.1.3 Μέτρο διανύσματος και μοναδιαία διανύσματα

Το *μέτρο* ενός διανύσματος $\vec{\mathbf{a}} = [x, y, z]^{\mathrm{T}}$ είναι ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός

$$|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

και είναι στην πραγματικότητα το *μήκος* του διανύσματος. Το μέτρο ενός διανύσματος έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $|\vec{\mathbf{a}}| > 0$ για $\vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ και $|\vec{\mathbf{a}}| = 0$ αν και μόνο αν $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}$.

2. $|\lambda\,\vec{\mathbf{a}}| = |\lambda||\vec{\mathbf{a}}|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. $|\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}| \leq |\vec{\mathbf{a}}| + |\vec{\mathbf{b}}|$.

Σημειώνεται ότι είναι δυνατό να οριστούν διαφορετικές μορφές μέτρου σε οποιονδήποτε διανυσματικό χώρο· η μόνη απαίτηση είναι να ικανοποιούν τις παραπάνω τρεις ιδιότητες.

Διανύσματα μέτρου ίσου με 1 καλούνται *μοναδιαία διανύσματα* και σε αυτό το βιβλίο σημειώνονται με ένα «καπελάκι» (ˆ) αντί για βέλος. Δεδομένου ενός διανύσματος $\vec{\mathbf{a}}$, ένα μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση του $\vec{\mathbf{a}}$ μπορεί να υπολογιστεί διαιρώντας το (κατά συντεταγμένη) με το μέτρο του:

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{a}}}{|\vec{\mathbf{a}}|} = \left[\frac{x}{|\vec{\mathbf{a}}|}, \frac{y}{|\vec{\mathbf{a}}|}, \frac{z}{|\vec{\mathbf{a}}|}\right]^{\mathrm{T}}.$$

Αυτή η διαδικασία καλείται συχνά *κανονικοποίηση* του $\vec{\mathbf{a}}$.

Α.1.4 Εσωτερικό γινόμενο

Το *εσωτερικό γινόμενο* δύο διανυσμάτων $\vec{\mathbf{a}} = [a_x, a_y, a_z]^{\mathrm{T}}$ και $\vec{\mathbf{b}} = [b_x, b_y, b_z]^{\mathrm{T}}$ είναι ένας πραγματικός αριθμός και ορίζεται ως εξής:

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Αυτή η σχέση ισχύει επίσης για 2Δ διανύσματα καθώς και για διανύσματα οποιουδήποτε διανυσματικού χώρου που δίνονται με τις συντεταγμένες τους. Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να ιδωθεί επίσης ως πολλαπλασιασμός πινάκων: $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{b}}$. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = |\vec{\mathbf{a}}|^2.$$

Το εσωτερικό γινόμενο έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

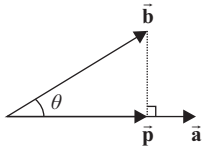
1. *Αντιμεταθετικότητα*: $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{a}}$.

2. *Διγραμμικότητα*: $\vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{b}} + \lambda\,\vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} + \lambda(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}})$.

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων μπορεί επίσης να γραφεί ως

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \cos\theta$$

όπου θ είναι η (προσανατολισμένη) γωνία από το $\vec{\mathbf{a}}$ ως το $\vec{\mathbf{b}}$. Αυτή η μορφή του εσωτερικού γινομένου έχει σημαντικές εφαρμογές. Πρώτον, αποκαλύπει ότι αν δύο



Σχήμα Α.1: *Προβολή διανύσματος.*

διανύσματα είναι μεταξύ τους κάθετα, το εσωτερικό γινόμενό τους είναι μηδέν καθώς $\theta = 90°$:

$$\vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{b}} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 0.$$

Δεύτερον, αν δίνονται οι συντεταγμένες των δύο διανυσμάτων, η παραπάνω μορφή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της μεταξύ τους γωνίας:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|}\right).$$

Σημειώνεται ότι αν τα $\vec{\mathbf{a}}$ και $\vec{\mathbf{b}}$ είναι κανονικοποιημένα, η διαίρεση αποφεύγεται:

$$\theta = \arccos(\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}}).$$

Τρίτον, δεδομένου ενός διανύσματος $\vec{\mathbf{a}}$, μπορεί να δειχθεί ότι η προβολή $\vec{\mathbf{p}}$ ενός οποιουδήποτε διανύσματος $\vec{\mathbf{b}}$ κατά μήκος του $\vec{\mathbf{a}}$ (Σχήμα Α.1) έχει μήκος

$$|\vec{\mathbf{p}}| = |\vec{\mathbf{b}}| \cos\theta = |\vec{\mathbf{b}}| \left(\frac{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|}\right),$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των $\vec{\mathbf{a}}$ και $\vec{\mathbf{b}}$· αυτή η σχέση μπορεί να απλοποιηθεί αν το $\vec{\mathbf{a}}$ είναι κανονικοποιημένο:

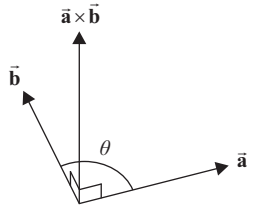
$$|\vec{\mathbf{p}}| = \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}}.$$

Α.1.5 Εξωτερικό γινόμενο

Το *εξωτερικό γινόμενο* δύο 3Δ διανυσμάτων $\vec{\mathbf{a}} = [a_x, a_y, a_z]^{\mathrm{T}}$ και $\vec{\mathbf{b}} = [b_x, b_y, b_z]^{\mathrm{T}}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στα $\vec{\mathbf{a}}$ και $\vec{\mathbf{b}}$ (και επομένως στο επίπεδο που ορίζουν αυτά) και ορίζεται[1] ως

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\vec{\mathbf{i}} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\vec{\mathbf{j}} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\vec{\mathbf{k}}$$

[1]Σημειώνεται ότι το εξωτερικό γινόμενο ορίζεται μόνο για 3Δ διανύσματα.



Σχήμα Α.2: *Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων.*

ή, σε μορφή ορίζουσας,

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Η διεύθυνση του εξωτερικού γινομένου μπορεί να καθοριστεί χρησιμοποιώντας τον κανόνα του δεξιού χεριού για τα $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ και $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ όπως φαίνεται στο Σχήμα Α.2.

Το εξωτερικό γινόμενο έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. *Αναναντιμεταθετικότητα*: $\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{a}} = -(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}})$.

2. *Επιμερισμός* ως προς τη διανυσματική πρόσθεση: $\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}) = (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) + (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{c}})$.

Μπορεί να δειχθεί ότι το εξωτερικό γινόμενο δύο παράλληλων διανυσμάτων είναι μηδέν:

$$\vec{\mathbf{a}} \parallel \vec{\mathbf{b}} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = 0.$$

Είναι αξιοσημείωτο ότι το μέτρο του εξωτερικού γινομένου είναι ίσο με το εμβαδό του παραλληλογράμμου με πλευρές $\vec{\mathbf{a}}$ και $\vec{\mathbf{b}}$, και μπορεί να υπολογιστεί ως

$$|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}| = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \sin\theta$$

όπου θ ($0 \le \theta \le 180°$) είναι η γωνία μεταξύ των $\vec{\mathbf{a}}$ και $\vec{\mathbf{b}}$ (Σχήμα Α.2).

Α.1.6 Ορθοκανονική βάση

Αν και κάθε διανυσματικός χώρος έχει πολλαπλές βάσεις, κάποιες από αυτές είναι πιο χρήσιμες από άλλες! Μία τέτοια κατηγορία είναι οι *ορθοκανονικές βάσεις*, οι οποίες αποτελούνται από μοναδιαία διανύσματα τα οποία ανά δύο είναι κάθετα μεταξύ τους· επομένως τα $(\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2, \ldots, \hat{\mathbf{b}}_n)$ αποτελούν ορθοκανονική βάση ενός διανυσματικού χώρου V όταν τα διανύσματα $\hat{\mathbf{b}}_i$ αποτελούν βάση και ικανοποιούν τη σχέση

$$\hat{\mathbf{b}}_i \cdot \hat{\mathbf{b}}_j = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j, \\ 0, & \text{αν } i \neq j. \end{cases}$$

Χάρη σε αυτή την ιδιότητα, όταν χρησιμοποιείται μία ορθοκανονική βάση είναι εύκολο να υπολογιστούν οι συντεταγμένες ενός διανύσματος· συγκεκριμένα, αν $\vec{\mathbf{a}} = \lambda_1\hat{\mathbf{b}}_1 + \lambda_2\hat{\mathbf{b}}_2 + \cdots + \lambda_n\hat{\mathbf{b}}_n$, τότε

$$\lambda_i = \vec{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}}_i.$$

Οι συνήθεις βάσεις των Ευκλειδείων χώρων $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ είναι ορθοκανονικές.

Α.2 Συσχετισμένοι χώροι

Ένα σύνολο S με στοιχεία που καλούνται *σημεία* και συμβολίζονται $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, κ.ο.κ. είναι ένας *συσχετισμένος χώρος* συνδεδεμένος με ένα διανυσματικό χώρο V, αν ορίζεται μία πράξη *πρόσθεσης* μεταξύ ενός σημείου και ενός διανύσματος, που συμβολίζεται $\mathbf{p} + \vec{\mathbf{a}}$ και της οποίας το αποτέλεσμα είναι ένα σημείο, εφόσον ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

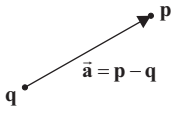
1. *Προσεταιρισμός* της πρόσθεσης: $(\mathbf{p} + \vec{\mathbf{a}}) + \vec{\mathbf{b}} = \mathbf{p} + (\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})$ για κάθε $\mathbf{p} \in S$ και $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in V$.

2. Το $\vec{\mathbf{0}}$ είναι το *ουδέτερο (μηδενικό) στοιχείο* για την πρόσθεση: $\mathbf{p} + \vec{\mathbf{0}} = \mathbf{p}$ για κάθε $\mathbf{p} \in S$.

3. Για κάθε $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S$, υπάρχει ένα μοναδικό διάνυσμα $\vec{\mathbf{a}} \in V$ τέτοιο ώστε $\mathbf{p} = \mathbf{q} + \vec{\mathbf{a}}$· αυτό γράφεται ισοδύναμα ως $\mathbf{p} - \mathbf{q} = \vec{\mathbf{a}}$ και συχνά αναφέρεται ως η *διαφορά* των $\mathbf{p}$ και $\mathbf{q}$.

Τα πιο οικεία παραδείγματα συσχετισμένων χώρων είναι οι Ευκλείδειοι χώροι $\mathbb{E}^2$ και $\mathbb{E}^3$ των διδιάστατων σημείων του επιπέδου και των τριδιάστατων σημείων του χώρου, αντίστοιχα.

Αυτός ο ορισμός είναι συνεπής με τη συνήθη αντίληψη της συσχέτισης μεταξύ σημείων και διανυσμάτων. Η πρόσθεση σημείου και διανύσματος υλοποιείται με την εφαρμογή του διανύσματος στο σημείο και παράγει το σημείο στο άλλο άκρο του διανύσματος. Αντίστροφα, η διαφορά δύο σημείων αντιστοιχεί στο διάνυσμα μεταξύ τους (συγκεκριμένα, $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ είναι το διάνυσμα από το $\mathbf{q}$ προς το $\mathbf{p}$, δείτε το Σχήμα Α.3). Δεν είναι δυνατό να προστεθούν μεταξύ τους σημεία καθώς αυτή η πράξη δεν έχει νόημα. Γενικά τα σημεία αντιπροσωπεύουν θέση ενώ τα διανύσματα αντιπροσωπεύουν κατεύθυνση και μέγεθος αλλά δεν είναι εφαρμοσμένα σε συγκεκριμένο σημείο.



Σχήμα Α.3: *Πράξεις σε συσχετισμένο χώρο.*

Α.2.1 Συστήματα συντεταγμένων

Ας θεωρήσουμε ένα σταθερό σημείο $\mathbf{o}$ ενός συσχετισμένου χώρου S και μία βάση $(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{b}}_n)$ του συνδεδεμένου διανυσματικού χώρου V. Τότε το $(\mathbf{o}; \vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{b}}_n)$ αποτελεί ένα *(συσχετισμένο) σύστημα συντεταγμένων* του S. Το σημείο $\mathbf{o}$ καλείται το *κέντρο* του συστήματος συντεταγμένων και τα $\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{b}}_n$ ορίζουν τους *άξονες συντεταγμένων*. Η διάσταση του διανυσματικού χώρου V καλείται επίσης *διάσταση* του συσχετισμένου χώρου S. Διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων μπορούν να κατασκευαστούν για τον ίδιο συσχετισμένο χώρο αλλάζοντας το κέντρο των αξόνων, τη βάση, ή και τα δύο.

Χρησιμοποιώντας ένα σύστημα συντεταγμένων ενός συσχετισμένου χώρου, είναι δυνατό να οριστούν συντεταγμένες για τα σημεία του χώρου (θυμηθείτε ότι συντεταγμένες είχαν ορισθεί μόνο για διανύσματα προηγουμένως). Συγκεκριμένα, δεδομένου ενός σημείου $\mathbf{p} \in S$ τέτοιου ώστε

$$\mathbf{p} - \mathbf{o} = \lambda_1 \vec{\mathbf{b}}_1 + \lambda_2 \vec{\mathbf{b}}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{\mathbf{b}}_n,$$

οι συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ καλούνται *συντεταγμένες* του $\mathbf{p}$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $(\mathbf{o}; \vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{b}}_n)$.

Καθώς οι συντεταγμένες ενός σημείου $\mathbf{p}$ είναι οι ίδιες με αυτές του διανύσματος $\mathbf{p} - \mathbf{o}$ από το κέντρο των αξόνων $\mathbf{o}$ μέχρι το $\mathbf{p}$, είναι σύνηθες να ταυτίζονται αυτά τα δύο στοιχεία. Λόγω αυτής της ταύτισης, είναι δυνατό να εμφανιστούν κάποιες μη έγκυρες πράξεις, όπως ο πολλαπλασιασμός σημείου με βαθμωτό (ο οποίος στην πραγματικότητα είναι ένας πολλαπλασιασμός του αντίστοιχου διανύσματος από το κέντρο των αξόνων· δείτε για παράδειγμα τον μετασχηματισμό αλλαγής κλίμακας στο Κεφάλαιο 3) ή η πρόσθεση δύο σημείων (η οποία είναι στην πραγματικότητα η πρόσθεση των αντίστοιχων διανυσμάτων). Παρ' όλα αυτά, τέτοιες πρακτικές δεν ενθαρρύνονται και η διάκριση μεταξύ σημείων και διανυσμάτων, αναλόγως αν αντιπροσωπεύεται θέση ή κατεύθυνση, πρέπει να τηρείται.

Στην περίπτωση των Ευκλειδείων χώρων δύο και τριών διαστάσεων, $\mathbb{E}^2$ και $\mathbb{E}^3$, το κέντρο που συνήθως συνοδεύει τις γνωστές βάσεις είναι το $\mathbf{o} = [0, 0, 0]^{\mathrm{T}}$.

Ο *προσανατολισμός* του συστήματος συντεταγμένων είναι σημαντικός στα γραφικά. Οπτικά, για το $\mathbb{E}^2$ ένα σύστημα συντεταγμένων μπορεί να είναι είτε *αριστερόστροφο* (η συνηθέστερη σύμβαση) είτε *δεξιόστροφο*, όπως καθορίζεται από την κατεύθυνση που πρέπει να στραφεί ο πρώτος άξονας συντεταγμένων ώστε να συμπέσει με τον δεύτερο. Παρομοίως, για τον $\mathbb{E}^3$ ένα σύστημα συντεταγμένων μπορεί να είναι είτε *δεξιόστροφο* (η συνήθης σύμβαση) είτε *αριστερόστροφο* (Σχήμα 3.1). Επομένως φαίνεται ότι ο προσανατολισμός ενός συστήματος συντεταγμένων εξαρτάται από τη σειρά των διανυσμάτων της βάσης. Γενικά, για ένα συσχετισμένο χώρο διάστασης n, δύο συστήματα συντεταγμένων που χρησιμοποιούν διαφορετικές βάσεις έχουν όμοιο προσανατολισμό αν οι ορίζουσες των $(n \times n)$ πινάκων που σχηματίζονται από τις συντεταγμένες των διανυσμάτων των δύο βάσεων έχουν το ίδιο πρόσημο.

B

Στοιχεία διαφορικής γεωμετρίας

Η διαφορική γεωμετρία —όπως υποδηλώνει το όνομά της— μελετάει τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων χρησιμοποιώντας διαφορικό λογισμό. Έμφαση δίνεται σε τοπικά χαρακτηριστικά όπως η καμπυλότητα. Σε αυτό το παράρτημα παρουσιάζουμε τις θεμελιώδεις έννοιες σχετικά με καμπύλες και επιφάνειες· πληρέστερες παρουσιάσεις του πεδίου δίνονται σε εξειδικευμένα συγγράμματα όπως τα [O'Ne66, Lips74, dC76, Opre97, Patr02].

B.1 Καμπύλες

B.1.1 Βασικοί ορισμοί

Μία *καμπύλη* στην παραμετρική της αναπαράσταση είναι μία διαφορίσιμη απεικόνιση από ένα διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}^3$· επομένως μία καμπύλη μπορεί να γραφεί ως

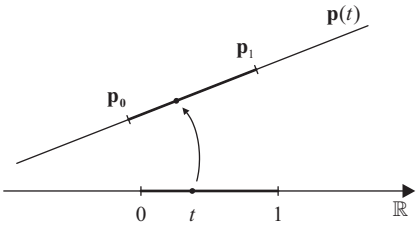
$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad t \in I, \tag{B.1}$$

όπου οι $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του t και καλούνται *συνιστώσες συναρτήσεις* της $\mathbf{X}$. Αν μία από τις συνιστώσες συναρτήσεις, για παράδειγμα η $z(t)$, είναι παντού σταθερή, τότε η καμπύλη είναι μία επίπεδη καμπύλη. Το διάστημα I μπορεί να είναι οποιουδήποτε τύπου: κλειστό, ημιανοικτό, ανοικτό, πεπερασμένο ή άπειρο.

Για παράδειγμα, η εξίσωση μίας ευθείας μεταξύ των σημείων $\mathbf{p}_0$ και $\mathbf{p}_1$ είναι

$$\mathbf{X}_{\text{line}}(t) = (1-t)\,\mathbf{p}_0 + t\,\mathbf{p}_1\,, \quad t \in (-\infty, +\infty). \tag{B.2}$$

Αν $t \in [0, +\infty)$ τότε η $\mathbf{X}_{\text{line}}(t)$ αντιπροσωπεύει την ακτίνα από το $\mathbf{p}_0$ προς το $\mathbf{p}_1$, ενώ αν $t \in [0, 1]$ τότε η $\mathbf{X}_{\text{line}}(t)$ αντιπροσωπεύει το ευθύγραμμο τμήμα από το $\mathbf{p}_0$ ως το $\mathbf{p}_1$



Σχήμα Β.1: *Παραμετρική εξίσωση ευθυγράμμου τμήματος.*

(Σχήμα Β.1).[1]

Μία φυσική ερμηνεία του παραπάνω ορισμού μίας καμπύλης είναι να θεωρήσουμε ότι η παράμετρος t αντιπροσωπεύει χρόνο, οπότε $\mathbf{X}(t)$ είναι η θέση ενός σωματιδίου που κινείται πάνω στην καμπύλη τη χρονική στιγμή t. Με αυτή την ερμηνεία, το *εφαπτόμενο διάνυσμα* της καμπύλης στη θέση t,

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} \tag{Β.3}$$

δίνει την ταχύτητα του σωματιδίου τη στιγμή t· έτσι αυτό το διάνυσμα καλείται επίσης *διάνυσμα ταχύτητας* της $\mathbf{X}$ στο σημείο $\mathbf{X}(t)$. Μία καμπύλη είναι *κανονική* αν το εφαπτόμενο διάνυσμα αυτής είναι μη μηδενικό παντού,

$$\mathbf{X}'(t) \neq \vec{\mathbf{0}} \text{ για κάθε } t \in I.$$

Μία τέτοια καμπύλη δεν έχει αιχμηρά σημεία ή γωνίες (*ιδιάζοντα σημεία*), τα οποία εμφανίζονται σε παραμετρικά σημεία t_0 στα οποία $\mathbf{X}'(t_0) = \vec{\mathbf{0}}$. Στα επόμενα θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με κανονικές καμπύλες.

Το διάστημα που διανύεται κατά μήκος της καμπύλης μπορεί να υπολογιστεί ολοκληρώνοντας την ταχύτητα· επομένως, το *μήκος τόξου* μεταξύ δύο σημείων $\mathbf{X}(a)$ και $\mathbf{X}(b)$ μίας καμπύλης $\mathbf{X}$ μπορεί να υπολογιστεί ως

$$L = \int_a^b |\mathbf{X}'(t)| dt. \tag{Β.4}$$

Β.1.2 Παραμετροποιήσεις καμπύλης

Η πορεία μίας καμπύλης μπορεί να διανυθεί με διαφορετικές ταχύτητες· αυτές αντιστοιχούν σε διαφορετικές παραμετροποιήσεις της καμπύλης. Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε μία διαφορίσιμη συνάρτηση $t = t(s)$ από ένα διάστημα J στο I· τότε

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{X}\big(t(s)\big), \quad s \in J \tag{Β.5}$$

[1] Σημειώνεται ότι, σύμφωνα με τις πράξεις που ορίζονται στο Παράρτημα Α, η εξίσωση της ευθείας θα έπρεπε να γραφεί πιο σωστά ως $\mathbf{X}_{\text{line}}(t) = \mathbf{p}_0 + t(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$.

είναι μία *αναπαραμετροποίηση* της καμπύλης $\mathbf{X}$. Αν η συνάρτηση $t(s)$ είναι αντιστρέψιμη, τότε οι δύο παραμετροποιήσεις $\mathbf{X}(t)$ και $\mathbf{Y}(s)$ της καμπύλης είναι *ισοδύναμες*. Ως προς το διάνυσμα ταχύτητας μίας αναπαραμετροποιημένης καμπύλης, ο κανόνας της αλυσίδας δίνει

$$\mathbf{Y}'(s) = t'(s)\,\mathbf{X}'\big(t(s)\big). \tag{Β.6}$$

Ως παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη γραμμική απεικόνιση ενός διαστήματος $J = [a, b]$ στο $I = [0, 1]$,

$$t = t(s) = \frac{s-a}{b-a} \quad \Longleftrightarrow \quad s = s(t) = a + (b-a)t.$$

Μία αναπαραμετροποίηση του ευθύγραμμου τμήματος μεταξύ δύο σημείων $\mathbf{p}_0$ και $\mathbf{p}_1$ ώστε η παράμετρος s να είναι στο J είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{\text{λινε}}(s) = \mathbf{X}_{\text{λινε}}\big(t(s)\big) &= \left(1 - \frac{s-a}{b-a}\right)\mathbf{p}_0 + \frac{s-a}{b-a}\mathbf{p}_1 \\ &= \frac{b-s}{b-a}\mathbf{p}_0 + \frac{s-a}{b-a}\mathbf{p}_1\,, \quad s \in [a, b]. \end{aligned} \tag{Β.7}$$

Ένα ακόμη παράδειγμα αναπαραμετροποίησης δίνεται στην Ενότητα 7.2.5.

Παραμετροποίηση μήκους τόξου

Ας θεωρήσουμε τώρα μία καμπύλη $\mathbf{X}(t),\ t \in I$ και τη συνάρτηση «μήκους τόξου»

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{X}'(u)|du, \tag{Β.8}$$

για κάποιο τυχαίο $a \in I$. Η αντίστροφη αυτής της συνάρτησης έχει τη μορφή $t = t(s)$ και μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει πάντοτε. Μπορεί επίσης να δειχθεί ότι η αναπαραμετροποίηση $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{X}\big(t(s)\big)$ της αρχικής καμπύλης για αυτή την $t = t(s)$ έχει παντού μοναδιαία ταχύτητα, $|\mathbf{Y}'(s)| = 1$· επομένως στην $\mathbf{Y}(s)$ η παράμετρος (σε αυτή την περίπτωση s) μπορεί να θεωρηθεί ως το συνολικό διάστημα που έχει διανυθεί κατά μήκος της καμπύλης. Αυτή η παραμετροποίηση ονομάζεται, αναμενόμενα, *παραμετροποίηση μήκους τόξου*.

Η παραμετροποίηση μήκους τόξου έχει μεγάλο θεωρητικό ενδιαφέρον καθώς απλοποιεί τη μελέτη των καμπυλών. Έχει επίσης μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον, καθώς μας επιτρέπει να απαντήσουμε στο ερώτημα «σε ποιο σημείο $\mathbf{Y}(s)$ πάνω στην καμπύλη βρισκόμαστε έχοντας διανύσει απόσταση s από την αρχή της;», αντί για το «σε ποιο σημείο $\mathbf{X}(t)$ βρισκόμαστε τη στιγμή t;». Δυστυχώς ο υπολογισμός της αντίστροφης της συνάρτησης μήκους τόξου δεν είναι απλός, παρά μόνο για μία πολύ περιορισμένη τάξη καμπυλών, και μάλιστα είναι αδύνατος για πάρα πολλές καμπύλες, ακόμη και πολύ κοινές όπως η έλλειψη.

Β.1.3 Καμπυλότητα, στρέψη, και το πλαίσιο Frenet

Ένας από τους στόχους της διαφορικής γεωμετρίας είναι να μελετήσει την τοπική συμπεριφορά των καμπυλών και των επιφανειών. Ως προς τις καμπύλες, το σχήμα τους καθορίζεται από δύο ποσότητες, την καμπυλότητα και την στρέψη. Για απλοποίηση της παρουσίασης, θα αναπτύξουμε αυτές τις έννοιες αρχικά για καμπύλες παραμετροποιημένες ως προς μήκος τόξου, και κατόπιν θα δώσουμε τις αντίστοιχες σχέσεις για γενικές καμπύλες.

Ας θεωρήσουμε μία καμπύλη $\mathbf{Y}(s)$ παραμετροποιημένη ως προς μήκος τόξου· για αυτή την καμπύλη ισχύει $|\mathbf{Y}'(s)| = 1$ παντού. Για οποιοδήποτε σημείο $\mathbf{Y}(s)$ στην καμπύλη ορίζουμε τα ακόλουθα τρία μοναδιαία διανύσματα:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{t}}(s) &= \mathbf{Y}'(s), \\ \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}(s) &= \frac{\hat{\mathbf{t}}'(s)}{|\hat{\mathbf{t}}'(s)|}, \\ \hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{b}}(s) &= \hat{\mathbf{t}}(s) \times \hat{\mathbf{n}}(s). \end{aligned} \tag{Β.9}$$

Σχετικά με αυτά τα διανύσματα,

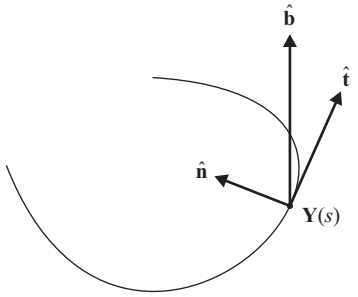
- το $\hat{\mathbf{t}}$ είναι το *εφαπτόμενο διάνυσμα* που αναφέρθηκε παραπάνω.
- το $\hat{\mathbf{n}}$ καλείται *κύριο κανονικό διάνυσμα* και μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι κάθετο στο $\hat{\mathbf{t}}$: ας θυμηθούμε ότι $|\mathbf{Y}'(s)| = 1$, επομένως $1 = |\hat{\mathbf{t}}| = \sqrt{\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{t}}}$ και άρα $\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{t}} = 1$. Τότε $(\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{t}})' = 0$ που δίνει $2(\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{t}}') = 0$, άρα $\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{t}}' = 0$ που σημαίνει ότι το $\hat{\mathbf{t}}'$ (και επίσης το $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{t}}'/|\hat{\mathbf{t}}'|$) είναι κάθετο στο $\hat{\mathbf{t}}$.
- το $\hat{\mathbf{b}}$ καλείται *δικάθετο διάνυσμα* και είναι εξ' ορισμού κάθετο τόσο στο $\hat{\mathbf{t}}$ όσο και στο $\hat{\mathbf{n}}$.

Αυτά τα τρία διανύσματα ορίζουν, για κάθε σημείο $\mathbf{Y}(s)$ της καμπύλης, ένα τοπικό ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων το οποίο καλείται *πλαίσιο Frenet* (Σχήμα Β.2). Ο προσανατολισμός του πλαισίου Frenet αλλάζει καθώς η αρχή του $\mathbf{Y}(s)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης· αυτή η αλλαγή προσανατολισμού είναι χρήσιμη στη μελέτη του σχήματος της καμπύλης.

Η καμπυλότητα και η στρέψη ορίζονται με βάση τα μοναδιαία διανύσματα του πλαισίου Frenet ως εξής:

$$\begin{aligned} \kappa = \kappa(s) &= |\hat{\mathbf{t}}'(s)|, \\ \tau = \tau(s) &= -\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{b}}. \end{aligned} \tag{Β.10}$$

- κ είναι η *καμπυλότητα*, η οποία μετρά κατά πόσον η καμπύλη αποκλίνει από την ευθεία στην παραμετρική θέση s. Για να εξηγηθεί αυτό το γεγονός, θυμίζουμε ότι η παράγωγος $\hat{\mathbf{t}}'(s)$ μετρά το ρυθμό αλλαγής του εφαπτόμενου διανύσματος $\hat{\mathbf{t}}$ κατά μήκος της καμπύλης, όμως καθώς το $\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{Y}'$ έχει μοναδιαίο μήκος παντού κατά μήκος της καμπύλης, το $\hat{\mathbf{t}}'$ μετρά μόνο το ρυθμό αλλαγής της κατεύθυνσής



Σχήμα B.2: *Το πλαίσιο Frenet μίας παραμετρικής καμπύλης*

του· επομένως, το $\kappa = |\hat{\mathbf{t}}'(s)|$ παρέχει μία αριθμητική εκτίμηση της καμπυλότητας.

Είναι προφανές ότι $\kappa(s) \geq 0$. Σημειώνουμε ότι αν $\kappa(s) = 0$ για όλα τα s τότε η καμπύλη είναι μία ευθεία γραμμή και αντίστροφα. Επιπλέον, όσο μεγαλύτερη τιμή έχει το $\kappa(s)$, τόσο πιο απότομα στρίβει η καμπύλη στο $\mathbf{Y}(s)$.

Χρησιμοποιώντας την καμπυλότητα, μπορεί να οριστεί ο *εγγύτατος κύκλος* της καμπύλης στο σημείο $\mathbf{Y}(s)$. Πρόκειται για έναν κύκλο που έχει ακτίνα $\rho(s) = 1/k(s)$ (την *ακτίνα καμπυλότητας*) και κέντρο $\mathbf{c}(s) = \mathbf{Y}(s) + \rho(s)\hat{\mathbf{n}}(s)$ (το *κέντρο καμπυλότητας*). Ο εγγύτατος κύκλος εφάπτεται στην καμπύλη στο $\mathbf{Y}(s)$ και οι πρώτες και δεύτερες παράγωγοί τους είναι ίσες.

- τ είναι η *στρέψη*, η οποία μετρά κατά πόσον η καμπύλη αποκλίνει από το να είναι επίπεδη στην παραμετρική θέση s· το επίπεδο αναφοράς είναι αυτό που ορίζεται από το σημείο $\mathbf{Y}(s)$ και τα διανύσματα $\hat{\mathbf{t}}(s)$ και $\hat{\mathbf{n}}(s)$ και το οποίο καλείται *εγγύτατο επίπεδο*. Δυστυχώς δεν είναι δυνατόν να παρουσιάσουμε μία διαισθητική εξήγηση της στρέψης στα στενά πλαίσια αυτού του παραρτήματος· σημειώνουμε ότι όπως η καμπυλότητα παρέχει ένα μέτρο της αλλαγής προσανατολισμού του εφαπτόμενου διανύσματος $\hat{\mathbf{t}}$, η στρέψη παρέχει ένα μέτρο της αλλαγής προσανατολισμού του δικάθετου διανύσματος $\hat{\mathbf{b}}$ καθώς το πλαίσιο Frenet κινείται κατά μήκος της καμπύλης.

  Η στρέψη μπορεί να είναι θετική (για δεξιόστροφες καμπύλες) ή αρνητική (για αριστερόστροφες καμπύλες). Αν $\tau(s) = 0$ τότε η καμπύλη είναι επίπεδη και αντίστροφα.

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι η καμπυλότητα και η στρέψη μίας καμπύλης δεν εξαρτώνται από την παραμετροποίησή της, και επομένως χαρακτηρίζουν την ίδια την καμπύλη· είναι *εγγενείς ιδιότητες* της καμπύλης. Στην πραγματικότητα αν μία καμπύλη $\mathbf{Y}(s)$ έχει καμπυλότητα $\kappa(s)$ και στρέψη $\tau(s)$, τότε οποιαδήποτε άλλη καμπύλη με την ίδια καμπυλότητα και στρέψη διαφέρει από την $\mathbf{Y}(s)$ πιθανώς μόνο ως προς την απόλυτη θέση στο χώρο και τον προσανατολισμό, ενώ το σχήμα τους ταυτίζεται.

