ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ / ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΝΙΚΟΣ Μ. ΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΑΚΗΣ
Επίκουρος Καθηγητής

ΑΘΗΝΑ 1990

ΑΣΟΕΕ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ/ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ:

ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΝΙΚΟΣ Μ. ΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΑΚΗΣ
Επίκουρος Καθηγητής ΑΣΟΕΕ

ΑΘΗΝΑ 1990

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι ανά χείρας Σημειώσεις Προσομοίωσης γράφτηκαν για να καλύψουν τις διδακτικές ανάγκες του μαθήματος Προσομοίωσης του ΣΤ' εξαμήνου Στατιστικής-Πληροφορικής της ΑΣΟΕΕ. Περιέχουν στην αρχή μιά συνοπτική επισκόπηση των διαφόρων τύπων υποδειγμάτων που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση διαφόρων συστημάτων. Στην συνέχεια περιγράφονται οι βασικές μέθοδοι παραγωγής ψευδοτυχαίων αριθμών, προσομοίωσης στοχαστικών διακριτών γεγονότων, συλλογής και επεξεργασίας των αποτελεσμάτων, καθώς και αρκετές εφαρμογές σε συστήματα άφιξης-εξυπηρέτησης-αναχώρησης. Στο δεύτερο μέρος αναπτύσσονται μέθοδοι αριθμητικής προσομοίωσης συστημάτων διακριτού και συνεχούς χρόνου, και ανάλυσης των βασικών ιδιοτήτων αυτών των συστημάτων. Τέλος, στο παράρτημα περιγράφεται μία διαδεδομένη εφαρμογή των στοχαστικών μεθόδων Monte-Carlo στον προσεγγιστικό υπολογισμό ολοκληρωμάτων συναρτήσεων.

Το μάθημα συνοδεύεται από σειρά προγραμμάτων στον υπολογιστή όπου υλοποιούνται τα περιγραφόμενα συστήματα, και αυτό ίσως εν μέρει δικαιολογεί τον συνοπτικό χαρακτήρα που εμφανίζει η ανάπτυξη πολλών θεμάτων στις Σημειώσεις. Παρά τις αναπόφευκτες ελλείψεις, ελπίζω πάντως ότι οι Σημειώσεις θα συμβάλλουν στην εμπέδωση μιάς μεθοδολογίας κατάστρωσης και χρήσης υποδειγμάτων ικανών να προσομοιώνουν ακόμη και πολύπλοκα συστήματα, που είναι αδύνατο να αντιμετωπιστούν με αναλυτικές μεθόδους. Ο υπολογιστής μπορεί να χρησιμοποιηθεί έτσι για την λήψη αποφάσεων σε σύνθετα προβλήματα, χωρίς την ανάγκη να καταφεύγουμε σε υπεραπλοποιήσεις καί προσεγγίσεις τέτοιου βαθμού που συχνά αλλοιώνουν με ριζικό τρόπο βασικές ιδιότητες του αρχικού συστήματος.

Κατά την συγγραφή των Σημειώσεων, χρησιμοποίησα αρκετές πηγές της διεθνούς βιβλιογραφίας, ιδιαίτερα το βιβλίο του I. Mitrani για Τεχνικές Προσομοίωσης, τις Διδακτικές Σημειώσεις που είχα κατά τις παραδόσεις του G. Walsham στο Πανεπιστήμιο του Cambridge, καθώς και στοιχεία από τεχνικές Προγραμματισμού.

Η παρουσίαση των θεμάτων, αρκετά από τα παραδείγματα, και ένα σημαντικό μέρος των Σημειώσεων έχει συντεθεί με κάποια πρωτοτυπία και με μιά προσπάθεια προσαρμογής στις ανάγκες των συγκεκριμένων σπουδαστών. Αυτοί άλλωστε θα κρίνουν και την τύχη αυτής της προσπάθειας.

Μάρτιος 1988

Νίκος Μ. Χριστοδουλάκης
Επίκουρος Καθηγητής

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΕ ΜΕΘΟΔΟΥΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Προσομοίωση είναι η αναπαράσταση ενός συστήματος ή φαινομένου με σκοπό την ευχερέστερη μελέτη της συμπεριφοράς του και την λήψη αποφάσεων για την βελτίωση της λειτουργίας του, χωρίς την ανάγκη πειραματισμών στο ίδιο το πραγματικό σύστημα. Η αναπαράσταση μπορεί να γίνεται είτε με φυσικά μεσα (όπως για παράδειγμα οι προσομοιωτές πτήσεων, οι πολεοδομικές μακέτες, τα παιγνίδια κλπ.) είτε να βασίζονται σε ένα υπόδειγμα (μοντέλο) που το επεξεργάζεται συνήθως ηλεκτρονικός υπολογιστής.

Οι τύποι των χρησιμοποιούμενων υποδειγμάτων είναι πάρα πολλοί, και επιλέγονται ανάλογα με την φύση του προβλήματος, την δυνατότητα περιγραφής του,τα διαθέσιμα στοιχεία, καί τις γνώσεις που έχει ο μελετητής του συστήματος.

Στην συνέχεια απαριθμούνται συνοπτικά οι δυνατές μορφές υποδειγμάτων και τα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε κατά την μελέτη των συστημάτων.

1. Η έννοια του Συστήματος

Σύστημα είναι το σύνολο των σχέσεων που υπάρχουν ανάμεσα σε διάφορα στοιχεία ή καταστάσεις που παρουσιάζονται στο υπό εξέταση φαινόμενο ή συνδυασμό φαινομένων.

Ο τρόπος παράστασης αυτών των σχέσεων καλείται υπόδειγμα ή πρότυπο ή μοντέλο.

Όταν κάποιος θέλει να εξετάσει την συμπεριφορά ενός συστήματος, πρέπει κατ' αρχήν να ορίσει τα όρια του συστήματος: τί θα θεωρήσει ως δεδομένο για το σύστημα, και τι θα θεωρήσει ως προσδιοριζόμενο από την ύπαρξη του συστήματος. Η διάκριση αυτή έχει αποφασιστική σημασία για τα συμπεράσματα που μπορεί κανείς να σκιαγραφήσει από την εξέταση του συστήματος.

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να εξετάσουμε τις επιδράσεις των βροχοπτώσεων στις καλλιέργειες μιάς περιοχής τότε οι καιρικές συνθήκες θεωρούνται δεδομένες και το σύστημα θα περιγράφει πώς εξαρτώνται οι αποδόσεις καλλιεργειών από την ένταση της σποράς, το έδαφος, τις καιρικές συνθήκες κλπ. Αν όπως θέλουμε να εξετάσουμε την επίδραση των ανέμων στην πυκνότητα βροχοπτώσεων μιάς περιοχής, τότε οι βροχοπτώσεις αποτελούν την υπό εξήγηση συμπεριφορά.

Δεδομένα τώρα θα θεωρηθούν οι άνεμοι, οι μορφολογία του εδάφους κλπ.

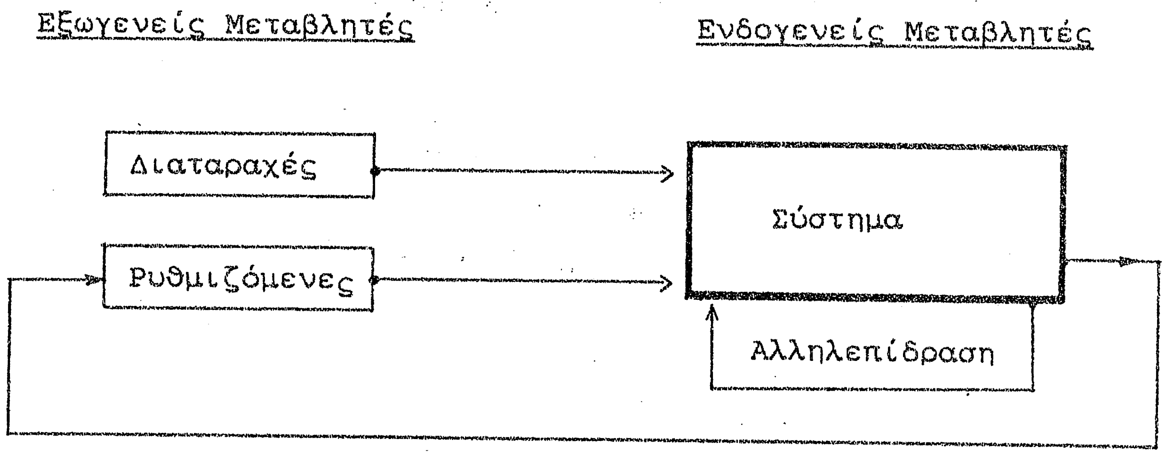
Αν θεωρήσουμε πως οι διάφορες καταστάσεις ή παράγοντες μετρούνται από ορισμένες μεταβλητές, είναι φανερό πως η περιγραφή ενός συστήματος θα αρχίζει από τον διαχωρισμό των μεταβλητών στις δύο βασικές κατηγορίες:

- Εξωγενείς ή εξωτερικές μεταβλητές ή εισροές: Όσες καθορίζονται ανεξάρτητα από την λειτουργία του συστήματος. Αργότερα θα δούμε πώς οι εξωγενείς μεταβλητές μπορούν να διακριθούν σε εξωγενείς που ρυθμίζονται ανάλογα με την επιθυμητή συμπεριφορά του συστήματος (εργαλεία) και σε όσες δεν είναι δυνατόν να ελεγχθούν (διαταραχές).

- Ενδογενείς ή εσωτερικές μεταβλητές ή εκροές: Είναι οι μεταβλητές που καθορίζονται από την λειτουργία του συστήματος.

  Σε μία μικρή οικονομία ο πληθωρισμός και το ισοζύγιο πληρωμών αποτελούν ενδογενείς μεταβλητές γιατί διαμορφώνονται ανάλογα με την οικονομική δραστηριότητα. Τα επιτόκια αποτελούν εργαλείο γιατί μπορούν να καθοριστούν κατά βούληση, ενώ οι διεθνείς τιμές του πετρελαίου είναι εξωγενείς και ανεξέλεγκτες επειδή δεν επηρεάζονται από την πορεία της μικρής οικονομίας.

  Σε ένα σύστημα που αναπαριστά την πτήση ενός αεροπλάνου, η ταχύτητα αποτελεί ενδογενή μεταβλητή, η τροφοδοσία καυσίμου ρυθμιζόμενη εξωγενή, ενώ η ένταση του προσπίπτοντος ανέμου ανεξέλεγκτη εξωγενή μεταβλητή.



Καθορισμός Ρυθμιζόμενων Μεταβλητών

Οι σχέσεις μεταξύ των διαφόρων μεταβλητών αποδίδονται στο Σχήμα. Παρατηρείστε ότι οι ενδογενείς μεταβλητές αλληλεπιδρούν συνήθως μεταξύ τους, και πολλές φορές οι ρυθμιζόμενες εξωγενείς μεταβλητές καθορίζονται ανάλογα με την συμπεριφορά των ενδογενών μεταβλητών.

Σκοπός της μελέτης ενός συστήματος είναι η εύρεση των σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ των διαφόρων κατηγοριών μεταβλητών, η επίδραση που ασκούν οι εξωγενείς μεταβλητές στην συμπεριφορά του συστήματος και η δυνατότητα ρύθμισης των κατάλληλων εξωγενών μεταβλητών έτσι ώστε να βελτιώνεται η συμπεριφορά του συστήματος.

Αναγκαίο μέσο για την μελέτη του συστήματος, και την λήψη των κατάλληλων αποφάσεων για την λειτουργία του είναι φυσικά η ύπαρξη του υποδείγματος που αντιστοιχεί στο σύστημα.

2. Είδη Υποδειγμάτων

Αν περιοριστούμε εδώ στα υποδείγματα που χρησιμοποιούνται για ανάλυση μπορούμε να κάνουμε την εξής ταξινόμηση:

A. Ανάλογα με την χρονική εξέλιξη που εμφανίζουν.

A1. Στατικά Υποδείγματα. Οι μεταβλητές και οι μεταξύ τους σχέσεις παραμένουν χρονικά αναλλοίωτες.

Παραδείγματα: Ο νόμος έλξης δύο σωμάτων m_1, m_2 που βρίσκονται σε απόσταση R: $B=km_1m_2/R^2$.

Η συνάρτηση παραγωγής χωρίς τεχνολογική πρόοδο, συναρτήσει του κεφαλαίου (K) και της εργασίας (L): $Q=K^{\alpha}L^{1-\alpha}$.

A2. Δυναμικά Υποδείγματα: Οι μεταβλητές εξελίσσονται χρονικά και οι μεταξύ τους σχέσεις μπορεί να μεταβάλλονται.

Παραδείγματα: Ο νόμος κίνησης ενός σώματος μάζας m υπό την επίδραση μιάς δύναμης F είναι: $m\ddot{x}=F$, όπου $\ddot{x}$ η δεύτερη παράγωγος. Το διάστημα x είναι χρονικά μεταβαλλόμενο.
Αναδρομική συνάρτηση κατανάλωσης: $C_t=\gamma_1 C_{t-1}+\gamma_2 Y_t$, συναρτήσει του εισοδήματος Y και του προγενέστερου επιπέδου κατανάλωσης.
Το φορτίο (Q) μιάς αποθήκης που αυξομοιώνεται ανάλογα με την τροφοδοσία (X) και τις πωλήσεις (D) κάθε περιόδου:

$$Q_t = Q_{t-1}+X_t-D_t$$

B. Ανάλογα με την Μορφή αναπαράστασης του συστήματος .

B1. Μαθηματικά Υποδείγματα: Όταν οι σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών είναι αλγεβρικές σχέσεις, διαφορικές εξισώσεις, εξισώσεις διαφορών ή συνδυασμοί τους, όπως τα προηγούμενα παραδείγματα.

B2. Λογικά Υποδείγματα: Όταν οι σχέσεις των μεταβλητών προσδιορίζονται με συγκεκριμένες λογικές συνθήκες, μη-μαθηματικές, συνήθως της μορφής ΕΑΝ——>ΤΟΤΕ.

Παραδείγματα: Το υπόδειγμα κράτησης θέσεων σε μία αεροπορική διαδρομή περιέχει τις εξής λογικές σχέσεις:

- Άφιξη Πελάτη

ΕΑΝ (Αριθμός Επιβατών < Χωρητικότητας) ΤΟΤΕ $\left\{\begin{array}{l}\text{Επιβίβαση, και}\\ \text{Επιβάτες αυξάνονται κατά 1}\end{array}\right.$

ΕΑΝ {ΟΧΙ} ΤΟΤΕ Αδυναμία Εξασφάλισης θέσης.

B3. <u>Αφηρημένα ή Ασαφή Υποδείγματα:</u> Όταν οι σχέσεις των μεταβλητών ή και οι μεταβλητές οι ίδιες δεν είναι προσδιορισμένες με σαφήνεια, και το υπόδειγμα δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αναλυτική επεξεργασία. Με την αυστηρή έννοια του όρου, αυτά βέβαια δεν αποτελούν <u>υποδείγματα.</u>

Στηρίζονται στην διαίσθηση, σε περιορισμένη κατανόηση του συστήματος, σε εμπειρικούς αναπόδεικτους κανόνες κλπ.

<u>Παραδείγματα:</u> Η συγκεχυμένη άποψη που έχει μία επιχείρηση για το πώς η διεθνής οικονομική συγκυρία επηρρεάζει τις πωλήσεις.

Η διαδικασία με την οποία αποφασίζει κανείς τις κινήσεις του σε ένα χαρτοπαίγνιο.
Τα υποδείγματα αυτά, παρά τις ατέλειες που παρουσιάζουν, αρχίζουν και αποκτούν ενδιαφέρον με την διάδοση των Εμπείρων Συστημάτων, όπου μπορεί να χρησιμοποιηθούν νόμοι πιθανοτήτων και Ασαφής Λογική (Fuzzy Logic) για την παράστασή τους.

