

1) Σωστό ή Λάθος;

(XX Μονάδες)

1. Οι άμεσες μέθοδοι για την επίλυση ενός συστήματος δεν αλλάζουν το sparsity pattern του πίνακα συντελεστών. Δηλαδή, ένας αραιός πίνακας παραμένει αραιός.
2. Αν δεν συγκλίνει η Gauss-Seidel, δεν συγκλίνει και η Jacobi.
3. Ο αλγόριθμος των συζυγών κλίσεων απαιτεί στην i επανάληψη ($i > 1$) περισσότερες πράξεις από τον αντίστοιχο των συζυγών διευθύνσεων.
4. Ο πίνακας Q που λαμβάνουμε από την ορθογωνοποίηση με την μέθοδο Gram-Schmidt δεν είναι απαραίτητο να είναι ο ίδιος με αυτόν που λαμβάνουμε με την μέθοδο Householder
5. Αν γνωρίζουμε την ανάλυση ιδιοζυγών τιμών (SVD) ενός πίνακα τότε ξέρουμε και τον δείκτη κατάστασης του κ_2 .
6. Η πρόσθεση στον υπολογιστή αριθμών κινητής υποδιαστολής δεν είναι αντιμεταθετική.
7. Σε ένα σύστημα με ακρίβεια $t = 6$ δεκαδικά ψηφία, έστω $x = 1.23456$ και $y = 1.23579$. Αν το σύστημα είναι κανονικοποιημένο ποιο είναι το ελάχιστο εύρος L, U του εκθέτη για τα οποία τα $x, y, x - y$ απεικονίζονται ακριβώς στον H/Υ .
8. Έστω $A \in R^{n,m}$ με $A = [a^{(1)} \ a^{(2)} \ \dots \ a^{(n)}]$ και έστω ότι υπάρχουν c_i όχι όλα μηδέν, τέτοια ώστε $c_1 a^{(1)} + c_2 a^{(2)} + \dots + c_n a^{(n)} = 0$. Τότε το σύστημα των κανονικών εξισώσεων έχει μοναδική λύση.
9. Ο κλασικός αλγόριθμος Strassen έχει ασυμπτωτική πολυπλοκότητα μικρότερη από $O(n^{2.5})$

II) Επιλέξτε τη σωστή απάντηση

(XX Μονάδες)

1. Ένα σύστημα κινητής υποδιαστολής έχει ως σημείο υποχείλησης το $UFL = 10^{-38}$. Ποιά από τις παρακάτω πράξεις θα προκαλέσουν υποχείληση:

$$(I) \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}, \text{ με } b = 1, c = 10^{-25} \quad (1)$$

$$(II) \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}, \text{ με } b = c, c = 10^{-25} \quad (2)$$

A) I B) II Γ) και οι δύο Δ) καμία.

2. Γνωρίζουμε για τον πίνακα $A \in R^{100,10}$ ότι $\sigma_{\min}(A) = 1$ και $\sigma_{\max}(A) = 5$. Με ποίο τρόπο θα επιλύατε αποδοτικότερα το πρόβλημα $\min \|Ax - b\|_2$:

A) Κανονικές εξισώσεις B) Gram-Schmidt
Γ) ανακλάσεις Householder Δ) ανάλυση ιδιαζουσών τιμών.

3. Για τον πίνακα συντελεστών

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

A) η Gauss-Seidel συγκλίνει, B) η Jacobi συγκλίνει,
Γ) και οι δύο μέθοδοι συγκλίνουν, Γ) και οι δύο μέθοδοι αποκλίνουν.

4. Η μικρότερη απόσταση ενός πίνακα A $n \times m$ με $n > m$ και $\text{rank}(A) = m$ από οποιονδήποτε πίνακα B με $\text{rank}(B) = 1$ είναι

A) $\sigma_{\min}(A)$ B) $\sigma_{\max}(A)$ Γ) $\lambda_{\min}(A)$ Δ) $\lambda_{\max}(A)$

III) Ασκήσεις ανάπτυξης.

1. Έστω ότι σας δίνεται η ανάλυση QR ενός πίνακα $A \in R^{m \times n}$, $m > n$. Εξηγήστε αναλυτικά πως αυτή θα χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του προβλήματος $\min \|Ax - b\|_2$
2. Κατασκευάστε έναν 3×3 πίνακα, εκτός του μοναδιαίου, που να έχει δείκτη κατάστασης ως προς την ευκλείδεια νόρμα 1.

3. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 6 & 5 & 7 \\ 0 & -10 & -3 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί το αρχικό οδηγό στοιχείο όταν α) Δεν χρησιμοποιηθεί οδήγηση, β) χρησιμοποιηθεί μερική οδήγηση και γ) χρησιμοποιηθεί ολική οδήγηση.

4. Να γραφούν οι πολυπλοκότητες σε χρόνο και χώρο που απαιτούνται με τις μεθόδους της απαλοιφής Gauss για τυχαίο πραγματικό πίνακα, και με τη μέθοδο Cholesky για την επίλυση συμμετρικού και θετικά ορισμένου συστήματος.
5. Έστω A ένας συμμετρικός πίνακας 4×4 για τον οποίο γνωρίζουμε ότι ο επαναληπτικός πίνακας J της μεθόδου Jacobi έχει ως άνω τριγωνικό πίνακα U στην LU ανάλυση τον

$$U = \begin{pmatrix} 0.6667 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Για τον J γνωρίζουμε επίσης ότι δεν έχει καμία ιδιοτιμή με μέτρο μικρότερο από 0.3. Δικαιολογήστε αν και γιατί συγκλίνει ή όχι η μέθοδος Jacobi.

6. Ποιος είναι ο κυριότερος λόγος για τον οποίο οι μεταθέσεις (shifts) χρησιμοποιούνται στον αλγόριθμο της QR μεθόδου;