Το τελευταίο εργαλείο μας για τη μελέτη του σχήματος μίας καμπύλης παρέχεται από τις παραγώγους των $\hat{\mathbf{t}}$, $\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{b}}$, οι οποίες εκφράζουν την αλλαγή προσανατολισμού

του πλαισίου Frenet καθώς κινείται κατά μήκος της καμπύλης. Δίνονται από τις *σχέσεις Frenet-Serret* (παραλείπουμε την παράμετρο s):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}}' &= +\kappa\hat{\mathbf{n}}, \\ \hat{\mathbf{n}}' &= -\kappa\hat{\mathbf{t}} + \tau\hat{\mathbf{b}}, \\ \hat{\mathbf{b}}' &= -\tau\hat{\mathbf{n}}. \end{aligned} \tag{B.11}$$

Όλες οι σχέσεις που δόθηκαν παραπάνω για μία καμπύλη $\mathbf{Y}(s)$ παραμετροποιημένη κατά μήκος τόξου μπορούν να γενικευτούν για μία κανονική καμπύλη $\mathbf{X}(t)$ οποιασδήποτε παραμετροποίησης. Το πλαίσιο Frenet ορίζεται ως

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{t}}(t) &= \frac{\mathbf{X}'(t)}{|\mathbf{X}'(t)|}, \\ \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}(t) &= \hat{\mathbf{b}}(t) \times \hat{\mathbf{t}}(t), \\ \hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{b}}(t) &= \frac{\mathbf{X}'(t) \times \mathbf{X}''(t)}{|\mathbf{X}'(t) \times \mathbf{X}''(t)|}. \end{aligned} \tag{B.12}$$

Η καμπυλότητα και η στρέψη ορίζονται ως

$$\begin{aligned} \kappa = \kappa(t) &= \frac{|\mathbf{X}'(t) \times \mathbf{X}''(t)|}{|\mathbf{X}'(t)|^3}, \\ \tau = \tau(t) &= \frac{\det[\mathbf{X}'(t), \mathbf{X}''(t), \mathbf{X}'''(t)]}{|\mathbf{X}'(t) \times \mathbf{X}''(t)|^2}, \end{aligned} \tag{B.13}$$

όπου $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ είναι η ορίζουσα του πίνακα με στήλες $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Τέλος, οι παράγωγοι του πλαισίου Frenet είναι (παραλείπουμε την παράμετρο t)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}}' &= +\kappa v\hat{\mathbf{n}}, \\ \hat{\mathbf{n}}' &= -\kappa v\hat{\mathbf{t}} + \tau v\hat{\mathbf{b}}, \\ \hat{\mathbf{b}}' &= -\tau v\hat{\mathbf{n}}, \end{aligned} \tag{B.14}$$

όπου $v(t) = s'(t) = |\mathbf{X}'(t)|$ είναι η συνάρτηση ταχύτητας της καμπύλης (βλ. σχέση (B.8)).

Β.2 Επιφάνειες

Β.2.1 Βασικοί ορισμοί

Μία *επιφάνεια* στην παραμετρική της αναπαράσταση είναι μία διαφορίσιμη απεικόνιση από μία περιοχή $\mathbf{I} \subseteq \mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^3$· επομένως μία επιφάνεια μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{X}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}, \quad (u, v) \in \mathbf{I}, \tag{B.15}$$

όπου οι $x(u,v)$, $y(u,v)$, και $z(u,v)$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις των u και v, και καλούνται *συνιστώσες συναρτήσεις* της $\mathbf{X}$. Η περιοχή $\mathbf{I}$ μπορεί να είναι οποιουδήποτε τύπου: κλειστή, ημιανοικτή, ανοικτή, πεπερασμένη, ή άπειρη.

Κρατώντας σταθερή μία από τις παραμέτρους και μεταβάλλοντας την άλλη λαμβάνουμε *ισοπαραμετρικές καμπύλες* πάνω στην επιφάνεια. Πιο συγκεκριμένα, αν σταθεροποιήσουμε την v στην τιμή $v = v_0$ λαμβάνουμε την *παραμετρική καμπύλη ως προς* u, $\mathbf{X}(u, v_0)\cdot$ αντίστοιχα, αν σταθεροποιήσουμε την u στην τιμή $u = u_0$ λαμβάνουμε την *παραμετρική καμπύλη ως προς* v, $\mathbf{X}(u_0, v)$ (βλ. Σχήμα 7.16).

Οι ισοπαραμετρικές καμπύλες μας επιτρέπουν να αποδώσουμε ένα φυσικό νόημα στην παραμετρική εξίσωση μίας επιφάνειας: ξεκινώντας, για παράδειγμα, με μία παραμετρική καμπύλη ως προς u και επιτρέποντας σε κάθε σημείο της να διαγράψει μία παραμετρική καμπύλη ως προς v, παράγεται η επιφάνεια $\mathbf{X}(u,v)\cdot$ το αποτέλεσμα είναι ταυτόσημο αν αντιστραφούν οι ρόλοι των u και v.

Καμπύλες μπορούν να κατασκευαστούν πάνω σε μία επιφάνεια με πιο γενικό τρόπο, ως εξής: ας θεωρήσουμε μία επιφάνεια $\mathbf{X}(u,v)$, $(u,v) \in \mathbf{I} \subseteq \mathbb{R}^2$, και μία (κανονική) παραμετρική καμπύλη $\mathbf{B}(t)$ της οποίας η εικόνα βρίσκεται στον παραμετρικό χώρο $\mathbf{I}$ της επιφάνειας, $\mathbf{B}(t) = \big[u(t)\ v(t)\big]^{\mathrm{T}}\cdot$ τότε η σύνθεση $\mathbf{C}(t) = \mathbf{X}\big(\mathbf{B}(t)\big) = \mathbf{X}\big(u(t), v(t)\big)$ είναι μία καμπύλη που βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια $\mathbf{X}$, μία *επιφανειακή καμπύλη* της $\mathbf{X}$.

Τα *εφαπτόμενα διανύσματα* (που καλούνται επίσης *διανύσματα ταχύτητας*) πάνω σε μία επιφάνεια ορίζονται παραγωγίζοντας επιφανειακές καμπύλες της. Τα εφαπτόμενα διανύσματα των ισοπαραμετρικών καμπυλών υπολογίζονται εύκολα, με μερική παραγώγιση της επιφάνειας ως προς καθεμία από τις παραμέτρους της u και v. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο συμβολισμό για τις μερικές παραγώγους της επιφάνειας $\mathbf{X}(u,v)$:

$$\mathbf{X}_u = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u}, \quad \mathbf{X}_v = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v}, \quad \mathbf{X}_{uu} = \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial u^2}, \quad \mathbf{X}_{uv} = \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial u\, \partial v}, \quad \text{κ.λπ.} \tag{Β.16}$$

Για μία τυχαία επιφανειακή καμπύλη $\mathbf{C}(t) = \mathbf{X}\big(u(t), v(t)\big)$, το εφαπτόμενο διάνυσμα είναι, χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας,

$$\mathbf{C}'(t) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v}\frac{dv}{dt} = \mathbf{X}_u\, u'(t) + \mathbf{X}_v\, v'(t) \tag{Β.17}$$

όπου οι μερικές παράγωγοι $\mathbf{X}_u$ και $\mathbf{X}_v$ υπολογίζονται στο σημείο $\big(u(t), v(t)\big)$.

Μία επιφάνεια είναι *κανονική* αν

$$\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v \neq \vec{\mathbf{0}} \text{ για κάθε } (u,v) \in \mathbf{I}. \tag{Β.18}$$

Αυτή η σχέση υποδηλώνει ότι όλες οι ισοπαραμετρικές καμπύλες της επιφάνειας είναι κανονικές καμπύλες και δεν εφάπτονται πουθενά μεταξύ τους. Μία τέτοια επιφάνεια δεν έχει πτυχώσεις (*ιδιάζοντα σημεία*). Παρακάτω θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με κανονικές επιφάνειες.

Οποιοδήποτε σημείο $\mathbf{X}(u,v)$ πάνω στην επιφάνεια μαζί με τα δύο εφαπτόμενα διανύσματα $\mathbf{X}_u(u,v)$ και $\mathbf{X}_v(u,v)$ ορίζει το *εφαπτόμενο επίπεδο* στην επιφάνεια σε αυτό το σημείο· στην πραγματικότητα, το εφαπτόμενο διάνυσμα *οποιασδήποτε* επιφανειακής καμπύλης που διέρχεται από το $\mathbf{X}(u,v)$ βρίσκεται πάνω σε αυτό το εφαπτόμενο επίπεδο. Το (μοναδιαίο) κανονικό διάνυσμα αυτού του επιπέδου,

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}(u,v) = \frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|}, \tag{Β.19}$$

είναι το *κανονικό διάνυσμα* της επιφάνειας στο σημείο $\mathbf{X}(u,v)$· η σχέση (Β.18) συνεπάγεται ότι το κανονικό διάνυσμα υπάρχει παντού σε μία κανονική επιφάνεια.

Τα τρία διανύσματα $\mathbf{X}_u(u,v)$, $\mathbf{X}_v(u,v)$, και $\hat{\mathbf{n}}(u,v)$ ορίζουν ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων στο σημείο $\mathbf{X}(u,v)$. Αυτό το σύστημα συντεταγμένων είναι ανάλογο του πλαισίου Frenet το οποίο ορίζεται στα σημεία μίας καμπύλης· ωστόσο πρέπει να σημειωθεί ότι αντίθετα από το πλαίσιο Frenet αυτό το σύστημα συντεταγμένων δεν είναι ορθοκανονικό και εξαρτάται από την παραμετροποίηση της καμπύλης.

Β.2.2 Θεμελιώδεις συντελεστές

Στην επόμενη ενότητα θα μελετήσουμε τις τοπικές ιδιότητες των επιφανειών, αναλύοντας διάφορα μέτρα της καμπυλότητάς της. Θα χρησιμοποιηθούν οι ακόλουθες ποσότητες:

- οι *θεμελιώδεις συντελεστές πρώτης τάξης*,

$$\begin{aligned} E = E(u,v) &= \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u, \\ F = F(u,v) &= \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v, \\ G = G(u,v) &= \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_v, \end{aligned} \tag{Β.20}$$

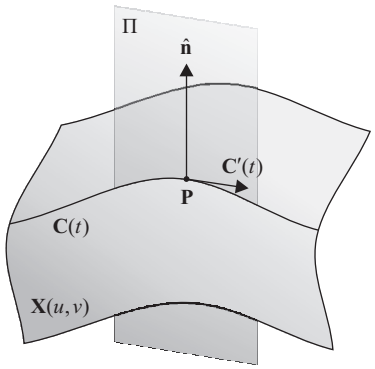
  και

- οι *θεμελιώδεις συντελεστές δεύτερης τάξης*,

$$\begin{aligned} L = L(u,v) &= -\mathbf{X}_u \cdot \hat{\mathbf{n}}_u &&= \mathbf{X}_{uu} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \\ M = M(u,v) &= -\tfrac{1}{2}(\mathbf{X}_u \cdot \hat{\mathbf{n}}_u + \mathbf{X}_v \cdot \hat{\mathbf{n}}_v) &&= \mathbf{X}_{uv} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \\ N = N(u,v) &= -\mathbf{X}_v \cdot \hat{\mathbf{n}}_v &&= \mathbf{X}_{vv} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \end{aligned} \tag{Β.21}$$

  όπου $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το κανονικό διάνυσμα της επιφάνειας στο σημείο $\mathbf{X}(u,v)$ που έχει ορισθεί στη σχέση (Β.19). Σημειώνουμε ότι οι τελευταίες ισότητες στις σχέσεις (Β.21) μπορούν να επαληθευτούν εύκολα καθώς το $\hat{\mathbf{n}}$ είναι κάθετο στα $\mathbf{X}_u$ και $\mathbf{X}_v$ και παραγωγίζοντας τις σχέσεις $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{X}_u = 0$ και $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{X}_v = 0$.

Αυτές οι ποσότητες καλούνται έτσι καθώς εμφανίζονται στους ορισμούς της *πρώτης* και της *δεύτερης θεμελιώδους μορφής*, αντίστοιχα. Αυτές είναι δύο σημαντικοί τανυστές που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη των τοπικών ιδιοτήτων μίας επιφάνειας· δεν θα επεκταθούμε στις θεμελιώδεις μορφές σε αυτό το παράρτημα.



Σχήμα Β.3: *Κανονική τομή επιφάνειας.*

Εκτός από τις σχέσεις για τις καμπυλότητες της επιφάνειας που θα παρουσιάσουμε παρακάτω, και άλλοι σημαντικοί υπολογισμοί στην επιφάνεια μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια των θεμελιωδών συντελεστών. Αν δίνεται μία επιφανειακή καμπύλη $\mathbf{C}(t) = \mathbf{X}\big(u(t), v(t)\big)$, το *μήκος τόξου* αυτής μεταξύ δύο παραμετρικών σημείων a και b δίνεται από τη σχέση (βλ. τις (Β.4) και (Β.17))

$$s = \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}\, dt. \tag{Β.22}$$

Επίσης, το *εμβαδό* της επιφάνειας που αντιστοιχεί σε μία παραμετρική περιοχή $\mathbf{U}$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$A = \iint_{\mathbf{U}} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \tag{Β.23}$$

Β.2.3 Καμπυλότητες επιφάνειας

Ας θεωρήσουμε ένα σημείο $\mathbf{P} = \mathbf{X}(u, v)$ πάνω σε μία επιφάνεια, το κάθετο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}(u, v)$ σε αυτό το σημείο, και ένα επίπεδο Π που περιέχει τόσο τα $\mathbf{P}$ και $\hat{\mathbf{n}}$ (Σχήμα Β.3). Η τομή του επιπέδου Π και της επιφάνειας είναι μία επιφανειακή καμπύλη $\mathbf{C}(t) = \mathbf{X}\big(u(t), v(t)\big)$. Η καμπυλότητα της $\mathbf{C}(t)$ στο σημείο $\mathbf{X}(u, v)$ είναι η *κανονική καμπυλότητα* κ_n της επιφάνειας στο $\mathbf{X}(u, v)$ κατά τη διεύθυνση $\mathbf{C}'(t)$. Η κανονική καμπυλότητα μπορεί να εκφραστεί χρησιμοποιώντας τους θεμελιώδεις συντελεστές ως

$$\kappa_n = \frac{L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2}{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}. \tag{Β.24}$$

Είναι ευνόητο ότι η κανονική καμπυλότητα κ_n σε ένα σημείο εξαρτάται από τη διεύθυνση που επιλέγεται, και μεταβάλλεται περιοδικά καθώς το τέμνον επίπεδο Π στρέφεται γύρω από το $\hat{\mathbf{n}}$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η κ_n έχει το πολύ δύο ακρότατες τιμές, οι οποίες καλούνται *κύριες καμπυλότητες* κ_1 (η μέγιστη) και κ_2 (η ελάχιστη) της καμπύλης στο θεωρούμενο σημείο. Οι διευθύνσεις κατά τις οποίες συναντώνται οι κ_1 και κ_2 καλούνται (πρώτη και δεύτερη, αντίστοιχα) *κύριες διευθύνσεις καμπυλότητας*,

και είναι μεταξύ τους κάθετες.

Το γινόμενο των κύριων καμπυλοτήτων

$$K = \kappa_1 \kappa_2 \tag{Β.25}$$

καλείται *καμπυλότητα Gauss* της επιφάνειας στο σημείο $\mathbf{X}(u, v)$. Χρησιμοποιώντας τους θεμελιώδεις συντελεστές η καμπυλότητα Gauss μπορεί να εκφραστεί ως

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \tag{Β.26}$$

Ο μέσος όρος των κύριων καμπυλοτήτων

$$H = \tfrac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) \tag{Β.27}$$

καλείται *μέση καμπυλότητα* της επιφάνειας στο σημείο $\mathbf{X}(u, v)$. Μπορεί να εκφραστεί ως

$$H = \frac{1}{2}\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}. \tag{Β.28}$$

Χρησιμοποιώντας τις (Β.25) και (Β.27) οι δύο κύριες καμπυλότητες μπορούν να υπολογιστούν ως

$$\kappa_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \quad \text{και} \quad \kappa_2 = H - \sqrt{H^2 - K}. \tag{Β.29}$$

Η κανονική και οι κύριες καμπυλότητες συνδέονται με την *εξίσωση Euler*,

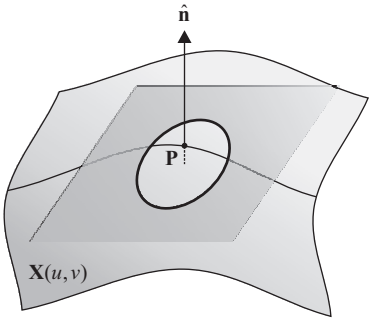
$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2 \phi + \kappa_2 \sin^2 \phi, \tag{Β.30}$$

όπου ϕ είναι η γωνία μεταξύ του τέμνοντος επιπέδου που θεωρείται για την κ_n και της πρώτης κύριας καμπυλότητας. Στην εξίσωση Euler, αν κάνουμε τις αντικαταστάσεις $\xi = \cos\phi/\sqrt{\kappa_n}$ και $\eta = \sin\phi/\sqrt{\kappa_n}$, λαμβάνουμε

$$1 = \kappa_1 \xi^2 + \kappa_2 \eta^2, \tag{Β.31}$$

που είναι η εξίσωση μίας κωνικής τομής, η οποία καλείται *ενδείκτρια του Dupin*. Μία προσέγγιση της ενδείκτριας του Dupin μπορεί να οπτικοποιηθεί ως η τομή της επιφάνειας με ένα επίπεδο παράλληλο στο εφαπτόμενο επίπεδο αυτής σε μία μικρή απόσταση ϵ κατά τη διεύθυνση της καθέτου στην επιφάνεια (Σχήμα Β.4). Το σχήμα της ενδείκτριας του Dupin εξαρτάται από τις τιμές των κ_1 και κ_2, και το σημείο της επιφάνειας χαρακτηρίζεται αντίστοιχα:

- αν οι κ_1 και κ_2 είναι ομόσημες ($K > 0$), η ενδείκτρια του Dupin είναι έλλειψη της οποίας οι άξονες αντιστοιχούν στις κύριες διευθύνσεις καμπυλότητας, και το σημείο της επιφάνειας καλείται *ελλειπτικό*·
- αν είναι ετερόσημες ($K < 0$), είναι υπερβολή της οποίας οι άξονες αντιστοιχούν στις κύριες διευθύνσεις καμπυλότητας, και το σημείο καλείται *υπερβολικό*·



Σχήμα B.4: *Προσέγγιση της ενδείκτριας του Dupin.*

- αν μία από τις κύριες καμπυλότητες είναι μηδενική ($K = 0$), η ενδείκτρια είναι ένα ζεύγος παράλληλων ευθειών, περίπτωση στην οποία η κύρια διεύθυνση που αντιστοιχεί στη μη μηδενική κύρια καμπυλότητα είναι κάθετη σε αυτές τις ευθείες και η άλλη είναι παράλληλη, και το σημείο καλείται *παραβολικό*·

- αν οι κύριες καμπυλότητες είναι ίσες, περίπτωση στην οποία οποιαδήποτε διεύθυνση είναι κύρια, τότε η ενδείκτρια είναι κύκλος και το σημείο καλείται *ομφαλικό*·

- τέλος, αν και οι δύο κύριες καμπυλότητες είναι μηδενικές ($K = 0$ επίσης), η ενδείκτρια του Dupin δεν ορίζεται και το σημείο είναι *επίπεδο*.

Ένα ακόμη μέτρο καμπυλότητας είναι η *απόλυτη καμπυλότητα*, που ορίζεται ως εξής:

$$\kappa_a = |\kappa_1| + |\kappa_2|. \tag{B.32}$$

Η τελευταία μορφή καμπυλότητας που θα εξετάσουμε είναι η *γεωδαιτική καμπυλότητα* μίας επιφανειακής καμπύλης. Αυτή είναι η ισοδύναμη για επιφανειακές καμπύλες της συνήθους καμπυλότητας που ορίζεται για απλές παραμετρικές καμπύλες: δεδομένης μίας παραμετρικής καμπύλης, η καμπυλότητά της σε ένα σημείο μετρά κατά πόσον η καμπύλη αποκλίνει από την ευθεία—που είναι η συντομότερη οδός μεταξύ δύο σημείων στο 2Δ ή 3Δ χώρο—στη γειτονιά αυτού του σημείου· αναλόγως, η γεωδαιτική καμπυλότητα σε ένα σημείο μίας επιφανειακής καμπύλης μετρά κατά πόσο η καμπύλη αποκλίνει από τη συντομότερη οδό *πάνω στην επιφάνεια* μεταξύ δύο (οσοδήποτε κοντινά) σημεία στη γειτονιά αυτού του σημείου.

Αν δίνεται μία επιφανειακή καμπύλη $\mathbf{C}(s) = \mathbf{X}\big(u(s), v(s)\big)$ *παραμετροποιημένη κατά μήκος τόξου*, η γεωδαιτική καμπυλότητα κ_g σε ένα σημείο δίνεται από τη σχέση

$$\kappa_g = \mathbf{C}' \times \mathbf{C}'' \cdot \hat{\mathbf{n}}, \tag{B.33}$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το κανονικό διάνυσμα της επιφάνειας στο σημείο αυτό. Χρησιμοποιώντας την (B.17) (αλλά παραγωγίζοντας ως προς s σε αυτή την περίπτωση), είναι δυνατό να

σχηματιστεί μία έκφραση για την κ_g που εμπλέκει τις παραγώγους της επιφάνειας $\mathbf{X}$:

$$\begin{aligned}\kappa_g = \big[\quad & (\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_{uu})(u')^3 \\ & + (2\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_{uv} + \mathbf{X}_v \times \mathbf{X}_{uu})(u')^2 v' \\ & + (\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_{vv} + 2\mathbf{X}_v \times \mathbf{X}_{uv}) u' (v')^2 \\ & + (\mathbf{X}_v \times \mathbf{X}_{vv})(v')^3 \\ & + (\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v)(u'v'' - u''v') \big] \cdot \hat{\mathbf{n}}\end{aligned} \tag{B.34}$$

Μία επιφανειακή καμπύλη της οποίας η γεωδαιτική καμπυλότητα είναι παντού μηδενική καλείται *γεωδαιτική καμπύλη* (ή απλώς *γεωδαιτική*) και αναπαριστά τη συντομότερη οδό πάνω στην επιφάνεια μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κοντινών σημείων. Για παράδειγμα, οι μεσημβρινοί μίας σφαίρας είναι γεωδαιτικές.

Γ

Έλεγχοι τομής

Αυτό το παράρτημα παρουσιάζει αλγορίθμους για τους ελέγχους τομής που συναντώνται στο βιβλίο. Πολύτιμες πηγές πληροφοριών σε αυτό το αντικείμενο είναι το περιοδικό *journal of graphics tools*, το ηλεκτρονικό ενημερωτικό δελτίο *Ray Tracing News* (`http://www.raytracingnews.org/`) καθώς και εξειδικευμένα βιβλία (π.χ. [Schn03, Eric05]).

Οι έλεγχοι τομής που θα εξετάσουμε είναι μεταξύ μίας ευθείας και ενός άλλου αντικειμένου. Αν δίνεται μία ευθεία μέσω δύο σημείων της $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, οι αλγόριθμοι που παρουσιάζονται παρακάτω χρησιμοποιούν την παραμετρική της εξίσωση,

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_1 + t\,(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)$$

και υπολογίζουν την τιμή της παραμέτρου t για το σημείο τομής. Σημειώνουμε ότι αυτή η εξίσωση αναπαριστά ολόκληρη την *κατευθυνόμενη ευθεία* μεταξύ αυτών των δύο σημείων αν $t \in \mathbb{R}$, την *ημιευθεία (ακτίνα)* από το $\mathbf{p}_1$ προς το $\mathbf{p}_2$ αν $t \in [0, +\infty)$, και το *ευθύγραμμο τμήμα* από το $\mathbf{p}_1$ ως το $\mathbf{p}_2$ αν $t \in [0, 1]$. Επομένως, ανάλογα με το αν χρησιμοποιείται ακτίνα ή ευθύγραμμο τμήμα, η υπολογιζόμενη τιμή της παραμέτρου πρέπει να ελέγχεται ως προς το αν ανήκει στο κατάλληλο διάστημα· διαφορετικά το σημείο τομής βρίσκεται εκτός των ορίων της ακτίνας ή του ευθυγράμμου τμήματος.

Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι σε αρκετές περιπτώσεις είναι σημαντικό να διαπιστωθεί, σε αρχικό στάδιο, αν μία τομή *δεν* υπάρχει μεταξύ των στοιχειωδών σχημάτων που εξετάζονται, έτσι ώστε να αποφευχθούν εντελώς οι υπολογισμοί που αφορούν σε καθεαυτό τον υπολογισμό του σημείου τομής. Αυτό θα πρέπει να ληφθεί υπόψη κατά την υλοποίηση των παρακάτω αλγορίθμων.

Γ.1 Τομή δύο ευθειών στο επίπεδο

Υποθέτουμε ότι κάθε μία από τις ευθείες ορίζεται από δύο σημεία, $\mathbf{p}_1 = [x_1, y_1]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{p}_2 = [x_2, y_2]^{\mathrm{T}}$ και $\mathbf{p}'_1 = [x'_1, y'_1]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{p}'_2 = [x'_2, y'_2]^{\mathrm{T}}$, αντίστοιχα. Τότε οι παραμετρικές

εξισώσεις των δύο ευθειών μπορούν να γραφούν ως

$$x(t) = x_1 + t\,\Delta x,$$
$$y(t) = y_1 + t\,\Delta y,$$

και

$$x'(s) = x'_1 + s\,\Delta x',$$
$$y'(s) = y'_1 + s\,\Delta y',$$

αντίστοιχα, όπου

$$\Delta x = x_2 - x_1, \qquad \Delta x' = x'_2 - x'_1,$$
$$\Delta y = y_2 - y_1, \qquad \Delta y' = y'_2 - y'_1.$$

Στο σημείο τομής τους πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα

$$x(t) = x'(s),$$
$$y(t) = y'(s),$$

παρέχοντας δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους (s και t). Επιλύοντας αυτές τις εξισώσεις ως προς s λαμβάνουμε

$$s = \frac{(y'_1 - y_1)\Delta x - (x'_1 - x_1)\Delta y}{\Delta x'\,\Delta y - \Delta x\,\Delta y'},$$

και αντικαθιστώντας αυτή την τιμή του s στην παραμετρική εξίσωση της δεύτερης ευθείας υπολογίζεται το σημείο τομής. Σημειώνεται ότι αν ο παρονομαστής στην έκφραση του s είναι 0 τότε οι δύο ευθείες είναι παράλληλες.

Συχνά, μία από τις δύο ευθείες είναι παράλληλη προς κάποιο άξονα, όπως στην περίπτωση ενός παραθύρου αποκοπής. Τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας απλούστερος υπολογισμός. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι μία από τις ευθείες είναι η $x = x_{\min}$ και η άλλη δίνεται από την παραμετρική της εξίσωση όπως προηγουμένως,

$$x(t) = x_1 + t\,\Delta x,$$
$$y(t) = y_1 + t\,\Delta y.$$

Στο σημείο τομής πρέπει να ισχύει $x(t) = x_{\min}$, άρα επιλύοντας ως προς t λαμβάνουμε

$$t = \frac{x_{\min} - x_1}{\Delta x},$$

και αντικαθιστώντας αυτή την τιμή του t στην παραμετρική εξίσωση της ευθείας υπολογίζεται το σημείο τομής.

Γ.2 Τομή ευθείας-επιπέδου

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση του επιπέδου είναι

$$\overrightarrow{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{p} + d = 0,$$

όπου $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ είναι το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο. Τότε η τομή της ευθείας και του επιπέδου βρίσκεται αντικαθιστώντας την εξίσωση της ευθείας στο σημείο $\mathbf{p}$ του επιπέδου:

$$\overrightarrow{\mathbf{n}} \cdot \big(\mathbf{p}_1 + t\,(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)\big) + d = 0.$$

Αυτή η σχέση δίνει την τιμή της παραμέτρου t που αντιστοιχεί στο σημείο τομής,

$$t = -\frac{\overrightarrow{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{p}_1 + d}{\overrightarrow{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)},$$

και αντικαθιστώντας αυτή την τιμή του t στην εξίσωση της ευθείας υπολογίζεται το σημείο τομής. Σημειώνεται ότι αν ο παρονομαστής είναι 0 τότε η ευθεία είναι παράλληλη προς το επίπεδο· επίσης αν ο παρονομαστής είναι θετικός τότε η τιμή του t είναι αρνητική, αντιστοιχώντας σε σημείο τομής εκτός της ακτίνας ή του ευθυγράμμου τμήματος.

Γ.3 Τομή ευθείας-τριγώνου

Ο έλεγχος τομής μεταξύ μίας ευθείας και ενός τριγώνου είναι ίσως ο πιο συχνά χρησιμοποιούμενος στις εφαρμογές γραφικών, καθώς η πλειονότητα των αντικειμένων αναπαρίσταται ως τριγωνικά μοντέλα. Συνεπώς, αυτός ο έλεγχος τομής έχει μελετηθεί εκτενώς, σε μία προσπάθεια να προσδιοριστεί ο πιο αποδοτικός αλγόριθμος σε διαφορετικές καταστάσεις. Η υλοποίηση που ταιριάζει καλύτερα σε κάθε εφαρμογή θα πρέπει να επιλεγεί μεταξύ των πολλών διαθέσιμων, με βάση τις εκάστοτε συνθήκες (για παράδειγμα, αν τα κάθετα διανύσματα των τριγώνων είναι προϋπολογισμένα ή όχι) και περιορισμούς (για παράδειγμα, πόση επιπλέον πληροφορία μπορεί να προϋπολογιστεί και να αποθηκευτεί ανά τρίγωνο).

Ο αλγόριθμος που παρουσιάζουμε εδώ [Mö97] θεωρείται εξαιρετικά αποδοτικός στις περισσότερες κοινές περιπτώσεις και μπορεί να βελτιστοποιηθεί περαιτέρω αν περισσότερα δεδομένα μπορούν να προϋπολογιστούν και να αποθηκευτούν ανά τρίγωνο.

Δεδομένου ενός τριγώνου $\mathbf{T} = \triangle(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$, η παραμετρική του εξίσωση ως προς τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες του είναι

$$\mathbf{T}(u_2, u_3) = (1 - u_2 - u_3)\mathbf{t}_1 + u_2\mathbf{t}_2 + u_3\mathbf{t}_3.$$

Για να υπολογίσουμε την τομή του με την ευθεία, εξισώνουμε αυτή την εξίσωση με την

παραμετρική εξίσωση της ευθείας:

$$\begin{aligned}&(1-u_2-u_3)\mathbf{t}_1+u_2\mathbf{t}_2+u_3\mathbf{t}_3=\mathbf{p}_1+t(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1)\\ \Leftrightarrow\ &(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)t+(\mathbf{t}_2-\mathbf{t}_1)u_2+(\mathbf{t}_3-\mathbf{t}_1)u_3=\mathbf{p}_1-\mathbf{t}_1.\end{aligned}$$

Αυτό αποτελεί ένα γραμμικό σύστημα 3×3 ως προς t, u_2, και u_3. Επιλύοντάς το, λαμβάνουμε την παραμετρική τιμή t του σημείου τομής κατά μήκος της ευθείας (η οποία, ως συνήθως, θα πρέπει να ελεγχθεί ως προς το αν περιέχεται στο κατάλληλο διάστημα αν χρησιμοποιείται ακτίνα ή ευθύγραμμο τμήμα) καθώς και τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες u_2, u_3 του σημείου τομής ως προς το τρίγωνο. Το σημείο βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο αν $0\le u_2, u_3\le 1$ (το οποίο επίσης συναπάγεται $0\le 1-u_2-u_3\le 1$).