Γ. Ανάλογα με την <u>Ακρίβεια</u> αναπαράστασης.

Γ1. <u>Εκτιμημένα Υποδείγματα:</u> Όσα από τα μαθηματικά υποδείγματα έχουν παραμέτρους και σχέσεις ανταποκρινόμενες στα υπάρχοντα δεδομένα του συστήματος.

Παραδείγματα εκτιμημένων υποδειγμάτων αποτελούν τα οικονομετρικά μοντέλα, τα συστήματα εισροών/εκροών κλπ.

Γ2. <u>Θεωρητικά</u> ή ποιοτικά υποδείγματα: Όσα προκύπτουν κυρίως από γενικούς θεωρητικούς νόμους, ή υποθέσεις. Σκοπός των υποδειγμάτων αυτών είναι κυρίως η διερεύνηση των συνεπειών διαφόρων θεωρητικών υποθέσεων στις ενδογενείς μεταβλητές.

Δ. Ανάλογα με την <u>λεπτομέρεια</u> καταγραφής.

Δ1. <u>Ομαδοποιημένα Υποδείγματα:</u> Πολλές ομοειδείς μεταβλητές αντιμετωπίζονται σαν μία ομαδοποιημένη μεταβλητή, και δεν εξετάζεται η συμπεριφορά των επί μέρους στοιχείων.

Παραδείγματα: Ένα οικονομικό υπόδειγμα όπου όλες οι κατηγορίες εισαγωγών (Ετοιμα προϊόντα, Πρώτες Ύλες, Μηχανήματα κλπ.) αντιπροσωπεύονται από μία μεταβλητή.

Σε ένα σύστημα αφίξεων πολλών κατηγοριών πελατών, δημιουργούμε μία κατηγορία αφίξεων από τον μέσο όρο των επί μέρους κατηγοριών.

Δ2. Κατηγοριοποιημένα ή Απο-ομαδοποιημένα Υποδείγματα (Disagreggated): Τα υποδείγματα εκείνα όπου οι επί μέρους κατηγορίες ενός στοιχείου ή φαινομένου προσδιορίζονται χωριστά.

Ε. Ανάλογα με την μορφή της μαθηματικής παράστασης.

Ε1. Γραμμικά: Οι αλγεβρικές εκφράσεις είναι γραμμικές .

Παράδειγμα: Η εξέλιξη του κεφαλαιουχικού εξοπλισμού (Κ) συναρτήσει των επενδύσεων (Ι) και του ποσοστού απαξίωσης:

$$K_t = K_{t-1} - \delta K_{t-1} + I_t$$

Ε2. Μη-Γραμμικά: Όταν υπάρχουν μη-γραμμικές μαθηματικές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση παραγωγής της περίπτωσης Α1.

Τα ΔΥΝΑΜΙΚΑ υποδείγματα μπορούν να ταξινομηθούν περαιτέρω ως προς τα εξής κριτήρια:

ΣΤ. Ανάλογα με το είδος της χρονικής εξέλιξης.

ΣΤ1: Συνεχούς χρόνου: Υπάρχει συνεχής εξέλιξη του συστήματος, που συνήθως περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις.

Παραδείγματα: Όλα τα συστήματα που καθορίζονται από φυσικούς νόμους, όπως η κίνηση ενός σώματος (περίπτωση Α2).

ΣΤ2: Διακριτού Χρόνου: Το σύστημα εξελίσσεται ανά πεπερασμένα και σταθερά χρονικά διαστήματα.

Παράδειγμα: Το φορτίο μιάς αποθήκης όπου οι τροφοδοσίες και οι αποστολές προϊόντων πραγματοποιούνται σε τακτά χρονικά διαστήματα, (περίπτωση Α2).

Τα στοιχεία εισπράξεων-πληρωμών μιάς επιχείρησης που ενημερώνονται στο τέλος κάθε εργάσιμης ημέρας.

ΣΤ3. Διακριτών Γεγονότων: Το σύστημα δεν εξελίσσεται συνεχώς, ούτε σε προκαθορισμένα χρονικά διαστήματα, αλλά μόνο όταν συμβαίνει κάτι (γεγονός) που αλλάζει την κατάσταση του συστήματος.

Παράδειγμα: Η διαθεσιμότητα των πόρων ενός υπολογιστή καθορίζεται από το αν παρουσιαστεί νέος υποψήφιος χρήστης ή περατωθεί μία ήδη εκτελούμενη εργασία.

Ζ. Ανάλογα με την φύση των εξωγενών φαινομένων.

Ζ1. Αιτιοκρατικά: Όταν οι εξωγενείς μεταβλητές είναι επακριβώς γνωστές σε κάθε χρονική στιγμή. Αυτό έχει σαν συνέπεια και τον ακριβή προσδιορισμό των ενδογενών μεταβλητών σε κάθε περίοδο.

Παράδειγμα: Η θέση (x) ενός σώματος μάζας m που ωθείται χωρίς τριβές από μία δύναμη $F(t)=ke^{-at}$ μπορεί να καθοριστεί με ακρίβεια αν λύσουμε την διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} = \frac{k}{m} e^{-at}$$

Ζ2. Στοχαστικά: Όταν τα εξωγενή φαινόμενα ακολουθούν τυχαίες κατανομές, με δεδομενο μέσο και διακύμανση.

Παράδειγμα: Οι χρονικές στιγμές άφιξης πελατών σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης δεν είναι προκαθορισμένες αλλά ακολουθούν την εκθετική κατανομή (στοχαστικά διακριτά γεγονότα).
Η ζήτηση (D) ενός προϊόντος καθορίζεται από την τιμή (P) και από μία τυχαία στοχαστική συνιστώσα (ε):

$$D = \alpha P+\varepsilon$$

όπου το $\varepsilon \sim N(o,\sigma^2)$ και εκφράζει απρόβλεπτες διαταραχές.

Η πληθώρα αυτή των δυνατών τύπων υποδειγμάτων μπορεί να επιταθεί, αν κανείς αναλογιστεί ότι σε ένα σύστημα μπορεί να συνυπάρχουν υποσυστήματα διαφορετικής φύσεως. Γιά παράδειγμα, το σύστημα αφίξεων εργασιών σε ένα υπολογιστή είναι στοχαστικό διακριτών γεγονότων, η προτεραιότητα εκτελέσεως εργασίας ακολουθεί ένα συνεχές υπόδειγμα χρονο-ωρίμανσης, η χρέωση Μονάδων Επεξεργασίας γίνεται με βάση ένα στατικό, μη-γραμμικό τύπο και η διακοπή/έναρξη της λειτουργίας του συστήματος γίνεται σε προκαθορισμένες χρονικές στιγμές.

Είναι φανερό πως η κατασκευή του υποδείγματος θα πρέπει να καθοριστεί από:

α) την πολυπλοκότητα και την φύση του προβλήματος

β) τις διαθέσιμες γνώσεις για την ανάλυση και κατανόησή του.

Έτσι, δεν μπορούμε να περιμένουμε αξιόλογη απεικόνιση ενός πολύπλοκου συστήματος από απλοϊκά υποδείγματα. Από την άλλη όμως δεν έχει νόημα να χρησιμοποιούμε πολύπλοκα υποδείγματα που δεν κατανοούμε πώς λειτουργούν για να εξηγήσουμε την συμπεριφορά ενός συστήματος.

Η επιλογή του κατάλληλου τύπου του υποδείγματος, έτσι ώστε να αντιπροσωπεύει ικανοποιητικά το σύστημα και να έχουμε και την δυνατότητα να το επεξεργαστούμε αποτελεί το πιό σημαντικό βήμα στην διαδικασία της προσομοίωσης.

3. Προσομοίωση Δυναμικών Συστημάτων

Στις Σημειώσεις αυτές εξετάζονται οι πιό συνήθεις μέθοδοι Προσομοίωσης δυναμικών συστημάτων συνεχούς χρόνου, διακριτού χρόνου και διακριτών γεγονότων με την εξής σειρά:

3.1 Στοχαστικές Προσομοιώσεις Διακριτών Γεγονότων

Τα υποδείγματα αυτά αντιπροσωπεύουν μία πολύ μεγάλη κατηγορία συστημάτων άφιξης-εξυπηρέτησης, όπου ορισμένα γεγονότα ακολουθούν τυχαίες κατανομές. Η προσομοίωση τους ακολουθεί τα εξής βήματα:

- Καταγραφή των λογικών σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών.
- Καθορισμός των γεγονότων που μεταβάλλουν την κατάσταση του συστήματος.
- Παραγωγή τυχαίων (ή ψευδοτυχαίων) φαινομένων που έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά κατανομής με το πραγματικό σύστημα.
- Επίλυση του υποδείγματος που αντιστοιχεί στην λειτουργία του συστήματος.

Ο μηχανισμός εκτέλεσης του προγράμματος περιγράφεται καλύτερα στο επόμενο εδάφιο.

Σκοπός των εκτελέσεων αυτών είναι η συλλογή μετρήσεων που θα μας επιτρέψει να εκτιμήσουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης για ορισμένες ενδογενείς μεταβλητές του συστήματος που μας ενδιαφέρουν.

Παρόμοια διαδικασία ακολουθείται και όταν θέλουμε να προσομοιώσουμε ένα αιτιοκρατικό σύστημα διακριτών γεγονότων. Η μόνη διαφορά είναι πως αντί των τυχαίων στοιχείων θα έχουμε τις προκαθορισμένες τιμές του φαινομένου.

3.2 Συστήματα διακριτού ή συνεχούς χρόνου

Η προσομοίωση των υποδειγμάτων αυτών απαιτεί την καταγραφή των κατάλληλων εξισώσεων που περιγράφουν την χρονική εξέλιξη του συστήματος.

Τα συστήματα διακριτού χρόνου επιλύονται με απλή υπολογιστική διαδικασία, αν οι εκφράσεις των ενδογενών μεταβλητών (y) είναι κλειστής-μορφής ως προς τις εξωγενείς μεταβλητές (u) τον χρόνο t και τις προγενέστερες τιμές τους:

$$y_{t+1} = f(y_t, u_t, t).$$

Αν όμως περιέχουν εξισώσεις διαφορών πεπλεγμένης-μορφής:

$$y_{t+1} = f(y_{t+1}, y_t, u_t, t)$$

τότε σε κάθε περίοδο t, απαιτείται ένας κατάλληλος επαναληπτικός αλγόριθμος. Συστήματα της μορφής εξετάζονται σε άλλο μάθημα Προσομοίωσης που αφορά αποκλειστικά σε οικονομικά υποδείγματα.

Τα συστήματα συνεχούς χρόνου έχουν την γενική μορφή:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, u, t)$$

και για την επίλυσή τους καταφεύγουμε στην λεγόμενη <u>αριθμητική προσομοίωση</u> όπου προσεγγίζουμε τις Διαφορικές εξισώσεις με εξισώσεις Διαφορών πολύ μικρής περιόδου. Ίδιες διαδικασίες επίλυσης ακολουθούνται και όταν οι εξωγενείς μεταβλητές (u) δεν προκαθορίζονται αλλά ακολουθούν μία συγκεκριμένη κατανομή (μ, σ^2). Στην περίπτωση αυτή οι τιμές των u_t καθορίζονται από μία τυχαία δειγματοληψία της κατανομής.

4. <u>Μέθοδοι Προσομοιώσεων Διακριτών Γεγονότων</u>

Η βασική μεταβλητή που χαρακτηρίζει όλα τα δυναμικά συστήματα είναι ο χρόνος, που εδώ θα συμβολίζουμε με το όνομα TIME. Σε μία προσομοίωση η μεταβλητή μπορεί να αυξάνεται ανά κανονικά διαστήματα ρ που αντιστοιχούν στο τικ-τακ ενός ωρολογίου και κάθε φορά να έχουμε:

$$TIME = TIME + \rho$$

Σε κάθε στιγμή TIME θα πρέπει να ελέγχουμε αν συμβαίνει κάποιο γεγονός και να αναπροσαρμόζουμε κατάλληλα τις καταστάσεις του συστήματος. Αν δεν συμβαίνει κανένα γεγονός τότε προχωρούμε στην αύξηση του χρόνου.

Η προσομοίωση αυτή καλείται <u>συγχρονική.</u> Δίνει μιά εντελώς πραγματική εικόνα της συμπεριφοράς του συστήματος αλλά έχει το μειονέκτημα να είναι πολύ αργή, γιατί θα πρέπει να εκτελούνται τα βήματα ακόμα και όταν κανένα γεγονός δεν λαμβάνει χώρα. Αν το πρόγραμμα της προσομοίωσης είναι τέτοιο έτσι ώστε η μεταβολή του χρόνου να γίνεται από τον υπολογιστή ανά ρ πραγματικές χρονικές μονάδες (όπως για παράδειγμα sec) τότε η σύγχρονη προσομοίωση λέγεται πραγματικού χρόνου (real-time simulation).

Η συνηθέστερη όμως προσομοίωση είναι η ασύγχρονη, στην οποία η μεταβλητή TIME δεν μεταβάλλεται βήμα-βήμα, αλλά από γεγονός σε γεγονός. Αν για παράδειγμα σε ένα σύστημα αναμένεται να συμβεί ένα γεγονός (Γ1) την χρονική στιγμή T_1 και ένα άλλο γεγονός (Γ2) την χρονική στιγμή T_2, τότε ο χρόνος μεταπηδά στην στιγμή του αμεσώτερου γεγονότος.

$$\text{TIME} = \min\,(T_1, T_2)$$

Η πιό γνωστή μέθοδος κατάστρωσης προγραμμάτων προσομοίωσης διακριτών γεγονότων βασίζεται στην περιγραφή των διαδικασιών που χαρακτηρίζουν τα διάφορα αναμενόμενα γεγονότα $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$.

Κάθε διαδικασία j (j=1,...,k) που αντιστοιχεί στο γεγονός Γ_j περιλαμβάνει όλες τις λογικές σχέσεις και μεταβολές καταστάσεων που συνεπάγεται η τέλεση του γεγονότος Γ_j.

Η μέθοδος χρονικής ταξινόμησης γεγονότων (Event scheduling) βασίζεται στην εξής επιλογή του αμεσώτερου γεγονότος.

- Βρες το $T_s = \min\,\{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$, $(1 \leq s \leq k)$.
- TIME = T_s
- Διαδικασία γεγονότος Γ_s

  Άλλαξε μεταβλητές του συστήματος

  Προσάρμοσε καταστάσεις του συστήματος

  Υπολόγισε τον χρόνο T_s του επόμενου γεγονότος Γ_s
- Επιστροφή στον μηχανισμό επιλογής γεγονότων.

Μιά διαδικασία είναι δυνατόν να έχει κοινά μέρη με μιά άλλη και το πρόγραμμα τότε ενδέχεται να απαιτεί τον χωρισμό σε υποδιαδικασίες για να αποφεύγονται οι επαναλήψεις. Στην μέθοδο αυτή εύρεσης του επόμενου γεγονότς θα στηριχθούν οι εφαρμογές που θα περιγράψουμε αργότερα.

Άλλες μέθοδοι κατάστρωσης προσομοίωσης στοχαστικών διακριτών γεγονότων, που όμως δεν θα εξετάσουμε σε αυτές τις Σημειώσεις,είναι οι εξής:

- Μέθοδος ταξινόμησης διεργασιών (Process scheduling)
- Μέθοδος ταξινόμησης δραστηριοτήτων (Scheduling of Activities)
- Συνδεδεμένες λίστες (Linked Lists)
- Προσανατολισμένοι Γράφοι.

Στα κεφάλαια που ακολουθούν περιγράφονται με λεπτομέρειες τα βασικά στοιχεία μιάς προσομοίωσης και παρουσιάζονται αρκετές εφαρμογές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΨΕΥΔΟΤΥΧΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ (0,1).