Αυτό το σύστημα μπορεί να επιλυθεί αποδοτικά, επαναχρησιμοποιώντας πολλούς υπολογισμούς. Θέτουμε τους συντελεστές του συστήματος,

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{c}}_1&=\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2,\\ \vec{\mathbf{c}}_2&=\mathbf{t}_2-\mathbf{t}_1,\\ \vec{\mathbf{c}}_3&=\mathbf{t}_3-\mathbf{t}_1,\\ \vec{\mathbf{c}}&=\mathbf{p}_1-\mathbf{t}_1,\end{aligned}$$

και, σύμφωνα με τον κανόνα του Cramer, η λύση είναι

$$\begin{bmatrix}t\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\frac{1}{\det[\,\vec{\mathbf{c}}_1\quad\vec{\mathbf{c}}_2\quad\vec{\mathbf{c}}_3\,]}\begin{bmatrix}\det[\,\vec{\mathbf{c}}\quad\vec{\mathbf{c}}_2\quad\vec{\mathbf{c}}_3\,]\\ \det[\,\vec{\mathbf{c}}_1\quad\vec{\mathbf{c}}\quad\vec{\mathbf{c}}_3\,]\\ \det[\,\vec{\mathbf{c}}_1\quad\vec{\mathbf{c}}_2\quad\vec{\mathbf{c}}\,]\end{bmatrix}.$$

Επιπλέον, καθώς $\det[\,\vec{\mathbf{x}}\quad\vec{\mathbf{y}}\quad\vec{\mathbf{z}}\,]=\vec{\mathbf{x}}\cdot(\vec{\mathbf{y}}\times\vec{\mathbf{z}})=-\vec{\mathbf{x}}\cdot(\vec{\mathbf{z}}\times\vec{\mathbf{y}})$ κ.ο.κ., η λύση μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{bmatrix}t\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\frac{1}{d}\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{c}}\cdot\vec{\mathbf{n}}\\ \vec{\mathbf{c}}_3\cdot\vec{\mathbf{e}}\\ -\vec{\mathbf{c}}_2\cdot\vec{\mathbf{e}}\end{bmatrix},$$

όπου

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{n}}&=\vec{\mathbf{c}}_2\times\vec{\mathbf{c}}_3,\\ \vec{\mathbf{e}}&=\vec{\mathbf{c}}_1\times\vec{\mathbf{c}},\\ d&=\vec{\mathbf{c}}_1\cdot\vec{\mathbf{n}}.\end{aligned}$$

Γ.4 Τομή ευθείας-σφαίρας

Ο αριθμός των σημείων τομής μεταξύ μίας ευθείας και μίας σφαίρας μπορεί να είναι μηδέν (όταν η ευθεία δεν συναντά τη σφαίρα), ένα (όταν η ευθεία εφάπτεται στη σφαίρα), ή δύο (όταν η ευθεία τέμνει τη σφαίρα). Σημειώνεται ότι, σε πολλές εφαρμογές, όταν υπάρχουν δύο σημεία τομής μόνο το *πρώτο* κατά μήκος της ευθείας είναι

σημαντικό· για παράδειγμα όταν μία ακτίνα φωτός συναντά τη σφαίρα.

Για αυτό τον έλεγχο ξαναγράφουμε την εξίσωση της ευθείας ως προς την κατεύθυνσή της $\overrightarrow{\mathbf{d}} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_1 + t\,\overrightarrow{\mathbf{d}}\,.$$

Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί την εξίσωση της σφαίρας κέντρου $\mathbf{c}$ και ακτίνας r: ένα σημείο $\mathbf{p}$ βρίσκεται πάνω στη σφαίρα αν

$$(\mathbf{p} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{c}) = r^2.$$

Επίσης συμβολίζουμε το διάνυσμα μεταξύ του πρώτου σημείου της ευθείας (της αρχής της ακτίνας ή του ευθυγράμμου τμήματος) και του κέντρου της σφαίρας ως

$$\overrightarrow{\mathbf{m}} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{c}.$$

Η τομή της ευθείας και της σφαίρας υπολογίζεται αντικαθιστώντας την παραμετρική εξίσωση της ευθείας στο σημείο $\mathbf{p}$ στην εξίσωση της σφαίρας, λαμβάνοντας μία τετραγωνική εξίσωση ως προς t:

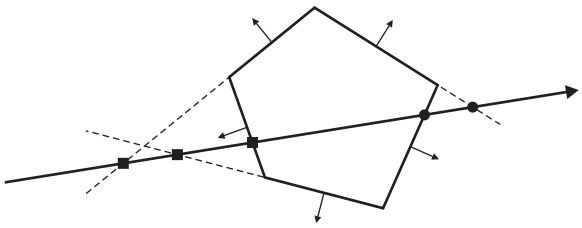
$$\begin{aligned}
(\mathbf{p}_1 + t\,\overrightarrow{\mathbf{d}} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{p}_1 + t\,\overrightarrow{\mathbf{d}} - \mathbf{c}) &= r^2 \\
\Leftrightarrow (\overrightarrow{\mathbf{m}} + t\,\overrightarrow{\mathbf{d}}) \cdot (\overrightarrow{\mathbf{m}} + t\,\overrightarrow{\mathbf{d}}) &= r^2 \\
\Leftrightarrow (\overrightarrow{\mathbf{d}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{d}})\, t^2 + 2(\overrightarrow{\mathbf{m}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{d}})\, t + (\overrightarrow{\mathbf{m}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{m}}) - r^2 &= 0
\end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα εξαρτάται από τη διακρίνουσα αυτής της εξίσωσης. Αν την γράψουμε ως $at^2 + 2bt + c = 0$, τότε η διακρίνουσα είναι $\Delta = b^2 - ac$, και

- αν $\Delta < 0$, τότε δεν υπάρχει πραγματική ρίζα και η ευθεία δεν τέμνεται με τη σφαίρα.
- αν $\Delta = 0$, τότε υπάρχει μία (διπλή) ρίζα και η ευθεία εφάπτεται με τη σφαίρα. Η τιμή του t για τη ρίζα πρέπει να ελεγχθεί ως προς το αν περιέχεται στο κατάλληλο διάστημα, εφόσον χρησιμοποιείται ακτίνα ή ευθύγραμμο τμήμα.
- αν $\Delta > 0$, τότε υπάρχουν δύο ρίζες που αντιστοιχούν σε δύο σημεία τομής. Η μικρότερη ρίζα είναι $t = (-b - \sqrt{D})/a$ και αντιστοιχεί στο πρώτο σημείο τομής κατά μήκος της κατευθυνόμενης ευθείας.

  Εφόσον χρησιμοποιείται ακτίνα και η μικρότερη τιμή του t είναι αρνητική, τότε η δεύτερη ρίζα, $t = (-b + \sqrt{D})/a$, είναι η σωστή, εκτός και αν είναι επίσης αρνητική (οπότε η ακτίνα κατευθύνεται αντίθετα από τη σφαίρα). Ανάλογοι έλεγχοι απαιτούνται εφόσον χρησιμοποιείται ευθύγραμμο τμήμα.

Σημειώνεται ότι οι παραπάνω υπολογισμοί απλοποιούνται αν το διάνυσμα κατεύθυνσης της ευθείας, $\overrightarrow{\mathbf{d}}$, είναι κανονικοποιημένο, καθώς σε αυτή την περίπτωση $a = (\overrightarrow{\mathbf{d}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{d}}) = |\overrightarrow{\mathbf{d}}|^2 = 1$.



Σχήμα Γ.1: *Μία ακτίνα τέμνει ένα κυρτό πολύγωνο: η ακτίνα «εισέρχεται» στο πολύγωνο στα σημεία που σημειώνοναι με τετράγωνο, και «εξέρχεται» από το πολύγωνο στα σημεία που σημειώνονται με δίσκο.*

Γ.5 Τομή ευθείας-κυρτού πολυέδρου

Η βασική αρχή για τον έλεγχο τομής μεταξύ μίας ευθείας και ενός κυρτού πολυέδρου είναι η ίδια με αυτή του αλγορίθμου αποκοπής ευθείας των Liang-Barsky (δείτε την Ενότητα 2.9.2 για τον αλγόριθμο στις δύο διαστάσεις και την Ενότητα 5.3.1 για τον αλγόριθμο στις τρεις διαστάσεις).

Θεωρώντας μία (κατευθυνόμενη) ευθεία και ένα γενικό κυρτό πολύεδρο [Hain91], οι έδρες του πολυέδρου μπορούν να διαμεριστούν σε τρία σύνολα: αυτές ως προς τις οποίες η ευθεία «εισέρχεται» στο πολύεδρο, αυτές ως προς τις οποίες η ευθεία «εξέρχεται» από το πολύεδρο, και αυτές στις οποίες είναι παράλληλη (δείτε το Σχήμα Γ.1 για το ανάλογο στις δύο διαστάσεις). Ο αλγόριθμος υπολογίζει τη μέγιστη παραμετρική τιμή των τομών εισόδου, t_{in}, και την ελάχιστη παραμετρική τιμή των τομών εξόδου, t_{out}. Αν $t_{\text{in}} < t_{\text{out}}$ τότε το ευθύγραμμο τμήμα που αντιστοιχεί στο $[t_{\text{in}}, t_{\text{out}}]$ είναι μέσα στο πολύεδρο· διαφορετικά δεν υπάρχει τομή. Για έδρες παράλληλες στην ευθεία, μπορεί να ελεγχθεί ένα από τα σημεία που ορίζουν την ευθεία ως προς το αν είναι στο «εσωτερικό» ή στο «εξωτερικό» της έδρας, και στη δεύτερη περίπτωση ο αλγόριθμος μπορεί να τερματιστεί καθώς δεν υπάρχει τομή.

Οι ακμές του πολυέδρου πρέπει να δίνονται ως επίπεδα στη μορφή $\vec{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{p} + d = 0$ με $\vec{\mathbf{n}}$ το κάθετο διάνυσμα με φορά προς το εξωτερικό του πολυέδρου. Τα σημεία τομής μεταξύ κάθε έδρας και της ευθείας μπορούν να υπολογιστούν όπως παρουσιάστηκε στην Ενότητα Γ.2. Κατόπιν το αν η ευθεία εισέρχεται, εξέρχεται ή είναι παράλληλη ως προς την έδρα καθορίζεται από το πρόσημο του εσωτερικού γινομένου $\vec{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)$:

- Αν $\vec{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) = 0$, η ευθεία είναι παράλληλη στην έδρα· τότε αν $\vec{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{p}_1 + d < 0$, το $\mathbf{p}_1$ είναι στο «εξωτερικό» του πολυέδρου και άρα δεν υπάρχει τομή.
- Αν $\vec{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) < 0$, η ευθεία εισέρχεται στο πολύεδρο.
- Αν $\vec{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) > 0$, η ευθεία εξέρχεται από το πολύεδρο.

Μπορεί να δειχθεί ότι οι υπολογισμοί αυτοί είναι ακριβώς οι ίδιοι με αυτούς που απαιτούνται για τον καθορισμό του σημείου τομής.

Στην ειδική περίπτωση που το πολύεδρο είναι ένα AABB (δηλαδή οι έδρες του είναι παράλληλες με τους άξονες συντεταγμένων), ο 3Δ αλγόριθμος Liang-Barsky μπορεί

να εφαρμοστεί με ελάχιστες τροποποιήσεις: παρόμοια με τον έλεγχο τομής ευθείας-σφαίρας, οι περισσότερες εφαρμογές ενδιαφέρονται μόνο για το πρώτο σημείο τομής (αυτό μέσω του οποίου η ευθεία εισέρχεται στο AABB). Και εδώ, αν χρησιμοποιείται ακτίνα ή ευθύγραμμο τμήμα πρέπει η παραμετρική τιμή του σημείου να ελεχθεί ως προς το αν περιέχεται στο κατάλληλο διάστημα.

Δ

Υπολογισμοί στερεών γωνιών

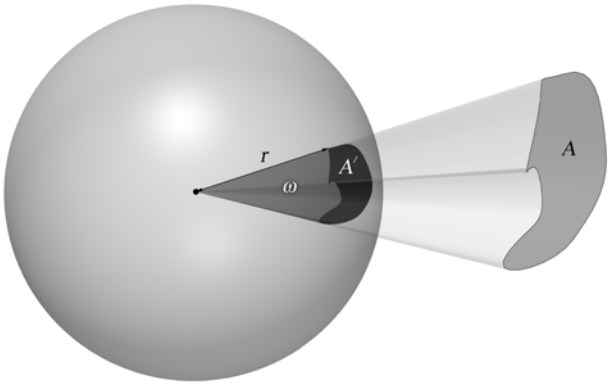
Η στερεά γωνία ω που σχηματίζεται από ένα τμήμα επιφάνειας A ορίζεται ως ο λόγος του εμβαδού της προβολής A' του A στην επιφάνεια μιας σφαίρας ακτίνας r, προς την ακτίνα r^2 (Σχήμα Δ.1):

$$\omega = \frac{A'}{r^2}. \tag{Δ.1}$$

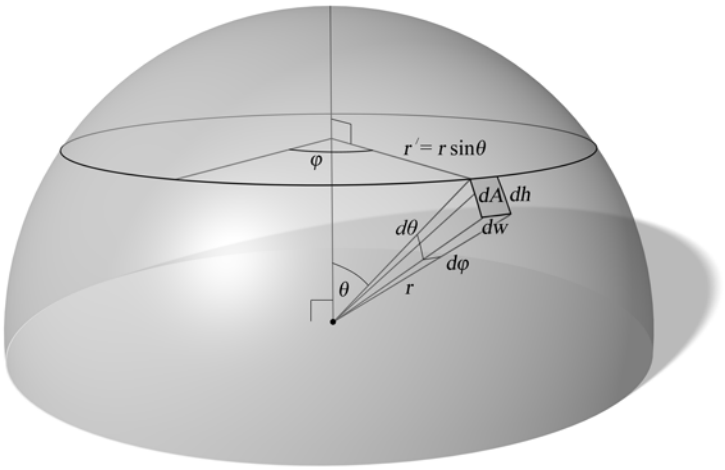
Πρακτικά, η στερεά γωνία μετράει το άνοιγμα μιας ανοιχτής κωνικής τομής στο χώρο, με την κορυφή της στο κέντρο της σφαίρας και τις πλευρές της να εφάπτονται στα όρια του τμήματος επιφάνειας (ή της προβολής του στη μοναδιαία σφαίρα). Ουσιαστικά, μια στερεά γωνία δε σχετίζεται με κάποια φυσική μονάδα μέτρησης· χρησιμοποιούμε μια μαθηματική μονάδα, το *στερακτίνιο* (steradian - sr).

Το ένα στερακτίνιο αντιστοιχεί σε μια στερεά γωνία που εκτείνεται από το κέντρο μιας σφαίρας ακτίνας r και περιλαμβάνει ακριβώς μια επιφάνεια επί της σφαίρας με εμβαδόν r^2.

Ο υπολογισμός της στερεάς γωνίας ενός τυχαίου σφαιρικού τμήματος επιφάνειας γίνεται συνήθως με το ολοκλήρωμα όλων των *διαφορικών στερεών γωνιών* πάνω στην επιφάνειά του. Μια διαφορική στερεά γωνία είναι η στερεά γωνία $d\vec{\omega}$ που αντιστοιχεί σ' ένα απειροστά μικρό σφαιρικό τμήμα επιφάνειας δA, το οποίο περιέχει ένα σημείο επί της σφαίρας με συντεταγμένες (θ, φ) (Σχήμα Δ.2). Ορισμένες φορές, όταν η κατεύθυνση της συγκεκριμένης διαφορικής στερεάς γωνίας δε συμμετέχει σε κάποιον



Σχήμα Δ.1: *Ορισμός της στερεάς γωνίας.*



Σχήμα Δ.2: *Υπολογισμός μιας διαφορικής στερεάς γωνίας.*

υπολογισμό άμεσα, καταργούμε το βέλος πάνω από τη μεταβλητή.

Ας βρούμε τώρα τον τύπο που συσχετίζει την $d\vec{\omega}$ με τις πολικές συντεταγμένες έτσι, ώστε να είμαστε σε θέση να πάρουμε το ολοκλήρωμα πάνω σε δύο εύκολα κατανοητές και υπολογίσιμες μεταβλητές. Το εμβαδόν του δA προκύπτει από το γινόμενο των μηκών τόξου των πλευρών του, dw και dh. Και τα δύο τόξα είναι τμήματα των περιφερειών των αντίστοιχων κύκλων που διατρέχουν τη σφαίρα οριζόντια και κατακόρυφα (Σχήμα Δ.2):

$$\begin{aligned} dh &= 2\pi r \frac{d\theta}{2\pi} = r d\theta, \\ dw &= 2\pi r' \frac{d\varphi}{2\pi} = r' d\varphi. \end{aligned} \tag{Δ.2}$$

Αλλά η r' εξαρτάται από την κατακόρυφη απόκλιση του τμήματος επιφάνειας και ισούται με $r \sin\theta$. Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (Δ.2), το εμβαδόν του τμήματος επιφάνειας γίνεται

$$dA = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi, \tag{Δ.3}$$

και σύμφωνα με τον ορισμό της στερεάς γωνίας, η αντίστοιχη διαφορική στερεά γωνία είναι

$$d\vec{\omega} = \frac{dA}{r^2} = \sin\theta d\theta d\varphi. \tag{Δ.4}$$

Η στερεά γωνία που αντιστοιχεί σε ολόκληρη τη σφαίρα μπορεί να υπολογιστεί ολοκληρώνοντας τη $d\vec{\omega}$ σε όλο το πεδίο ορισμού των φ και θ. Θυμηθείτε ότι, σύμφωνα με

τις συμβάσεις του Σχήματος Δ.2, η θ μετράται αναφορικά με το βόρειο πόλο:

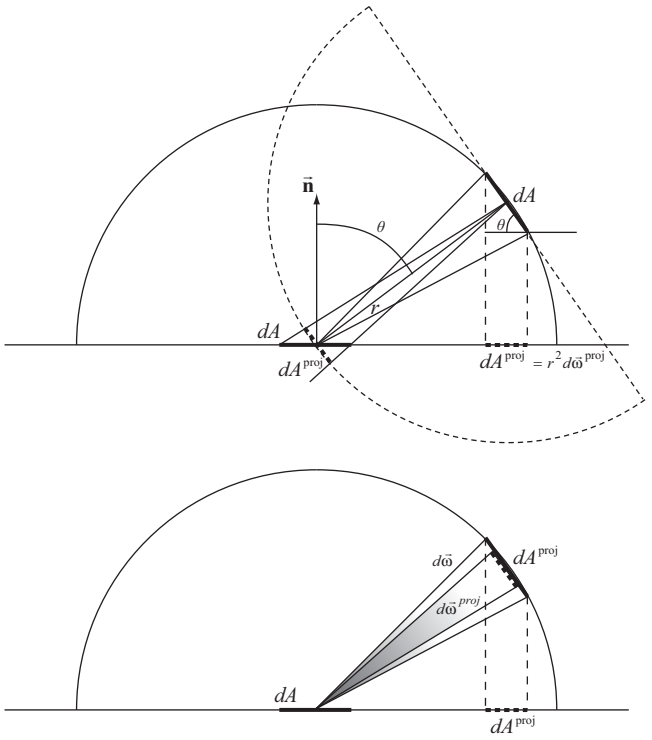
$$\omega_{\text{sphere}} = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\theta d\varphi d\theta = 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta = 4\pi. \tag{Δ.5}$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι προφανώς συνεπές με τον ορισμό της στερεάς γωνίας για το εμβαδόν μιας σφαίρας ακτίνας $r(4\pi r^2)$.

Στους φωτομετρικούς υπολογισμούς, είναι συχνά βολικό να χρησιμοποιούμε τον όρο *προβολή διαφορικής στερεάς γωνίας* $d\vec{\omega}^{\text{proj}}$. Πρόκειται για μια ποσότητα που επινοήθηκε για τη μέτρηση στερεών γωνιών για επιφάνειες dA με πλάγιο προσανατολισμό ως προς το κέντρο υπολογισμού της στερεάς γωνίας. Στο Σχήμα Δ.3, παρατηρήστε το ημισφαίριο ακτίνας r που περιβάλλει το τμήμα επιφάνειας dA. Η στερεά γωνία $d\vec{\xi}$ που σχηματίζεται χρησιμοποιώντας ως κέντρο της στερεάς γωνίας οποιοδήποτε σημείο επί του ημισφαιρίου και ως προβαλλόμενη επιφάνεια την dA, εμπλέκει, σύμφωνα με τον ορισμό, την προβολή της dA κατά την ακτινική κατεύθυνση:

$$d\xi = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dA/r^2 = \cos\theta dA/r^2. \tag{Δ.6}$$

Αλλά στην Εξίσωση (Δ.6), η dA/r^2 είναι επίσης η στερεά γωνία που αντιστοιχεί σ' ένα



Σχήμα Δ.3: *Προβολή διαφορικής στερεάς γωνίας.*

διαφορικό τμήμα επιφάνειας dA πάνω στο ημισφαίριο, όπως αυτή σχηματίζεται από το κέντρο του ημισφαιρίου. Η στερεά γωνία $d\vec{\xi}$ τότε ισούται με την προβολή $d\vec{\omega}^{\text{proj}}$ της $d\vec{\omega} = dA/r^2$ στη βάση του ημισφαιρίου:

$$d\vec{\omega}^{\text{proj}} = \cos\theta d\vec{\omega}. \tag{Δ.7}$$

Σε γενικές γραμμές, η προβολή της διαφορικής στερεάς γωνίας μας δίνει ένα μέτρο του πόσο πολύ φαίνεται ένα τμήμα επιφάνειας από διάφορες αποστάσεις και γωνίες παρατήρησης.

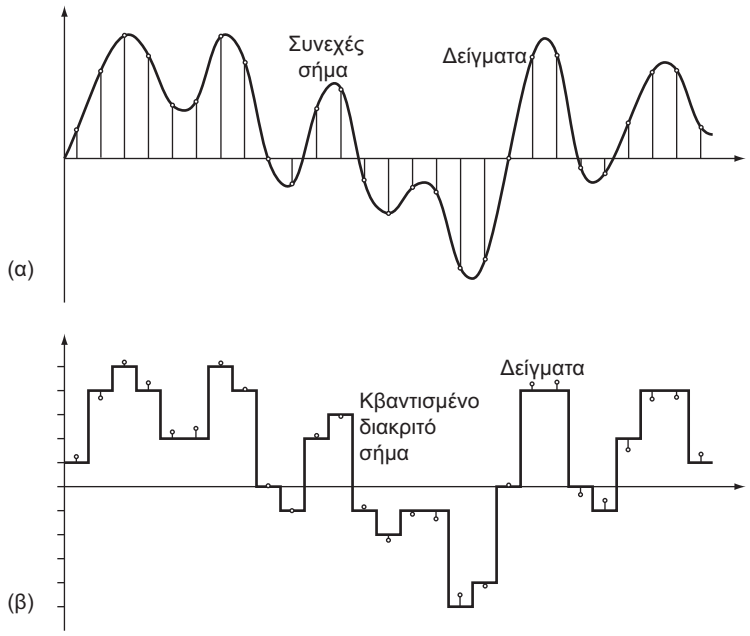
Ε

Στοιχεία θεωρίας σημάτων

Ε.1 Δειγματοληψία

Αν δειγματοληπτήσουμε ένα N-διάστατο συνεχές σήμα θα προκύψει ένα N-διάστατο *διακριτό σήμα*. Η διαδικασία της *δειγματοληψίας* περιλαμβάνει την επιλογή των κατάλληλων σημείων στο πεδίο ορισμού του σήματος και την καταγραφή των τιμών (δειγμάτων) του αρχικού σήματος σε αυτά. Όταν ψηφιοποιούνται τα δείγματα σήματος, αυτά *κβαντίζονται* έτσι, ώστε να είναι συμβατά με τις δυνατότητες της διακριτής μορφής αποθήκευσης στο ψηφιακό μέσο (π.χ., 8, 16, 24 bits ανά δείγμα). Η κβάντιση είναι η διαδικασία μετατροπής ενός συνεχούς πεδίου τιμών σε διακριτά επίπεδα (Σχήμα Ε.1(β)). Το συνεχές σήμα δειγματοληπτείται με βάση κάποιο κανόνα. Ο πιο κοινός τέτοιος κανόνας είναι η *ομοιόμορφη δειγματοληψία*, στην οποία το κάθε δείγμα λαμβάνεται σε τακτά διαστήματα πάνω στο πεδίο ορισμού (Σχήμα Ε.1(α)).

Στα γραφικά και στην οπτικοποίηση συχνά απαιτείται η δειγματοληψία διαφόρων σημάτων από τα οποία επιχειρούμε να ανακατασκευάσουμε ορθά την αρχική πληροφορία του σήματος. Ένα καλό παράδειγμα αυτής της διαδικασίας είναι η αποτύπωση υφής, όπου μια ψηφιακή εικόνα παριστάνει μια διακριτή μορφή της όψης μιας επιφάνειας. Αυτό το σήμα επανα-δειγματοληπτείται κατά τη σχεδίαση, σε μια προσπάθεια να ανακατασκευάσουμε την αρχική όψη της επιφάνειας. Κατά τη σχεδίαση πολυγώνων ή την παρακολούθηση ακτίνων, δειγματοληπτούμε το πεδίο φωτισμού που αντιλαμβάνεται η κάμερα προκειμένου να ανακτήσουμε την πληροφορία που αντιστοιχεί στην εικόνα που βλέπει ο παρατηρητής από το συγκεκριμένο σημείο στο χώρο. Προκειμένου να μπορέσουμε να ανακατασκευάσουμε το αρχικό οπτικό σήμα και, συνεπώς, να παράγουμε μια πιστή απεικόνιση των αντικειμένων στο χώρο, χρειάζεται να δειγματοληπτήσουμε επαρκώς το συνεχές πεδίο της εικόνας, ώστε να καταγράψουμε όλες τις λεπτομέρειες. Η «λεπτομέρεια» σ' ένα περιοδικό σήμα είναι, στην πράξη, ο ρυθμός μεταβολής των τιμών του σήματος αναφορικά με το πεδίο ορισμού. Μεγαλύτερη λεπτομέρεια αντιστοιχεί στην παρουσία ολοένα και γρηγορότερων (πιο απότομων) αλλαγών στις τιμές του σήματος, δηλαδή μεγαλύτερων *συχνοτήτων*. Ένα περιοδικό σήμα μπορεί να εκφραστεί ως το ζυγισμένο άθροισμα N-διάστατων ημιτονοειδών όρων. Όσο πιο λεπτές είναι οι λεπτομέρειες στο σήμα τόσο πιο μικρή θα είναι η περίοδος των ημιτονοειδών όρων που αντιστοιχούν σε αυτές και τόσο πιο μεγάλο θα είναι το άνω όριο του εύρους συχνοτήτων που περιγράφει πλήρως το αρχικό σήμα.



Σχήμα Ε.1: *Ομοιόμορφη δειγματοληψία. (α) Διακριτά δείγματα του συνεχούς σήματος. (β) Κβαντισμένα δείγματα (11 επίπεδα).*

Ε.2 Το πεδίο των συχνοτήτων

Ένα σήμα ορισμένο στον N-διάστατο χώρο μπορεί να εκφραστεί με βάση την ανάλυσή του σε συνιστώσες διαφορετικών συχνοτήτων, δηλαδή ως ένα σύνολο συντελεστών που προσδιορίζουν τη συνεισφορά κάθε συχνότητας ημιτονοειδών όρων στο σήμα. Αυτό το πεδίο ανάλυσης του σήματος αποκαλείται *πεδίο συχνοτήτων* ενός σήματος και περιγράφει ποιες αρμονικές συναρτήσεις και με τι ένταση συνδυάζονται για να συνθέσουν το σήμα. Για περιοδικά σήματα, ο γραμμικός συνδυασμός των ημιτονοειδών όρων με συντελεστές a_k που συνθέτουν το σήμα, ονομάζεται *σειρά Fourier*. Για ένα μονοδιάστατο περιοδικό σήμα, η σειρά Fourier δίνεται από τη σχέση

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk2\pi x/T}, \tag{Ε.1}$$

όπου $e^{jk2\pi}$ είναι η k-στή αρμονική και T είναι η περίοδος του σήματος. Να σημειωθεί πως οι συντελεστές Fourier είναι μιγαδικοί αριθμοί, των οποίων το πραγματικό μέρος αντιστοιχεί στο πλάτος της συγκεκριμένης αρμωνικής, ενώ το φανταστικό μέρος είναι η φάση (ολίσθηση) του ημιτονοειδούς όρου.

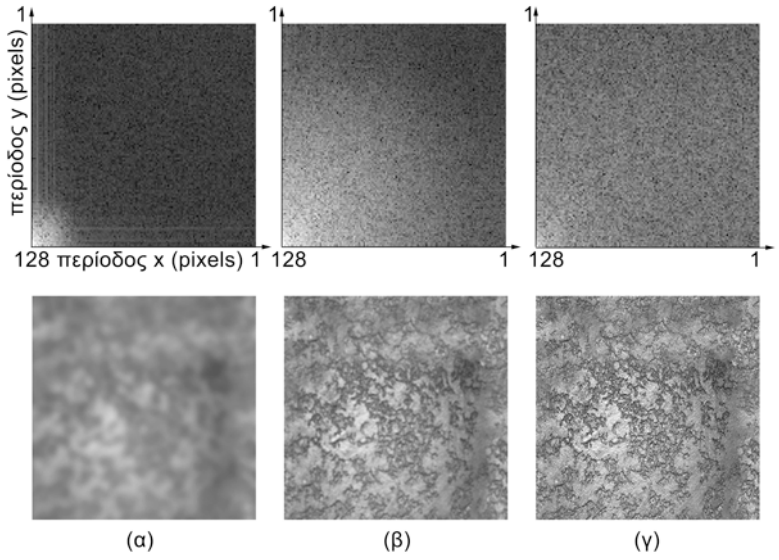
Για τυχαία, μη περιοδικά σήματα στον N-διάστατο χώρο, η αντίστοιχη *σύνθεση Fourier* παράγει το σήμα από τη συνεισφορά κάθε συχνότητας $F(\mathbf{u})$ (συνεχές πεδίο συχνοτήτων), όπου $\mathbf{u}$ είναι το διάνυσμα συχνοτήτων σε κάθε διεύθυνση (συνολικά N):

$$f(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mathbf{u}) e^{j2\pi \mathbf{x}\cdot\mathbf{u}} du_1 du_2 ... du_N. \tag{Ε.2}$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι N-διάστατο. Η συνάρτηση $F(\mathbf{u})$ είναι ο *μετασχηματισμός Fourier* του σήματος $f(\mathbf{x})$ και δίνεται από τη σχέση:

$$F(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) e^{-j2\pi \mathbf{x}\cdot\mathbf{u}} dx_1 dx_2 ... dx_N. \tag{Ε.3}$$

Για παράδειγμα, οι εικόνες (α), (β), και (γ) του Σχήματος Ε.2 είναι διδιάστατα σήματα που παριστάνουν το ίδιο μοτίβο αλλά με διαφορετικό βαθμό λεπτομέρειας. Η ένταση στο Σχήμα Ε.2(α) μεταβάλλεται αργά και δεν υπάρχουν απότομες μεταπτώσεις σε αυτή, οι οποίες θα προσέδιδαν οξύτητα και λεπτομέρεια. Όπως μπορούμε να δούμε χαρακτηριστικά από το πλάτος του μετασχηματισμού Fourier που φαίνεται πάνω από την καθεμία έκδοση του μοτίβου (σε λογαριθμική κλίμακα), όσο πιο μεγάλη η λεπτομέρεια της υφής στο διδιάστατο σήμα, τόσο πιο υψηλές συχνότητες είναι παρούσες στη φασματική ανάλυσή του (μικρότερες περίοδοι ημιτονοειδών συναρτήσεων).



Σχήμα Ε.2: *Πεδίο συχνοτήτων (λογαριθμική κλίμακα πλάτους - πάνω σειρά) για διδιάστατα δεδομένα εικόνας. (α) Θολή, χαμηλής λεπτομέρειας έκδοση της εικόνας. Παρατηρήστε την υψηλή συγκέντρωση ενέργειας στις χαμηλές συχνότητες. (β) Λιγότερο θολή εικόνα· το φάσμα περιέχει υψηλότερες συχνότητες. (γ) Η αρχική, καθαρή εικόνα περιέχει αρκετή λεπτομέρεια, η οποία αντανακλάται στο γεγονός ότι στο μετασχηματισμό Fourier του σήματος υπάρχει μια πιο ομοιόμορφη κατανομή της ενέργειας σε όλο το φάσμα συχνοτήτων που παρατηρούμε.*

Ε.3 Συγκερασμός και φιλτράρισμα

Ένα σύστημα εντάσσεται στην κατηγορία των *γραμμικών συστημάτων* εάν για οποιονδήποτε αριθμό τυχαίων σημάτων εισόδου $s_1(\mathbf{x})$, $s_2(\mathbf{x})$,..., $s_M(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbf{N}}$, ο συνδυασμός των εξόδων του συστήματος για κάθε ένα σήμα $y(s_1(\mathbf{x}))$, $y(s_2(\mathbf{x}))$,..., $y(s_M(\mathbf{x}))$ είναι ίδιος με την έξοδο του συστήματος αν το τροφοδοτούσαμε με τον αντίστοιχο συνδυασμό των σημάτων εισόδου:

$$y\left(a_1 s_1(\mathbf{x}) + a_2 s_2(\mathbf{x}) + \ldots + a_M s_M(\mathbf{x})\right) = \\ a_1 y\left(s_1(\mathbf{x})\right) + a_2 y\left(s_2(\mathbf{x})\right) + \ldots + a_M y\left(s_M(\mathbf{x})\right). \quad \text{(E.4)}$$

όπου a_i είναι τυχαία βάρη.

Μια τιμή $s(x)$ του σήματος μπορεί να παρασταθεί ως ένα άπειρο άθροισμα τιμών σε όλο το πεδίο τιμών εισόδου, όταν πολλαπλασιαστεί μ' ένα συντελεστή ο οποίο είναι μη μηδενικός, ακριβώς μόνο για το x:

$$s(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-t)s(t)dt. \quad \text{(E.5)}$$

Η συνάρτηση $\delta(x)$ (συνάρτηση *Δέλτα* ή *Dirac*) ορίζεται ως μια αιχμή μοναδιαίου πλάτους στο μηδέν:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases} \quad \text{(E.6)}$$

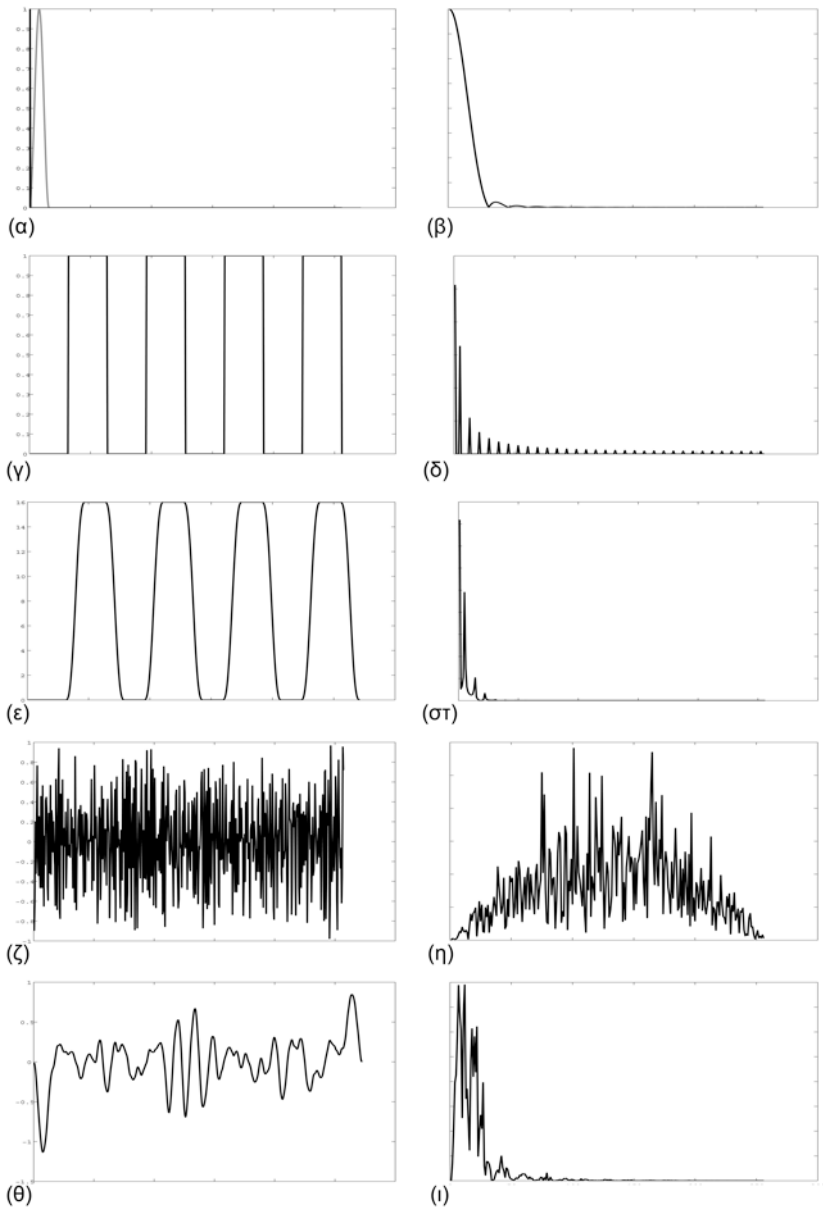
Τώρα ως θεωρήσουμε την υπέρθεση όλων των ολισθημένων εκδόσεων του σήματος εισόδου $s(x)$ κατά t, πολλαπλασιασμένων με ένα αντίστοιχο βάρος $h(x,t)$. Η έξοδος ενός γραμμικού συστήματος που χαρακτηρίζεται από τη συνάρτηση $h(x,t)$ είναι παρόμοια με την Εξίσωση (Ε.5) και δίνεται από την

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,t)s(t)dt, \quad \text{(E.7)}$$

ή για χρονικά αναλλοίωτα γραμμικά συστήματα:

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t)s(t)dt. \quad \text{(E.8)}$$

Η Εξίσωση (Ε.8) είναι ο *συγκερασμός* (convolution) του σήματος εισόδου $s(t)$ και ενός άλλου σήματος $h(x)$ και συμβολίζεται με τον αστερίσκο $(*)$· $y(x) = h(x) * s(x) = s(x) * h(x)$. Όταν αναφερόμαστε σ' ένα γραμμικό σύστημα, η $h(x)$ είναι η *κρουστική απόκριση* του συστήματος. Η κρουστική απόκριση χαρακτηρίζει τη συμπεριφορά ενός συστήματος και ονομάζεται έτσι γιατί ισούται με την έξοδο του συστήματος όταν εφαρμοστεί σε αυτό ως είσοδος η συνάρτηση Dirac (κρουστικός παλμός - βλ. Σχήμα Ε.3):



Σχήμα Ε.3: *Συγκερασμός σήματος μεταξύ της κρουστικής απόκρισης ενός γραμμικού συστήματος και διαφόρων σημάτων εισόδου. Ο συγκερασμός στο πεδίο τιμών του σήματος αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων φασμάτων των σημάτων. (α) Η κρουστική απόκριση h (ανοιχτό γκρι) και η συνάρτηση Dirac. (β) Πυκνότητα φάσματος ισχύος (PSD) της $y(x) = h(x) * \delta(x) = h(x)$. (γ) Ένας τετραγωνικός παλμός εισόδου. (δ) PSD του τετραγωνικού παλμού του (γ). (ε) Συγκερασμός του τετραγωνικού παλμού με την κρουστική απόκριση h της περίπτωσης (α). (στ) Η PSD του αποτελέσματος του φιλτραρισμένου σήματος (ε). (ζ) Θόρυβος. (η) Η PSD του σήματος θορύβου (ζ). (θ) Ο φιλτραρισμένος θόρυβος. (ι) Η PSD του φιλτραρισμένου θορύβου (μεγεθυμένη στον κατακόρυφο άξονα).*

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t)\delta(t)dt. \tag{E.9}$$

Θεωρητικά η κρουστική απόκριση σε σήματα συνεχούς πεδίου ορισμού μπορεί να υπολογιστεί για οποιοδήποτε άγνωστο σύστημα, αν εφαρμόσουμε σε αυτό τη συνάρτηση Dirac. Για διακριτά σήματα, η μεθοδολογία αυτή εξακολουθεί να έχει εφαρμογή και ο αντίστοιχος συγκερασμός δίνεται από την

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-k)s(k),\ n \in \mathbb{Z}, \tag{E.10}$$

$$y(n_1, ..., n_N) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} ... \sum_{k_N=-\infty}^{+\infty} h(n_1 - k_1, ..., n_N - k_N)s(k_1, ..., k_N). \tag{E.11}$$

Η κρουστική απόκριση h υλοποιεί ένα γραμμικό *πυρήνα φίλτρου*. Το σήμα εισόδου *φιλτράρεται* με συγκερασμό στο πεδίο τιμών του σήματος. Όταν η κρουστική απόκριση είναι μη μηδενική μόνο σ' ένα φραγμένο διάστημα του πεδίου ορισμού, δηλαδή έχει πεπερασμένο διάστημα στήριξης, τότε το φίλτρο χαρακτηρίζεται ως *πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης* (finite impulse response - FIR)· διαφορετικά ως *άπειρης κρουστικής απόκρισης* (IIR). Τα περισσότερα πρακτικά υλοποιημένα φίλτρα είναι τύπου FIR.

Μια σημαντική ιδιότητα του συγκερασμού είναι ότι όταν τα σήματα δύνανται να παρασταθούν στο πεδίο των συχνοτήτων, ο συγκερασμός αντιστοιχεί σε εσωτερικό γινόμενο των μετασχηματισμένων σημάτων κατά Fourier Y, H και S:

$$y(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) * s(\mathbf{x}) \Leftrightarrow Y(\mathbf{u}) = H(\mathbf{u})S(\mathbf{u}). \tag{E.12}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης $h(\mathbf{x})$ αποκαλείται *συνάρτηση μεταφοράς*. Συχνά είναι προτιμότερο να πραγματοποιούμε το φιλτράρισμα στο πεδίο των συχνοτήτων, ειδικά στην περίπτωση όπου έχουμε διαδοχική εφαρμογή πολλαπλών φίλτρων στο ίδιο σήμα ή όταν η μορφή (κυματομορφή) της συνάρτησης μεταφοράς περιγράφεται μαθηματικά πιο βολικά από ότι αυτή της κρουστικής απόκρισης. Για παράδειγμα, η αποκοπή των μεσαίων συχνοτήτων ενός σήματος μπορεί να απαιτεί το σχεδιασμό μίας πολύπλοκης συνάρτησης κρουστικής απόκρισης. Αντίθετα, είναι πιο ευκολονόητο να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση μεταφοράς που επιλεκτικά μηδενίζει τις ζητούμενες συχνότητες.[1]

[1]Στην πράξη, η κατασκευή μιας καλής συνάρτησης μεταφοράς εγκυμονεί δυσκολίες, καθώς η δημιουργία ασυνεχειών στο πεδίο των συχνοτήτων επεκτείνει το εύρος του πεδίου στήριξης του φίλτρου, καθιστώντας απαραίτητη την αποκοπή της κρουστικής απόκρισης σ' ένα πεπερασμένο και εύλογο διάστημα. Αυτό όμως οδηγεί σε παραμορφώσεις του αποτελέσματος και αλλοίωση της συμπεριφοράς του φίλτρου.

Ε.4 Θεώρημα δειγματοληψίας

Προκειμένου να εξασφαλίσουμε ότι το ανακατασκευασμένο από τη δειγματοληψία σήμα είναι ίδιο με το αρχικό, το *θεώρημα δειγματοληψίας Nyquist-Shannon* μας λέει ότι το αρχικό σήμα πρέπει να έχει πεπερασμένο εύρος ζώνης συχνοτήτων και ο ρυθμός δειγματοληψίας f_{sampling} πρέπει να είναι τουλάχιστο διπλάσιος από την υψηλότερη συχνότητα του αρχικού σήματος:

$$2\,|f_{\max}| \leqslant f_{\text{sampling}}. \tag{Ε.13}$$

Ο ελάχιστος ρυθμός δειγματοληψίας f_{sampling} που επαρκεί για την ορθή ανακατασκευή του σήματος αποκαλείται ρυθμός *Nyquist*. Αν δεν τηρηθούν τα παραπάνω κριτήρια, έχουμε ως αποτέλεσμα κακή δειγματοληψία του αρχικού σήματος και την παρουσία του φαινομένου της (ψευδούς) *ταύτισης* (aliasing). Ταύτιση σημαίνει ερμηνεία των δειγμάτων ως προερχόμενα από διαφορετικό σήμα από αυτό από το οποίο προέκυψαν, κατά την προσπάθεια ανακατασκευής του δειγματοληπτημένου σήματος. Αυτό συμβαίνει όταν περισσότερα του ενός σήματα μπορούν να διέρχονται από τα δειγματοληπτημένα σημεία.

Πρακτικά, επειδή δεν μπορούμε να γνωρίζουμε ή να εγγυηθούμε τα όρια του φάσματος ενός σήματος, το αρχικό σήμα πρώτα διαμορφώνεται από ένα βαθυπερατό φίλτρο (low-pass), το οποίο ρητά αποκόπτει οποιαδήποτε συχνότητα πάνω από το μισό του ρυθμού δειγματοληψίας που επιβάλλουμε.

Βιβλιογραφία

[Adob07] Adobe, 2007, URL `http://www.adobe.com`.

[Agar03] S. Agarwal, R. Ramamoorthi, S. Belongie and H.W. Jensen, Structured Importance Sampling of Environment Maps, *ACM Transactions on Graphics*, 22(3), pp. 605–612, Jul. 2003.

[Ahne87] P.K. Ahnelt, H. Kolb and R. Pflug, Identification of a Subtype of Cone Photoreceptor, Likely to be Blue Sensitive, in the Human Retina, *J. Comp. Neurol.*, 255, pp. 18–34, 1987.

[Aire91] J. Airey, *Increasing Update Rates in the Building Walkthrough System with Automatic Model-Space Subdivision and Potentially Visible Set Calculations*, Ph.D. thesis, University of North Carolina at Chapel Hill, 1991.

[Aman87] J. Amanatides and A. Woo, A Fast Voxel Traversal Algorithm for Ray Tracing, in *Eurographics '87*, pp. 3 – 10, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, North-Holland, 1987.

[Appe68] A. Appel, Some Techniques for Shading Machine Rendering of Solids, in *AFIPS 1968 Spring Joint Computer Conf., Vol. 32*, pp. 37–45, 1968.

[Augs06] U.H. Augsdörfer, N.A. Dodgson and M.A. Sabin, Tuning Subdivision by Minimising Gaussian Curvature Variation Near Extraordinary Vertices, *Computer Graphics Forum (Proc. Eurographics '06)*, 25(3), pp. 263–272, 2006.

[Barr84] A.H. Barr, Global and Local Deformations of Solid Primitives, *Computer Graphics (SIGGRAPH '84 Proceedings)*, 18(3), pp. 21–30, 1984.

[Barr97] B. Barraquand, L. Kavraki, J.C. Latombe, T.Y. Li, R. Motwani and P. Raghavan, A Random Sampling Scheme for Robot Path Planning, *International Journal of Robotics Research*, 16(6), pp. 759–774, 1997.

[Bart87] R.H. Bartels, J.C. Beatty and B.A. Barsky, *An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling*, Morgan Kaufmann, San Francisco, CA, 1987.

[Bart92] P. Barten, Physical Model for the Contrast Sensitivity of the Human Eye, in *Human Vision, Visual Processing, and Digital Display III, Proc. SPIE*, vol. 1666, pp. 57–72, 1992.

[Bart93] P. Barten, Spatio-Temporal Model for the Contrast Sensitivity of the Human Eye and Its Temporal Aspects, in J.A. B. Rogowitz (Ed.), *Human Vision, Visual Processing and Digital Display IV. Vol. 1913*, pp. 2–14, SPIE Press, Bellingham, WA, 1993.

[Bart04] L. Barthe and L. Kobbelt, Subdivision Scheme Tuning Around Extraordinary Vertices, *Computer Aided Geometric Design*, 21, pp. 561–583, 2004.

[Bart05] L. Barthe, C. Gerot, M. Sabin and L. Kobbelt, Simple Computation of the Eigencomponents of a Subdivision Matrix in the Fourier Domain, in N. Dodgson, M. Floater and M. Sabin (Eds.), *Advances in Multiresolution for Geometric Modelling*, pp. 245–257, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg, 2005.

[Bata99] H.C. Batagelo and I.C. Junior, Real Time Shadow Generation Using BSP Trees and Stencil Buffers, in *Proceedings of SIGGRAPH 99, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 93–102, Addison Wesley Longman, Reading, MA, 1999.

[Baum72] B.G. Baumgart, *Winged Edge Polyhedron Representation*, Tech. Rep. CS-TR-72-320, Stanford University, 1972.

[Beck63] P. Beckmann and A. Spizzichino, *The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces*, Mac Millan, New York, 1963.

[Bilo99] B. Bilodeau and M. Songy, Real Time Shadows, in *Creativity '99*, 1999, creative Labs Inc. sponsored game developer conferences Los Angeles, CA and Surrey, England.

[Blin76] J.F. Blinn and M.E. Newell, Texture and Reflection in Computer Generated Images, *Communications of the ACM*, 19, pp. 542–546, 1976.

[Blin77] J.F. Blinn, Models of Light Reflection for Computer Synthesized Pictures, 11(2), pp. 192–198, 1977.

[Boeh80] W. Boehm, Inserting New Knots into B-Spline Curves, *Computer Aided Design*, 12(4), pp. 199–201, 1980.

[Bres65] J. Bresenham, Algorithm for Computer Control of a Digital Plotter, *IBM System Journal*, 4(1), pp. 25–30, 1965.

[Bres77] J. Bresenham, A Linear Algorithm for Incremental Digital Display of Circular Arcs, *Communications of the ACM*, 20(2), pp. 100–106, 1977.

[Brod92] K.W. Brodlie, L.A. Carpenter, R.A. Earnshaw, J.R. Gallop, R.J. Hubbold, A.M. Mumford, C.D. Osland and P. Quarendon (Eds.), *Scientific Visualization: Techniques and Applications*, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg, 1992.

[Bunn04] M. Bunnel and F. Pellacini, Shadow Map Antialiasing, in R. Fernando (Ed.), *GPU Gems*, Addison-Wesley, Reading, MA, 2004.

[Burk05] D. Burke, A. Ghosh and W. Heidrich, Bidirectional Importance Sampling for Direct Illumination, in *Rendering Techniques 2005: 16th Eurographics Workshop on Rendering*, pp. 147–156, Eurographcs Assoc., Aire-la-Ville, Switzerland, Jun. 2005.

[Cabr93] B. Cabral and L.C. Leedom, Imaging Vector Fields Using Line Integral Convolution, in *Proceedings of SIGGRAPH 93, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 263–270, ACM Press, New York, 1993.

[Cabr99] B. Cabral, M. Olano and P. Nemec, Reflection Space Image Based Rendering, in *Proceedings of SIGGRAPH 99, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 165–171, Addison Wesley Longman, Reading, MA, 1999.

[Came90] S. Cameron, Collision Detection by Four-Dimensional Intersection Testing, *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 6(3), pp. 291–302, 1990.

[Came92] G.G. Cameron and P.E. Undrill, Rendering Volumetric Medical Image Data on a SIMD-Architecture Computer, in *Third Eurographics Workshop on Rendering*, pp. 135–145, Eurographics Association, Aire-la-Ville, 5 1992.

[Carm00] J. Carmack, Carmack on Shadow Volumes, 2000, email to private list May 23, 2000; Also published on the NVIDIA website: `http://developer.nvidia.com/object/robust_shadow_volumes.html`.

[Carp84] L.C. Carpenter, The A-Buffer, An Antialiased Hidden Surface Method, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '84)*, 18(3), pp. 103–108, 1984.

[Catm74] E. Catmull, *A Subdivision Algorithm for Computer Display of Curved Surfaces*, Ph.D. thesis, Department of Computer Science, University of Utah, Salt Lake City, Utah, 1974.

[Catm78] E. Catmull, A Hidden Surface Algorithm with Antialiasing, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '78,)*, 12(3), pp. 6–11, 1978.

[Cava91] A.S. Cavaretta, W. Dahmen and C.A. Micchelli, *Stationary Subdivision*, Memoirs of the American Mathematical Society, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.

[Celn90] G. Celniker and D. Gossard, Continuous Deformable Curves and their Application to Fairing 3-D Geometry, in *Proceedings of the IFIP Conference on Geometric Modeling in Computer-Aided Design*, Rensselaerville, NY, 1990.

[Chai74] G.M. Chaikin, An Algorithm for High-Speed Curve Generation, *Computer Graphics and Image Processing*, 3, pp. 346–349, 1974.

[Chal98] A. Chalmers and E. Reinhard, Parallel and Distributed Photo-Realistic Rendering, in *ACM SIGGRAPH '98 Course Notes*, 1998.

[Chen95] S.E. Chen, QuickTime VR - An Image-Based Approach to Virtual Environment Navigation, in *Proceedings of SIGGRAPH 95, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 29–38, Addison Wesley, Reading, MA, 1995.

[Cher73] H. Chernoff, Using Faces to Represent Points in K-Dimensional Space Graphically, *Journal of the American Statistical Association*, 68, pp. 361–368, 1973.

[Chia03] Y.J. Chiang and X. Lu, Progressive Simplification of Tetrahedral Meshes Preserving All Isosurface Topologies, *Computer Graphics Forum*, 22(3), pp. 493–504, 2003.

[Cho03] W. Cho, E.M. Sachs, N.M. Patrikalakis and D.E. Troxel, A Dithering Algorithm for Local Composition Control with Three-Dimensional Printing, *Computer Aided Design*, 35(9), pp. 851–867, 2003.

[Cign98] P. Cignoni, C. Roccini and R. Scopigno, Metro: Measuring Error on Simplified Surfaces, *Computer Graphics Forum*, 17(2), pp. 167–174, 1998.

[Cign00] P. Cignoni, D. Constanza, C. Montani, C. Rocchini and R. Scopigno, Simplification of Tetrahedral Meshes with Accurate Error Evaluation, in *Proceedings of IEEE Visualization*, pp. 85–92, IEEE Computer Society, Loas Alamitos, CA, 2000.

[Cira00] F. Cirak, M. Ortiz and P. Schröder, Subdivision Surfaces: A New Paradigm for Thin-Shell Finite-Element Analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(12), pp. 2039–72, 4 2000.

[Clar76] J.H. Clark, Hierarchical Geometric Models for Visible Surface Algorithms, *Communications of the ACM*, 19(10), pp. 547–554, 10 1976.

[Clar82] J. Clark, The Geometry Engine: A VLSI Geometry System for Graphics, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '82)*, 16(3), pp. 127–133, 1982.

[Clar05] P. Clarberg, W. Jarosz, T. Akenine-Möller and H.W. Jensen, Wavelet Importance Sampling: Efficiently Evaluating Products of Complex Functions, *ACM Transactions on Graphics*, 24(3), pp. 1166–1175, Aug. 2005.

[CO03] D. Cohen-Or, Y. Chrysanthou, C. Silva and F. Durand, A Survey of Visibility for Walkthrough Applications, *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 9(3), pp. 412–431, 2003.

[Cohe80] E. Cohen, T. Lyche and R. Riesenfeld, Discrete B-Splines and Subdivision Techniques in Computer Aided Geometric Design and Computer Graphics, *Computer Graphics and Image Processing*, 14(2), pp. 87–111, 1980.

[Cohe86] M.F. Cohen, D.P. Greenberg, D.S. Immel and P.J. Brock, An Efficient Radiosity Approach for Realistic Image Synthesis, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 6(3), pp. 26–35, Mar. 1986.

[Cohe88] M.F. Cohen, S.E. Chen, J.R. Wallace and D.P. Greenberg, A Progressive Refinement Approach to Fast Radiosity Image Generation, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '88)*, 22(4), pp. 75–84, Aug. 1988.

[Cohe92] A. Cohen and J.P. Conze, Regularité des bases d'ondelettes et mésures ergodiques, *Revista Matematica Iberoamer*, 8, pp. 351–366, 1992.

[Cohe93] M.F. Cohen and J.R. Wallace, *Radiosity and Realistic Image Synthesis*, Academic Press Professional, Boston, MA, 1993.

[Cohe98] J. Cohen, M. Olano and D. Manocha, Appearance Preserving Simplification, in *Proceedings of SIGGRAPH 98, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 115–122, Addison Wesley, Reading, MA, 1998.

[Cook82] R.L. Cook and K.E. Torrance, A Reflectance Model for Computer Graphics, *ACM Transactions on Graphics*, 1(1), pp. 7–25, 1982.

[Cook84] R.L. Cook, Shade Trees, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '84)*, 18(3), pp. 223–231, Jul. 1984.

[Cook86] R.L. Cook, Stochastic Sampling in Computer Graphics, *ACM Transactions on Graphics*, 5(1), pp. 51 – 72, 1986.

[Cook89] R.L. Cook, Stochastic Sampling and Distributed Ray Tracing, in A. Glassner (Ed.), *An Introduction to Ray Tracing*, Academic Press Limited, London, 1989.

[Coon67] S. Coons, *Surfaces for Computer-Aided Design of Space Forms*, Technical Report MIT/LCS/TR-41, Massachusetts Institute of Technology, 1967.

[Coor97] S. Coorg and S. Teller, Real-Time Occlusion Culling for Models with Large Occluders, in *ACM Symposium on Interactive 3D Graphics*, pp. 83–90, ACM Press, New York, 1997.

[Cox72] M. Cox, The Numerical Evaluation of B-Splines, *IMA Journal of Applied Mathematics*, 10(2), pp. 134–149, 1972.

[Crow77] F.C. Crow, Shadow Algorithms for Computer Graphics, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '77)*, 11(2), pp. 242–248, 1977.

[Crow81] F.C. Crow, A Comparison of Antialiasing Techniques, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1(1), pp. 40–48, 1981.

[Cull86] R. Culley and K. Kempf, A Collision Detection Algorithm Based on Velocity and Distance Bounds, in *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Volume 2*, pp. 1064–1069, IEEE, Washington, D.C., 1986.

[Cunn90] S. Cunningham, *3D Viewing and Rotation Using Orthonormal Bases*, pp. 516–521, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[Daub99] I. Daubechies, I. Guskov and W. Sweldens, Regularity of Irregular Subdivision, *Constructive Approximation*, 15(3), pp. 381–426, 1999.

[dB72] C. de Boor, On Calculating with B-splines, *J. Approx. Theory*, 6(1), pp. 50–62, 1972.

[dC76] M.P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.

[Debe96] P.E. Debevec, C.J. Taylor and J. Malik, Modeling and Rendering Architecture from Photographs: A Hybrid Geometry and Image-Based Approach, in *Proceedings of SIGGRAPH 96, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 11–20, Addison Wesley, Reading, MA, 1996.

[Deer88] M.F. Deering, S. Winner, B. Schediwy, C. Duffy and N. Hunt, The Triangle Processor and Normal Vector Shader: a VLSI System for High-Performance Graphics, *Computer Graphics)Proc. SIGGRAPH '88*, 22(4), pp. 21–30, 1988.

[Delv85] L.M. Delves and J.L. Mohamed, *Computational Methods for Integral Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985.

[DeRo98] T. DeRose, M. Kass and T. Truong, Subdivision Surfaces in Character Animation, in *Proceedings of SIGGRAPH '98, Computer Gaphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 85–94, ACM, New York, 1998.

[Dey99] T.K. Dey, H. Edelsbrunner, S. Guha and D.V. Nekhayev, Topology Preserving Edge Contraction, *Publications de l'Institut Mathématique (Beograd)*, 66(80), pp. 23–45, 1999.

[DF97a] L. De Floriani, P. Magillo and E. Puppo, Building and Traversing a Surface at Variable Resolution, in *Proceedings of IEEE Visualization '97*, pp. 103–110, IEEE, Los Alamitos, CA, 1997.

[DF97b] L. De Floriani, E. Puppo and P. Magillo, A Formal Approach to Multiresolution Modeling, in W. Straßer, R. Klein and R. Rau (Eds.), *Geometric Modeling: Theory and Practice*, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg, 1997.

[DF98] L. De Floriani, P. Magillo and E. Puppo, Efficient Implementation of Multi-Triangulations, in *Proceedings of IEEE Visualization '98*, pp. 43–50, IEEE, Los Alamitos, CA, 1998.

[Dief96] P.J. Diefenbach, *Multi-Pass Pipeline Rendering: Interaction and Realism through Hardware Provisions*, Ph.D. thesis, University of Pennsylvania, 1996.

[dL99] W. de Leeuw and R. van Liere, Collapsing Flow Topology Using Area Metrics, in *Proceedings IEEE Visualization*, pp. 349–354, IEEE, Los Alamitos, CA, 1999.

[Doo78] D. Doo and M.A. Sabin, Behaviour of Recursive Subdivision Surfaces Near Extraordinary Points, *Computer Aided Design*, 10(6), pp. 356–360, 1978.

[Dreb88] R.A. Drebin, L. Carpenter and P. Hanrahan, Volume Rendering, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '88)*, 22(4), pp. 65–74, 8 1988.

[Duff85] T. Duff, Compositing 3D Rendered Images, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '85)*, 19(3), pp. 41–44, 1985.

[Dura02] F. Durand and J. Dorsey, Fast Bilateral Filtering for the Display of High-Dynamic-Range Images, *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH 2002)*, 21(3), pp. 257–266, 2002.

[Dyn90] N. Dyn, D. Levin and J.A. Gregory, A Butterfly Subdivision Scheme for Surface Interpolation with Tension Control, *ACM Transactions on Graphics*, 9(2), pp. 160–169, 1990.

[Dyn92] N. Dyn, Subdivision Schemes in Computer Aided Geometric Design, in W.A. Light (Ed.), *Advances in Numerical Analysis II, Wavelets, Subdivision Algorithms, and Radial Basis Functions*, pp. 36–104, Oxford University Press, Oxford, UK, 1992.

[Dyn02] N. Dyn and D. Levin, Subdivision Schemes in Geometric Modelling, *Acta Numerica*, 12, pp. 73–144, 2002.

[Edin05] University of Edinburgh, *Visualization*, 2005, URL `http://www.dcs.ed.ac.uk/teaching/cs4/handbook/html/node45.html`.

[Eric05] C. Ericson, *Real-Time Collision Detection*, Morgan Kaufmann, San Francisco, CA, 2005.

[Ever02] C. Everitt and M.J. Kilgard, *Practical and Robust Stenciled Shadow Volumes for Hardware-Accelerated Rendering*, Tech. rep., nVidia Corp., 2002, URL `http://developer.nvidia.com/object/robust_shadow_volumes.html`.

[Fari01] G. Farin, *Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide*, Morgan Kaufmann, 2001.

[Floy75] R. Floyd and L. Steinberg, An Adaptive Algorithm for Spatial Gray Scale, in *Society for Information Display 1975 Symposium Digest of Technical Papers*, pp. 36–37, Society for Information Display, San Jose, CA, 1975.

[Fors89] D. Forsyth and A. Zisserman, Mutual Illumination, in *IEEE Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 466–473, IEEE, Los Alamitos, CA, 1989.

[Fors95] L.K. Forssell and S.D. Cohen, Using Line Integral Convolution for Flow Visualization: Curvilinear Grids, Variable-Speed Animation, and Unsteady Flows, *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 1(2), pp. 133–141, 6 1995.

[Frie91] R.M. Friedhoff, *Visualization: The Second Computer Revolution*, W.H. Freeman & Company, New York, 1991.

[Fuch77] H. Fuchs, Distributing a Visible Surface Algorithm over Multiple Processors, in *ACM '77: Proceedings of the 1977 Annual Conference*, pp. 449–451, ACM, New York, NY, USA, 1977.

[Fuch80] H. Fuchs, Z. Kedem and B. Naylor, On Visible Surface Generation by a priori Tree Structures, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '80)*, 14(3), pp. 124–133, 1980.

[Fuch83] H. Fuchs, G.D. Abram and E.D. Grant, Near Real-Time Shaded Display of Rigid Objects, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '83)*, 17(3), pp. 65–72, 1983.

[Fuch85] H. Fuchs, J. Goldfeather, J.P. Hultquist, S. Spach, J.D. Austin, F.P. Brooks Jr., J.G. Eyles and J. Poulton, Fast Spheres, Shadows, Textures, Transparencies and Image Enhancements in Pixel-Planes, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '85)*, 19(3), pp. 111–120, 1985.

[Fuji86] A. Fujimoto, T. Tanaka and K. Iwata, ARTS: Accelerated Ray-Tracing System, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 6(4), pp. 16 – 26, 1986.

[Garc01] H. Garcke, T. Preusser, M. Rumpf, A. Telea, U. Weikard and J.J. van Wijk, A Phase Field Model for Continuous Clustering on Vector Fields, *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 7(3), pp. 230–241, 2001.

[Garl97] M. Garland and P.S. Heckbert, Surface Simplification Using Quadric Error Metrics, in *SIGGRAPH '97: Proceedings of the 24th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, pp. 209–216, ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., New York, 1997.

[Garl98] M. Garland and P.S. Heckbert, Simplifying Surfaces with Color and Texture using Quadric Error Metrics, in *Proceedings of IEEE Visualization '98*, pp. 263–270, IEEE, Los Alamitos, CA, 1998.

[Garl99] M. Garland, *Quadric-Based Polygonal Surface Simplification*, Ph.D. thesis, School of Computer Science, Carnegie-Mellon University, 1999.

[Gero05] C. Gerot, L. Barthe, N.A. Dodgson and M. Sabin, Subdivision as a Sequence of Sampled C^p Surfaces, in N. Dodgson, M. Floater and M. Sabin (Eds.), *Advances in Multiresolution for Geometric Modelling*, pp. 259–270, Springer-Verlag, berlin / Heidelberg, 2005.

[Gink06] I. Ginkel and G. Umlauf, Loop Subdivision with Curvature Control, in *Proc. Eurographics Symposium on Geometry Processing '06*, pp. 163–171, Eurographics Association, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2006.

[Glas84] A.S. Glassner, Space Subdivision for Fast Ray Tracing, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 4(10), pp. 15 – 22, 1984.