Συνήθως χρησιμοποιούμε ένα αλγόριθμο που παράγει τυχαίους ακεραίους $\{X_i,\ i=1,2,\ldots,K\}$ στο διάστημα (0,M) και μετά τους ανάγουμε στο (0,1) ως εξής:

$$u_i = X_i/M \qquad (i=1,2,\ldots,K) \qquad (1)$$

Έχοντας ένα σύνολο τυχαίων $U=\{u_i,\ 0<u_i<1\}$ μπορούμε να λάβουμε ένα σύνολο τυχαίων ομοιόμορφης κατανομής στο διάστημα (α,β) μέσω του απλού γραμμικού μετασχηματισμού:

$$y_i = \alpha + u_i(\beta-\alpha) \qquad (2)$$

οπότε $0<u_i<1 \implies \alpha<y_i<\beta$

<u>Απόδειξη</u>: Η συνάρτηση κατανομής του u_i είναι $f(u)=1$. Χρησιμοποιώντας την (2) αποδείξτε ότι η συνάρτηση κατανομής της μεταβλητής y είναι:

$$g(y) = \frac{1}{\beta-\alpha}$$

δηλ. η ομοιόμορφη κατανομή στο (α,β).

Ο συνηθέστερος αλγόριθμος παραγωγής των τυχαίων X_n είναι κάποια επαναληπτική διαδικασία, όπου ξεκινώντας από μία αρχική τιμή X_o (καλούμενη "<u>σπόρος</u>" παίρνουμε διαδοχικά:

$$X_{n+1} = f(X_n)$$

όπου f κατάλληλη συνάρτηση με τιμές στο διάστημα (0,M).
Η συνάρτηση f καλείται γεννήτρια.

Είναι προφανές ότι αριθμοί που παράγονται με τον αλγόριθμο αυτό δεν είναι εντελώς τυχαίοι, αφού η τιμή του X_{n+1} προσδιορίζεται από μία συγκεκριμένη συνάρτηση f(·) με ένα προκαθορισμένο τρόπο. Για τον λόγο αυτό οι αριθμοί που παράγονται ονομάζονται ψευδοτυχαίοι. Οι ψευδοτυχαίοι παρουσιάζουν επίσης συσχέτιση αφού η τιμή του ενός προσδιορίζεται με βάση την τιμή του προηγούμενου. Ένας αλγόριθμος θεωρείται καλός αν παρουσιάζει χαμηλό συντελεστή συσχέτισης.

Ένα άλλο πρόβλημα που παρουσιάζεται είναι η περιοδικότητα.

Αν κάποια τιμή X_ℓ εμφανιστεί πάλι στον αλγόριθμο έπειτα από T επαναλήψεις, δηλ.

$$X_\ell = X_{\ell+T}$$

τότε είναι προφανές ότι όλες οι άλλες τιμές που θα ακολουθήσουν θα είναι επαναλήψεις:

$$X_{\ell+T+j} = X_{\ell+j} \qquad \text{για κάθε} \quad j=0,1,2,\ldots$$

Ο αριθμός T λέγεται περίοδος της γεννήτριας ψευδοτυχαίων.

Μία καλή γεννήτρια θα πρέπει να έχει πολύ μεγάλη περίοδο. Αν η συνάρτηση παίρνει τιμές στο διάστημα (0,M) το ιδανικό θα ήταν να έχουμε T=M, δηλ. να μπορούμε να αξιοποιήσουμε όλο το διαθέσιμο δυναμικό αριθμών.

Στη συνέχεια εξετάζουμε μερικές μεθόδους παραγωγής ψευδοτυχαίων ομοιόμορφης κατανομής.

1.1 Μέθοδος Μεσαίου Τετραγώνου. (John Von Neumann).

Ο αλγόριθμος συνίσταται στην ύψωση του ν-ψηφίου αριθμού X_n στο τετράγωνο που παράγει ένα αριθμό με 2ν-ψηφία (το πολύ) και λήψη των ν-ψηφίων αυτού του αριθμού.

Παράδειγμα: $X_0 = 25$ (ν=2 ψηφία)

$X_0^2 = 625 = 0\underbrace{62}5$ (4 ψηφία)

$\Longrightarrow X_1 = 62$

$X_1^2 = 3\underbrace{84}4 \Longrightarrow X_2 = 84$

$\vdots$

Έτσι παράγονται οι αριθμοί {25,62,84, κλπ.}.

Η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε οποιοδήποτε αριθμητικό σύστημα (δυαδικό, δεκαδικό, δεκαεξαδικό κλπ.).

Μερικές φορές παράγει καλά αποτελέσματα, μερικές άλλες όμως παρουσιάζει προβλήματα.

Σήμερα δεν χρησιμοποιείται πιά αυτή η μέθοδος.

1.2 Γραμμική Αναδρομική Σχέση Υπολοίπου. (Congruential method).

Αν θεωρήσουμε δύο ακεραίους x και y ορίζουμε την ακέραιη συνάρτηση mod (modulo) ως εξής:

$$Z = x \bmod y \qquad Z : \text{ακέραιος} \tag{3}$$

αν υπάρχει k ακέραιος έτσι ώστε:

$$x = yk + Z \qquad \text{και} \qquad 0 \le Z \le y-1$$

Το Z παριστάνει, με άλλα λόγια, το ακέραιο υπόλοιπο της διαίρεσης του ακέραιου x με τον ακέραιο y.

Η <u>προσθετική</u> γραμμική αναδρομική μέθοδος του υπολοίπου βασίζεται στην επιλογή τριών ακέραιων αριθμών α,β,M και τον αλγόριθμο:

$$X_{n+1} = (\alpha X_n + \beta) \bmod M \tag{4}$$

Επειδή όλα τα αποτελέσματα βρίσκονται στο διάστημα (0,M-1) είναι προφανές ότι όσο μεγαλύτερο επιλεγεί το M τόσο περισσότερους τυχαίους θα μπορούμε να παράγουμε.

Για να πετύχουμε <u>περίοδο</u> T=M πρέπει να πληρούνται οι εξής συνθήκες των Hull-Dobell:

(Σ1): Ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των (β,M) είναι το 1.
Δηλ. οι β και M είναι μεταξύ τους πρώτοι.

(Σ2): Κάθε πρώτος αριθμός ρ που είναι παράγοντας του M θα πρέπει να είναι και παράγοντας του (α-1). Δηλαδή αν ο ρ είναι πρώτος και διαιρεί ακριβώς τον M θα πρέπει να διαιρεί ακριβώς και τον (α-1).
Αν ρ πρώτος και $k \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $M=k\rho$
$\Longrightarrow$ $\ell \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $\alpha-1=\ell\rho \Longleftrightarrow \alpha=\ell\rho+1$.

(Σ3): Αν το 4 διαιρεί τον M τότε να διαιρεί και τον (α-1).
Δηλ. αν $k' \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε: $M=4k'$ $\Longrightarrow$ $\ell' \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε: $\alpha=4\ell'+1$.

<u>Παράδειγμα:</u> Αν $M=2^b$ όπου b: μεγάλος ακέραιος τότε αρκεί:
β=περιττός (συνθήκη Σ1 πληρούται).
$\alpha=2\ell+1$ (συνθήκη Σ2 πληρούται).
Η (Σ2) πληρούται αυτόματα γιατί ο 2^b δεν έχει κανένα πρώτο παράγοντα.

Άλλη επιλογή είναι να επιλέξουμε τον $M=2^b-1$ έτσι ώστε να είναι πάντα πρώτος αριθμός και μην έχοντας κανένα άλλο διαιρέτη εκτός από το 1 και τον εαυτό του οδηγεί αυτόματα στην εκπλήρωση των τριών συνθηκών. (Παράδειγμα: b=3,5,15 κλπ.).

Ο μεγαλύτερος αριθμός M που μπορεί να επιλεγεί σε ένα υπολογιστή με δυαδική παράσταση <u>ακεραίων</u> ν-ψηφίων (δηλ. 1 ψηφίο πρόσημο και ν-1 δυαδικά ψηφία) είναι ο $2^{\nu-1}$.

<u>Παράδειγμα:</u> Αν κάθε διεύθυνση ακεραίων έχει 8 ψηφία

1	2	3	4	5	6	7	8
±							

$\longleftarrow \nu = 8 \longrightarrow$

το μέγιστο πλήθος αριθμών που μπορεί να αποθηκεύσει είναι $M=2^7=128$ (του 0 συμπεριλαμβανομένου).

Στον IBM 370 $\nu=32$ συνεπώς $M=2^{31}$

Στον IBM PC $\nu=16$ συνεπώς $M=2^{15}=32,768$

Για να επιτευχθεί όσο το δυνατό μικρότερη συσχέτιση μεταξύ X_n, X_{n+1} συνιστάται η επιλογή των α και β να γίνεται μεταξύ των ορίων:

$$\sqrt{M} < \alpha < M - \sqrt{M} \qquad (5)$$

και

$$\beta \approx \frac{3-\sqrt{3}}{6} M = 0,21M \qquad (6)$$

(ή ο πιό κοντινός ακέραιος).

Μερικές γεννήτριες για ακόμη καλύτερα αποτελέσματα συνιστούν αντί $\alpha=4\ell+1$ να λαμβάνεται και $\ell=2k+1$ οπότε:

$$\alpha = 8k+5 \qquad (7)$$

1.3 Πολλαπλασιαστική αναδρομική μέθοδος υπολοίπου.

Η συνάρτηση στην περίπτωση αυτή είναι:

$$X_{n+1} = (\alpha X_n) \bmod M \qquad (8)$$

(i) Αν $M=2^b$ $(b \geq 4)$
πρέπει να λάβουμε α της μορφής
$\alpha=8k+3$ ή $\alpha=8k+5$ $(k=1,2,\ldots)$
και σπόρο X_o=περιττός.

(ii) Αν m περιττός τότε το α πρέπει έτσι ώστε ο μικρότερος ακέραιος ρ για τον οποίο ο αριθμός $\alpha^\rho-1$ διαιρείται με τον M είναι ο $\rho=M-1$.

Η γλώσσα προσομοίωσης SIMSCRIPT χρησιμοποιεί:

$M=2^{31}-1$

$\alpha=14^{29}$

(Το $\rho=2^{31}-2$).

2. ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΩΝ

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε παράγει ένα σύνολο τυχαίων αριθμών με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0,1):

$$U = \{ u_i, \quad i=1,...,N\}$$

Θα εξετάσουμε τρόπους για να παράγουμε διάφορες τυχαίες δειγματοληψίες για τις πιό συνήθεις περιπτώσεις κατανομών που θα συναντήσουμε στα πειράματα προσομοίωσης.

2.1 Διωνυμική κατάνομή

Έστω μιά διαδικασία με δύο δυνατά αποτελέσματα A1, A2 (όπως η ρίψη ενός νομίσματος) με πιθανότητες:

$$P(X=A1) = q \qquad (0<q<1)$$
$$P(X=A2)= 1-q$$

Ο αλγόριθμος παραγωγής δειγματοληψίας είναι απλός:

Γιά κάθε $i=1,...,N$

Αν $u_i \leq q \Rightarrow$ τότε $X_i=A1$

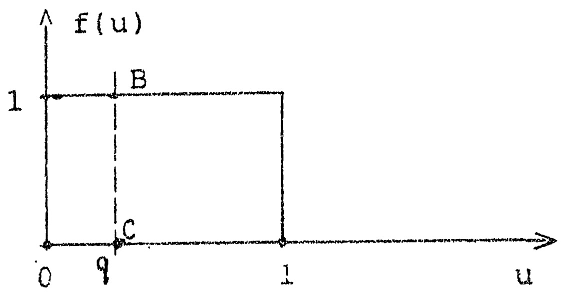
Αν $u_i > q \Rightarrow$ τότε $X_i=A2$

Παράδειγμα: Αν $U=\{0.15, 0.37, 0.52, 0.86, 0.05, 0.10\}$ και $q=0.30$

η δειγματοληψία της διωνυμικής κατανομής θα είναι:

$$X = \{ A1, A2, A2, A2, A1, A1 \}$$

Απόδειξη: Με απλή παρατήρηση της συνάρτησης πιθανότητας f(u):



$$P(X)=P(u\leq q)=\text{εμβαδόν } (01BC)$$
$$=q$$

2.2 Περίπτωση πολλών ενδεχομένων

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι όταν εκτελείται ένα πείραμα X μπορεί να προκύψουν M διαφορετικές καταστάσεις A_i $(i=1,2,\ldots,M)$ με πιθανότητες q_i αντίστοιχα.

$$\sum_{i=1}^{M} q_i = 1$$

Για απλοποίηση θεωρούμε $M=3$ και
$$\begin{cases} P(X=A_1)=q_1 \\ P(X=A_2)=q_2 \\ P(X=A_3)=q_3 \end{cases}$$

με $q_3=1-q_1-q_2$.

Για να παράγουμε μιά τυχαία δειγματοληψία των τριών ενδεχομένων A1, A2, A3 σχηματίζουμε το εξής διάνυσμα M-διαστάσεων:

$$\begin{aligned} F(1) &= q_1 \\ F(2) &= q_1+q_2 \\ F(3) &= q_1+q_2+q_3 = 1 \end{aligned}$$

και προχωρούμε ως εξής:

Για κάθε u_i $(i=1,\ldots,N)$

Αν $u_i \leq F(1)$ => $X_i=A1$

Αν $F(1)<u_i \leq F(2)$ => $X_i=A2$

Αν $F(2)<u_i \leq F(3)$ => $X_i=A3$

<u>Γενικά:</u> Αν $F(j-1)<u_i \leq F(j)$ => $X_i=A_j$ (9)

με $j=1,2,\ldots,M$ και $F(o)\triangleq 0$, $F(M)=1$.

Για απόδειξη αρκεί να χωρίσετε το προηγούμενο διάγραμμα σε F(1),F(2),...

<u>Παράδειγμα:</u> Αν U={0.15, 0.37, 0.52, 0.86, 0.05, 0.10, 0.66, 0.49, 0.90}

και $q_1=0.10$, $q_2=0.30$, $q_3=0.60$ => $F(1)=0.10$, $F(2)=0.4$, $F(3)=1$

και η δειγματοληψία θα είναι (γιατί;)

$$X = \{ A2,\ A2,\ A3,\ A3,\ A1,\ A1,\ A3,\ A3,\ A3\}$$

3. ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΣΥΝΕΧΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Έστω ότι διαθέτουμε ένα σύνολο τυχαίων αριθμών $U=\{u_i,\ i=1,n\}$ που έχει μιά ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0,1). Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το σύνολο για να παράγουμε άλλες κατανομές.

3.1 Παραγωγή εκθετικής κατανομής.

Θέλουμε να δημιουργήσουμε μία εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, που θα εκφράζεται ως εξής:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad \mu=\frac{1}{\lambda}, \qquad V=\frac{1}{\lambda^2} \tag{10}$$

Αρκεί να θέσουμε:

$$\boxed{x = -\frac{1}{\lambda}\ln u} \quad \text{ή} \quad \boxed{x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)} \tag{11}$$

Απόδειξη: Η συνάρτηση πιθανότητας του x είναι $P(x)=P(u(x)).\ |J|$

όπου $J=\frac{\partial u}{\partial x}$ (γνωστή σαν ιακωβιανή)

Από την (11) => $u = 1-e^{-\lambda x}$

$$\text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda e^{-\lambda x} \quad \Rightarrow \quad |J| = \lambda e^{-\lambda x}$$

Επειδή η u είναι ομοιόμορφη => $P\{u(x)\} = 1$

και κατά συνέπεια:

$$P(x) = 1\cdot\lambda e^{-\lambda x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(x) = \lambda e^{-\lambda x}}$$

3.2 Παραγωγή Κανονικής Κατανομής.

3.2.1 Με την χρήση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος.