[Glas95] A.S. Glassner, *Principles of Digital Image Synthesis (two-volume set)*, Morgan-Kaufmann, San Francisco, CA, 1995.

[Gold71] R.A. Goldstein and R. Nagel, 3-D Visual Simulation, *Simulation*, 16(1), pp. 25–31, 1971.

[Gold87] J. Goldsmith and J. Salmon, Automatic Creation of Object Hierarchies for Ray Tracing, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 7(5), pp. 14 – 20, 1987.

[Gome99] J. Gomes, L. Darsa, B. Costa and L. Velho, *Warping and Morphing of Graphical Objects*, Morgan-Kaufmann, San Francisco, CA, 1999.

[Gord94] D. Gordon, M. Peterson and R. Reynolds, Fast Polygon Scan Conversion with Medical Applications, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 14(6), pp. 20–27, 1994.

[Gort96] S.J. Gortler, R. Grzeszczuk, R. Szeliski and M.F. Cohen, The Lumigraph, in *Proceedings of SIGGRAPH 96, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 43–52, Addison Wesley, Reading, MA, 1996.

[Gott96] S. Gottschalk, M.C. Lin and D. Manocha, OBBTree: A Hierarchical Structure for Rapid Interference Detection, in *Proceedings of SIGGRAPH 96, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 171–180, Addison Wesley, Reading, MA, 1996.

[Gour71] H. Gouraud, Continuous Shading of Curved Surfaces, *IEEE Transactions on Computers*, C-20, pp. 623–628, 1971.

[Gray97] A. Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1997.

[Gree86] N. Greene and P.S. Heckbert, Creating Raster Omnimax Images from Multiple Perspective Views Using the Elliptical Weighted Average Filter, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 6(6), pp. 21–27, 1986.

[Gree04] S. Green and G. Turkiyyah, Second Order Accurate Constraint Formulation for Subdivision Finite Element Simulation of Thin Shells, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61, pp. 380–405, 2004.

[Gree05] S. Green and G. Turkiyyah, A Rotation-Free Quadrilateral Thin Shell Subdivision Finite Element, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 21, pp. 757–767, 2005.

[Greg97] R.L. Gregory, *Eye and Brain: The Physiology of Seeing*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 5th edn., 1997.

[Grei98] G. Greiner and K. Hormann, Efficient Clipping of Arbitrary Polygons, *ACM Transactions on Graphics*, 17(2), pp. 71–83, 1998.

[Grin02] E. Grinspun, P. Krysl and P. Schröeder, CHARMS: A Simple Framework for Adaptive Simulation, *ACM Transanctions on Graphics*, 21(3), pp. 281–290, 2002.

[Gu02] X. Gu, S.J. Gortler and H. Hoppe, Geometry Images, *Transactions on Graphics (Proc. SIGGRAPH '02)*, 21(3), pp. 355–361, 2002.

[Guen05] E. Guendelman, A. Selle, F. Losasso and R. Fedkiw, Coupling Water and Smoke to Thin Deformable and Rigid Shells, pp. 973–981, ACM, New York, 2005.

[Guib85] L. Guibas and J. Stolfi, Primitives for the Manipulation of General Subdivisions and the Computation of Voronoi Diagrams, *ACM Transactions on Graphics*, 4(2), pp. 74–123, Apr. 1985.

[Hain91] E. Haines, Fast Ray-Convex Polyhedron Intersection, in J. Arvo (Ed.), *Graphics Gems II*, pp. 247–250 and code, Academic Press, San Diego, 1991.

[Hall93] P. Hall, Volume Rendering for Vector Fields, *The Visual Computer*, 10(2), pp. 69–78, 1993.

[Hals93] M. Halstead, M. Kass and T. DeRose, Efficient, Fair Interpolation Using Catmull-Clark Surfaces, in *SIGGRAPH '93: Proceedings of the 20th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, pp. 35–44, ACM, New York, 1993.

[Hamm64] J.M. Hammersley and D.C. Handscomb, *Monte Carlo Methods*, Methuen London/Chapman and Hall, London, UK, 1964.

[Han03] B. Han, Computing the Smoothness Exponent of a Symmetric Multivariate Refinable Function, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 24(3), pp. 693–714, 2003.

[Hanr91] P. Hanrahan, D. Salzman and L. Aupperle, A Rapid Hierarchical Radiosity Algorithm, in *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '91)*, vol. 25, pp. 197–206, Jul. 1991.

[Hanr98] P. Hanrahan, Scan Conversion: Lines and Curves, Stanford Course Notes, 1998, URL `http://graphics.stanford.edu/courses/cs248-97-winter/Lectures/lecture7/`.

[Hanr05] P. Hanrahan, Teaching Visualization, *Computer Graphics*, 39(1), pp. 4–5, 2 2005.

[Harr04] M. Harris and E. Reingold, Line Drawing, Leap Years, and Euclid, *ACM Computing Surveys*, 36(1), pp. 68–80, 2004.

[Heck89] P.S. Heckbert, *Fundamentals of Texture Mapping and Image Warping*, Master's thesis, University of California, Berkeley, 1989.

[Heck91] P.S. Heckbert and H.P. Moreton, Interpolation for Polygon Texture Mapping and Shading, in D.F. Rogers and R.A. Earnshaw (Eds.), *State of the Art in Computer Graphics, Visualization and Modeling*, pp. 101–111, Springer-Verlag, New York, 1991.

[Heck99] B. Heckel, G. Weber, B. Hamann and K.I. Joy, Construction of Vector Field Hierarchies, in *IEEE Visualization '99*, pp. 19–25, IEEE, los Alamitos, CA, 1999.

[Heid91] T. Heidmann, Real Shadows Real Time, *IRIS Universe*, 18, pp. 28–31, 1991.

[Heid99] W. Heidrich and H.P. Seidel, Realistic, Hardware-Accelerated Shading and Lighting, in *SIGGRAPH '99: Proceedings of the 26th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, pp. 171–178, ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., New York, Aug. 1999.

[Helg04] A. Helgeland and O. Andreassen, Visualization of Vector Fields Using Seed LIC and Volume Rendering, *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 10(6), pp. 673–682, 2004.

[Helm91] J.L. Helman and L. Hesselink, Visualizing Vector Field Topology in Fluid Flows, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 11(3), pp. 36–46, 1991.

[Hink93] P. Hinker and C. Hansen, Geometric Optimization, in *Proceedings of IEEE Visualization '93*, pp. 189–195, IEEE, Los Alamitos, CA, 1993.

[Hoff99] K. Hoff.III, T. Culver, J. Keyser, M. Lin and D. Manocha, Fast Computation of Generalized Voronoi Diagrams Using Graphics Hardware, in *Proceedings of SIGGRAPH 99, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 277–286, Addison Wesley Longman, Reading, MA, 1999.

[Hopp93] H. Hoppe, T. DeRose, T. Duchamp, J. McDonald and W. Stuetzle, Mesh Optimization, in *SIGGRAPH '93: Proceedings of the 20th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, pp. 19–26, ACM, New York, NY, USA, 1993, also available as the more detailed Technical Report TR UW CSE 1993-01-01.

[Hopp94] H. Hoppe, T. deRose, T. Duchamp, M. Halstead, H. Jin, J. McDonald, J. Schweitzer and W. Stuetzle, Piecewise Smooth Surface Reconstruction, in A. Glassner (Ed.), *Proceedings of SIGGRAPH 94, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 295–302, ACM Press, New York, 1994.

[Hopp96] H. Hoppe, Progressive Meshes, in *Proceedings of SIGGRAPH 96, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 99–108, Addison Wesley, Reading, MA, 1996.

[Hopp97] H. Hoppe, View-Dependent Refinement of Progressive Meshes, in *SIGGRAPH '97: Proceedings of the 24th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, pp. 189–198, ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., New York, 1997.

[Hopp98] H. Hoppe, Efficient Implementation of Progressive Meshes, *Computers & Graphics*, 22(1), pp. 27–36, 1998.

[Horn05] S. Hornus, J. Hoberock, S. Lefebvre and J.C. Hart, ZP+: Correct Z-pass Stencil Shadows, in *ACM Symposium on Interactive 3D Graphics and Games (I3D'05)*, pp. 195–202, ACM, New York, 2005.

[Hosc96] J. Hoschek and D. Lasser, *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*, A K Peters, Wellesley, MA, 1996.

[Huds97] T. Hudson, D. Manocha, J. Cohen, M. Lin, K. Hoff and H. Zhang, Accelerated Occlusion Culling Using Shadow Frustra, in *13th Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, pp. 1–10, ACM, New York, 1997.

[IBM07] IBM, *OpenDX User Guide, Version 4.4*, 2007, URL `http://www.opendx.org`.

[Illi00] V. Illingworth, *The Penguin Dictionary of Physics*, Penguin, London, UK, 2000.

[Inte98] V. Interrante and C. Grosch, Visualizing 3D Flow, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 18(4), pp. 49–53, 1998.

[Ione03] A. Iones, A. Krupkin, M. Sbert and S. Zhukov, Fast Realistic Lighting for Video Games, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 23(3), pp. 54–64, 2003.

[Ivri03] I. Ivrissimtzis, K. Shrivastava and H.P. Seidel, Subdivision Rules for General Meshes, in A. Cohen, J.L. Merrien and L. Schumaker (Eds.), *Curve and Surface Fitting: Saint-Malo 2002, Volume 2*, Proceedings of the 5th Conference on Curves and Surfaces, pp. 229–238, L' Association Française d'Approximation (AFA), Nashboro Press, Brentwood, NJ, 2003.

[Jarv76] J. Jarvis, C. Jundice and W. Ninke, A Survey of Techniques for the Display of Continuous Tone Pictures on Bilevel Displays, *Computer Graphics and Image Processing*, 5, pp. 13–40, 1976.

[Jens95] H.W. Jensen and N.J. Christensen, Photon Maps in Bidirectional Monte Carlo Ray Tracing of Complex Objects, *Computers & Graphics*, 19(2), pp. 215–224, 1995.

[Jens96a] H.W. Jensen, Global Illumination using Photon Maps, in *Eurographics Rendering Workshop*, pp. 21–30, Eurographics, aire-la-Ville, Switzerland, Jun. 1996.

[Jens96b] H.W. Jensen, Rendering Caustics on Non-Lambertian Surfaces, in *Proceedings of Graphics Interface*, pp. 116–121, Canadian Information Processing Society, Toronto, Ontario, 1996.

[Jens01] H.W. Jensen, *Realistic Image Synthesis Using Photon Mapping*, A K Peters, Natick, MA, 2001.

[Jia95] R.Q. Jia, Subdivision Schemes in l_p Spaces, *Advances in Computational Mathematics*, 3, pp. 309–341, 1995.

[Jime01] P. Jimenez, F. Thomas and C. Torras, 3D Collision Detection: A Survey, *Computers and Graphics*, 25(2), pp. 269–285, 2001.

[Jirk02] T. Jirka and V. Skala, *Gradient Vector Estimation and Vertex Normal Computation*, Tech. rep., University of West Bohemia in Pilsen, Czech Republic, TR DCSE/TR-2002-08, 2002.

[Jord87] C. Jordan, *Cours d'Analyze de l'Ecole Polytechnique*, 1887.

[Kaji85] J.T. Kajiya, Anisotropic Reflection Models, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '85)*, 19(3), pp. 15–21, 1985.

[Kaji86a] J.T. Kajiya, The Rendering Equation, in D.C. Evans and R.J. Athay (Eds.), *Computer Graphics (SIGGRAPH 1986 Proceedings)*, vol. 20, pp. 143–150, Aug. 1986.

[Kaji86b] J.T. Kajiya, The Rendering Equation, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '86)*, 20(4), pp. 143–150, Aug. 1986.

[Kalo86] M.H. Kalos and P. Whitlock, *The Monte Carlo Method. Volume 1: Basics*, J. Wiley and Sons, New York, 1986.

[Kalv96] A.D. Kalvin and R.H. Taylor, Superfaces: Polygonal Mesh Simplification with Bounded Error, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 16(3), pp. 64–77, 1996.

[Kara99] E. Karabassi, G. Papaioannou and T. Theoharis, A Fast Depth-Buffer-Based Voxelization Algorithm, *ACM Journal of Graphics Tools*, 4(4), pp. 5–10, 1999.

[Karc04] K. Karciauskas, J. Peters and U. Reif, Shape Characterization of Subdivision Surfaces: Case Studies, *Computer Aided Geometric Design*, 21(6), pp. 601–614, 2004.

[Kats05] P. Katsaloulis, P. Simos, D. Francis, A. Papanicolaou, I. Kakadiaris and T. Theoharis, 3D Visualization of MEG Activation Records within a Semi-Transparent Talairach Model Brain, in *1st International Conference on Geometric Modeling, Visualization & Graphics (GMV)*, Joint Conference on Information Sciences UT, 7 2005, URL `http://fs.mis.kuas.edu.tw/~cobol/JCIS2005/jcis05/prof390.html`.

[Kauf86] A. Kaufman and E. Shimony, 3D Scan-Conversion Algorithms for Voxel-Based Graphics, in *Proc. ACM Workshop on Interactive 3D Graphics*, pp. 45–76, ACM, New York, 1986.

[Kava03] L. Kavan and J. Zara, Real Time Skin Deformation with Bones Blending, in *The 11th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision*, 2003, URL `http://wscg.zcu.cz/wscg2003/Papers_2003/G61.pdf`.

[Kay86] T. Kay and J. Kajiya, Ray Tracing Complex Scenes, 20(4), pp. 269–278, 1986.

[Kilg00] M.J. Kilgard, *Improving Shadows and Reflections via the Stencil Buffer*, nvidia white paper, nVidia Corp., 2000.

[Klos98] J.T. Klosowski, M. Held, J.S. Mitchell, H. Sowizral and K. Zikan, Efficient Collision Detection Using Bounding Volume Hierarchies of k-DOPs, *IEEE Visualization and Computer Graphics*, 4(1), pp. 21–36, 1998.

[Kobb00] L. Kobbelt, $\sqrt{(}3)$ Subdivision, in *Proceedings SIGGRAPH '00, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 103–112, ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., New York, 2000.

[Kolb95] C. Kolb, D. Mitchell and P. Hanrahan, A Realistic Camera Model for Computer Graphics, in *Proceedings SIGGRAPH '95, Annual Conference Series*, pp. 317–324, ACM, New York, Aug. 1995.

[Koll03] T. Kollig and A. Keller, Efficient Illumination by High Dynamic Range Images, in *14th Eurographics Workshop on Rendering*, pp. 45–51, Eurographics Association, Aire-la-Ville, Switzerland, Jun. 2003.

[Kozl04] S. Kozlov, Perspective Shadow Maps: Care and Feeding, in R. Fernando (Ed.), *GPU Gems*, pp. 217–244, Addison-Wesley, Reading, MA, 2004.

[Kree98] K. Kreeger, I. Bitier, T. Dachille, B. Chen and A. Kaufman, Adaptive Perspective Ray Casting, in *IEEE Symposium on Volume Visualization*, pp. 55–62, ACM, New York, NY, USA, 1998.

[Kres89] R. Kress, *Linear Integral Equations*, Springer Verlag, Berlin /Heidelberg, 1989.

[Krey06] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, J. Wiley & Sons, New York, 2006.

[Lacr94] P. Lacroute and M. Levoy, Fast Volume Rendering using a Shear-Warp Factorization of the Viewing Transformation, in *Proceedings of SIGGRAPH 94, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 451–457, ACM Press, New York, 1994.

[Lafo94] E.P. Lafortune and Y.D. Willems, A Theoretical Framework for Physically Based Rendering, *Computer Graphics Forum*, 13(2), pp. 97–107, Jun. 1994.

[Lamb60] J.H. Lambert, *Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae (in Latin)*, 1760.

[Lars97] G.W. Larson, H. Rushmeier and C. Piatko, A Visibility Matching Tone Reproduction Operator for High Dynamic Range Scenes, *IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics*, 3(4), pp. 291–306, 1997.

[Lars98a] G. Larson, LogLuv Encoding for Full-Gamut, High-Dynamic Range Images, *journal of graphics tools*, 3(1), pp. 15–31, 1998.

[Lars98b] G. Larson, Overcoming Gamut and Dynamic Range Limitations in Digital Images, in *Proc. of IS&T 6th Color Imaging Conf.*, Society for Imaging Science and Technology, Springfield, VA, 1998.

[Ledo02] J. Ledoux, *Synaptic Self: How Our Brains Become Who We Are*, Penguin Books, London, 2002.

[Leng04] E. Lengyel, *Mathematics for 3D Game Programming & Computer Graphics*, Charles River Media Inc., Hingham, MA, 2nd edn., 2004.

[Levi99] A. Levin, Interpolating Nets of Curves by Smooth Subdivision Surfaces, in *Proceedings of SIGGRAPH 99, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 57–63, ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., New York, 1999.

[Levi06] A. Levin, Modified Subdivision Surfaces with Continuous Curvature, *ACM Transactions on Graphics*, 25(3), pp. 1035–1040, 2006.

[Levo96] M. Levoy and P. Hanrahan, Light Field Rendering, in *Proceedings of SIGGRAPH 96, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 31–41, Addison Wesley, Reading, MA, 1996.

[Levo00] M. Levoy, K. Pulli, B. Curless, S. Rusinkiewicz, D. Koller, L. Pereira, M. Ginzton, S. Anderson, J. Davis, J. Ginsberg, J. Shade and D. Fulk, The Digital Michelangelo Project: 3D Scanning of Large Statues, in *Proceedings SIGGRAPH '00, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 131–144, ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., New York, 2000.

[Levy02] B. Levy, S. Petitjean, N. Ray and J. Maillot, Least Squares Conformal Maps for Automatic Texture Atlas Generation, *ACM Transactions on Graphics*, 21(3), pp. 362–371, 2002.

[Lian84] Y. Liang and B. Barsky, A New Concept and Method for Line Clipping, *ACM Transactions on Graphics*, 3(1), pp. 1–22, 1984.

[Limb69] J.O. Limb, Design of Dither Waveforms for Quantized Visual Signals, *Bell Systems Technical Journal*, 48, pp. 2555–2582, 1969.

[Lin91] M.C. Lin and J.F. Canny, A Fast Algorithm for Incremental Distance Calculation, in *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1008–1014, IEEE, Washington, DC, 1991.

[Lin98] M. Lin and S. Gottschalk, Collision Detection Between Geometric Models: A Survey, in *Proceedings of IMA Conference on Mathematics of Surfaces*, Institute of Mathematics and Its Applications, Essex, UK, 1998.

[Lips74] M. Lipschutz, *Differential Geometry*, Schaum's Outlines Series, McGraw-Hill, New York, 1974.

[Lisc94] D. Lischinski, Incremental Delaunay Triangulation, in P. Heckbert (Ed.), *Graphics Gems IV*, pp. 47–59, Academic Press, San Diego, CA, 1994.

[Loop87] C.T. Loop, *Smooth Subdivision Surfaces Based on Triangles*, Master's thesis, University of Utah, Department of Mathematics, 1987.

[Loop98] C.T. Loop, Bounded Curvature Triangle Mesh Subdivision With the Convex Hull Property, *The Visual Computer*, 18(5–6), pp. 316–325, 1998.

[Lore87] W.E. Lorensen and H.E. Cline, Marching Cubes: A High Resolution 3D Surface Construction Algorithm, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '87)*, 21(4), pp. 163–169, 1987.

[Lueb95] D. Luebke and C. Georges, Portals and Mirrors: Simple, Fast Evaluation of Potentially Visible Sets, in *ACM Interactive 3D Graphics Conference*, ACM, New York, 1995.

[Malv69] L.E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, englewood Cliffs, NJ, 1969.

[Mand75] B. Mandelbrot, *Les objets fractals*, Flammarion, Paris, 1975.

[Marc77] R.E. Marc and H.G. Sperling, Chromatic Organization of Primate Cones, *Science*, 196, pp. 454–456, 1977.

[Mass04] V. Masselus, *A Practical Framework for Fixed Viewpoint Image-based Relighting*, Ph.D. thesis, Dept. of Computer Science, Katholieke Universiteit Leuven, 12 2004.

[McGu03] M. McGuire, J.F. Hughes, K.T. Egan, M.J. Kilgard and C. Everitt, *Fast, Practical, and Robust Shadows*, Technical report, nVidia Corp., 2003, URL `http://developer.nvidia.com/object/fast_shadow_volumes.html`.

[Meta96a] D.N. Metaxas, *Physics-Based Deformable Models: Applications to Computer Vision, Graphics and Medical Imaging*, Springer, Berlin / Heidelberg, 1996.

[Meta96b] D.N. Metaxas and I.A. Kakadiaris, Elastically Adaptive Deformable Models, in *Computer Vision - ECCV '96: Fourth European Conference on Computer Vision, Cambridge, UK April 14-18, 1996. Proceedings, Volume II (Lecture Notes in Computer Science)*, pp. 550–559, Springer, Berlin / Heidelberg, 1996.

[Meye03] M. Meyer, M. Desbrun, P. Schroeder and A. Barr, Discrete Differential-Geometry Operators for Triangulated 2-Manifolds, in H.C. Hege and K. Polthier (Eds.), *Visualization and Mathematics III*, pp. 35–57, Springer-Verlag, Heidelberg, 2003.

[Miha91] T. Mihalisin, J. Timlin and J. Schwegler, Visualizing Multivariate Functions, Data and Distributions, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 11(3), pp. 28–35, 5 1991.

[Mö97] T. Möller and B. Trumbore, Fast, Minimum Storage Ray-Triangle Intersection, *journal of graphics tools*, 2(1), pp. 21–28, 1997.

[Moln94] S. Molnar, M. Cox, D. Ellsworth and H. Fuchs, A Sorting Classification of Parallel Rendering, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 14(4), pp. 23–32, 1994.

[Muel95] C. Mueller, The Sort-First Rendering Architecture for High-Performance Graphics, in *SI3D '95: Proceedings of the 1995 symposium on Interactive 3D graphic*, pp. 75–84, ACM, New York, 1995.

[Mull93] H. Muller and M. Stark, Adaptive Generation of Surfaces in Volume Data, *The Visual Computer*, 9(4), pp. 182–199, 1993.

[Muns41] A.H. Munsell and R.B. Farnum, *A Color Notation: An Illustrated System Defining All Colors And Their Relations by Measured Scales of Hue, Value, and Chroma*, Munsell Color Company, 1941.

[Murc84] G. Murch, Physiological Principles for the Effective Use of Color, *IEEE Computer Graphics & Applications*, 4(11), pp. 49–54, 11 1984.

[Murr96] J.D. Murray and W. Van Ryper, Wavefront OBJ File Format Summary, in *Encyclopedia of Graphics File Formats*, 2nd edn., 1996, URL `http://www.fileformat.info/format/wavefrontobj/`.

[Nasr87] A. Nasri, Polyhedral Subdivision Methods for Free-Form Surfaces, *ACM Transactions on Graphics*, 6(1), pp. 29–73, 1987.

[Nasr91] A. Nasri, Boundary Corner Control in Recursive Subdivision Surfaces, *Computer Aided Design*, 23(6), pp. 405–410, 1991.

[Nasr95] A. Nasri, Interpolation of Meshes of Curves by Recursive Subdivision Surfaces, in *Fourth SIAM Conference on Geometric Design*, SIAM, Philadelphia, PA, 1995.

[Nasr97] A. Nasri, Curve Interpolation in Recursively Generated B-spline Surfaces Over Arbitrary Topology, *Computer Aided Geometric Design*, 14(1), pp. 13–30, 1997.

[Nasr00] A. Nasri, Recursive Subdivision of Polygonal Complexes and its Applications in CAGD, *Computer Aided Geometric Design*, 17(7), pp. 595–619, 2000.

[Nasr02a] A. Nasri and A. Abbas, Designing Catmull-Clark Subdivision Surfaces with Curve Interpolation Constraints, *Computer & Graphics*, 26(3), pp. 393–400, 2002.

[Nasr02b] A. Nasri and M. Sabin, Taxonomy of Interpolation Conditions in Recursive Subdivision Curves, *The Visual Computer*, 18(4), pp. 259–272, 2002.

[Nasr02c] A. Nasri and M. Sabin, Taxonomy of Interpolation Conditions in Recursive Subdivision Surfaces, *The Visual Computer*, 18(6), pp. 382–403, 2002.

[Nasr03a] A. Nasri, Interpolating an Unlimited Number of Curves Meeting at Extraordinary Points on Subdivision Surfaces, *Computer Graphics Forum*, 22(1), pp. 87–97, 2003.

[Nasr03b] A. Nasri, A. Abbas and I. Hasbini, Skinning Catmull-Clark Subdivision Surfaces with Incompatible Cross-sectional Curves, in *Pacific Graphics 2003*, pp. 102–111, IEEE Press, Washington, DC, 2003.

[Newe72] M. Newell, R. Newell and T. Sancha, A Solution to the Hidden Surface Problem, in *ACM'72: Proceedings of the ACM Annual Conference*, pp. 443–450, ACM, New York, 1972.

[Newm81] W. Newman and R. Sproull, *Principles of Interactive Computer Graphics*, McGraw Hill, 1981.

[Ngo93] J.T. Ngo and J. Marks, Spacetime Constraints Revisited, in *Proceedings of SIGGRAPH 93, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 343–350, ACM Press, New York, 1993.

[Nico77] F.E. Nicodemus, J.C. Richmond, J.J. Hsia, I.W. Ginsberg and T. Limperis, *Considerations and Nomenclature for Reflectance*, Tech. rep., U.S. Department of Commerce, 1977.

[Nire02] S. Nirenstein, E. Blake and J. Gain, Exact From Region Visibility Culling, in *Rendering Techniques 2002: Proceedings of the 13th Eurographics Workshop on Rendering*, pp. 191–202, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg, 2002.

[NSF87] NSF, *Visualization in Scientific Computing*, Tech. rep., NSF Panel on Graphics, Image Processing, and Workstations, 1987.

[O'Ne66] B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, New York, 1966.

[Open07a] OpenDX, The Open Source Software Project Based on IBM'S Visualization Data Project, 2007, URL `http://www.opendx.org/`.

[Open07b] OpenGL, OpenGL Homepage, 2007, available 0nline at `http://www.opengl.org`.

[Opre97] J. Oprea, *Differential Geometry and its Applications*, Prentice-Hall, englewood Cliffs, NJ, 1997.

[Oren92] M. Oren and S.K. Nayar, *Generalization of the Lambertian Model and Implications for Machine Vision*, Tech. Rep. CUCS-057-92, Department of Computer Science, Columbia University, New York, USA, 1992.

[Oren94] M. Oren and S.K. Nayar, Generalization of Lambert's Reflectance Model, in *Proceedings of SIGGRAPH 94, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 239–246, ACM Press, New York, 1994.

[O'Ro98] J. O'Rourke, *Computational Geometry in C*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2nd edn., 1998.

[Over97] C. Overveld and B. Wyvill, Phong Normal Interpolation Revisited, *ACM Transactions on Graphics*, 16(4), pp. 397–410, 1997.

[Owen99] G.S. Owen, Emotional Response to Color, 1999, URL `http://www.siggraph.org/education/materials/HyperGraph/color/coloremo.htm`.

[Pakd05] H.R. Pakdel and F. Samavati, Incremental Catmull-Clark Subdivision, in *5th International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling*, pp. 95–102, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, 6 2005.

[Palm95] J. Palmer, Getting Intense on Intensity, *Optics and Photonics News*, pp. 6–6, February 1995.

[Palm05] J. Palmer, *Radiometry and Photometry FAQ*, University of Arizona, Optical Sciences Center, http://www.optics.arizona.edu/Palmer/rpfaq/rpfaq.htm, 2005.

[Papa00] G. Papaioannou, E.A. Karabassi and T. Theoharis, Segmentation and Surface Characterization of Arbitrary 3D Meshes for Object Reconstruction and Recognition, in *IEEE International Conference on Pattern Recognition*, pp. 734–737, IEEE, Washington, DC, 2000.

[Papa02] G. Papaioannou, E.A. Karabassi and T. Theoharis, Reconstruction of Three-Dimensional Objects through Matching of their Parts, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24(1), pp. 114–124, 2002.

[Papa06] G. Papaioannou, A. Gaitatzes and D. Christopoulos, Efficient Occlusion Culling using Solid Occluders, in *14th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision (WSCG '2006)*, pp. 87–94, University of West Bohemia, Plzen, Czech Republic, 2006.

[Pare01] R. Parent, *Computer Animation: Algorithms and Techniques*, Morgan Kaufmann, San Francisco, 2001.

[Pass04] G. Passalis, I. Kakadiaris and T. Theoharis, Efficient Hardware Voxelization, in *Computer Graphics International 2004*, pp. 374–377, IEEE, Washington, DC, 2004.

[Pass06] G. Passalis, T. Theoharis and I. Kakadiaris, PTK: A Novel Depth Buffer-Based Shape Descriptor for Three-Dimensional Object Retrieval, *The Visual Computer*, 23(1), pp. 5–14, 2006.

[Past02] M.J. Pastizzo, R.F. Erbacher and L.B. Feldman, Multi-Dimensional Data Visualization, *Behavior Research Methods, Instruments, and Computers*, 34(2), pp. 158–162, 2002.

[Patr02] N.M. Patrikalakis and T. Maekawa, *Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing (Mathematics and Visualization)*, Springer, Berlin /Heidelberg, 2002.

[Perl85] K. Perlin, An Image Synthesizer, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '85)*, 19(3), pp. 287–296, 1985.

[Perl89] K. Perlin and E.M. Hoffert, Hypertexture, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '89)*, 23(3), pp. 254–262, 1989.

[Pete97] J. Peters and U. Reif, The Simplest Subdivision Scheme for Smoothing Polyhedra, *ACM Transactions on Graphics*, 16(4), pp. 420–431, 1997.

[Pete98] J. Peters and U. Reif, Analysis of Algorithms Generalizing B-Spline Subdivision, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35(2), pp. 728–748, 1998.

[Pete00] J. Peters and G. Umlauf, Gaussian and Mean Curvature of Subdivision Surfaces, in *Proc. Ninth IMA Conference on The Mathematics of Surfaces*, pp. 59–69, Springer-Verlag, London, UK, 2000.

[Pete03] J. Peters and J.L. Shiue, 4-3 Directionally Ripple-free Subdivision, *ACM Transactions on Graphics*, 23(4), pp. 980–1003, 2003.

[Pete04] J. Peters and U. Reif, Shape Characterization of Subdivision Surfaces: Basic Principles, *Computer Aided Geometric Design*, 21(6), pp. 585–599, 2004.

[Phon75] B. Phong, Illumination for Computer Generated Pictures, *Communications of the ACM*, 18(6), pp. 311–317, 1975.

[Pitt80] M. Pitteway and D. Watkinson, Bresenham's Algorithm with Gray Scale, *Communications of the ACM*, 23(11), pp. 625–626, 1980.

[Plak05] E. Plaku, K. Bekris, B. Chen, A. Ladd and L. Kavraki, Sampling-Based Roadmap of Trees for Parallel Motion Planning, *IEEE Transactions on Robotics*, 21(4), pp. 597–608, 2005.

[Plat03] N. Platis and T. Theoharis, Progressive Hulls for Intersection Applications, *Computer Graphics Forum*, 22(2), pp. 107–116, 2003.

[Plat04] N. Platis and T. Theoharis, Simplification of Vector Fields over Tetrahedral Meshes, in *CGI '04: Proceedings of the Computer Graphics International (CGI'04)*, pp. 174–181, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, 2004.

[PLY07] The PLY File Format, 2007, URL `http://www.cc.gatech.edu/projects/large\_models/ply.html`.

[Popo00] J. Popovic, S. Seitz, M. Erdmann, Z. Popovic and A. Witkin, Interactive Manipulation of Rigid Body Simulations, in *Proceedings of SIGGRAPH 2000, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 209–217, Addison-Wesley, Reading, MA, 2000.

[Port84] T. Porter and T. Duff, Compositing Digital Images, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '84)*, 18(3), pp. 253–259, 1984.

[Poul90] P. Poulin and A. Fournier, A Model for Anisotropic Reflection, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '90)*, 24(4), pp. 273–282, 1990.

[Prau98] H. Prautzsch and G. Umlauf, A G^2 Subdivision Algorithm, in G. Farin, H. Bieri, G. Brunnet and T. DeRose (Eds.), *Geometric Modeling, Computing Supplements*, pp. 217–224, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg, 1998.

[Prau99] H. Prautzsch and U. Reif, Degree Estimates for C^k-Piecewise Polynomial Subdivision Surfaces, *Advances in Computational Mathematics*, 10(2), pp. 209–217, 1999.

[Prep85] F.P. Preparata and M.I. Shamos, *Computational Geometry: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[Pupp97] E. Puppo and R. Scopigno, *Simplification, LOD and Multiresolution—Principles and Applications*, Eurographics '97 Tutorial Notes, The Eurographics Association, Aire-la-Ville, Switzerland, 1997.

[Pupp98] E. Puppo, Variable Resolution Triangulations, *Computational Geometry*, 11(3–4), pp. 219–238, Dec. 1998.