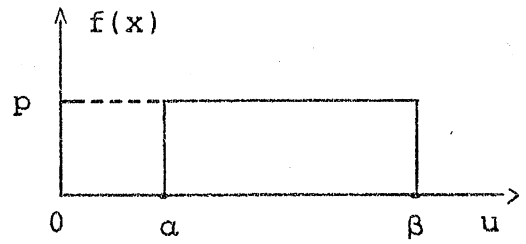
Το Κ.Ο.Θ. μας λέει ότι ένα επαρκώς μεγάλο άθροισμα μιάς οποιασδήποτε κατανομής συμπεριφέρεται σαν κατά προσέγγιση κανονική κατανομή. Ας θεωρήσουμε λοιπόν το άθροισμα:

$$x = \sum_{i=1}^{12} u_i - 6 \tag{12}$$

που δημιουργείται συλλέγοντας 12-άδες αριθμών από το σύνολο U. Το x θα έχει κατά προσέγγιση κανονική κατανομή N(0,1).

Απόδειξη:

Σε μια ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ α και β γνωρίζουμε ότι:



$$\mu = \frac{\beta+\alpha}{2}$$

$$V = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

$f(x) = p = \dfrac{1}{\beta-\alpha}$ έτσι ώστε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 1.$

Για α=0, β=1 => $\mu = \frac{1}{2}$, $V = \frac{1}{12}$ και $p = 1$.

Από την (12) έχουμε για τον μέσο και τη διακύμανση:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{12} E(u_i) - 6 = 12 * \frac{1}{2} - 6 = 0$$

$$V(x) = \sum_{i=1}^{12} V(u_i) = 12 * \frac{1}{12} = 1.$$

Η προσέγγιση πάντως της (12) προς την N(0,1) δεν είναι ιδιαίτερα καλή λόγω του μικρού αριθμού 12 των όρων του αθροίσματος.

3.2.2 Ακριβής κανονική κατανομή.

Ας λάβουμε δύο στοιχεία u_1, u_2 του συνόλου U με τα οποία δημιουργούμε επίσης δύο νέες μεταβλητές x και y ως εξής.

$$x = \sqrt{-2\ \ln u_1} \cdot \cos(2\pi u_2) \tag{13α}$$

$$y = \sqrt{-2\ \ln u_1} \cdot \sin(2\pi u_2) \tag{13β}$$

(Επειδή $0<u_1<1 \Rightarrow -2\ \ln u_1 > 0$ πάντοτε).

Θα αποδείξουμε ότι τα x, y κατανέμονται κανονικά με μέσο 0 και διακύμανση 1.

Απόδειξη: Ορίζω τις βοηθητικές μεταβλητές:

$$r = \sqrt{-2\ \ln u_1} \tag{14α}$$

$$\varphi = 2\pi u_2 \tag{14β}$$

Η απο κοινού κατανομή των r,φ θα δίνεται από την γνωστή σχέση:

$$f(r,\varphi) = P\{u_1(r,\varphi),\ u_2(r,\varphi)\} \cdot |J_1| \tag{15}$$

όπου $u_1(r,\varphi)$ υποδηλώνει την έκφραση των u_1, u_2 συναρτήσει των r, φ και $|J_1|$ είναι η απόλυτη τιμή της ιακωβιανής ορίζουσας:

$$J_1 = \frac{\partial(u_1,\ u_2)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial r} & \dfrac{\partial u_1}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial r} & \dfrac{\partial u_2}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \tag{16}$$

Από τις (14) παίρνω αμέσως:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= e^{-r^2/2} \\ u_2 &= \frac{1}{2\pi}\cdot\varphi \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial r} = -\frac{2r}{2}e^{-r^2/2} \\ &\frac{\partial u_1}{\partial \varphi} = 0 \\ &\frac{\partial u_2}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} = \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

΄Αρα:

$$J_1 = \begin{vmatrix} -re^{-r^2/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\pi} \end{vmatrix} = -\frac{r}{2\pi}e^{-r^2/2}$$

$$\Rightarrow \quad |J_1| = \frac{r}{2\pi}e^{-r^2/2}. \qquad (17)$$

Επίσης επειδή οι μεταβλητές u_1, u_2 είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες θα έχουμε:

$$P(u_1, u_2) = P(u_1)\cdot P(u_2) = 1*1 = 1 \qquad (18)$$

Αντικαθιστώντας τις (17) και (18) στην (16) παίρνουμε:

$$f(r,\varphi) = \frac{r}{2\pi}e^{-r^2/2} \qquad (19)$$

Ας έρθουμε τώρα στις x και y. Με παρόμοιο τρόπο θα έχουμε:

$$g(x,y) = P(x,y) = P\ \{r(x,y),\ \varphi(x,y)\}\cdot|J_2| \qquad (20)$$

όπου $\quad J_2 = \frac{\partial\,(r,\varphi)}{\partial\,(x,y)} = \{\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\}^{-1}$

Παρατηρώντας τις (13) και (14) μπορούμε να γράψουμε:

(21α) $$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi$$

<u>Επίσης</u>

$$J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}^{-1}$$

$$= \{ r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi \}^{-1} = \frac{1}{r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \frac{1}{r} \qquad (22)$$

Επίσης από τις (21) έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= r^2\cos^2\varphi \\ y^2 &= r^2\sin^2\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad r^2 = x^2 + y^2 \qquad (23)$$

Αντικαθιστώντας την (23) στην (19):

$$f(r,\varphi) = \frac{r}{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

και η (20) γίνεται:

$$g(x,y) = \frac{r}{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

ή με μιά απλή τροποποίηση:

$$g(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\right)$$

Η σχέση αυτή αποδεικνύει ότι οι μεταβλητές x και y είναι ανεξάρτητες και ανήκουν στην κανονική κατανομή N(0,1).

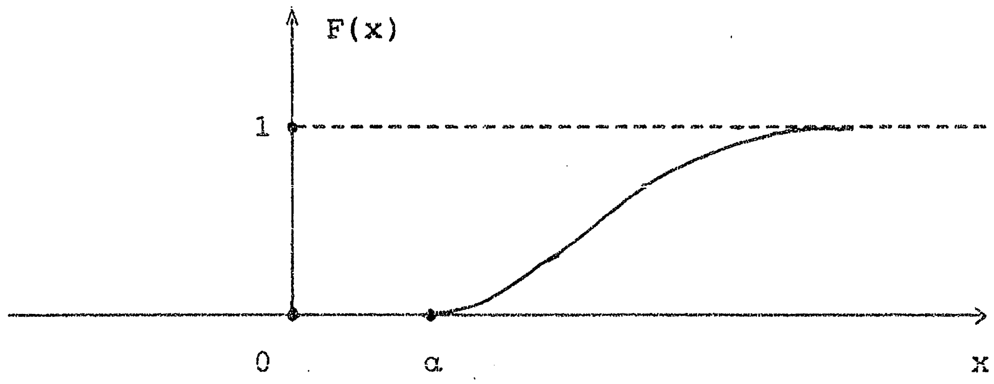
4. ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΤΥΧΑΙΑΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

4.1 Μέθοδος Αντίστροφης Συνάρτησης

Έστω ότι θέλουμε να δημιουργήσουμε μία τυχαία δειγματοληψία μιάς κατανομής με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x) και συνάρτηση αθροιστικής κατανομής:

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(\xi)d\xi$$

Όπως είναι γνωστό: $0 \leq F(x) \leq 1.$



(Με α παριστάνεται το κατώτερο επιτρεπτό όριο της μεταβλητής x, στη γενική όμως περίπτωση ισχύει $-\infty \leq \alpha$).

Χρησιμοποιώντας τώρα μιά γεννήτρια ομοιόμορφης κατανομής

$$U = \{ u_i , \ u_i \in [0,1], \ i=1,\ldots,n \}$$

μπορούμε να θεωρήσουμε την εξίσωση

$$u_i = F(x_i)$$

και υποθέτοντας ότι υπάρχει η <u>αντίστροφη</u> συνάρτηση F^{-1} να δημιουργούμε την δειγματοληψία:

$$x_i = F^{-1}(u_i) \qquad (24)$$

Με τον τρόπο αυτό είχαμε δημιουργήσει την τυχαία δειγματοληψία της εκθετικής κατανομής.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μεταβλητής $x \in [1,3]$ είναι:

$$f(x) = \begin{cases} 0.357\sqrt{x} & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ισχύει: $F(x) = \int_1^x 0.357\sqrt{y}\,dy = \left[0.357 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{y^3}\right]_1^x$

$$F(x) = 0.238\ (\sqrt{x^3} - 1)$$

και ικανοποιεί $F(1)=0$ και $F(3)=1$.

Λύνοντας την εξίσωση $u=F(x)$ παίρνουμε:

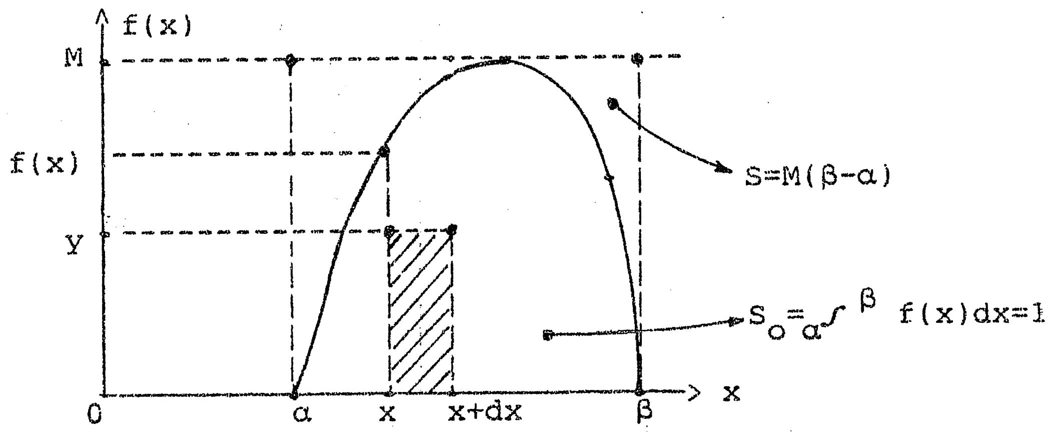
$$u = 0.238(\sqrt{x^3}-1)$$

$$\boxed{x = (4.20u+1)^{2/3}}$$

που μας δίδει την τυχαία δειγματοληψία του x από μία γεννήτρια U(0,1).

4.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ

Η μέθοδος αυτή είναι παρόμοια με τον τρόπο που χρησιμοποιούμε για τον στοχαστικό υπολογισμό ενός ορισμένου ολοκληρώματος. Ας θεωρήσουμε μία κατανομή $x \in [\alpha, \beta]$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$. Αν M είναι το άνω φράγμα της $f(x)$ θα έχουμε: $0 \leq f(x) \leq M$



Προφανώς: $0 \leq \frac{f(x)}{M} \leq 1.$

Τα δύο βήματα που ακολουθούμε στην μέθοδο της απόρριψης είναι:

B1 : Από μία γεννήτρια ομοιόμορφης U(0,1) παίρνουμε δύο αριθμούς u_i, u_j και μετά δημιουργούμε το ζεύγος τυχαίων:

$$x_k = \alpha + (\beta - \alpha) u_i \tag{25α}$$

$$y_k = M \cdot u_j \tag{25β}$$

B2 : Αν τώρα $y_k \leq f(x_k)$ τότε το x_k ανήκει στην ζητούμενη δειγματοληψία. Αλλιώς προχωρούμε σε επιλογή νέου ζεύγους (u_i, u_j).

Πρακτικά αυτό σημαίνει παραγωγή ζευγών (x_k, y_k) και επιλογή εκείνων που βρίσκονται κάτω από την καμπύλη f(x). Η αιτιολόγηση αυτής της τακτικής βασίζεται στο ότι η πιθανότητα αυτή είναι ίδια με την πιθανότητα f(x). Θεωρώντας ένα απειροστό διάστημα dx αυτό ισοδυναμεί με το να αποδείξουμε:

$$P(x \leq X < d+dx \quad \text{και} \quad 0 \leq Y \leq f(x)) \stackrel{?}{=} f(x)dx \tag{26}$$

Όμως $$P(x \leq X < x+dx) = \frac{1}{\beta - \alpha} \cdot dx \tag{27α}$$

και η πιθανότητα να πέσει το (X,Y) κάτω από την καμπύλη f είναι:

$$P\{(X,Y) \text{ κάτω της } f(X)\} = \frac{S_o}{S} = \frac{1}{M(\beta-\alpha)} \tag{27β}$$

Επειδή τώρα το Y είναι ομοιόμορφη στο (O,M) θα έχουμε:

$$P(O<Y\leq f(x)) = \frac{f(x)}{M} \tag{27γ}$$

και

$$P\{x\leq X<x+dx \text{ και } O\leq Y\leq f(x)\} = \frac{P(x\leq X<x+dx)\cdot P(O<Y\leq f(x))}{P\{(X,Y) \text{ κάτω της } f(x)\}}$$

Άρα αντικαθιστώντας τις (27α),(27β),(27γ) στην (26) παίρνουμε:

$$\frac{dx}{\beta-\alpha}\cdot\frac{f(x)}{M} \Big/ \frac{1}{M(\beta-\alpha)} \overset{?}{=} f(x)dx$$

που είναι προφανές.

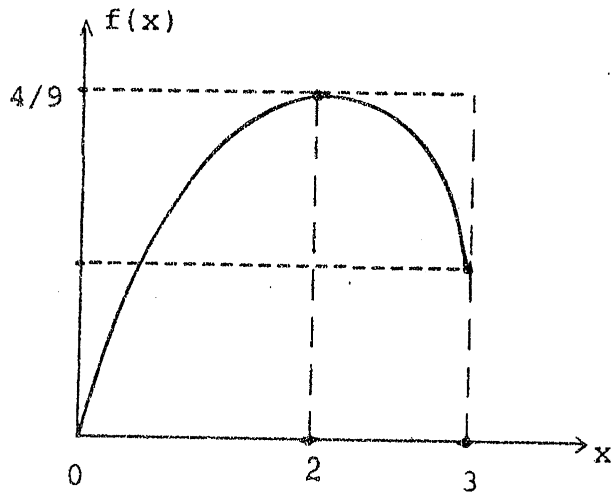
Η μέθοδος αυτή είναι πολύ αργή γιατί ο μέσος αριθμός δοκιμών που απαιτείται μέχρι να βρεθεί ένα ζεύγος (x_k, Y_k) κάτω της $f(x)$ είναι ο μέσος της γεωμετρικής κατανομής με πιθανότητα S_o/S, δηλ.

$$E(\text{αρ. δοκιμών}) = \frac{1}{S_o/S} = (\beta-\alpha)M \tag{28}$$

και ενδέχεται να είναι πολύ μεγάλος.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω η κατανομή $f(x) = \frac{1}{9}(4x-x^2)$

$$0\leq x\leq 3$$



Ισχύει: $F(x) = \frac{1}{9} \int_0^x (4x-x^2)dx = \frac{1}{9}(2x^2-\frac{x^3}{3})$, $F(3) = 1$.

Για $x=2$ έχουμε $M=\max f= \frac{1}{9}(8-4) = 0.444$

$$M\cdot(\beta-\alpha) = \frac{4}{9}\cdot(3-0) = 1.33 = 4/3$$

Άρα χρειαζόμαστε 4 περίπου δοκιμές για να πάρουμε 3 τιμές x_κ που ικανοποιούν τις συνθήκες.

4.3 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΘΕΣΗΣ

Αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ μπορεί να εκφραστεί σαν κυρτός γραμμικός συνδυασμός n άλλων συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x) \qquad (29)$$

με $\qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1, \qquad \alpha_i > 0$

τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα συνδυασμό της κατανομής πολλών ενδεχομένων (πολυωνυμικής) και μιάς $f_i(x)$ για να παράγουμε μία τυχαία δειγματοληψία της $f(x)$.

<u>ΒΗΜΑ 1:</u> Θεωρώντας τα α_i $(i=1,\ldots,n)$ σαν πιθανότητες χρησιμοποίησε μία γεννήτρια $U(0,1)$ για την επιλογή της περίπτωσης (ενδεχομένου) i.

<u>ΒΗΜΑ 2:</u> Δημιούργησε ένα x_i της κατανομής $f_i(x)$.
Το x_i είναι έτσι μία τυχαία δειγματοληψία της $f(x)$.

<u>Παράδειγμα:</u> <u>Υπερεκθετική κατανομή.</u>

Σε ένα σύστημα οι αφίξεις μπορεί να πραγματοποιούνται από μέλη πληθυσμών με διαφορετικούς μέσους. Για $n=2$, οι αφίξεις προέρχονται:

- με πιθανότητα p_1 από πληθυσμό με μέσο ρυθμό αφίξεων λ_1
- με πιθανότητα p_2 από πληθυσμό με μέσο ρυθμό αφίξεων λ_2

Αν οι κατανομές είναι εκθετικές, τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των συνολικών αφίξεων θα είναι:

$$f(x) = p_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + p_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 x} \tag{30}$$

4.4 ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Έχουμε μία εμπειρική κατανομή, η οποία είναι διακριτή ή αποτελεί διακριτή προσέγγιση συνεχούς κατανομής και έχει την μορφή:

x_i	$P(X=x_i)$	$P(X\leq x_i)$
α_1	p_1	$F_1 = p_1$
α_2	p_2	$F_2 = p_1+p_2$
α_3	p_3	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
α_κ	p_κ	$F_\kappa = F_{\kappa-1}+p_\kappa$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
α_n	p_n	$F_n = 1$

(Τα α_i θεωρούνται ταξινομημένα κατά αύξουσα σειρά μεγέθους).

Μία τυχαία δειγματοληψία της εμπειρικής αυτής κατανομής παράγεται αν λάβουμε μιά γεννήτρια ομοιόμορφης κατανομής $U(0,1)$ και για κάθε $u \in U$ βρούμε το k έτσι ώστε

$$F_{k-1} < u \leq F_k$$

με $F_o = p_o = 0$

Τότε επιλέγουμε την τυχαία μεταβλητή $x=\alpha_k$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ

1. ΕΝΑ ΑΠΛΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΑΦΙΞΗΣ/ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ

Μιά εταιρεία που διαθέτει ένα σταθμό βενζίνης θέλει να μελετήσει διάφορες εναλλακτικές προτάσεις για την αγορά της κεντρικής αντλίας παροχής. Συγκεκριμένα θέλει να επιλέξει μεταξύ μιάς ταχύτατης και ακριβής, μιάς αργής και φθηνής και μιάς ενδιάμεσης. Το κριτήριο θα είναι ο μέσος αριθμός εξυπηρετούμενων πελατών ανά ημέρα. Υποθέτοντας κατ' αρχήν ότι κάθε πελάτης αγοράζει την ίδια ποσότητα λίτρων βενζίνης,ο αριθμός τους θα καθορίσει και το επίπεδο εσόδων. Ο σταθμός είναι δίπλα στην εθνική οδό και διαθέτει περιορισμένη χωρητικότητα για στάθμευση (Q=8). Αν ένα αυτοκίνητο φθάνει στον σταθμό και συναντά πάνω από 7 (=Q-1) αυτοκίνητα να περιμένουν φεύγει και δεν περιμένει στην ουρά.
Δίνονται τα εξής στοιχεία:

- Ρυθμός άφιξης δυνητικών πελατών: λ=200 ανά ημέρα (8ωρο).
- Χρόνος εξυπηρέτησης πελάτη <u>όταν</u> η αντλία είναι εύκαιρη και ο πελάτης το αντιληφθεί και εγκαταλείπει την ουρά: Ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [1+S, 2+S] min όπου S=1, 2 και 3 min για τις τρεις μηχανές.
- Χωρητικότητα ουράς αναμονής (Q=8).

<u>Ζητούνται</u>:

1) Να προσδιοριστεί τί είδους γεγονότα συμβαίνουν στο σύστημα.
2) Πώς συνδέονται μεταξύ τους;
3) Πώς εξελίσσεται το σύστημα ως προς τον πραγματικό χρόνο;
4) Να κατασκευαστούν κατάλληλες μεταβλητές που θα μετρούν τον αριθμό ατόμων που περιμένουν στην ουρά, τον αριθμό ατόμων που φεύγουν χωρίς να εξυπηρετηθούν και τον αριθμό των ατόμων που εξυπηρετούνται σε χρονικό διάστημα μιάς ημέρας (Ω_{max}=8 hrs).

Θα εφαρμόσουμε την μέθοδο προσομοίωσης που βασίζεται στην επιλογή του Αμέσως Επομένου γεγονότος κάθε φορά και την περιγραφή των διαδικασιών που αυτά τα γεγονότα προκαλούν.

Η μέθοδος αυτή περιλαμβάνει τα εξής στάδια:

1) Συντελούμενα γεγονότα
   - Αφίξεις
   - Τέλος εξυπηρετήσεων (δηλ. αναχωρήσεις)

2) Μεταβλητές και διανύσματα:

ARR : Διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ (I-1) και I άφιξης στο σύστημα.

CLARR(I) : Ωρολογιακός χρόνος άφιξης του I πελάτη στο σύστημα.

I=1 : CLARR(1) = ARR

I>1 : CLARR(I) = CLARR(I-1)+ARR

SERVE : Χρόνος εξυπηρέτησης του J πελάτη

WAIT(J) : Χρόνος αναμονής του J πελάτη στην ουρά

DEPART(K) : Ωρολογιακός χρόνος αναχώρησης του K-πελάτη από το σύστημα.

CLSTAY(R) : Ωρολογιακός χρόνος εισόδου του R-πελάτη στο σύστημα.

Τα ARRAY αυτά δεν είναι όλα ανεξάρτητα μεταξύ τους, και μάλιστα ορισμένα συνδέονται με προφανείς σχέσεις, όπως:

$$DEPART(K) = CLSTAY(K) + WAIT(K) + SERVE$$

Επίσης το CLSTAY(R) και το CLARR(I) περιέχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, αλλά το CLSTAY δεν περιλαμβάνει τους χρόνους άφιξης όσων έφυγαν άπρακτοι.

Θα φανεί εύκολα αργότερα ότι τα κύρια ARRAY που "οδηγούν" το σύστημα είναι τα CLARR και DEPART εκείνα δηλαδή που αντιστοιχούν στα συντελούμενα γεγονότα του συστήματος.

Σκοπός μας είναι να περιγράψουμε τώρα τις λογικές διαδικασίες που ακολουθεί το σύστημα όταν συμβεί κάποιο γεγονός. Οι διαδικασίες βασίζονται σε ορισμένες μεταβλητές που χαρακτηρίζουν την κατάσταση του συστήματος και, ανάλογα με τις τιμές που έχουν, καθορίζουν προς τα πού εξελίσσεται το σύστημα.

Οι μεταβλητές αυτές είναι στο πρόβλημά μας:

QUE = αριθμός πελατών στην ουρά

$$\text{PUMP} = \begin{cases} 0 & \text{η αντλία ελεύθερη} \\ 1 & \text{η αντλία κατειλημμένη} \end{cases}$$

Στα περισσότερα προβλήματα θα χρειαστεί επίσης να καταμετρούμε πόσοι διέρχονται από τις επιμέρους διαδικασίες του συστήματος. Εδώ ορίζουμε τις εξής βοηθητικές ακέραιες μεταβλητές που θα μας διευκολύνουν αργότερα να καθορίζουμε την κατάσταση του συστήματος:

NARR : αύξων αριθμός αφίξεων

LEFT : αύξων αριθμός πελατών που έφυγαν άπρακτοι

NSTAY : αύξων αριθμός πελατών που μπήκαν στο σύστημα

NSERV : αύξων αριθμός πελατών που εξυπηρετήθηκαν.

Σε κάθε χρονική στιγμή θα ισχύει προφανώς ότι:

NSTAY = NARR - LEFT

όπως και

NSERV = NSTAY - QUE - PUMP

Είναι όμως χρήσιμο να ορίζουμε διαφορετικούς μετρητές σε διάφορα σημεία του προγράμματος.

Τέλος η πιό σημαντική μεταβλητή σε ένα πρόγραμμα προσομοίωσης είναι ο ωρολογιακός χρόνος TIME.

Η μεταβλητή TIME μπορεί να εξελίσσεται σταδιακά ανά χρονική μονάδα, είτε συμβαίνει είτε όχι γεγονός στο σύστημα. Στην περίπτωση αυτή έχουμε συγχρονική προσομοίωση και το πρόγραμμα θα ρωτάει κάθε φορά αν συμβαίνει κάποιο γεγονός, αλλιώς θα επαναλαμβάνει την εξέλιξη της TIME. Μία τέτοια προσέγγιση είναι φυσικά κατανοητή, αλλά συνήθως αργή και δαπανηρή στην υπολογιστική της εκτέλεση.

'Ενας άλλος τρόπος, που θα ακολουθήσουμε εδώ, είναι να αφήσουμε την TIME να μεταβαίνει κατ' ευθείαν στην χρονική στιγμή που συμβαίνει ένα γεγονός.

3) Κατάρτιση του Προγράμματος

(I) Καθορισμός Μεταβλητών

Παραγωγή αντίστοιχων δειγματοληψιών.
- Εκθετική δειγματοληψία αφίξεων ARR
- Ομοιόμορφη δειγματοληψία χρόνου εξυπηρέτησης SERVE

Το πρόβλημα θα καθορίζει ή συγκεκριμένο αριθμό N=σταθ. ή μέγιστο χρόνο λειτουργίας του συστήματος Ωmax.
Στην δεύτερη περίπτωση βρίσκουμε το M για το οποίο:

$$\text{CLARR}(M) > \Omega\text{max}$$

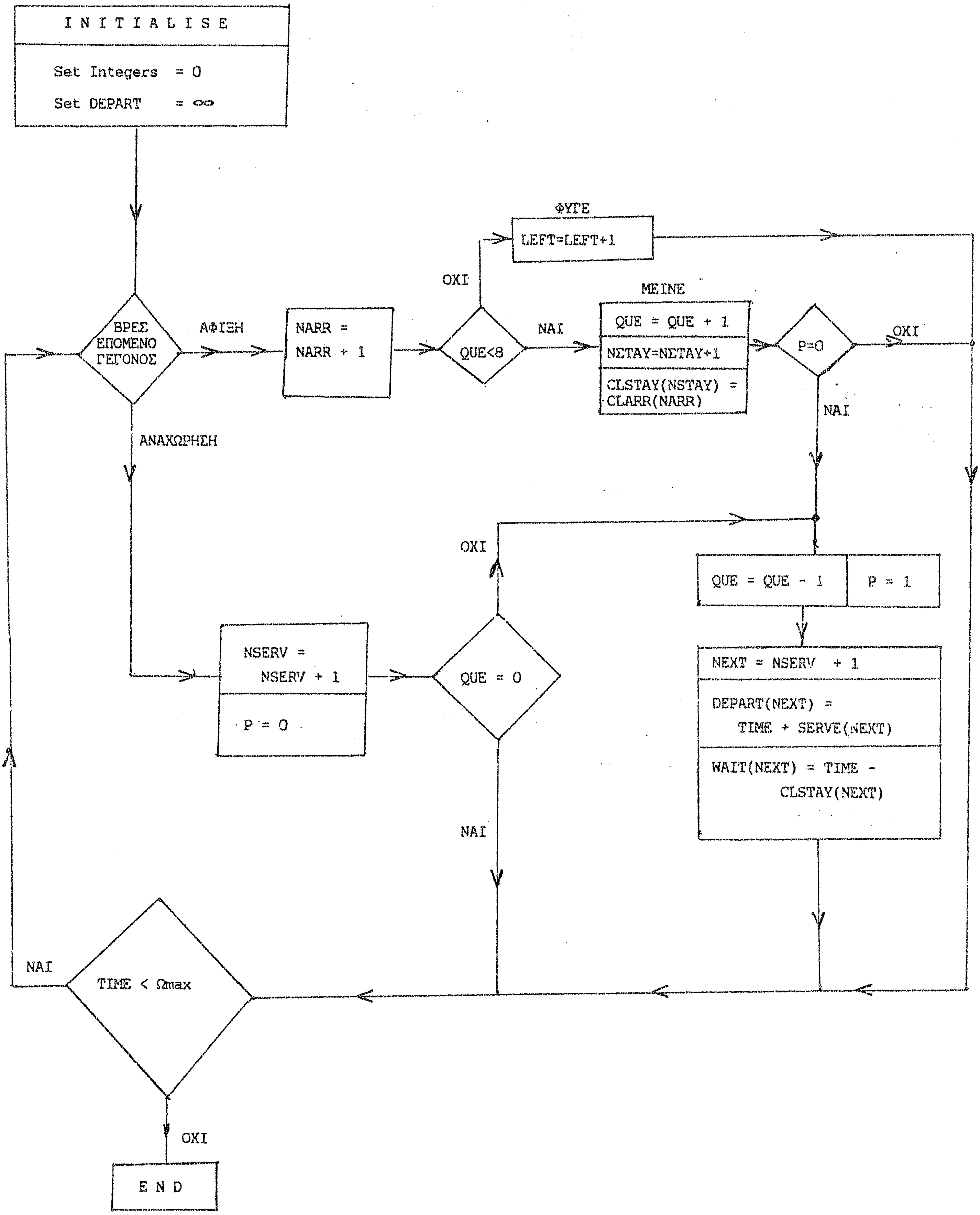
και παίρνουμε $N = M-1$

δηλ. τον μέγιστο αριθμό αφίξεων που θα παρατηρηθούν στην επιτρεπόμενη διάρκεια λειτουργίας .

(II) Λογικές διαδικασίες που αντιστοιχούν σε κάθε γεγονός. (Κατασκευή Διαγράμματος Ροής , όπως στην επόμενη σελίδα). Είναι πιθανόν ορισμένες διαδικασίες να είναι κοινές σε περισσότερα από ένα γεγονότα.

Μένει τώρα να καθορίσουμε τον μηχανισμό επιλογής των διακριτών γεγονότων.

ΛΟΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ



III) Μηχανισμός εύρεσης επόμενου γεγονότος

Αρχικά θέτουμε DEPART(I) = 10^9 (ή ένα πολύ μεγάλο αριθμό) ώστε να αποκλείσουμε να συμβεί ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης ενός πελάτη πριν αυτός εισέλθει στο σύστημα, όπου λαβαίνει χώρα ο σωστός προσδιορισμός του ωρολογιακού χρόνου αναχώρησης.

Η μεταβλητή TIME θα παίρνει την τιμή που προσδιορίζεται σαν το αμεσώτερο από τα δύο ενδεχόμενα:

- επόμενη άφιξη πελάτη
- επόμενη αναχώρηση εξυπηρετημένου πελάτη.

Κάθε φορά ξέρουμε πως NARR πελάτες έχουν ήδη αφιχθεί και NSERV πελάτες έχουν ήδη εξυπηρετηθεί.

Θέτουμε:

TMINAR = CLARR (NARR+1)

TMINDE = DEPART (NSERV + 1)

Προφανώς

TIME = min {TMINARR, TMINDE}

Η επικοινωνία μεταξύ μηχανισμού επιλογής και διαδικασιών που σχετίζονται με τα συγκεκριμένα γεγονότα μπορεί να γίνει είτε με την χρήση της εντολής GOTO είτε με την κατάστρωση διαδικασιών (Procedures) στο πρόγραμμα.