[Purn04] B. Purnomo, J.D. Cohen and S. Kumar, Seamless Texture Atlases, in *Eurographics Symposium on Geometry Processing*, pp. 67–76, Eurographics, Aire-la-Ville, Switzerland, 2004.

[Raub93] T. Rauber, *Algorithmen in der Computergraphik*, B.G. Teubner, Berlin, 1993.

[Redd96] M. Reddy, SCROOGE: Perceptually Driven Polygon Reduction, *Computer Graphics Forum*, 15(4), pp. 191–203, 1996.

[Reev83] W.T. Reeves, Particle Systems—A Technique for Modeling a Class of Fuzzy Objects, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '83)*, 17(3), pp. 359–375, 1983.

[Reev87] W.T. Reeves, D.H. Salesin and R.L. Cook, Rendering Antialiased Shadows with Depth Maps, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '87)*, 21(4), pp. 283–291, 1987.

[Reif79] J. Reif, Complexity of the Mover's Problem and Generalizations, in *20th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 421–427, IEEE, Washington, DC, 1979.

[Reif96] U. Reif, A Degree Estimate for Subdivision Surfaces of Higher Regularity, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124(7), pp. 2167–2174, 1996.

[Reif06] U. Reif and J. Peters, Structural Analysis of Subdivision Surfaces—A Summary, in K. Jetter, M. Buhmann, W. Haussmann, R. Schaback and J. Stoeckler (Eds.), *Topics in Multivariate Approximation and Interpolation*, pp. 149–190, Elsevier Science Ltd, Amsterdam, 2006.

[Rein05] E. Reinhard, G. Ward, S. Pattanaik and P. Debevec, *High Dynamic Range Imaging: Acquisition, Display, and Image-Based Lighting*, Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, 2005.

[Reyn87] C. Reynolds, Flocks, Herds and Schools: A Distributed Behavioral Model, *Computer Graphics*, 21(4), pp. 25–34, 1987.

[Ries75] R.F. Riesenfeld, On Chaikin's Algorithm, *Computer Graphics and Image Processing*, 4, pp. 304–310, 1975.

[Riou92] O. Rioul, Simple Regularity Criteria for Subdivision Schemes, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23(6), pp. 1544–1576, 1992.

[Rost04] R.J. Rost, *OpenGL Shading Language*, Addison Wesley, Boston, 2004.

[Rouj04] J.L. Roujean, C.B. Schaaf and W. Lucht, Fundamentals of Di-Directional Reflectance and BRDF Modeling, in M. von Schoenmark, B. Geiger and H. Roeser (Eds.), *Reflective Properties of Vegetation and Soil*, pp. 105–120, Wissenshaft und Technik Verlag, Berlin, 2004.

[Rubi80] S.M. Rubin and T. Whitted, A 3-Dimensional Representation for Fast Rendering of Complex Scenes, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '80)*, 14(3), pp. 110–116, 1980.

[Sabi91] M. Sabin, Cubic Recursive Division with Bounded Curvature, in P.J.Laurent, A.L. Méhauté and L.L. Schumaker (Eds.), *Curves And Surfaces*, pp. 411–414, Academic Press, New York, 1991.

[Sabi02] M.A. Sabin, Eigenanalysis and Artifacts of Subdivision Curves and Surfaces, in A. Iske, E. Quak and M.S. Floater (Eds.), *Tutorials on Multiresolution in Geometric Modelling*, pp. 69–97, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg, 2002.

[Sabi03] M.A. Sabin and L. Barthe, Artifacts in Recursive Subdivision Surfaces, in *Proc. Curve and Surface Fitting '02*, pp. 353–362, Nashboro Press, Brentwood, TN, 2003.

[Sabi04] M. Sabin, Recent Progress in Subdivision: A Survey, in N. Dodgson, M. Floater and M. Sabin (Eds.), *Advances in Multiresolution for Geometric Modelling*, pp. 203–230, Springer, Berlin / Heidelberg, 2004.

[Sand00] P.V. Sander, X. Gu, S.J. Gortler, H. Hoppe and J. Snyder, Silhouette Clipping, in *Proceedings of SIGGRAPH 2000, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 327–334, Addison-Wesley, Reading, MA, 2000.

[Sand01] P.V. Sander, J. Snyder, S.J. Gortler and H. Hoppe, Texture Mapping Progressive Meshes, in *Proceedings of SIGGRAPH 2001, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 409–416, Addison-Wesley, Reading, MA, 2001.

[Sand03] P. Sander, Z. Wood, S. Gortler, J. Snyder and H. Hoppe, Multi-Chart Geometry Images, in *Eurographics Symposium on Geometry Processing*, pp. 146–155, Eurographics, Aire=la=Ville, Switzerland, 2003.

[Scha04] S. Schaefer, D. Zorin and J. Warren, Lofting Curve Networks with Subdivision Surfaces, in *Proceedings of Eurographics Symposium on Graphics Processing*, pp. 105–116, Eurographics, Aire-la-Ville, Switzerland, 2004.

[Schm02] J. Schmittler, I. Wald and P. Slusallek, SaarCOR—A Hardware Architecture for Ray Tracing, in *Proc. EUROGRAPHICS Graphics Hardware 2002*, pp. 1–11, Eurographics, Aire-la-Ville, 2002.

[Schn03] P.J. Schneider and D.H. Eberly, *Geometric Tools for Computer Graphics*, Morgan Kaufmann, San Francisco, 2003.

[Sede98] T.W. Sederberg, J. Zheng, D. Sewell and M. Sabin, Non-Uniform Subdivision Surfaces, in M. Cohen (Ed.), *Proceedings of SIGGRAPH 98, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 387–394, Addison Wesley, Reading, MA, 1998.

[Seet04] H. Seetzen, W. Heidrich, W. Stuerzlinger, G. Ward, L. Whitehead, M. Trentacoste, A. Ghosh and A. Vorozcovs, High Dynamic Range Display System, *ACM Trans. Graph.*, 23(3), pp. 760–768, 2004.

[Sega92] M. Segal, C. Korobkin, R. van Widenfelt, J. Foran and P. Haeberli, Fast Shadows and Lighting Effects Using Texture Mapping, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '92)*, 26(2), pp. 249–252, 1992.

[Sega04] The OpenGL Graphics System: A Specification, Version 2.0, 10 2004, URL `http://www.opengl.org/documentation/specs/version2.0/glspec20.pdf`.

[Shad98] J. Shade, S. Gortler, L.W. He and R. Szeliski, Layered Depth Images, in *Proceedings of SIGGRAPH 98, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 231–242, Addison Wesley, Reading, MA, 1998.

[Shao06] W. Shao and D. Terzopoulos, Populating Reconstructed Archaeological Sites with Autonomous Virtual Humans, in *Intelligent Virtual Agents (IVA 06)*, Lecture Notes in Computer Science, 4133, pp. 420–433, Springer, Berlin / Heidelberg, 2006.

[Shao07] W. Shao and D. Terzopoulos, Autonomous Pedestrians, *Graphical Models*, 69(5-6), pp. 246–274, 2007.

[Shef05] A. Sheffer, B. Levy, M. Mogilnitsky and A. Bogomyakov, ABF++: Fast and Robust Angle Based Flattening, *ACM Transactions on Graphics*, 24(2), pp. 311–330, 2005.

[Shir97] P. Shirley and K. Chiu, A Low Distortion Map Between Disk and Square, *journal of graphics tools*, 2(3), pp. 45–52, 1997.

[Shir00] P. Shirley, *Realistic Ray Tracing*, A K Peters, Wellesley, MA, 2000.

[Shoe85] K. Shoemake, Animating Rotation with Quaternion Curves, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '85)*, 19(3), pp. 245–254, 1985.

[Shoe87] K. Shoemake, *Quaternion Calculus and Fast Animation*, ACM, New York, 1987.

[Shor05] N. Short, *The Remote Sensing Tutorial*, NASA, 2005, URL `http://rst.gsfc.nasa.gov/`.

[SIGG01] A. SIGGRAPH, SIGGRAPH Education Materials on Anti-Aliasing, 2001, URL `http://www.siggraph.org/education/materials/HyperGraph/aliasing/alias0.htm`.

[Sigg05] C. Sigg and M. Hadwiger, Fast Third-Order Texture Filtering, in M. Pharr (Ed.), *GPU Gems 2*, pp. 313–329, Addison-Wesley, Reading, MA, 2005.

[Sill94] F. Sillion and C. Puech, *Radiosity and Global Illumination*, Morgan Kaufmann, San Francisco, 1994.

[Skal05] V. Skala, A New Approach to Line and Line Segment Clipping in Homogeneous Coordinates, *The Visual Computer*, 21(11), pp. 905–914, 2005.

[Spiv92] J.M. Spivey, *The Z Notation: A Refernce Manual*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2nd edn., 1992.

[Spro82] R. Sproull, Using Program Transformations to Derive Line-Drawing Algorithms, *ACM Transactions on Graphics*, 1(4), pp. 259–273, 1982.

[Stam98] J. Stam, Exact Evaluation of Catmull-Clark Subdivision Surfaces at Arbitrary Parameter Values, in *SIGGRAPH '98: Proceedings of the 25th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, pp. 395–404, ACM, New York, NY, USA, 1998.

[Stam02] M. Stamminger and G. Drettakis, Perspective Shadow Maps, *Transactions on Graphics (Proc. SIGGRAPH '02)*, 21(3), pp. 557–562, 2002.

[Stam03] J. Stam and C. Loop, Quad/Triangle Subdivision, *Computer Graphics Forum*, 22(1), pp. 79–85, 2003.

[Star97] M. Stark, H. Muller and U. Welsch, Variations of the Splitting Box Scheme for Adaptive Generation of Contour Surfaces in Volume Data, in G.M. Nielson, H. Hagen and H. Muller (Eds.), *Scientific Visualization*, IEEE Press, washington, DC, 1997.

[Stra90] P.S. Strauss, A Realistic Lighting Model for Computer Animators, *IEEE Computer Graphics & Applications*, 10(6), pp. 56–64, 1990.

[Stra03] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, MA, 2003.

[Suth63] I. Sutherland, Sketchpad: A Man-Machine Graphical Communication System, in *AFIPS Conference proceedings Vol. 23 of the Spring Joint Computer Conference*, 1963.

[Suth74a] I. Sutherland and G. Hodgman, Reentrant Polygon Clipping, *Communications of the ACM*, 17(1), pp. 32–42, 1974.

[Suth74b] I. Sutherland, R. Sproull and R. Schumacker, A Characterization of Ten Hidden Surface Algorithms, *ACM Computing Surveys*, 6(1), pp. 1–55, 1974.

[Talb05] J. Talbot, D. Cline and P. Egbert, Importance Resampling for Global Illumination, in *Rendering Techniques 2005: 16th Eurographics Workshop on Rendering*, pp. 139–146, Eurographics, Aire-la-Ville, Switzerland, Jun. 2005.

[Tecc02] F. Tecchia, C. Loscos and Y. Chrysanthou, Image-Based Crowd Rendering, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 22(2), pp. 36–43, 2002.

[Tele99] A. Telea and J.J.V. Wijk, Simplified Representation of Vector Fields, in *VIS '99: Proceedings of the conference on Visualization '99*, pp. 35–42, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, USA, 1999.

[Tell91] S. Teller and C. Sequin, Visibility Preprocessing for Interactive Walkthroughs, *Computer Graphics (SIGGRAPH '91)*, 25(4), pp. 61–69, 1991.

[Tera05] J. Teran, E. Sifakis, G. Irving and R. Fedkiw, Robust Quasistatic Finite Elements and Flesh Simulation, in K. Anjyo and P. Faloutsos (Eds.), *Proceedings of ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, pp. 181–190, ACM, New York, 2005.

[Terz87] D. Terzopoulos, J. Platt, A. Barr and K. Fleisher, Elastically Deformable Models, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '87)*, 21(4), pp. 205–214, 1987.

[Terz91] D. Terzopoulos and D.N. Metaxas, Dynamic 3D Models with Local and Global Deformations: Deformable Superquadrics, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(7), pp. 703–714, 1991.

[Terz94] D. Terzopoulos and H. Qin, Dynamic NURBS with Geometric Constraints for Interactive Sculpting, *ACM Transactions on Graphics*, 13(2), pp. 103–136, 4 1994.

[Theo89a] T. Theoharis, *Algorithms for Parallel Polygon Rendering*, Lecture Notes in Computer Science 373, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[Theo89b] T. Theoharis and I. Page, Two Parallel Methods for Polygon Clipping, *Computer Graphics Forum*, 8, pp. 107–114, 1989.

[Theo90] T. Theoharis, A. Travis and N. Wiseman, 3D Display: Simulation and Synthetic Image Production, *Computer Graphics Forum*, 9, pp. 337–348, 1990.

[Theo01] T. Theoharis, G. Papaioannou and E. Karabassi, The Magic of The Z-Buffer: A Survey, in *WSCG '98 (Ninth European Conference in Central Europe on Computer Graphics and Visualization)*, pp. 379–386, University of West Bohemia, Plzen, Czech Republic, 2001.

[Thom06] B. Thomaszewski, M. Wacker and W.B. Straber, A Consistent Bending Model for Cloth Simulation with Corotational Subdivision Finite Elements, in M.-P. Cani, J.O'Brien (Ed.), *Proceedings of ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, ACM, New York, 2006.

[Thue98] G. Thuermer and A. Wuthrich, Computing Vertex Normals from Polygonal Facets, *journal of graphics tools*, 3(1), pp. 43–46, 1998.

[Torr67] K.E. Torrance and E.M. Sparrow, Theory for Off-Specular Reflection from Roughened Surfaces, *Journal of the Optical Society of America*, 57(9), pp. 1105–1114, 1967.

[Tric00] X. Tricoche, G. Scheuermann and H. Hagen, A Topology Simplification Method For 2D Vector Fields, in *Proc. IEEE Visualization 2000*, pp. 359–366, IEEE, Washington, DC, 2000.

[Tu94] X. Tu and D. Terzopoulos, Artificial Fishes: Physics, Locomotion, Perception, Behavior, in *Proceedings of SIGGRAPH 94, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 43–50, ACM Press, New York, 1994.

[Tumb99] J. Tumblin and G. Turk, LCIS: A Boundary Hierarchy for Detail-Preserving Contrast Reduction, in *Proceedings of SIGGRAPH 99, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 83–90, Addison Wesley Longman, Reading, MA, 1999.

[Umla00] G. Umlauf, Analyzing the Characteristic Map of Triangular Subdivision Schemes, *Constructive Approximation*, 16(1), pp. 145–155, 2000.

[Umla05] G. Umlauf, Analysis and Tuning of Subdivision Algorithms, in *Proc. 21st Spring Conference on Computer Graphics*, pp. 33–40, ACM, New York, NY, USA, 2005.

[Upso89] C. Upson, T. Faulhaber Jr., D. Kamins, D. Laidlaw, D. Schlegel, J. Vroom, R. Gurwitz and A. van Dam, The Application Visualization System: A Computational Environment for Scientific Visualization, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 9(4), pp. 30–42, 1989.

[Vatt92] B. Vatti, A Generic Solution to Polygon Clipping, *Communications of ACM*, 35(7), pp. 57–63, 1992.

[Veac94] E. Veach and L.J. Guibas, Bidirectional Estimators for Light Transport, in *Fifth Eurographics Workshop on Rendering*, pp. 147–162, Eurographics, Aire-la-Ville, Switzerland, Jun. 1994.

[Veac97] E. Veach, *Robust Monte Carlo Methods for Light Transport Simulation*, Ph.D. thesis, Stanford University, Department of Computer Science, Dec. 1997.

[Velh01a] L. Velho, Quasi 4 – 8 Subdivision, *Computer Aided Geometric Design*, 18(4), pp. 345–357, 2001.

[Velh01b] L. Velho and D. Zorin, 4 – 8 Subdivision, *Computer Aided Geometric Design*, 18(5), pp. 397–427, 2001.

[Wald01] I. Wald and P. Slusallek, State of the Art in Interactive Ray Tracing, in *State of the Art Reports, EUROGRAPHICS 2001*, pp. 21–42, Eurographics, Aire-la-Ville, Switzerland, 2001.

[Wald02] I. Wald, C. Benthin and P. Slusallek, *A Flexible and Scalable Rendering Engine for Interactive 3D Graphics*, Tech. Rep. TR-2002-01, Computer Graphics Group, Saarland University, 2002.

[Ward91] G. Ward, Real Pixels, in J. Arvo (Ed.), *Graphics Gems II*, pp. 80–82, Academic Press, San Diego, 1991.

[Ward92] G.J. Ward, Measuring and Modeling Anisotropic Reflection, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '92)*, 26(2), pp. 265–272, 1992.

[Ward94] G. Ward, The RADIANCE Lighting Simulation and Rendering System, in *Proceedings of SIGGRAPH 94, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 459–472, ACM Press, New York, 1994.

[Ward01] G. Ward, High Dynamic Range Imaging, in *IS&T/SID's Ninth Color Imaging Conference*, Society for Imaging Science and Technology, Springfield, VA, 2001.

[Warn69] J. Warnock, *A Hidden Surface Algorithm for Computer Generated Half-Tone Pictures*, University of Utah, Department of Computer Science, Salt Lake City, Utah, TR 4-15, 1969.

[Warr01] J. Warren and H. Weimer, *Subdivision Methods for Geometric Design*, Morgan Kaufmann, San Francisco, 2001.

[Watt01] A. Watt and F. Policarpo, *3D Games: Real-Time Rendering and Software Technology*, vol. 1, Addison-Wesley, Harlow, UK, 2001.

[Weil85] K. Weiler, Edge-Based Data sSructures for Solid Modeling in Curved-Surface Environments, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 5(1), pp. 21–40, 1985.

[Weis04] E.W. Weisstein, Conic Section, MathWorld – A Wolfram Web Resource, 2004, URL `http://mathworld.wolfram.com/ConicSection.html`.

[West90] L. Westover, Footprint Evaluation for Volume Rendering, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '90)*, 24(4), pp. 367–376, 1990.

[Whit80] T. Whitted, An Improved Illumination Model for Shaded Display, *ACM Communications*, 26(6), pp. 342–349, 1980.

[Whit92] S. Whitman, *Multiprocessor Methods for Computer Graphics Rendering*, Jones and Bartlett, Boston, MA, 1992.

[Will78] L. Williams, Casting Curved Shadows on Curved Surfaces, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '78)*, 12(3), pp. 270–274, 1978.

[Will83] L. Williams, Pyramidal Parametrics, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '83)*, 17(3), pp. 1–11, 1983.

[Will98] L. Williams, Casting Curved Shadows on Curved Surfaces, in *Seminal Graphics: Pioneering Efforts that Shaped the Field*, pp. 51–55, ACM, New York, 1998.

[Will06] P. Willis, Projective Alpha Color, in *Proceedings Eurographics 2006*, pp. 557–566, Eurographics, Aire-la-Ville, Switzerland, 2006.

[Witk88] A. Witkin and M. Kass, Spacetime Constraints, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '88)*, 22(4), pp. 159–168, 1988.

[Wrig04] R. Wright Jr. and B. Lipchak, *OpenGL Superbible*, SAMS Publishing, Indianapolis, IN, 3rd edn., 2004.

[Wysz00] G. Wyszecki and W. Stiles, *Color Science: Concepts and Methods, Quantitative Data and Formulae*, Wiley, New York, 2000.

[Wyvi95] G. Wyvill, Practical Ray Tracing, Computer Graphics International 1995 Course Notes, 1995.

[Xia96] J.C. Xia and A. Varshney, Dynamic View-Dependent Simplification for Polygonal Models, in *Proceedings of IEEE Visualization '96*, pp. 327–334, IEEE, Washington, DC, 1996.

[Zhan02] H.x. Zhang and G.j. Wang, Honeycomb Subdivision, *J. of Software*, 13(5), pp. 1199–1208, 2002.

[Zhuk98a] S. Zhukov, A. Iones and G. Kronin, An Ambient Light Illumination Model, in *Rendering Techniques (Proc. Eurographics Rendering Workshop)*, pp. 45–55, Eurographics, Springer-Wien, Vienna, 1998.

[Zhuk98b] S. Zhukov, A. Iones and G. Kronin, Using Light Maps to Create Realistic Lighting in Real-time Applications, in *Central European Conference on Computer Graphics and Visualization (WSCG98)*, pp. 464–471, University of West Bohemia, Plzen, Czech Republic, 1998.

[Zien05] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*, Butterworth-Heinemann / Elsevier, Amsterdam, 6th edn., 2005.

[Zori96] D. Zorin, P. Schröder and W. Sweldens, Interpolating Subdivision for Meshes with Arbitrary Topology, in *Proceedings of ACM SIGGRAPH '96*, pp. 189–192, ACM Press, New York, 1996.

[Zori00] D. Zorin, P. Schröder, A. DeRose, L. Kobbelt, A. Levin and W. Sweldens, Subdivision for Modeling and Animation., ACM SIGGRAPH "00 Course Notes, 2000.

[Zuff02] M.K. Zuffo and H. Kaczmarski, Commodity Clusters for Immersive Projection Environments, *SIGGRAPH Course Notes*, 2002.

[Zult06] A. Zulti, A. Levin, D. Levin and M. Teicher, C^2 Subdivision Over Triangulations With One Extraordinary Point, *Computer Aided Geometric Design*, 23(2), pp. 157–178, 2006.

Ευρετήριο

Ελληνικοί όροι

Σύμβολα

over τελεστής, 351

A

ακτίνα
  κύρια/πρωτεύουσα, 526
  σκιάς, 531
ακτίνα καμπυλότητας, 663
αλγόριθμοι οπτικοποίησης, 619
αλγόριθμοι οπτικοποίησης όγκου, 627
αλγόριθμοι περικοπής, 141
αλγόριθμος
  Cohen-Sutherland, 58
  Bresenham, 36
  Greiner-Hormann, 69
  Liang-Barsky, 61
  line1, 34
  line2, 35
  Skala, 60
  Sutherland-Hodgman, 65
  άμεσου φωτισμού από μία πηγή με βάση την εξίσωση φωτισμού, 563
  άμεσου φωτισμού από πολλαπλές πηγές με βάση την εξίσωση φωτισμού, 565
  ανίχνευσης γειτονίας τριγώνων, 430
  αντιταύτιση, Catmull, 52
  αντιταύτιση, μετα-φιλτράρισμα, 55
  απλής στοχαστικής παρακολούθησης ακτίνων, 579
  αποκοπή, Cohen-Sutherland, 60
  αποκοπή, Greiner-Hormann, 70
  αποκοπή, Sutherland-Hodgman, 67
  βασικής εφαρμογής με γράφο σκηνής, 308
  γεμίσματος, 48
  δημιουργίας περιγράμματος πλεγματικού μοντέλου, 431
  κύκλος, 38
  παρακολούθησης ακτίνων (βασικός), 528
  πίνακας ακαμψίας 1, 282
  πίνακας ακαμψίας 2, 282
  πολύγωνο, βασικός, 42
  πολύγωνο, κατά γραμμές σάρωσης, 44
  πολύγωνο, κρίσιμα σημεία, 45
  πολυεδρικών σκιών, 423
  πολυεδρικών σκιών με χρήση μάσκας, 425
  ραδιοσιτψ, 555
  σκιών σε παρακολούθηση ακτίνων, 532
  στοχαστική παρακολούθησης ακτίνων, 580
  συμμετρία κύκλου, 39
  σχεδίασης κόμβου γράφου σκηνής, 307
  του de Boor, 208, 240
  του de Casteljau, 191, 238, 240
  τρίγωνο, 47
αλγόριθμος του Aitken, 224
αλγόριθμος του de Boor, 224
αλγόριθμος του de Casteljau, 220, 224, 237
αλλαγή κλίμακας
  ισοτροπική, 77
  ομοιόμορφη, 77
αλλαγή κλίμακας 2Δ, 77
αλλαγή κλίμακας 3Δ, 93
άμεση δημιουργία εικόνας, 8

αμφίδρομη παρακολούθηση ακτίνων, 581
αναδρομική παρακολούθηση ακτίνων, 518
ανάλυση, 181
αναπαραμετροποίηση, 661
αναπαράσταση επιφάνειας, 173
αναπαράσταση όγκου, 174
αναπαράσταση πλέγματος, 177
αναπαράσταση συνόρου, 173
ανθρώπινο οπτικό σύστημα, 330
ανίχνευση συγκρούσεων, 601
αντικείμενο αποκοπής, 57
αντικείμενο οπτικοποίησης, 619
αντίστροφη προβολή, 628
αντιταύτιση, 50
  μετα-φιλτράρισμα, 52
  προ-φιλτράρισμα, 51
  στην παρακολούθηση ακτίνων, 549
άξονας, 657
αξονικές παραμορφώσεις, 285
αξονική διάταση, 288
απεικόνιση κανονικών διανυσμάτων, 498
  σε συντεταγμένες αντικειμένου, 499
απεικόνιση περιβάλλοντος, 469
απλοειδές σύμπλοκο, 176
απλοποίηση, 181
  κατάρρευση ακμών, 183
  τετραγωνικό μέτρο σφάλματος, 185
απλοποίηση διανυσματικού πεδίου, 645
αποκοπή
  ευθεία, 58
  πολύγωνο, 64
  σημείο, 57
αποκοπή σε ομογενείς συντεταγμένες, 145
αποκοπτόμενο πολύγωνο, 65
απόκριση συχνοτήτων, 479
απομάκρυνση κρυμμένων επιφανειών, 12, 142, 155
  αλγόριθμος BSP, 160
  αλγόριθμος εκπομπής ακτίνων, 164
  αλγόριθμος ταξινόμησης κατά βάθος, 162
  αλγόριθμος του ζωγράφου, 162
  χώρου αντικειμένων, 142
  χώρου εικόνας, 142
αποτύπωμα, 633
αποχρώσεις του γκρι, 337
απόχρωση, 349
άτλαντας υφής, 455, 503
αυτο-σκίαση, 432
αυτοτυπία, 25, 338

Β

βάθος χρώματος, 14
βάρη, 219, 222
βαρυκεντρικές συντεταγμένες, 673
βαρυκεντρική
  μορφή τριγώνου, 459
βαρυκεντρικός συνδυασμός, 650
βάση, *βλ.* διανυσματικός χώρος, βάση
βασικό πλέγμα, 182
βελτιστοποίηση, 185
βεντάλια τριγώνων, 179

Γ

γέμισμα, 48
γένος, 176
γεομετρψ ιμαγες, 503
γεωδαιτική καμπύλη, 670
γεωμετρικές εικόνες, 503, 513
γραμμή θέσεων, 638
γραμμή οπτικοποίησης, 637
γραμμική ακρίβεια, 196, 216, 224, 237, 242
γραμμική ανεξαρτησία, 651
γραμμική εξάρτηση, 651
γραμμικό σύστημα, 686
γραμμικός συνδυασμός, 650
γραφικά υπολογιστή, 7
γραφική διεπαφή, 7
γράφος σκηνής, 298

Δ

δεδομένα
  βαθμωτά, 619
  διανυσματικά, 619
  παραγόμενα, 320
  πρωτότυπα, 320
δείγματα επί ακτίνας, 631
δειγματοληψία, 683
δειγματοληψία:ομοιόμορφη, 683
δείκτης διάθλασης, 521
δένδρο BSP, 175
δένδρο ορατότητας, 151
δένδρο υφής, 514
δημιουργία στιγμιότυπων, 302

διαγράμματα βελών, 636
διαδικασία εκλέπτυνσης, 253
διαδραστική προσομοίωση, 6
διαμέριση χώρου, 295, 538
διάνυσμα, 649
  εφαπτόμενο, 496
  μέτρο, 652
  μοναδιαίο διάνυσμα, 653
  συνεφαπτόμενο, 496
  συντεταγμένες, 651, 656
διάνυσμα ανάκλασης, 381
διάνυσμα παρατήρησης, 382
διάνυσμα ταχύτητας, 660, 665
διάνυσμα φωτεινής πηγής, 382
διανυσματικά σύμβολα, 636
διανυσματική οθόνη, 2
διανυσματικό πεδίο
  διακλαδώσεις, 644
  διαχωριστικές, 643
  κρίσιμα σημεία, 643
  σαγματικό σημείο, 643
  τοπολογία, 642
διανυσματικό σημείο
  κέντρο, 643
διανυσματικό σύμβολο, 322
διανυσματικός χώρος, 649
  βάση, 651, 655
  διάσταση, 651
διάσπαση κορυφής, 186
διάταση κάμψης, 288
διάχυσης φωτισμός, 366
διάχυτη ανάκλαση, 362
διαχωριστικές, 643
δικάθετο διάνυσμα, 662
διόρθωση γάμμα, 343
διχοτόμο διάνυσμα, 372, 382
δομή δεδομένων
  κόμβος γράφου σκηνής, 306
  κόμβου ομαδοποίησης γράφου σκηνής, 306
δυναμικό εύρος, 338, 355
δυνητικά ορατό σύνολο, 149

Ε

εγγύτατο επίπεδο, 663
εγγύτατος κύκλος, 663
έδρα
  ιδιάζουσα, 246
  συνήθης, 246
ειδικά εφέ, 6
εικόνα
  φωτισμού, 513
εικόνα αναγλύφου, 494
εικόνα περιβάλλοντος, 554
εικόνα σκιών, 439
εικόνα υψηλού δυναμικού εύρους, 355
εικόνα φωτονίων, 584
εικόνες κανονικών διανυσμάτων
  σε συντεταγμένες εφαπτόμενων διανυσμάτων, 500
εικόνες υφής, 454
εικονοστοιχείο, 7, 29
εισαγωγή κόμβου, 213
εκλέπτυνση, 182, 186
εκπεμπόμενη ενέργεια, 362
εκπομπή ακτίνων, 628
έκταση, 162
εκτράχυνση, 182, 186
εκτυπωτής
  inkjet, 26
  laser, 26
  LED, 26
έλεγχος αριθμού περιελίξεων, 40
έλεγχος εσωτερικού σημείου, 40, 46
έλεγχος ισοτιμίας, 40
έλεγχος προσήμου, 41
έλεγχος τομής, 671
ελλειπτικό σημείο, 668
έλλειψη, 221
εμβαδό επιφάνειας, 667
έμπροσθεν προβολή, 628
ενδείκτρια του Dupin, 668
ένταση, 337, 345, 363
ένταση φωτεινής ακτινοβολίας, 364
εξισώσεις Fresnel, 524
εξίσωση
  ραδιοσιτψ, 556
εξίσωση Euler, 176, 668
εξίσωση επιπέδου, 673
εξίσωση σφαίρας, 675
εξωθημένο στερεό, 602
εξωτερικό γινόμενο, 654
επιλεκτική εκλέπτυνση, 186
επίπεδα λεπτομέρειας, 181

διακριτά, 182
συνεχή, 182
επίπεδο σημείο, 669
επίπεδος παρεμποδιστής, 154
επιφάνεια
καμπυλότητα, 667
κανονική, 665
κανονικό διάνυσμα, 666
παραμετρική, 664
επιφάνεια B-spline, 3, 239
επιφάνεια Bézier, 3, 236
επιφάνεια τανυστικό γινόμενο, 235
επιφάνεια υποδιαίρεσης, 250, 253
ανοικτά πολύεδρα, 265
διάταξη Catmull–Clark, 255
διάταξη Doo–Sabin, 253
διάταξη Loop, 257
διάταξη υποδιαίρεσης κατά $\sqrt{3}$, 263
οξέα χαρακτηριστικά, 265
τροποποιημένη διάταξη πεταλούδας, 260
υποδιαίρεση στο μέσο, 262
επιφανειακή καμπύλη, 665, 669
εσωτερικό γινόμενο, 653
εφαπτόμενες Bessel, 228
εφαπτομένη
επιφάνειας Bézier, 238
καμπύλης Bézier, 197, 227
παρεμβολή, 225
εφαπτόμενο διάνυσμα, 660, 662, 665
εφαπτόμενο επίπεδο, 666

Η

ημι-ακμή, 180

Θ

θεμελιώδεις συντελεστές, 666
θεμελιώδης spline, 228
θεμελιώδης μορφή, 666
θεώρημα δειγματοληψίας, 689
θεώρημα ομοιόμορφης δειγματοληψίας, 477
θόλωμα κίνησης, 603

Ι

ιδιάζον σημείο, 660, 665
ιδιάζοντα σημεία, στη σχεδίαση, 42
ιδιάζουσα διαμόρφωση, 246
ιδιότητα MC, 626
ισοεπιφάνεια, 621
ισοεπιφάνειες, 622
ισοπαραμετρική καμπύλη, 236, 665