2. ΔΙΑΚΙΝΗΣΗ ΑΠΟΘΗΚΗΣ

Ας υποθέσουμε ότι μιά εταιρεία διαθέτει μιά κεντρική αποθήκη όπου αποθηκεύονται τα προϊόντα που παράγονται σε διάφορα εργοστάσια της εταιρείας. Η άφιξη των φορτίων δεν είναι προκαθορισμένη, και επίσης το μέγεθος του κάθε φορτίου ποικίλει εξαιτίας διαφόρων τυχαίων παραγόντων που επηρρεάζουν το ύψος παραγωγής.

Τα εμπορεύματα παραμένουν στην αποθήκη και κατά καιρούς διατίθενται για την κάλυψη παραγγελιών που παρουσιάζονται με ένα τυχαίο τρόπο κατά την διάρκεια μιάς συγκεκριμένης χρονικής περιόδου. Το ύψος των παραγγελιών είναι και αυτό μιά τυχαία μεταβλητή.

Η χωρητικότητα της αποθήκης είναι περιορισμένη και αυτό έχει τις εξής συνέπειες:

- Αν η αποθήκη είναι γεμάτη, τα πλεονάζοντα φορτία που φθάνουν επιστρέφουν στον τόπο παραγωγής, με συνέπεια σημαντική επιβάρυνση του κόστους μεταφοράς.
- Αν η αποθήκη είναι άδεια, και υπάρξει αδυναμία κάλυψης της ζήτησης εμπορευμάτων η εταιρεία έχει απώλειες δυνητικών πελατών, και ίσως χρειαστεί να καταβάλλει και ρήτρες αν είχε συμφωνήσει παράδοση στον συγκεκριμένο πελάτη.

Έχοντας πληροφορίες για τις κατανομές των διαφόρων φαινομένων, η εταιρεία θέλει να μελετήσει πώς το μέγεθος της αποθήκης επηρρεάζει το ύψος επιστρεφόμενων φορτίων και την ανικανοποίητη ζήτηση.

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΘΗΚΗΣ

1) Συντελούμενα Γεγονότα

   - Άφιξη φορτίου εμπορευμάτων
   - Άφιξη Παραγγελιών Πελάτη

2) Τυχαίες μεταβλητές:

   - ARRL : Διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων φορτίου.
     Εκθετική κατανομή με μέσο $\mu=3$ ημέρες.

- LOAD : Αριθμός αφικνουμένων προϊόντων σε κάθε φορτίο.
  Ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (α=100, β=200).

- ARRD : Διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών παραγγελιών.
  Εκθετική κατανομή με μέσο μ=0.20 ημέρες.

- DEMAND: Ύψος παραγγελίας.
  Κανονική κατανομή με μ=15 και σ=5.

Θεωρούμε επίσης τις εξής μεταβλητές που μετρούν διάφορα χαρακτηριστικά του συστήματος:

- STORE : Το φορτίο της αποθήκης.

- CAPAC : Η υπάρχουσα χωρητικότητα της αποθήκης (Έστω 1000).

- BACK : Σύνολο επιστρεφομένων εμπορευμάτων.

- SALE : Συνολικό ύψος διατεθέντων προϊόντων.

- WANT : Σύνολο μή ικανοποιηθείσας ζήτησης.

Με εντελώς παρόμοιο τρόπο όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή θα κατασκευάσουμε τα διανύσματα των ωρολογιακών χρόνων άφιξης φορτίων και παραγγελιών:

CLARR (K) = CLARR (K-1) + ARRL

CLDEM (J) = CLDEM (J-1) + ARRD

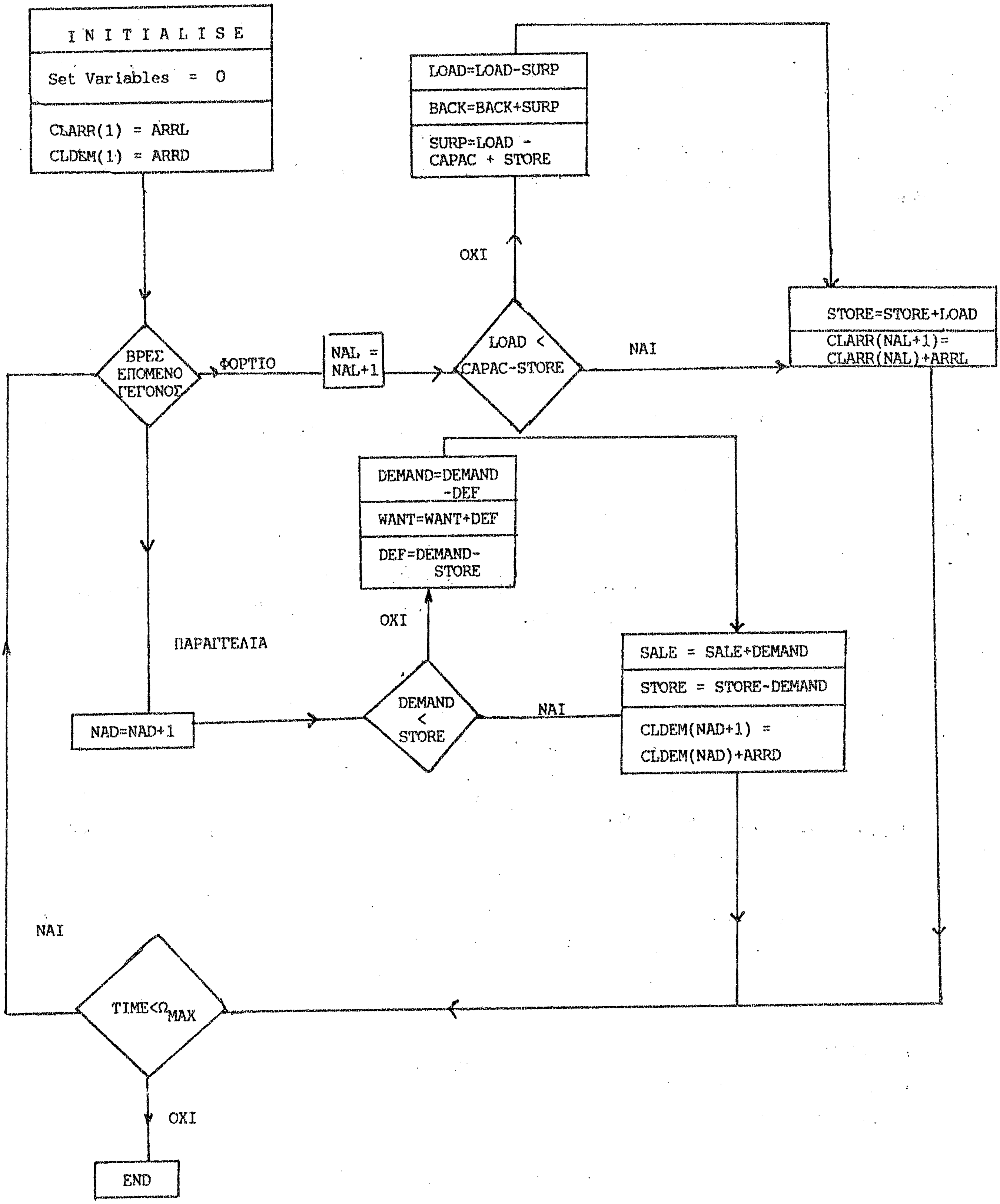
Αντιπροσωπευτική χρονική περίοδος για την μελέτη της συμπεριφοράς του συστήματος θεωρείται το τρίμηνο, δηλ. Ω_{max}=90 ημέρες.

Ο μηχανισμός επιλογής κάθε φορά του επόμενου γεγονότος είναι παρόμοιος με την προηγούμενη εφαρμογή.

Το Λογικό Διάγραμμα όπου θα βασιστεί το Πρόγραμμα Προσομοίωσης φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

Δύο ενδιαφέρουσες επεκτάσεις του προβλήματος είναι οι εξής:

ΛΟΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ



- Διαμόρφωση εποχιακού υποδείγματος ζήτησης, όπου η μεταβλητή αφίξεων (ARRD) και ζήτησης (DEMAND) μεταβάλλονται με τον χρόνο TIME.

- Εισαγωγή κόστους αποθήκευσης ανά μονάδα προϊόντος και συμψηφισμός του με το κόστος επιστρεφομένων και τις ρήτρες ανικανοποίητης ζήτησης.

3. ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΜΗΧΑΝΗΣ

Μία τρίτη ενδιαφέρουσα εφαρμογή των μεθόδων προσομοίωσης είναι η μελέτη μιάς μηχανής κατεργασίας προϊόντων σε μια γραμμή παραγωγής εργοστασίου. Η μηχανή υπόκειται σε βλάβες, η επιδιόρθωση των οποίων απαιτεί κάποιο χρονικό διάστημα. Όσο η μηχανή είναι ΕΚΤΟΣ λειτουργίας τα προϊόντα δεν κατεργάζονται και η γραμμή παραγωγής μετά την μηχανή σταματά αναγκαστικά. Η εταιρεία θέλει να μελετήσει τις οικονομικές συνέπειες των διακοπών της μηχανής, προκειμένου να σκεφτεί την ενδεχόμενη αντικατάστασή της, την αλλαγή του τρόπου συντήρησης και επισκευών, κλπ.

Κάνουμε τις εξής υποθέσεις για την λειτουργία του εργοστασίου:

- Δεν υπάρχει περιορισμός στον αριθμό των προϊόντων που μπορεί να περιμένουν κατεργασία από την μηχνή. Έτσι όταν η μηχανή είναι ΕΚΤΟΣ, δεν υπάρχει λόγος να επιστρέφουμε προϊόντα στην αποθήκη, ή να διακόπτουμε την γραμμή παραγωγής που προηγείται της μηχανής.

- Η μηχανή παθαίνει βλάβη ανεξάρτητα αν την στιγμή εκείνη κατεργάζεται προϊόν ή όχι. Αυτό σημαίνει πως η μηχανή λειτουργεί διαρκώς και ενδέχεται να υποστεί βλάβη ακόμα και εν κενώ.

- Αν κατά την στιγμή της βλάβης υπάρχει προϊόν στην μηχανή, τότε η κατεργασία συνεχίζεται μετά την επισκευή από το σημείο που είχε σταματήσει.

<u>ΚΑΤΑΡΤΙΣΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ</u>

1) <u>Συντελούμενα Γεγονότα</u>

   - Άφιξη προϊόντος για κατεργασία

- Βλάβη Μηχανής
- Επισκευή Μηχανής
- Περάτωση κατεργασίας προϊόντος

2) Τυχαίες Μεταβλητές

ARR : Ενδοδιάστημα αφίξεων προϊόντων.
Εκθετική κατανομή με μέσο μ_1=2min.

BREAK : Το διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ μιάς επισκευής και της επόμενης βλάβης.
Εκθετική κατανομή με μέσο μ_2=3h.

REP : Διάστημα που απαιτείται για την επισκευή της μηχανής.
Εκθετική κατανομή με μέσο μ_3=15min.

SERV : Χρόνος κατεργασίας του προϊόντος από την μηχανή.
Εκθετική κατανομή με μέσο μ_4=90sec.

Οι μεταβλητές που μετρούν και καθορίζουν την κατάσταση του συστήματος είναι οι ακόλουθες:

QUE : αριθμός προϊόντων που περιμένουν κατεργασία.

M=0 ή 1 ανάλογα με το αν η μηχανή είναι κατειλλημένη (1).

L=0 ή 1 ανάλογα με το αν η μηχανή λειτουργεί (0) ή έχει βλάβη (1).

NARR : Αριθμός αφιχθέντων προϊόντων.

NDEP : Αριθμός προϊόντων που κατεργάστηκαν.

NBRE : Αριθμός βλαβών μηχανής που έχουν συμβεί.

NREP : Αριθμός επισκευών της μηχανής.

Τα αντίστοιχα διανύσματα ωρολογιακών χρόνων που θα καθορίζουν και το επικείμενο γεγονός θα προκύπτουν ως εξής:

CLARR (NARR+1) = CLARR (NARR) + ARR

CLBRE (NBRE+1) = CLREP (NREP) + BREAK

CLREP (NREP+1) = CLBRE (NBRE) + REP

Προσέξτε ότι ο χρόνος της επόμενης βλάβης καθορίζεται μόνο μετά τον καθορισμό του χρόνου της τελευταίας επισκευής. Ο χρόνος της επισκευής καθορίζεται επίσης μετά την προηγούμενη βλάβη. Αυτό απαιτεί κάποια προσοχή κατά το στάδιο της αρχικοποίησης, όπου ο χρόνος της πρώτης βλάβης τίθεται κανονικά αλλά ο χρόνος της πρώτης επισκευής τίθεται υποχρεωτικά μετά την πρώτη βλάβη.

Προσοχή απαιτείται επίσης και στον καθορισμό του ωρολογιακού χρόνου αναχώρησης του προϊόντος από την μηχανή.

Αν υποθέσουμε ότι το προϊόν (NDEP+1) εισάγεται για κατεργασία την χρονική στιγμή TIME, τότε αν η μηχανή λειτουργεί κανονικά θα τελειώσει την στιγμή:

CLDEP (NDEP+1) = TIME + SERV

μόνο εφόσον TIME + SERV < CLBRE (NBRE+1).

Αν όμως: TIME+SERVE > CLBRE (NBRE+1)
τότε το προϊόν θα πρέπει να υποστεί μιά κατεργασία για επιπλέον διάστημα μετά την επισκευή:

TS =-CLBRE (NBRE+1) + SERV + TIME

θα παραμείνει αδρανές επί διάστημα REP και θα τελειώσει την χρονική στιγμή:

CLREP (NREP+1) + TS

αν φυσικά δεν ξαναπάθει βλάβη η μηχανή!

Με αυτά υπ' όψη, το λογικό διάγραμμα μπορεί να καταστρωθεί με τρόπο παρόμοιο όπως και στην πρώτη εφαρμογή αυτού του κεφαλαίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Κατά την εκτέλεση ενός πειράματος προσομοίωσης ενδιαφερόμαστε να εκτιμήσουμε μεταβλητές όπως:

- Χρόνος παραμονής στο σύστημα
- Χρόνος αναμονής σε κάποια ουρά
- Μέσος αριθμός πελατών σε μία ουρά
- Μέσος αριθμός απορριπτομένων αντικειμένων μιάς διεργασίας
- κ.λ.π.

Ας καλέσουμε την μεταβλητή που θέλουμε να εκτιμήσουμε A, η οποία έχει μία άγνωστη κατανομή με άγνωστο μέσο

$$E(A) = \alpha \qquad (1)$$

και επίσης άγνωστη διακύμανση Var(A).

Σκοπός του πειράματος προσομοίωσης είναι να βρούμε μία εκτίμηση του α, έστω την $y=\hat{\alpha}$, και ένα διάστημα εμπιστοσύνης (y_1, y_2) τέτοιο ώστε:

$$P(y_1 \leqq \alpha \leqq y_2) = 1-\delta \qquad (2)$$

όπου δ είναι της τάξεως 2,5%, 5% ή 10% συνήθως.

Η εκτίμηση του μεγέθους y, θα πρέπει πάντα να συνοδεύεται από το διάστημα (y_1, y_2) το οποίο περιγράφει την εμπιστοσύνη και την ακρίβεια της εκτίμησης αυτής. Είναι αυτονόητο πως όσο στενώτερο είναι το διάστημα αυτό για ένα δεδομένο βαθμό εμπιστοσύνης δ, τόσο ασφαλέστερη είναι η εκτίμηση που κάνουμε για την άγνωστη τιμή α.

Πρίν παρουσιάσουμε τους τρόπους συλλογής των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης, που θα μας οδηγήσουν στην εύρεση των $y=\hat{a}$ και (y_1, y_2), θα αναφέρουμε ορισμένες επιθυμητές ιδιότητες των εκτιμητών.