Κ

ΚΑΑ, 365
καδ, 595
καθοδικός σωλήνας, 22
καθρεπτισμός, 94
καμπύλη
γεωδαιτική, 670
εγγενείς ιδιότητες, 663
κανονική, 660
παραμετρική, 31, 659
πεπλεγμένη, 31
καμπύλη B-spline, 203, 206
μορφή Bézier, 217
παρεμβολή, 231
ρητή, *βλ.* ρητή καμπύλη B-spline
καμπύλη Bézier, 25, 190, 194, 226
ιδιότητες, 195
ρητή, *βλ.* ρητή καμπύλη Bézier
τομή, 200
καμπύλη Hermite, 227
καμπύλη υποδιαίρεσης, 247
κυβική υποδιαίρεση, 248
τετραγωνική υποδιαίρεση, 247
υποδιαίρεση τεσσάρων σημείων, 249
καμπυλότητα, 662, 664
Gauss, 668
ακτίνα —ς, 663
απόλυτη, 669
γεωδαιτική, 669
επιφάνειας, 667
κανονική, 667
κέντρο —ς, 663
κύρια, 667
μέση, 668
κανονική
επιφάνεια, 665
καμπύλη, 660
κανονικό διάνυσμα, 174, 375, 666
κανονικοποιημένος χώρος οθόνης, 115
κανονικοποίηση, 321, 653
καρέ, 595

καρέ-κλειδί, 595
καρέ-κλειδιά, 597
καταγεγραμμένο σύνολο δεδομένων, 317
κατανεμημένη απεικόνιση με
μετα-ταξινόμηση, 312
κατανεμημένη απεικόνιση με
προ-ταξινόμηση, 313
κατανεμημένη παρακολούθηση
ακτίνων, 547
κατανομή αμφίδρομης ανακλαστικότητας
(ΚΑΑ), 365
κατάρρευση ακμής, 183, 645
Κατασκευαστική στερεά γεωμετρία, 542
καταχωρητής
διπλός, 18
εναλλαγή, 19
καταχωρητής βάθους, 16, 157
καταχωρητής εικόνας, 13
καταχωρητής μάσκας, 424
καταχωρητής πλαισίου, 15
κατοπτρική ανάκλαση, 362
κατοπτρικός φωτισμός, 366
κατοπτρισμός, 78
κβάντιση, 683
κεντρικό βοθρίο, 330
κέντρο αξόνων, 657
κέντρο καμπυλότητας, 663
κιβώτιο, 626
κινηματική αλυσίδα, 611
κίνηση
σκελετική, 611
κινητοσκόπιο, 595
κλείδωμα αντιζύγων, 599
κόμβοι, 203, 206, 207, 239
κορεσμό, 349
κορυφή
1-δακτύλιος, 246
εσωτερική, 246
ιδιάζουσα, 246
σθένος, 246
συνήθης, 246
συνοριακή, 246
κρίσιμα σημεία, 45
κρίσιμη γωνία, 522
κρίσιμο σημείο, 643, 645
κρουστική απόκριση, 686
κυβική υποδιαίρεση με τανυστικά
γινόμενα, 252
κύκλος, 221
κύριο κανονικό διάνυσμα, 662
κυρτή περιβάλλουσα, 74
κυρτό περίβλημα, 195, 215, 224, 237, 242
κυρτός συνδυασμός, 650
ΚΧΟ, 115, 127
κωνία, 330
κωνικές τομές, 221

Λ

λαμπρότητα, 363
προβαλλόμενη, 398
λάμψη, 371
λευκαύγεια, 364
λίστα ακμών
άμεση, 177
λίστα απεικόνισης, 2
λίστα εδρών
δεικτοδοτημένη, 178
λίστα ενεργών ακμών (ΛΕΑ), 44
λωρίδα, 638

Μ

μαγνητική τομογραφία, 622
μάσκα, 246
τανυστικό γινόμενο, 247
μεταμόρφωση, 605
βήμα γεωμετρικής παραμόρφωσης, 606
βήμα γεωμετρικής παρεμβολής, 606
βήμα προσδιορισμού
χαρακτηριστικών, 606
βήμα συνδυασμού, 607
οπτικές ιδιότητες, 605
σχήμα, 605
μετασχηματισμοί συντεταγμένων, 73, 321
μετασχηματισμός Fourier, 685
μετασχηματισμός ακτίνας, 629
μετασχηματισμός αντικειμένου, 84
μετασχηματισμός άξονα, 84
μετασχηματισμός δεδομένων, 629
μετασχηματισμός παράστασης, 90
μετασχηματισμός παρατήρησης, 115
μετασχηματισμός πεδίου παράστασης, 138
μεταφορά 2Δ, 76
μεταφορά 3Δ, 93

μεταφορά σωματιδίων, 637
μέτρο, *βλ.* διάνυσμα, μέτρο
μήκος τόξου, 660, 667
μονάδα επεξεργασίας γραφικών, 20
μοντέλο, 173
μοντέλο σημειακής κάμερας οπής, 118
μοντέλο φωτισμού, 361
  Phong, 369
  ολικό, 362
  τοπικό, 362
μορφοκλάσματα, 3

N

Νόμος του Snell, 522
νόμος του Λαμπέρ, 366

O

ογκοστοιχείο, 168, 620
οθόνη υγρών κρυστάλλων, 22
οκταδικό δένδρο, 168, 175, 540
ολική εσωτερική ανάκλαση, 522
ομογενείς συντεταγμένες, 81, 220
ομοιομορφισμός, 175
ομφαλικό σημείο, 669
οξεία κορυφή, 265
οπτικοποίηση, 8
  βαθμωτά δεδομένα, 621
  διανυσματικά δεδομένα, 634
ορθογραφική προβολή, 121
οστά, 611

Π

παιχνίδια με υπολογιστή, 6
παλέτα, 14
παραβολή, 221
παραβολικό σημείο, 669
παράγωγος
  επιφάνειας Bézier, 238
  καμπύλης Bézier, 196
  καμπύληςο B-spline, 216
παρακολούθηση ακτίνας, 320
παρακολούθηση ακτίνων, 517
  κατανεμημένη, 547
  στοχαστική, 547
παρακολούθηση μονοπατιού, 579
παρακολούθηση φωτός, 581
παράλληλη προβολή, 116, 120
παραμετροποίηση, 212, 235, 241, 660
  κεντρομόλος, 213, 235, 241
  μήκους τόξου, 661
  μήκους χορδής, 212, 235, 241
  ομοιόμορφη, 212, 235, 241
παραμετροποίηση μήκους τόξου, *βλ.* παραμετροποίηση, μήκους τόξου
παραμόρφωση, 605
παραπέτασμα, 633
παρασκιά, 421
παρεμβολή, 223, 231, 242, 597
  σφαιρική γραμμική, 600
παρεμβολή ακραίων σημείων ελέγχου, 196, 216
παρεμβολή καρέ-κλειδιών, 595
παρεμποδιζόμενος, 154
παρεμπόδιση, 142
παρεμπόδιση διάχυτου φωτισμού, 410
παρεμποδιστής, 154, 423
πεδίο παράστασης, 138
πεδίο συχνοτήτων, 684
πεπερασμένα στοιχεία, 281
πεπερασμένες διαφορές, 32
περιβάλλον κιβώτιο ευθυγραμμισμένο με τους άξονες, 167, 301
περιβάλλουσα πλάκα, 536
περικοπή, 297
περικοπή παρεμποδιζομένων, 141, 143, 149
  από-περιοχή, 149, 150
  από-σημείο, 149, 153
περικοπή πίσω όψεων, 141, 143
Περικοπή στο οπτικό πεδίο, 144
περικοπή στο οπτικό πεδίο, 141
περίπατος ακμών, 47
περιστροφή 2Δ, 78
περιστροφή 3Δ, 94
πίνακας ακαμψίας, 281
πίνακας ακμών (ΠΑ), 44
πίνακας αναφοράς χρώματος, 14
πίνακας αντιστοίχησης χρωμάτων, 329
πίσω όψεις, 143
πλάγια προβολή, 121
πλαίσιο Frenet, 662, 664
πλέγμα, 620
  δομημένο, 620
  κανονικό, 620

ορθογώνιο, 620
πλέγμα ελέγχου, 236, 239
πλεγματική οθόνη, 3
πολλαπλότητα, 175, 182
πολυγωνικό μοντέλο, 173, 174
πολύγωνο, 40
πολύγωνο αποκοπής, 65
πολυεδρικό μοντέλο, 175
πολύεδρο σκιάς, 422
πολυπλοκότητα βάθους, 437
Πολυώνυμα Bernstein, 194
πολυώνυμα Bernstein, 652
πολυώνυμα Lagrange, 224
ποσοστιαίο φιλτράρισμα, 445
πραγματικό χρώμα, 14
πρόβλημα του μεταφορέα, 609
προβολή, 115, 181
μήκος, 654
προοδευτικά περιβλήματα, 167
προοδευτικό πλέγμα, 186
προοπτική απεικόνιση, 115
προοπτική διόρθωση, 49
προοπτική παραμόρφωση, 636
προοπτική προβολή, 116, 118
προσανατολισμός, 176, 179, 657
προσαρμογέας οθόνης, 17
προσπίπτουσα ένταση, 364
πτερωτή ακμή, 179
πτυχή, 269
πύλες, 150

Ρ

ραβδία, 330
ραδιομετρικές ποσότητες, 362
ρευματογραμμή, 638
ρητή καμπύλη, 218
ρητή καμπύλη B-spline, 222
ρητή καμπύλη Bézier, 219
κωνικές τομές, 221
ρυθμός ανανέωσης, 18
ρώσικη ρουλέτα, 576

Σ

σαγματικό σημείο, 643
σάρωση πολυγώνων, 458
σημεία ελέγχου, 191, 203, 206, 219, 222, 236, 239
σημείο, 656
ιδιάζον, 660
συντεταγμένες, 657
σημείο οπτικοποίησης, 637
σημείο του λευκού, 347
σημείο φυγής, 117
σκατζόχοιροι, 636
σκελετός, 611
διανυσματικού πεδίου, 643
σκηνή, 7, 295
σκιά, 421
σκιές
απαλές, 421
καθαρές, 421
σκοτεινότητα, 409
ΣΣΘ, 138
ΣΣΚ, 115, 127
ΣΣΠ, 115, 127
σταδιακή εναλλαγή, 605
σταθερή φωτοσκίαση, 383
σταθερό σημείο, 82
στάση ηρεμίας, 611
στερακτίνιο, 679
στερεά γωνία, 679
διαφορική, 679
στερεό εκ παρεμβολής, 602
στερεό παρατήρησης, 144
στοιχειώδες σχήμα, 7, 31
στοχαστική παρακολούθηση ακτίνων, 547
στρέβλωση 2Δ, 78
στρέβλωση 3Δ, 95
στρέβλωση-παραμόρφωση, 630
στρέψη, 662, 664
συγκερασμός, 686
συναρτήσεις B-spline, 206, 208
συνάρτηση απεικόνισης υφής, 454
συνάρτηση μεταφοράς, 688
συνάρτηση υφής
στροβιλισμλος, 488
συνάφεια, 43, 157
συνάφεια ακμής, 157
συνάφεια αντικειμένων, 157
συνάφεια γραμμών σάρωσης, 157
συνάφεια επιφάνειας, 157
συνάφεια μεταξύ καρέ, 157
σύνδεση, 30
οκταπλή σύνδεση, 30

τετραπλή σύνδεση, 30
συνέλιξη, 478
συνέλιξη γραμμικών ολοκληρωμάτων, 640
συνέχεια, 201, 229
γεωμετρική, 203
συνήθης διαμόρφωση, 246
συνθετική κίνηση, 595
ανίχνευση συγκρούσεων, 601
διαδικασιακή, 596
μεταμόρφωση, 605
παραμορφώσιμα μοντέλα, 596, 614
παρεμβολή, 597
σκελετική, 596, 610
στερεά σώματα, 596
στερεών σωμάτων, 609
συμπεριφοράς, 596
συστήματα σωματιδίων, 596
χρονική αντιταύτιση, 603
σύνθετος μετασχηματισμός, 80
συνιστώσα συνάρτηση, 659, 665
σύνολο ορατών επιφανειών, 149
συνοριακές συνθήκες, 229, 230, 233, 242
Bessel, 230, 234
τετραγωνική, 230, 234
φυσική, 231, 234
συνοριακή καμπύλη, 236
συντελεστής αλληλεπίδρασης, 557
συντεταγμένες
διανύσματος, *βλ.* διάνυσμα,συντεταγμένες
σημείου, *βλ.* σημείο, συντεταγμένες
υφής, 455
σύστημα ελέγχου κίνησης, 596
σύστημα συντεταγμένων, 657, 662, 666
προσανατολισμός, 657
σύστημα συντεταγμένων κόσμου, 115
σύστημα συντεταγμένων παρατηρητή, 115
συστήματα σωματιδίων, 616
συστροφή, 638
συσχετισμένος μετασχηματισμός, 75
συσχετισμένος συνδυασμός, 74, 650
συσχετισμένος χώρος, 656
διάσταση, 657
συχνότητα σήματος, 683
σχεδίαση, 29
ευθεία, 34
κύκλος, 37
πολύγωνο, 41
τρίγωνο, 46
σχεδιασμός διαδρομής, 609
σχεδιασμός κίνησης, 609
σωλήνωση γραφικών, 8

Τ

ταινία του Möbius, 176
ταινία τριγώνων, 179
ταύτιση, 50
λεπτομέρειες, 51
μικρά αντικείμενα, 50
οδοντωτά περιγράμματα, 50
προβολική, 443
προοπτική, 443
τελεστής σύγκρισης μάσκας, 424
τελικές συνθήκες, *βλ.* συνοριακές συνθήκες
τεμάχιο, 12
τετρα-ακμή, 180
τετραγωνική υποδιαίρεση με τανυστικά γινόμενα, 250
τετραγωνικό μέτρο σφάλματος, 185
τετραεδρικά στοιχεία όγκου, 620
τετραεδρικό πλέγμα, 175, 645
τέχνη με υπολογιστή, 2, 7
τεχνικές φιλτραρίσματος, 321
τονική απεικόνιση, 356
τοπική στήριξη, 208
τοπικός έλεγχος, 197, 215, 237, 242
τοπολογία
διανυσματικού πεδίου, 642
τριγωνικό μοντέλο, 175
τριγωνικό πλέγμα, 175
τρίγωνο του de Casteljau, 192, 199, 209
τροχιογραμμή, 638
τύπος του Boehm, 214

Υ

ΥΔΕ, 356
υπερβολή, 221
υπερβολικό σημείο, 668
υποδιαίρεση, 238
υποδιαίρεση χώρου, 168
υφή
συναρτησιακή, 484
υφής

μεγέθυνση, 475
προοπτική διόρθωση, 458
σμίκρυνση, 475
συνάρτηση απεικόνισης, 460
ταύτιση, 476

Φ

φάσμα σήματος, 479
φθίνουσα διακύμανση, 196, 216, 224
Φιγυρε 17.4
μήκους τόξου, 598
φίλτρα
γραμμικά, 688
φιλτράρισμα
μετά-, 477
προ-, 477
φίλτρο μεσαίου όρου, 321
φλοιός, 611, 626
φωτεινή ροή, 363
φωτισμός, 320, 364
φωτοβολία, 363
φωτοδέκτης, 330
Φωτοσκίαση Gouraud, 383
φωτοσκίαση κατά Phong, 385
φωτοσκιαστής, 20
κορυφών, 20
τεμαχίων, 21

Χ

χάρτες, 503
χρονική αντιταύτιση, 603
χρονική συνάφεια, 602
χρονική ταύτιση, 603
χρωματικά μοντέλα, 344
χρωματική βάση, 345
χρωματικό μοντέλο
CIE L*a*b*, 347
CIE Yu′v′, 347
CMY(K), 352
HSV, 351
XYZ, 345
RGB, 348
sRGB, 355
ανεξάρτητο συσκευής, 344
Αριστοτέλη, 344
αφαιρετικό, 345
προσθετικό, 345
χρωματικότητα, 345
χωρική συχνότητα, 477
χώρος αντικειμένων, 9
χώρος εικόνας, 9
χώρος εφαπτόμενων διανυσμάτων, 496
χώρος παρεμπόδισης, 154

Ψ

ψηφιογραφική εικόνα, 7

Αγγλικοί όροι

Σύμβολα

Carmack's Reverse, 433
algorithm
stenciled shadow volumes, 425
data structure
scene-graph node, 306
occluder, 423
penumbra, 421
self-shadowing, 432
shadow volume, 422
shadow-volume algorithm, 423
stencil buffer, 424
stencil test, 424
texture-mapping function, 454
umbra, 421

A

ACM SIGGRAPH, 3
alg'orijmoc
p'inaka antisto'iqhshc qrwm'atwn, 330
stoqastik'hc sqed'iashc
kajodhgo'umenhc ap'o ta eikonostoiqe'ia, 574
tom'hc akt'inac-skhn'hc, 531
aliasing
perspective, 443
projection, 443
ambient occlusion, 408, 410

ap'odosh wc bajmwt'o ped'io, 644
apom'akrunsh krumm'enwn epifanei'wn
alg'orijmoc Z-buffer, 157
applications, 6
axis-aligned bounding box, 167, 301

B

b-rep, 173
barukentrik'ec sutetagm'enec
trig'wnou, 458
bidirectional ray tracing, 581
bidirectional reflectance distribution
function (BRDF), 365
bones, 611
BRDF, 365
Bresenham, 36
bump map, 494

C

Catmull, E., 3
chart, 503
Clark, J., 4
coarsening, 186
color map, 328, 329
connectedness, 30
constructive solid geometry, 542
convolution, 686
Coons, S., 2
CRT, 22
CSG, 174
cube mapping, 467
culling
alpha, 442

D

data-parallel ray tracing, 312
diffuse illumination, 366
Dirac, συνάρτηση, 686
direct rendering, 8
Direct3D, 5
display list, 2
distributed ray tracing, 547
DLP, 24
dom'ec dedom'enwn
apostol'h mhnum'atwn se gr'afo
skhn'hc, 309

E

edge collapse, 184
environment map, 554
environment mapping, 469
Eurographics, 4

F

filter
finite impulse response (FIR), 479
infinite impulse response (IIR), 479
finite differences, 32
FIR, 688
Floyd-Steinberg, 342
form factor, 557
forward kinematics, 614
Fourier
σύνθεση, 684
σειρά, 684
fps, 595
fractals, 3
fragment, 12
Fresnel equations, 524
frustum culling, 297

G

gamma correction, 343
gewmetrik'h sqed'iash me upologist'h, 6
GKS, 4
GPU, 20, 458

H

half-edge, 180
halftoning, 338
Hausdorff distance, 183
HDR, 355
high dynamic range image, 355, 555

I

IIR, 688
image-based rendering (IBR), 471
impostor, 473
index of refraction, 521
instancing, 302
inverse kinematics, 614

J

Jordan θεώρημα καμπύλης, 40

K

k'inhsh qarakt'hrwn, 611
k'omboi, 210, 240
k-DOP, 167
kamp'ulh
  se epif'aneia, *βλ.* epifaneiak'h kamp'ulh
kamp'ulh Hermite, 225
kampul'othta
  die'ujunsh, 667
kd-tree, 508
keyframe, 595

L

l'ista edr'wn
  'amesh, 177
LCD, 22
light map, 513
light probe, 567
light tracing, 581

M

mailboxing, 539
Mandelbrot, B., 3
mapping
  planar, 462
marching cubes, 623
Michelangelo, 181
mip-mapping, 480
mip-maps, 480
motion capture, 614

N

normal mapping, 498
  object space, 499
  tangent space, 500
NURBS, 222
Nyquist rate, 689

O

OBJ, 179
obscurance, 409
octree, 168, 540
OLED, 24
OpenDX, 4
OpenGL, 5
optik'oc sunwstism'oc, 636
oriented bounding boxes, 167

P

path tracing, 579
pathline, 638
percentage closer filtering, 445
Perlin noise, 487
perspective aliasing, 443
perspective shadow maps, 447
Phong, 320
photon map, 584
pipeline, 8
pixel, 7, 29
PLY, 179
polypack, 505
portal culling, 297
PostScript, 25
primitive, 7
procedural texture
  1/f noise, 488
progressive hulls, 167
progressive mesh, 186

Q

quad-edge, 180
quadric error metric, 185
quaternions, 106

R

radiosity, 320
radiosity algorithm, 555
radiosity integral equation, 556
raster image, 7
rasterization, 29
ray tracing, 517
  distributed, 547
  stochastic, 547
recursive ray tracing, 518
refinement, 186
rendering equation, 551
rest pose, 611
rigging, 611

S

scene, 295
scene graph, 298
shader, 20
  fragment, 21
  vertex, 20

shadow map, 439
shadows
  hard, 421
  soft, 421
simplification
  quadric error metric, 185
skeletal animation, 611
Sketchpad, 1
skin, 611
slerp, 600
spatial partitioning, 295
specular illumination, 366
splatting, 628, 633
spline, 203
  μηχανική, 231
splitting box, 626
sprites, 471
sq'eseic Frenet-Serret, 664
sqed'iash basism'enh se eik'onec, 471
steradian, 679
stochastic ray tracing, 547
streakline, 638
streamline, 638
subdivision, 198
subdivision finite elements, 277
sunjetik'h k'inhsh
  sust'hmata swmatid'iwn, 616
Sutherland, I., 1

T

tangent space, 496
texels, 455
texture
  aliasing, 476
  compression, 475
  coordinates, 455
  hierarchy, 454
  magnification, 475
  tiling, 455
texture atlas, 503
texture mapping, 454
tone mapping, 326
tweening, 595

V

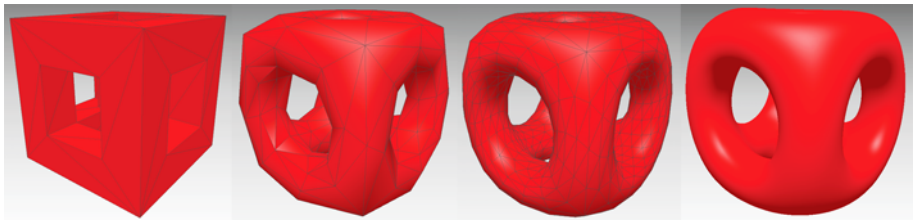
vertex split, 186
voxel, 168, 175

W

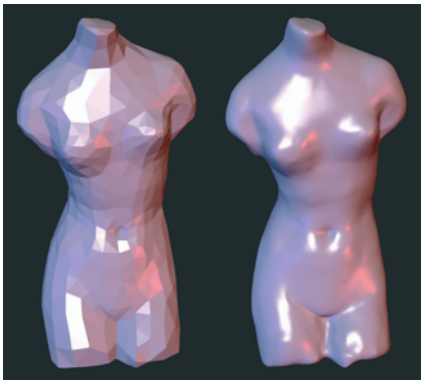
Whitted, T., 4
winged-edge, 179

Z

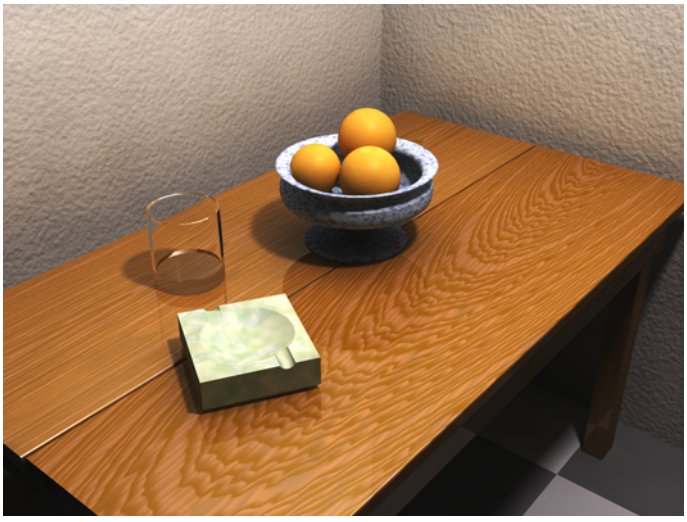
Z-buffer, 16
Z-fail, 433
Z-fighting, 432



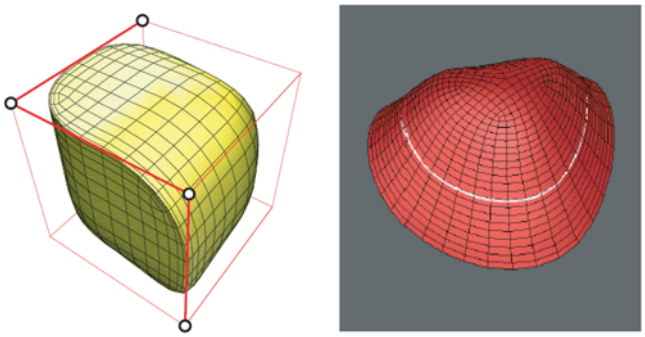
Εικόνα 1: *Υποδιαίρεση Loop. Από αριστερά προς τα δεξιά: μία αρχική διάταξη, το πρώτο και το δεύτερο βήμα εκλέπτυνσης, και η οριακή επιφάνειά της (δείτε επίσης το Σχήμα 8.11.)*



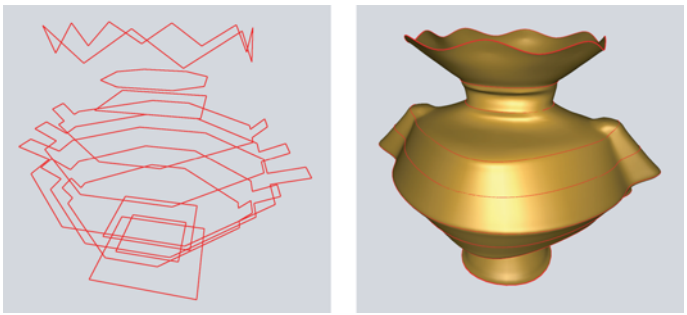
Εικόνα 2: *Υποδιαίρεση πεταλούδας: μία αρχική επιφάνεια (αριστερά), και η οριακή επιφάνειά της (δεξιά). (Με την άδεια του D. Zorin) (βλ. επίσης Σχήμα 8.13)*



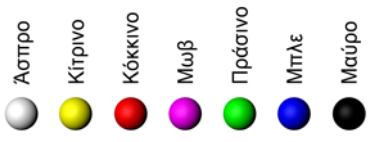
Εικόνα 3: *Συναρτησιακή υφή.*



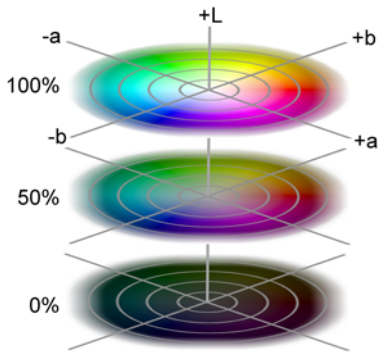
Εικόνα 4: *Παρεμβολή καμπυλών από επιφάνειες υποδιαίρεσης. Αριστερά: μία επιφάνεια Doo–Sabin που παρεμβάλλει μία πτυχή. Δεξιά: μία επιφάνεια Catmull–Clark που παρεμβάλλει μία καμπύλη με συνέχεια C^1 (βλ. επίσης Σχήμα 8.18).*



Εικόνα 5: *Περιγεγραμμένες επιφάνειες υποδιαίρεσης Catmull–Clark. Αριστερά: Ένα σύνολο πολυγώνων ελέγχου που ορίζουν κυβικές καμπύλες B-spline. Δεξιά: Μία επιφάνεια υποδιαίρεσης Catmull–Clark που παρεμβάλλει τις καμπύλες αυτές (βλ. επίσης Σχήμα 8.19).*



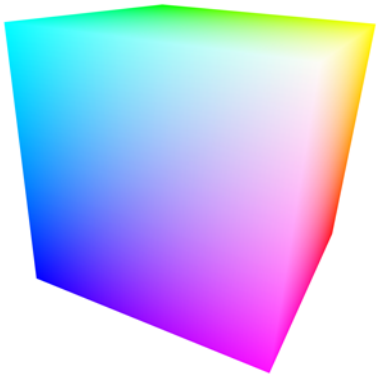
Εικόνα 6: *Το γραμμικό χρωματικό μοντέλο του Αριστοτέλη.*



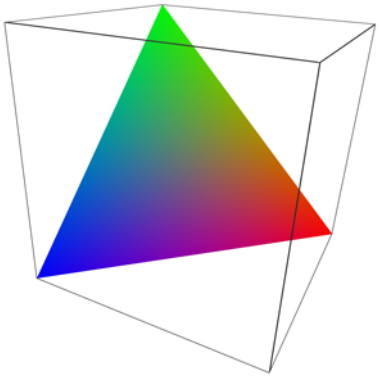
Εικόνα 7: *Το χρωματικό μοντέλο L*a*b*.*



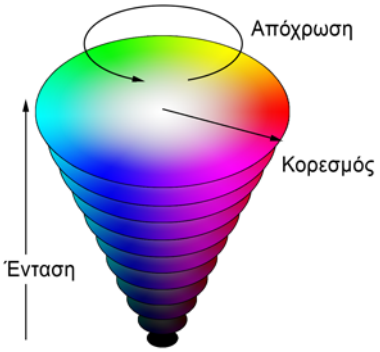
Εικόνα 8: *Τα προσθετικά χρώματα RGB.*



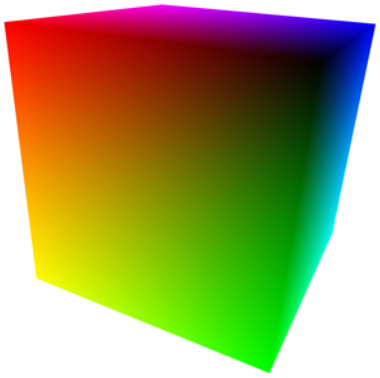
Εικόνα 9: *Ο κύβος RGB (βλ. επίσης Σχήμα 11.12(α)).*



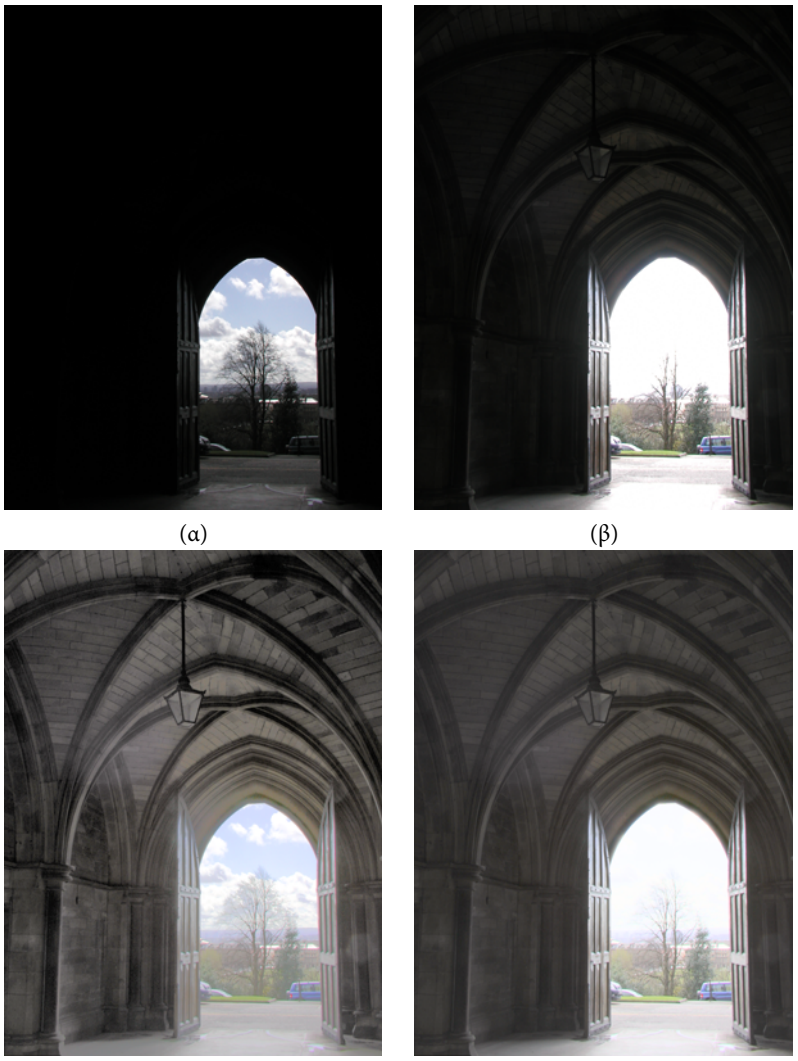
Εικόνα 10: *Τρίγωνο RGB (βλ. επίσης Σχήμα 11.12(β)).*



Εικόνα 11: *Το χρωματικό μοντέλο απόχρωσης-κορεσμού-έντασης (HSV).*



Εικόνα 12: *Ο κύβος CMY (βλ. επίσης Σχήμα 11.14).*



(α) (β)

(γ) (δ)

Εικόνα 13: *Εικόνες από σκηνή με μεγάλο δυναμικό εύρος. (α) Η σκοτεινή λήψη χάνει πληροφορία από το εσωτερικό της αψίδας. (β) Η φωτεινή λήψη χάνει πληροφορία από τα σύννεφα. (γ, δ) Μια εικόνα ΥΔΕ κατασκευασμένη από πολλαπλές απλές εικόνες (οι (α) και (β) είναι οι δύο ακραίες) με τονική απεικόνιση ιστογράμματος (γ) και γενική φωτογραφική τονική απεικόνιση κατά Reinhard (δ) είναι πλησιέστερη σε αυτό που μπορεί να αντιληφθεί το ανθρώπινο μάτι. (Εικόνες από Greg Ward) (βλ. επίσης Σχήμα 11.15.)*