1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΚΤΙΜΗΤΩΝ

Έστω μία εκτίμηση της άγνωστης τιμής α από την $y=\hat{a}$, που προέρχεται από ένα αριθμό μετρήσεων n. Δύο επιθυμητές ιδιότητες είναι:

(i) Αμεροληψία: $E(y)=\alpha$ (3)

Αν η ιδιότητα αυτή ισχύει μόνο οριακά, όταν $n \to \infty$

$$\lim_{n \to \infty} E(y) = \alpha \qquad (3\alpha)$$

τότε λέμε ότι έχουμε ασυμπτωματική αμεροληψία.

Ο εκτιμητής $y=\hat{a}$ λέγεται αμερόληπτος ή ασυμπτω τικά αμερόληπτος αντίστοιχα.

(ii) Συνέπεια: Αν για κάθε αριθμό ε, οσοδήποτε μικρό, είναι ασυμπτωτικά βέβαιο ότι η διαφορά $|y-\alpha|$ δεν υπερβαίνει το ε. Δηλαδή:

$$P(|y-\alpha| < \varepsilon) \to 1, \quad \text{αν} \quad n \to \infty \qquad (4)$$

Με άλλα λόγια, αυξάνοντας το πλήθος των μετρήσεων n, μπορούμε πάντα να εξασφαλίσουμε ότι η πραγματική άγνωστη τιμή α βρίσκεται σε πολύ μικρή απόσταση από το y:

$$y-\varepsilon < \alpha < y+\varepsilon$$

με πιθανότητα που τείνει στο 1 (δηλ. ασυμπτωτικά βέβαιο).

Λήμμα

Αν το y είναι αμερόληπτο τότε η συνθήκη συνέπειας (4) γίνεται:

$$P\{ |y-E(y)| < \varepsilon \} \to 1 \qquad (5)$$

Όμως η ανισότητα Chebychev μας δίνει ότι για μιά μεταβλητή y οποιασδήποτε κατανομής και για οποιοδήποτε θετικό ε:

$$P\{|y-E(y)| < \varepsilon\} > 1 - Var(y)/\varepsilon^2 \qquad (6)$$

Άρα αν συμβαίνει $\lim Var(y)=0$ καθώς $n \rightarrow \infty$, δηλ. η διακύμανση του εκτιμήτή φθίνει απεριόριστα με την αύξηση των μετρήσεων, τότε ο αμερόληπτος εκτιμητής είναι <u>και</u> συνεπής.

Θεωρούμε τώρα ότι έχουμε συλλέξει n μετρήσεις $\{X_i, i=1,\ldots,n\}$ για την άγνωστη μεταβλητή A, που είναι μεταξύ τους <u>ανεξάρτητες.</u> Ο μέσος θα είναι προφανώς:

$$\left.\begin{array}{ll} & E(X_i) = \alpha \\ \text{και επίσης} & Var(X_i) = \sigma^2 \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Η διακύμανση σ^2 δεν είναι κατ' ανάγκη ίση με την διακύμανση της A Var(A), και επίσης είναι και άγνωστη.

<u>Θεώρημα:</u> Ο μέσος των ανεξάρτητων μετρήσεων

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad (8)$$

είναι αμερόληπτη και συνεπής εκτίμηση του α.

<u>Αποδειξη:</u> Παίρνοντας προσδοκίες και στα δύο μέλη με n:σταθερό

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}(n\alpha) = \alpha \qquad (9)$$

Παίρνοντας διακύμανση έχουμε επίσης:

$$Var(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n} \qquad (10)$$

Άρα $$\lim_{n \rightarrow \infty} Var(\bar{X}) = 0$$

και σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα η $\bar{X}$ είναι συνεπής εκτίμηση της α.

Τελικά, δηλαδή μπορούμε να εκτιμήσουμε την α συλλέγοντας n <u>ανεξάρτητες</u> μετρήσεις X_i και παίρνοντας:

$$\hat{a} = \bar{X}$$

Μένει τώρα να προσδιορίσουμε το διάστημα εμπιστοσύνης.

2. <u>ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ</u>

Στο επόμενο εδαφιο θα περιγράψουμε πώς συλλέγονται οι μετρήσεις X_i με την άθροιση πολλών παρατηρήσεων της μεταβλητής Α, που εμφανίζεται στο πείραμα προσομοίωσης.

Κάνοντας χρήση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος μπορούμε να συμπεράνουμε τότε πώς η μέτρηση X_i θα κατανέμεται <u>περίπου</u> κανονικά με μέσο α και διακύμανση σ^2. Άρα και ο μέσος $\bar{X}$ θα συμπεριφέρεται σαν κανονική κατανομή:

$$\bar{X} \sim N(\alpha, \sigma^2/n)$$

όπως προκύπτει από τις σχέσεις (9) και (10).
Θα μπορούσαμε έτσι εύκολα να βρούμε διαστήματα εμπιστοσύνης από τους πίνακες κανονικής κατανομής, αλλά δυστυχώς δεν γνωρίζουμε την διακύμανση σ^2.
Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \qquad (11)$$

η οποία είναι <u>αμερόληπτη</u> εκτίμηση της σ^2.

<u>Απόδειξη</u>: Λαμβάνοντας προσδοκίες και στα δύο μέλη της (11)

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} E(X_i - \bar{X})^2$$

(προσθαφαιρώντας α) $= \frac{1}{n-1} \sum_{1}^{n} E(X_i-\alpha-\bar{X}+\alpha)^2$

Αλλά: $E(X_i-\alpha-\bar{X}+\alpha)^2 = E\{(X_i-\alpha)^2+(\bar{X}-\alpha)^2-2(\bar{X}-\alpha)(X_i-\alpha)\}$

και $E(X_i-\alpha)^2 = \sigma^2$ (εξ ορισμού)

$$E(\bar{X}-\alpha)^2 = \sigma^2/n$$

$$E(\bar{X}-\alpha)(X_i-\alpha) = E(\bar{X}-\alpha)E(X_i-\alpha) = E(\bar{X}-\alpha)(\bar{X}-\alpha) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Άρα τελικά:

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \{\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - 2\frac{\sigma^2}{n}\}$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}) = \frac{1}{n-1} \{n(\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n})\}$$

$$= \frac{n-1}{n-1}\sigma^2 = \sigma^2$$

και συνεπώς η S^2 είναι αμερόληπτη εκτίμηση της άγνωστης σ^2. Επειδή τώρα η X_i είναι κανονική $N(\alpha,\sigma^2)$ γνωρίζουμε ότι η μεταβλητή:

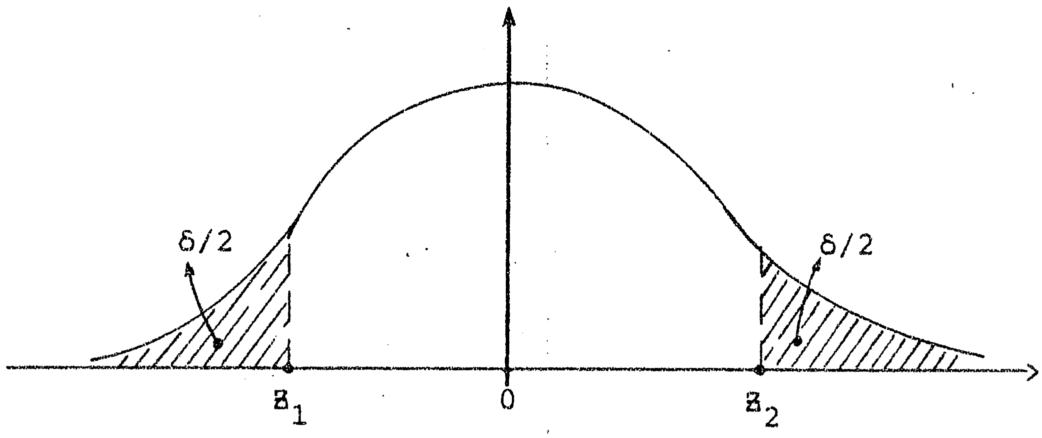
$$Z = \frac{\bar{X}-\alpha}{S/\sqrt{n}} \qquad (12)$$

έχει κατανομή Student t_{n-1} με $(n-1)$ βαθμούς ελευθερίας. Από πίνακες της κατανομής t_{n-1} μπορούμε να βρούμε δύο στατιστικά Z_1 και Z_2 έτσι ώστε για ένα δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης δ να έχουμε:

$$P(Z_1 \leq Z \leq Z_2) = 1-\delta \qquad (13)$$

ή ισοδύναμα: $P(Z < Z_1) = \delta/2$

$$P(Z > Z_2) = \delta/2$$



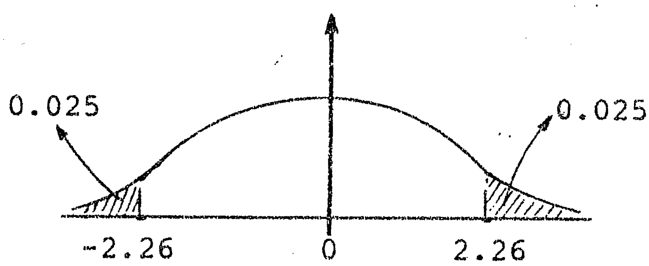
Για $n \geq 4$, δηλ. για t_3 και άνω τα στατιστικά Z_1 και Z_2 είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων $(Z_1=-Z_2)$.
Επίσης για n>30 η Student προσεγγίζεται πάρα πολύ καλά από την κανονική κατανομή.
Για μικρότερο όμως αριθμό μετρήσεων τα διαστήματα (Z_1, Z_2) προκύπτουν ευρύτερα στην κατανομή Student απ' ότι στην κανονική.

<u>Παράδειγμα:</u>

Με n=10 μεατρήσεις και διάστημα εμπιστοσύνης δ=5% βρίσκουμε τα στατιστικά της t_9:

$$Z_2 = 2.26$$

$$Z_1 = -2.26$$



ενώ για την κανονική κατανομή (0,1) θα παίρναμε το στενώτερο διάστημα (-1.96, 1.96).

Με βάση το διάστημα (Z_1, Z_2) θα έχουμε με πιθανότητα 1-δ

$$Z_1 \leq \frac{\bar{X} - \alpha}{S/\sqrt{n}} \leq Z_2 \qquad (14)$$

ή $$\bar{X} + z_1 \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \alpha \leq \bar{X} + z_2 \frac{S}{\sqrt{n}} \qquad (15)$$

Για την συγκεκριμένη περίπτωση $n=10$, $\delta=5\%$, $z_2=-z_1=2.26$ γίνεται

$$y_1 \leq \alpha \leq y_2$$

όπου
$$y_1 = \bar{X} - 2.26 \frac{S}{\sqrt{10}} = \bar{X} - 0.71S$$
$$y_2 = \bar{X} + 2.26 \frac{S}{\sqrt{10}} = \bar{X} + 0.71S$$

Για $n=20$ και $\delta=5\%$ παίρνουμε: $z_2=-z_1=2.093$ (της t_{19}) και το διάστημα εμπιστοσύνης γίνεται (y_1, y_2) με:

$$y_1 = \bar{X} - 2.09 \frac{S}{\sqrt{20}} = \bar{X} - 0.47S$$
$$y_2 = \bar{X} + 2.09 \frac{S}{\sqrt{20}} = \bar{X} + 0.47S$$

3. ΕΠΙΛΟΓΗ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Αναγκαία προϋπόθεση για την λήψη της εκτίμησης και του διαστήματος εμπιστοσύνης που περιγράφηκε είναι η ανεξαρτησία των n μετρήσεων X_i $(i=1,\ldots,n)$.

Η ανεξαρτησία αυτή εξασφαλίζεται επαναλαμβάνοντας n φορές το πείραμα προσομοίωσης και παίρνοντας κάθε φορά την μέτρηση X_i. Άρα απαιτείται:

(1 εκτέλεση του προγράμματος προσομοίωσης) ⟶ (1 ανεξάρτητη μέτρηση X_i)

Ο αριθμός των πειραμάτων n θα καθορίζει φυσικά, όπως φαίνεται και στην (15), την στενότητα του διαστήματος εμπιστοσύνης.

Μένει τώρα να δούμε πώς θα καθορίζουμε την μέτρηση X_i μέσα σε κάθε πρόγραμμα προσομοίωσης, έτσι ώστε να μετρά την μεταβλητή A που τελικά θέλουμε να εκτιμήσουμε.

Υπάρχουν δύο βασικές κατηγορίες της μεταβλητής A:

(i) Να παριστάνει τον <u>ατομικό</u> χρόνο που μία μονάδα (πελάτης ή αντικείμενο) παραμένει στο σύστημα ή σε ένα μέρος του συστήματος.

Στην περίπτωση αυτή κάθε πείραμα της προσομοίωσης διεξάγεται για ένα <u>σταθερό</u> αριθμό μονάδων K (j=1,2,...,K) και η μέτρηση X_i λαμβάνεται σαν ο μέσος όρος:

$$X_i = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{K} A_j \qquad \begin{matrix} (j=1,\dots,K \text{ μονάδες}) \\ (i=1,\dots,n \text{ πειράματα}) \end{matrix} \tag{16}$$

Μόνο αν το K=σταθερό και δεν εξαρτάται από τα A_j ή το πείραμα προσομοίωσης μπορούμε να έχουμε:

$$E(X_i) = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{K} E(A_j) = \frac{1}{K}(K\alpha) = \alpha$$

πράγμα που αποτελεί την προϋπόθεση της αμεροληψίας του X_i.

Αν ο αριθμός K <u>μεταβάλλονταν</u> με ένα μέσο $\bar{K}$ <u>δεν</u> θα μπορούσαμε να γράψουμε το X_i ως τον λόγο των μέσων γιατί γενικά

$$X_i \neq \frac{E(\Sigma Aj)}{E(K)}$$

και η X_i δεν θα ήταν τότε αμερόληπτη μέτρηση.

Η προσέγγιση αυτή που ενδιαφέρεται για την συμπεριφορά <u>μιάς</u> μονάδας μέσα στο σύστημα καλείται <u>ατομική</u> προσέγγιση ή μέτρηση (customer oriented approach).

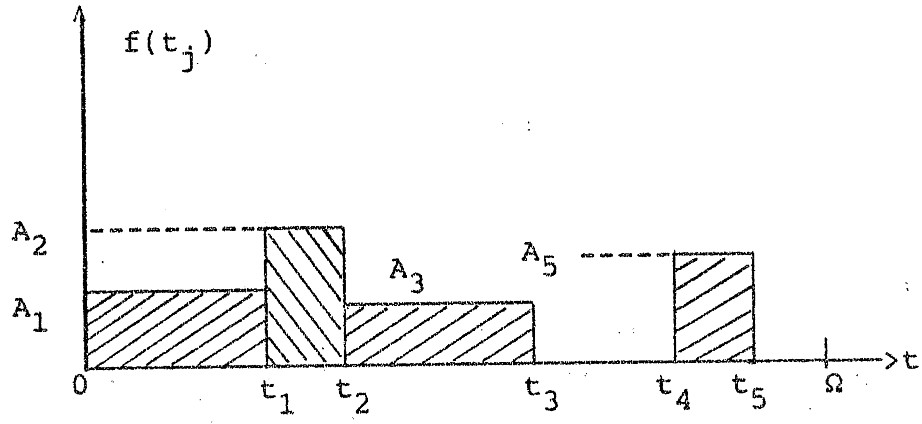
(ii) Μιά άλλη περίπτωση είναι η A_j να παριστάνει μία μέτρηση του <u>συστήματος</u> που εξαρτάται από τον χρόνο, όπως:

- Αριθμός μονάδων (πελατών ή αντικειμένων) σε ένα μέρος
- Κατανάλωση ενέργειας
- Βαθμός πληρότητας ενός χώρου, κ.λ.π.