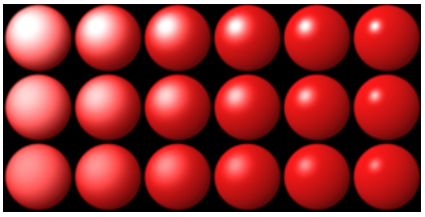


(α) (β)

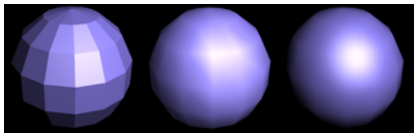
Εικόνα 14: *(α) Έμπροσθεν διάχυση (η πηγή φωτός είναι αντικριστά στον παρατηρητή). (β) Όπισθεν διάχυση (η πηγή φωτός είναι πίσω από τον παρατηρητή).*



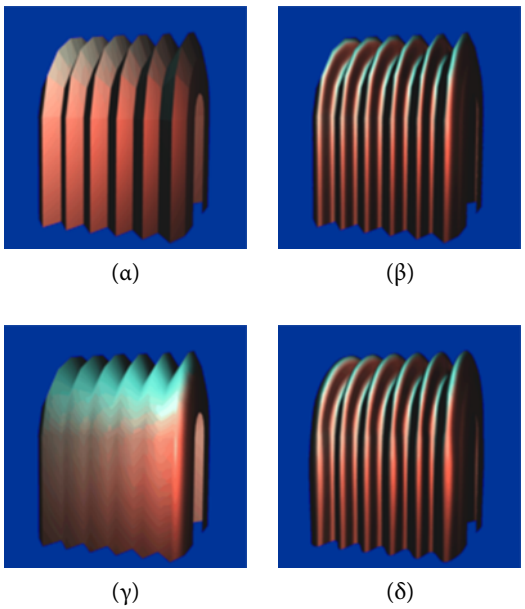
Εικόνα 15: *Η επίδραση των τριών συνιστωσών του μοντέλου Phong: (αριστερά) μόνο φωτισμός περιβάλλοντος· (μέση) φωτισμός περιβάλλοντος και διάχυσης· (δεξιά) φωτισμός περιβάλλοντος, διάχυσης και κατοπτρική ανάκλαση.*



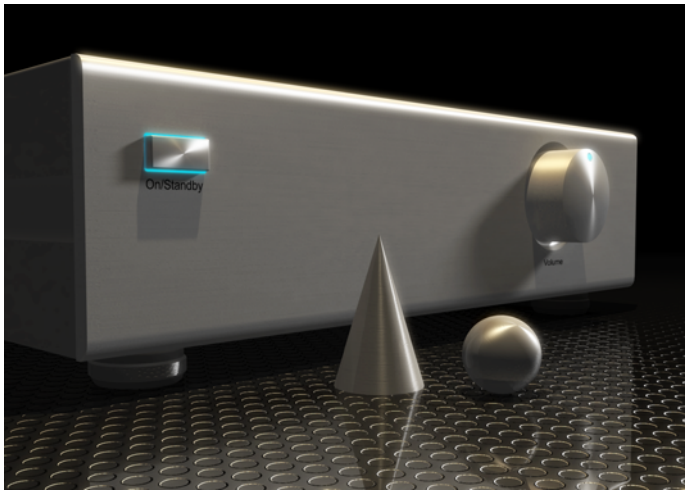
Εικόνα 16: *Η επίδραση των παραμέτρων κατοπτρικής ανάκλασης στο μοντέλο Phong: Ο εκθέτης n αυξάνει προς τα δεξιά, ο συντελεστής k_s αυξάνει προς τα πάνω (βλ. επίσης Σχήμα 12.9).*



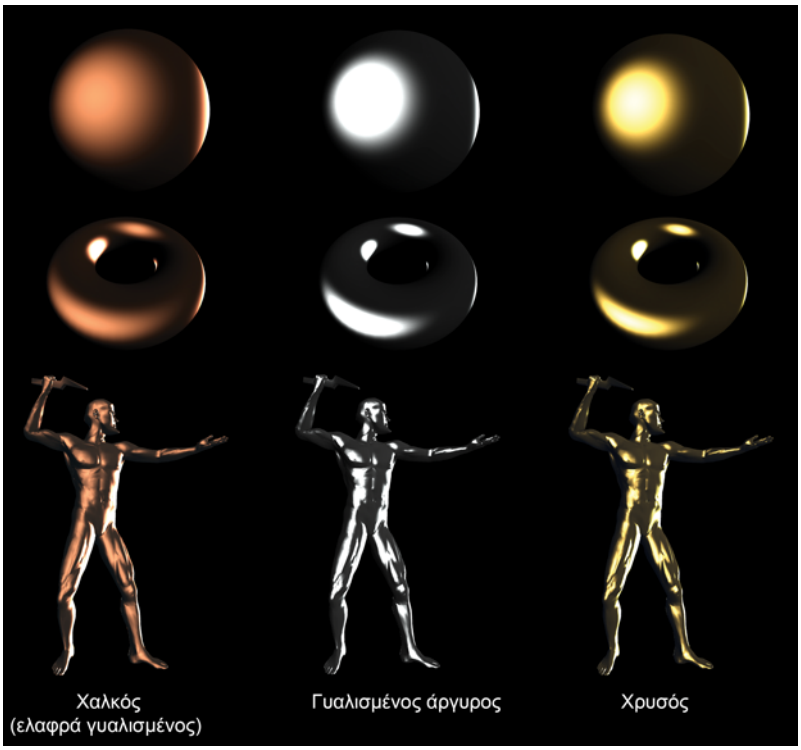
Εικόνα 17: *Σταθερή φωτοσκίαση (αριστερά), φωτοσκίαση Gouraud (μέση), και φωτοσκίαση Phong (δεξιά).*



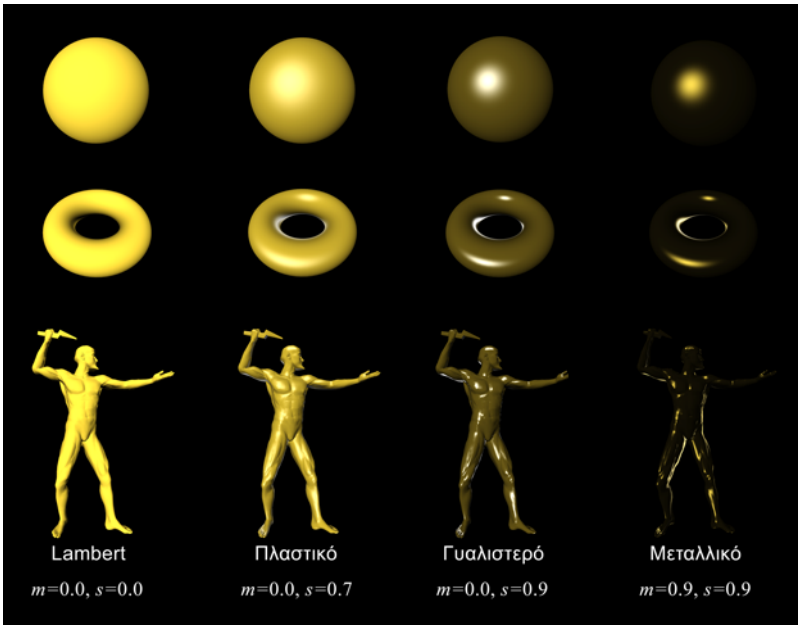
Εικόνα 18: *(α) πολύγωνα με επίπεδη φωτοσκίαση σε μια διατομή σε σχήμα ζιγκ-ζαγκ. (β) Τετραγωνική παρεμβολή των κανονικών διανυσμάτων των κορυφών. (γ) Ιραμμική παρεμβολή των κανονικών διανυσμάτων των κορυφών. (δ) Μείωση των ευθύγραμμων τμημάτων περιγράμματος πολυγώνων χρησιμοποιώντας πυκνή πολυγωνική προσέγγιση του ίδιου μοντέλου αυτή, τη φορά αποτελούμενου από λείες παραμετρικές επιφάνειες (τετραπλάσιος αριθμός πολυγώνων). Χρησιμοποιήθηκε γραμμική προσέγγιση των διανυσμάτων (χρήση της εικόνας με την άδεια του C.W.A.M. van Overveld [Over97]).*



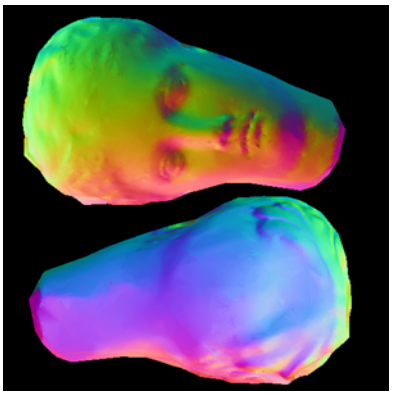
Εικόνα 19: *Ανισοτροπική ανακλαστικότητα (βλ, επίσης Σχήμα 12.29).*



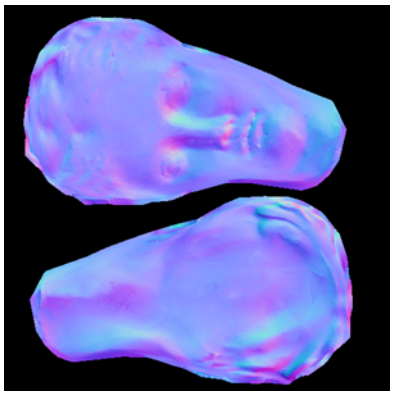
Εικόνα 20: *Το μοντέλο Cook–Torrance για διάφορα υλικά (βλ. επίσης Σχήμα 12.24).*



Εικόνα 21: *Αποτελέσματα χρήσης του μοντέλου Strauss (βλ. επίσης Σχήμα 12.28).*



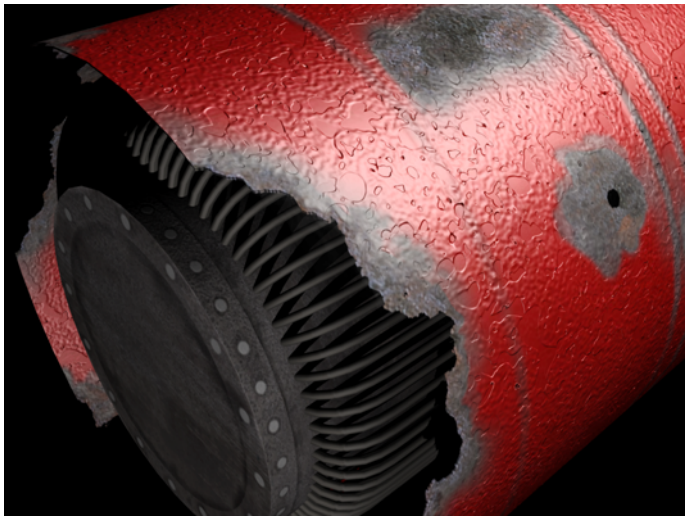
Εικόνα 22: *Η εικόνα κανονικών διανυσμάτων που έχει εφαρμοσθεί στο μοντέλο χαμηλής ανάλυσης της Εικόνας 23 (αριστερά) προκειμένου να απομιμηθεί τη γεωμετρική λεπτομέρεια του μοντέλου υψηλής ανάλυσης στο δεξί μέρος της ίδιας εικόνας.*



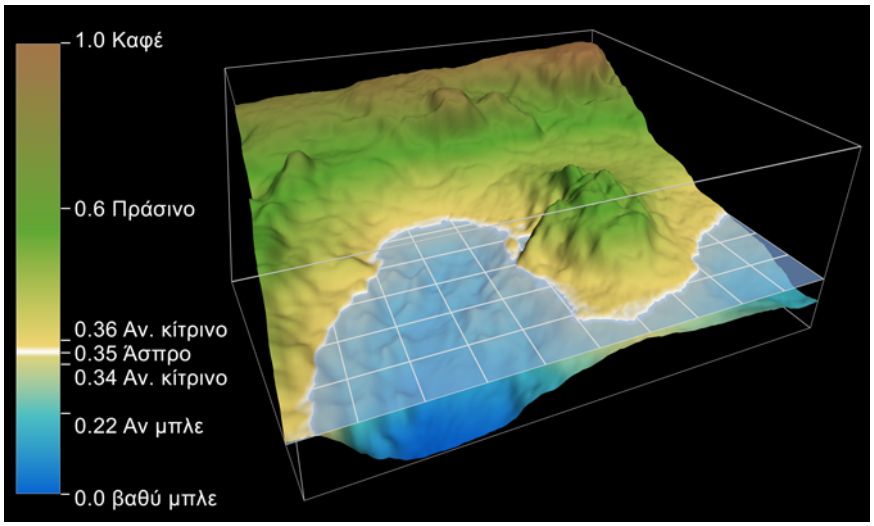
Εικόνα 23: *Εικόνα κανονικών διανυσμάτων στο χώρο εφαπτόμενων διανυσμάτων για τα ίδια διανύσματα με την Εικόνα 22.*



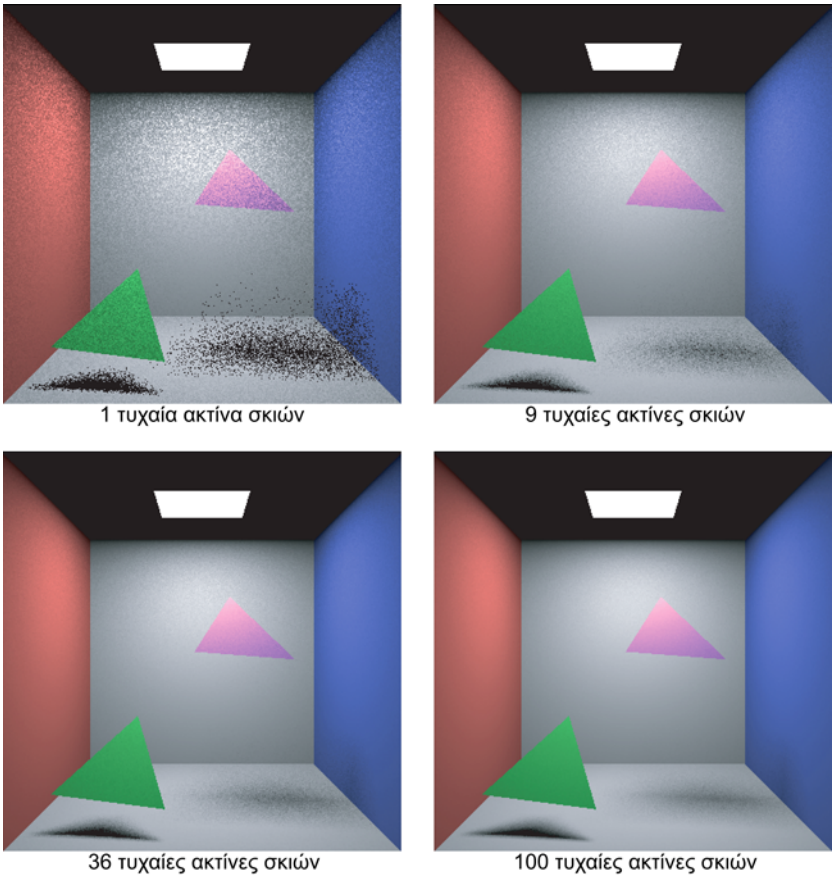
Εικόνα 24: *Μεταφορά λεπτομέρειας με χρήση εικόνων κανονικών διανυσμάτων. Μια χαμηλής ανάλυσης έκδοση (αριστερά) μιας πολύπλοκης μορφής σχεδιάζεται χρησιμοποιώντας την πληροφορία κανονικών διανυσμάτων της αντίστοιχης επιφάνειας υψηλής γεωμετρικής λεπτομέρειας.*



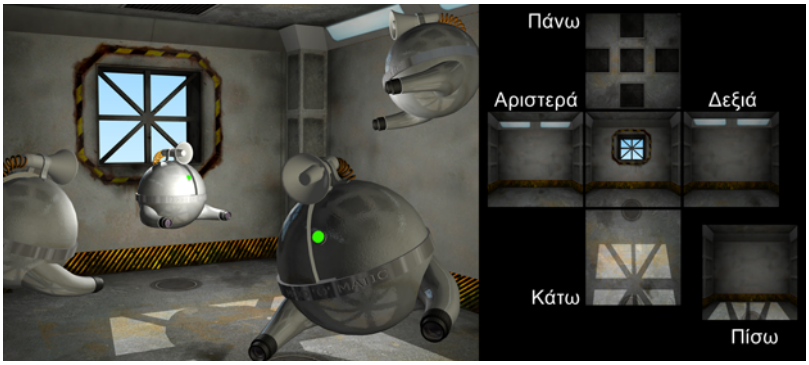
Εικόνα 25: *Ιεραρχίες υφής. Μπορούν να επιτευχθούν πολύπλοκα αποτελέσματα, συνδυάζοντας ιεραρχικά διάφορους τύπους υφής για τη μοντελοποίηση των χαρακτηριστικών του υλικού (βλ. επίσης Σχήμα 14.35).*



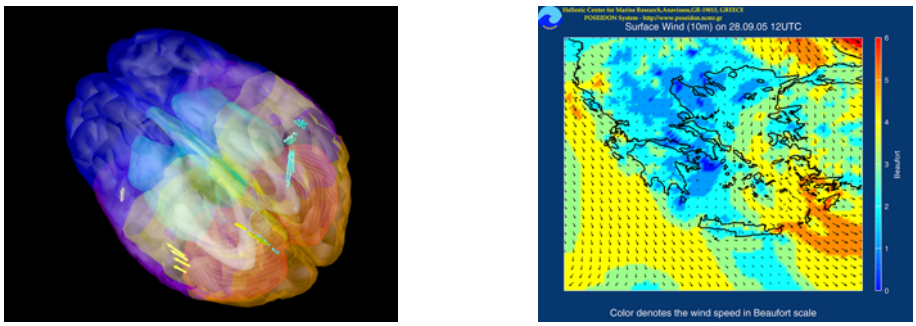
Εικόνα 26: *Χρωματική κωδικοποίηση του υψομέτρου και του βάθους της θάλασσας με χρήση πίνακα αντιστοίχησης χρωμάτων, ο οποίος στο συγκεκριμένο παράδειγμα μετατρέπει πληροφορία ύψους σε παρεμβλημένες τιμές χρώματος (βλ. επίσης Σχήμα 10.11).*



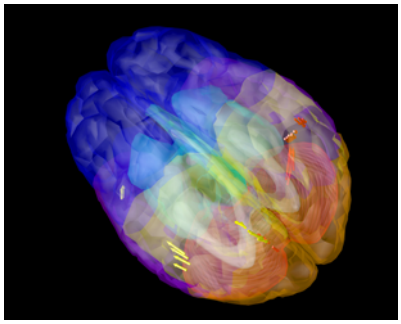
Εικόνα 27: *Άμεσος φωτισμός από μια πηγή φωτός. Παρατηρήστε τη διαφορά στην ποιότητα της εικόνας όταν αυξάνει ο αριθμός των δειγμάτων (ακτίνων σκιών). (Δείτε ακόμα Σχήμα 16.3.)*



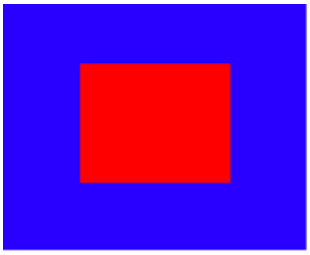
Εικόνα 28: *Απεικόνιση ανακλάσεων χρησιμοποιώντας προσχεδιασμένες εικόνες υφής σε διάταξη κύβου (cube-map).*



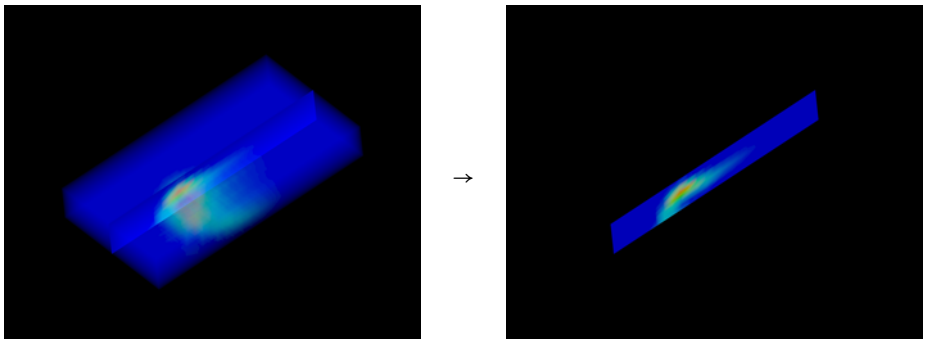
Εικόνα 29: *Αριστερά: Οπτικοποίηση εγκεφάλου. Δεξιά: Οπτικοποίηση δεδομένων ανέμου (ευγενική χορηγία του Λ. Περιβολιώτη, Ελληνικό Κέντρο Θαλάσσιων Ερευνών).*



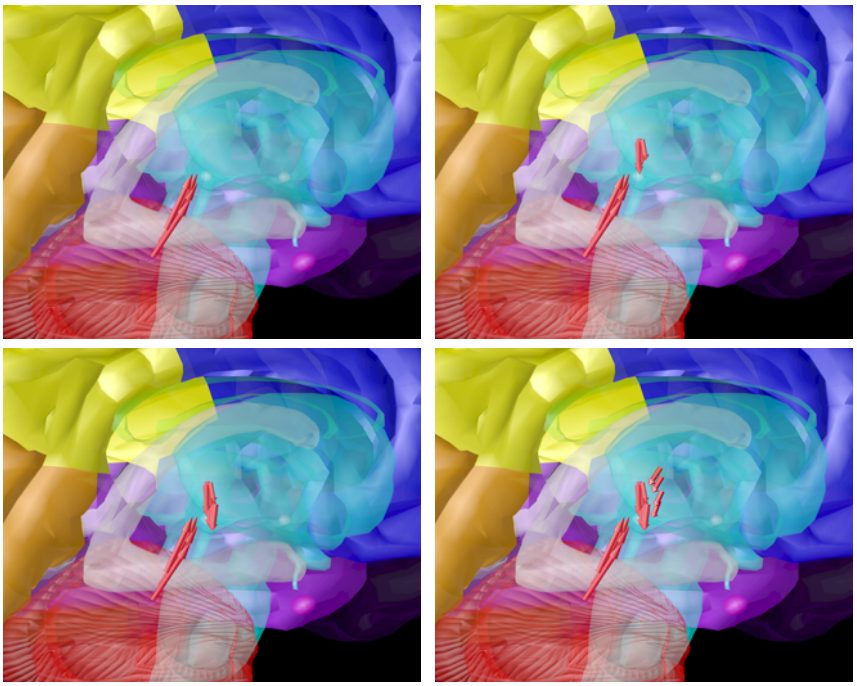
Εικόνα 30: *Ευθυγράμμιση ενός γενικού τριδιάστατου μοντέλου εγκεφάλου με σήματα ΜΕΓ (βλ. επίσης Σχήμα 10.4).*



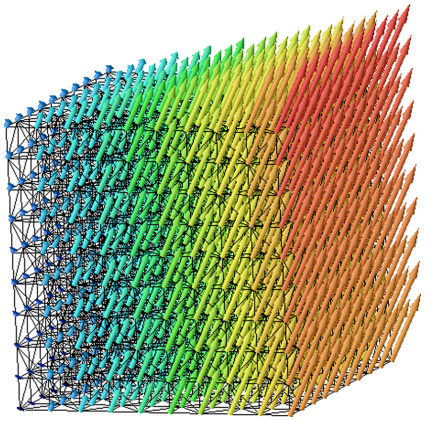
Εικόνα 31: *Χρώματα διαφορετικού μήκους κύματος προκαλούν διαφορετική εστίαση του ματιού και η ταυτόχρονη παρουσία τους το κουράζει.*



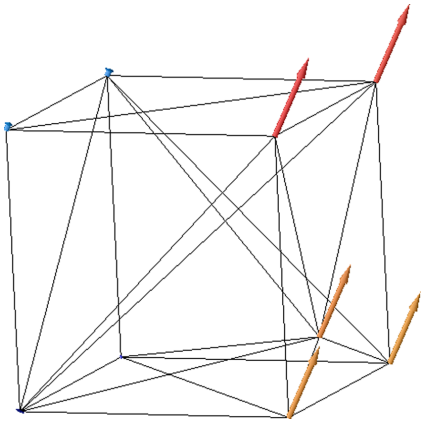
Εικόνα 32: *Διατομές όγκου. Η εικόνα δημιουργήθηκε με το OpenDX.*



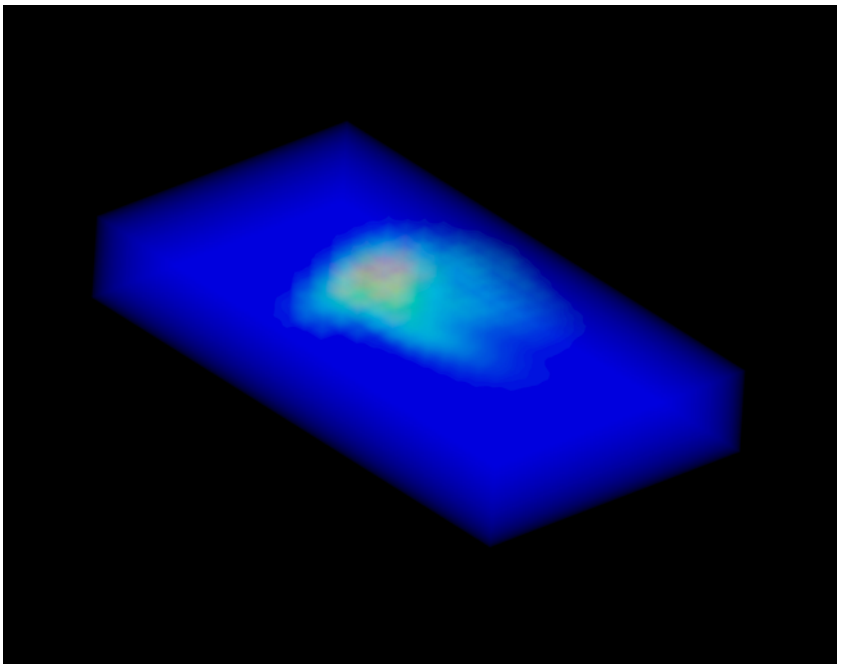
Εικόνα 33: *Η συσχέτιση μιας μεταβλητής ποσότητας με το χρόνο. Τέσσερα καρέ από την απεικόνιση καταγεγραμμένων δεδομένων ενεργοποίησης ΜΕΓ (τα βέλη αναπαριστούν τα διανύσματα ενεργοποίησης ΜΕΓ). (Οι εικόνες δημιουργήθηκαν με το OpenDX/ViewMEG[Kats05].)*



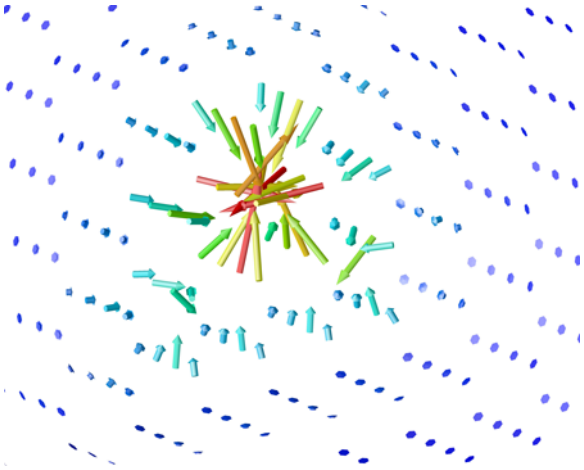
Εικόνα 34: *Ένα πεδίο* $O^{vector3}_{X\times Y\times Z}$.



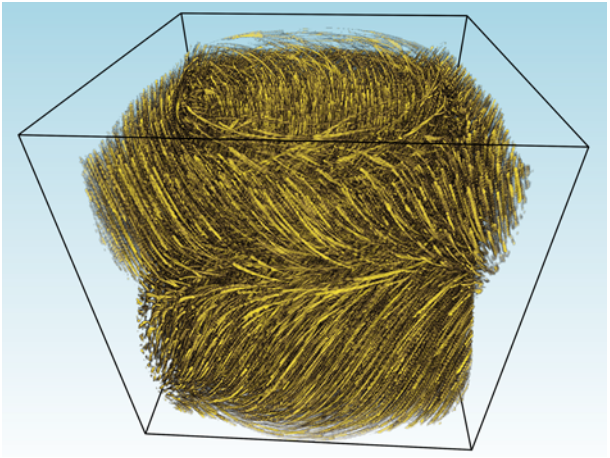
Εικόνα 35: *Τετραεδρικό πλέγμα.*



Εικόνα 36: *Σχεδίαση όγκου.*



Εικόνα 37: *Διάγραμμα με βέλη για πεδίο* $O^{vector3}_{X\times Y\times Z}$. *(Η εικόνα δημιουργήθηκε με το OpenDX.)*



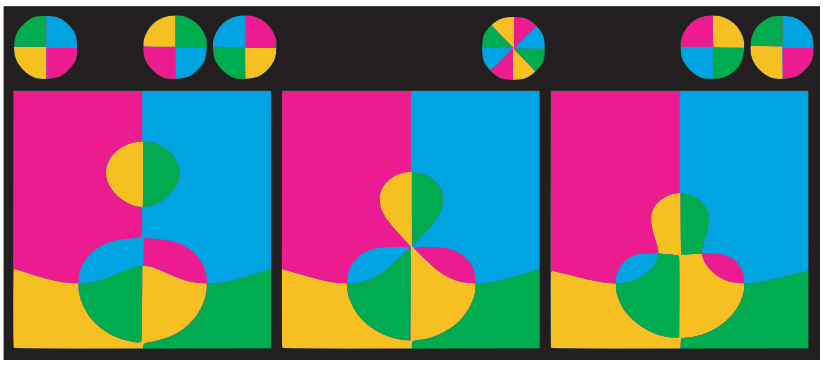
Εικόνα 38: *Συνέλιξη Γραμμικών Ολοκληρωμάτων (ΣΓΟ - LIC πάνω σε πεδίο* $O^{vector3}_{X\times Y\times Z}$ *χρησιμοποιώντας την τεχνική της περιοχής ενδιαφέροντος (ROI). (Η εικόνα είναι ευγενική προσφορά του Anders Helgeland [Helg04].)*



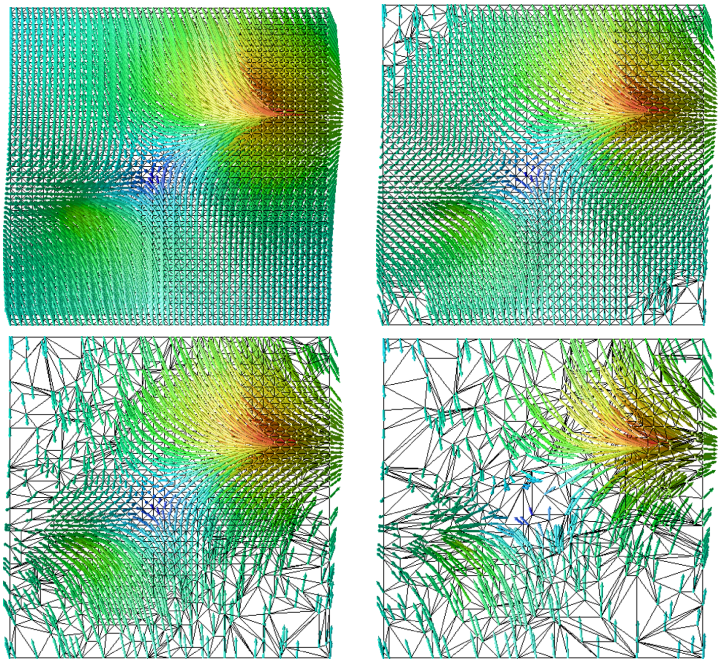
Εικόνα 39: *Ρευματογραμμές (αριστερά) και λωρίδες (δεξιά) για στατικά διανυσματικά πεδία (οι εικόνες δημιουργήθηκαν με το OpenDX).*



Εικόνα 40: *Η επίδραση του L στη συνάρτηση ΣΓΟ ($L = 0, 5, 10, 20$ από πάνω αριστερά προς κάτω δεξιά).*



Εικόνα 41: *Η κβάντηση του χρώματος βοηθάει την κατανόηση (ευγενική χορηγία του Peter Hall [Hall93]).*



Εικόνα 42: *Απλοποίηση ενός διανυσματικού πεδίου πάνω σε ένα τετραεδρικό πλέγμα. Αρχικό πεδίο και απλοποίηση στο 50%, 25%, και 10% του αρχικού αριθμού τετραέδρων.*