Στην περίπτωση αυτή η A είναι μία συνάρτηση του χρόνου t_j

$$A_j = f(t_j)$$

όπου t_j είναι οι διάφορες χρονικές στιγμές που συμβαίνει ένα νέο γεγονός στο σύστημα. Γραφικά θα έχουμε:



Έστω (AREA) το συνολικό γραμμοσκιασμένο εμβαδόν και Ω ο συνολικός ωρολογιακός χρόνος προσομοίωσης. Η μέση τιμή της μεταβλητής A θα είναι η μέτρηση:

$$X_i = \frac{1}{\Omega}(\text{AREA}) \tag{17}$$

όπου γενικά

$$(\text{AREA}) = \int_0^{\Omega} f(t)dt \tag{18}$$

Η εκτίμηση αυτή είναι αμερόληπτη αν Ω=σταθερό για <u>κάθε</u> πείραμα προσομοίωσης. Η απόδειξη είναι εύκολη αν θεωρήσουμε:

$$E(A_j) = E\{f(t)\} = \alpha$$

και λάβουμε προσδοκίες της (17):

$$E(X_i) = \frac{1}{\Omega}\int_0^{\Omega} E\{f(t)\}dt = \frac{1}{\Omega}\int_0^{\Omega} \alpha dt$$

$$= \frac{1}{\Omega}\,\alpha \int_0^{\Omega} dt = \alpha\,\frac{1}{\Omega}\bullet\Omega = \alpha$$

Σημειώστε ότι στην πράξη, όταν προσομοιώνουμε συστήματα διακριτών γεγονότων ο υπολογισμός του ολοκληρώματος (18) μπορεί να γίνει πολύ εύκολα με την εξής ανανέωση σε κάθε χρονική στιγμή t_j:

- για $t=0$, (AREA)=0
- για $t=t_j$

$$(\text{AREA}) = (\text{AREA}) + A_j \cdot (t_j - t_{j-1}) \qquad (19)$$

Η παραπάνω προσέγγιση που ενδιαφέρεται για την συμπεριφορά του συστήματος και όχι των μονάδων μεσα στο σύστημα καλείται ομαδική ή συστημική προσέγγιση (system oriented approach) και βασίζεται στην διεξαγωγή κάθε πειράματος προσομοίωσης επί ένα προκαθορισμένο σταθερό χρόνο Ω.

Παρατηρείστε ότι και στην ατομική μέτρηση (16) και στην ομαδική μέτρηση (17) το X_i προκύπτει από την άθροιση πολλών επί μέρους συνεισφορών A_j. Δικαιολογείται έτσι από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα η παραδοχή που είχαμε κάνει στο προηγούμενο εδάφιο 2, ότι η X_i κατανέμεται περίπου κανονικά.

4. ΣΥΝΟΨΗ

Τα βήματα που θα πρέπει να ακολουθούνται έτσι σε κάθε προσομοίωση είναι τα εξής:

B1 : Κατασκευή, έλεγχος και δοκιμασία του προγράμματος.

B2 : Επιλογή είδους μέτρησης: Ατομική => Σταθερός αριθμός μονάδων K
Ομαδική => Σταθερός χρόνος Ω

B3 : Εκτέλεση πειράματος n φορές και λήψη X_i $(i=1,\ldots,n)$

X_i = (μέσος όρος της μεταβλητής A σε κάθε πείραμα προσομοίωσης

B4 : Υπολογισμός $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_1^n X_i$ και $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_1^n (X_i - \bar{X})^2$

B5 : Δεδομένου ενός διαστήματος εμπιστοσύνης 1-δ εύρεση των στατιστικών Student t_{n-1} και υπολογισμός του διαστήματος εμπιστοσύνης (15).

B6 : Αν το διάστημα εμπιστοσύνης (y_1, y_2) είναι πολύ ευρύ τότε αύξησε το n και επίστρεψε στο βήμα B3.

Οι μετρήσεις θα πρέπει να καταστρώνονται ως εξής:

1) <u>Αναφορικά με την εξυπηρέτηση πελατών</u>

Σε κάθε προσομοίωση i μετρούμε τον συνολικό χρόνο T_i που απαιτεί η εξυπηρέτηση ενός <u>σταθερού</u> αριθμού πελατών K. Ο μέσος χρόνος θα δίνεται από τη σχέση:

$$X_i = \frac{T_i}{K} \qquad (20)$$

Επαναλαμβάνοντας τις προσομοιώσεις n φορές θα πάρουμε μετρήσεις $\{X_i,\ i=1,\dots,n\}$ απ' όπου θα εκτιμήσουμε το $\bar{X}$.

Η επανάληψη n <u>ανεξαρτήτων</u> προσομοιώσεων είναι απαραίτητη γιατί οι χρόνοι παραμονής διαδοχικών πελατών είναι εξαρτώμενοι μεταξύ τους.

Ο λόγος επίσης που πρέπει να διατηρείται σταθερός ο αριθμός των πελατών είναι ότι αλλιώς θα είχαμε δύο τυχαίες μεταβλητές K_i, T_i και δεν θα μπορούσαμε να εκφράσουμε τον μέσο χρόνο σαν πηλίκο των μέσων, επειδή στην γενική περίπτωση:

$$E(T_i/K_i) \neq E(T_i)/E(K_i) \qquad (21)$$

Συνεπώς η εκτίμηση ενδεχόμενα να <u>μην</u> είναι αμερόληπτη. Παρ' όλα αυτά αν η διάρκεια προσομοίωσης είναι πολύ μεγάλη, η μεροληψία είναι ασήμαντη, επειδή αποδεικνύεται ότι η εκτίμηση $E(T_i/K_i)$ είναι <u>ασυμπτωματικά</u> αμερόληπτη.

2) <u>Αναφορικά με την συμπεριφορά του συστήματος</u>

Στις περιπτώσεις αυτές η προσομοίωση διαρκεί μιά <u>ορισμένη</u> περίοδο ωρολογιακού χρόνου Ω. Ορίζουμε μία συνάρτηση που μετρά μιά χαρακτηριστική συμπεριφορά του συστήματος συναρτήσει του χρόνου.

<u>Παραδείγματα</u> τέτοιων συναρτήσεων συμπεριφοράς είναι:

$\Phi(t) =$
- (αριθμός πελατών στην ουρά τη στιγμή t)
- (αριθμός εξυπηρετούμενων πελατών την στιγμή t)
- (αριθμός κενών θέσεων την στιγμή t)
- κ.λ.π.

Η μέτρηση της συμπεριφοράς του συστήματος θα γίνεται από τον υπολογισμό της μέσης τιμής της συνάρτησης $\Phi(t)$ στην διάρκεια της προσομοίωσης:

$$X = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \Phi(t)dt \qquad (22)$$

Η εκτίμηση αυτή είναι <u>αμερόληπτη</u> γιατί ισχύει:

$$E(X) = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} E\{ \Phi(t) \}dt = \frac{1}{\Omega} E\{ \Phi(t) \} \cdot \int_0^{\Omega} dt$$

$$= E\{ \Phi(t) \}$$

Εκτελώντας την προσομοίωση n φορές παίρνομε έτσι τον μέσο $\bar{X}$ σαν αμερόληπτη και συνεπή εκτίμηση του $E(X)$. Ο υπολογισμός του X γίνεται με διακριτό τρόπο ανά κάθε χρονική στιγμή.

Ας πάρουμε για παράδειγμα την περίπτωση που το $\Phi(t)$ παριστάνει τον αριθμό πελατών που αναμένουν στην <u>ουρά</u>. Την επόμενη χρονική στιγμή t+1 θα έχουμε:

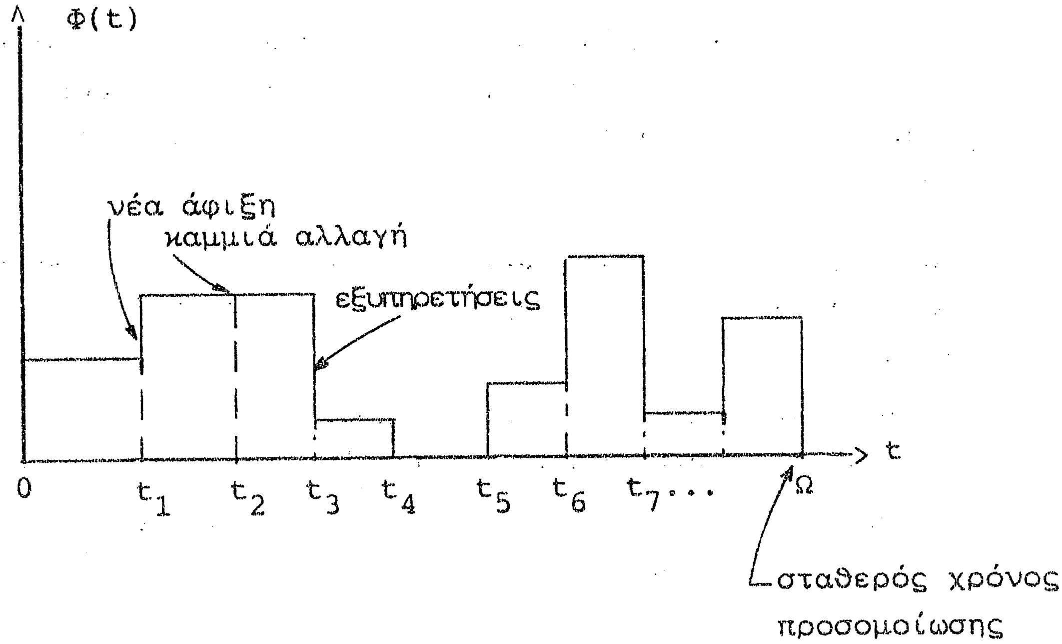
$$\Phi(t+1) = \Phi(t) + \xi \qquad (23)$$

όπου

$$\xi = \begin{cases} +1 & \text{αν παρατηρήθηκε νέα άφιξη στην ουρά} \\ -1 & \text{αν εξυπηρετήθηκε νέος πελάτης (με } \Phi(t)>0). \\ 0 & \text{αν καμμία νέα άφιξη ή νέα εξυπηρέτηση δεν παρατηρήθηκαν.} \end{cases}$$

Ανάλογα μετά υπολογίζουμε την X.

Γραφικά μπορούμε να παραστήσουμε την $\Phi(t)$ σαν μια διακριτή συνάρτηση του χρόνου.



Το X δεν είναι τίποτα άλλο παρά το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας διαιρεμένο με τον ορισμένο χρόνο προσομοίωσης Ω.

5. ΠΩΣ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΟΙ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Ένα από τα σημαντικώτερα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε στην προσομοίωση τυχαίων διαδικασιών είναι τι είδους κατανομή αρμόζει στα διάφορα τυχαία φαινόμενα που συμβαίνουν.

Σε πολλές περιπτώσεις η ίδια η φύση του φαινομένου μας υποδεικνύει τον τύπο της κατανομής. Περιγράφουμε εδώ δύο από τις πιό συνήθεις περιπτώσεις μεταβλητών.

Περίπτωση Ι: Έστω ότι μιά τυχαία μεταβλητή X εκφράζει την χρονική περίοδο που απαιτείται για να ολοκληρωθεί μιά σχετικά μεγάλη σειρά επιμέρους διαδικασιών Z_i $(i=1,2,\ldots,N)$.

$$X = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_N$$

Το N δεν είναι αναγκαστικά σταθερό, αλλά μπορεί να μεταβάλλεται παραμένοντας όμως μεγάλο.

Αν οι επί μέρους χρόνοι Ξ_i έχουν περίπου το ίδιο μέγεθος και είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε με βάση το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα συμπεραίνουμε ότι η X θα έχει κατά προσεγγιση την κανονική κατανομή.

Παράδειγμα: Ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη σε ένα πολυκατάστημα όπου πραγματοποιεί πολλαπλές αγορές, προσεγγίζει την κανονική κατανομή.

Ο τύπος αυτής της μεταβλητής αναφέρεται σε διαδικασίες που ολοκληρώνονται αφού συμπληρωθούν μιά σειρά επί μέρους διαδικασιών.

Ο μέσος μ, και η διακύμανση σ αν δεν είναι γνωστά εκ των προτέρων μπορούν να εκτιμηθούν από εμπειρικές παρατηρήσεις του συστήματος. (Πώς;)

Περίπτωση II: Συμβάντα από διαφορετικούς πληθυσμούς.

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε πολλούς πληθυσμούς και σε κάθε ένα από αυτούς ένα γεγονός A συμβαίνει πολύ αραιά, δηλ. με πολύ μικρή συχνότητα. Τότε η συνολική εμφάνιση του γεγονότος A που προκύπτει από την δραστηριότητα όλων των πληθυσμών είναι Poisson.

Τα διαστήματα που μεσολαβούν ανάμεσα σε διαδοχικές εμφανίσεις του γεγονότος A θα κατανέμονται, κατά συνέπεια, εκθετικά. Παραδείγματα τέτοιων διαδικασιών είναι:

(i) Οι αφίξεις σε ένα σύστημα, οι οποίες προέρχονται από πολλούς διαφορετικούς πληθυσμούς.
(Τηλεφωνικές κλήσεις, αφίξεις πελατών, χρησιμοποίηση οδικών αρτηριών κ.λ.π.)

(ii) Ο αριθμός ατυχημάτων που συμβαίνουν σ' ένα χρονικό διάστημα.

Για να αποδείξουμε την ισχύ της πρότασης αρκεί να βρούμε ότι τα διαστήματα μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων κατανέμονται εκθετικά.

Αν έχουμε N πληθυσμούς και το επόμενο γεγονός A στον κάθε πληθυσμό θα χρειαστεί $X_1, X_2, \ldots, X_N$ χρόνο αντίστοιχα, τότε ο χρόνος που θα παρέλθει για να εμφανιστεί κάποιο γεγονός A στο συνολικό σύστημα θα είναι, προφανώς

$$Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_N) \qquad (24)$$

(Δηλ. ο χρόνος που θα μεσολαβήσει για την νέα εμφάνιση του A).

Έστω ότι τα X_i είναι τυχαία ομοιόμορφη κατανομή με μέσο 2μ:

Τότε: $$P(X_i \leq y) = y/\mu \qquad (25)$$

Θέλουμε να βρούμε την συνάρτηση κατανομής του Y, δηλ. την

$$P(Y \leq y) = P\{\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq y\}$$

$$= 1 - P\{\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) > y\} \qquad (26)$$

Αλλά γνωρίζουμε ότι $\min(\alpha, \beta) > y \iff \alpha > y \text{ ΚΑΙ } \beta > y$

Άρα $$P\{\min(X_1, X_2, \ldots, X_N) > y\}$$

$$= P\{(X_1 > y) \text{ ΚΑΙ } (X_2 > y) \text{ ΚΑΙ } \ldots \text{ ΚΑΙ } (X_N > y)\} \qquad (27)$$

Τα X_i είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα αφού προέρχονται από διαφορετικούς πληθυσμούς, άρα η πιό πάνω παράσταση θα ισούται με το γινόμενο των πιθανοτήτων των επιμέρους συμβάντων. Επίσης:

$$P(X_i > y) = 1 - P(X_i \leq y) = 1 - \frac{y}{\mu} \qquad (28)$$

Συνδυάζοντας (26), (27) και (28) παίρνουμε:

$$P(Y \leq y) = 1 - \prod_{i=1}^{N} P(X_i > y)$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{y}{\mu}\right)^N$$

ή ισοδύναμα $= 1 - (1 - \frac{Ny/\mu}{N})^N$ (29)

Έστω $\vartheta = \frac{N}{\mu}$ (30)

Αν τα γεγονότα A στον κάθε πληθυσμό συμβαίνουν πολύ αραιά, αυτό σημαίνει ότι ο μέσος χρόνος μ μεταξύ δύο συμβάντων θα πρέπει να είναι πολύ μεγάλος. Όταν $\mu >> 0$ τότε ακόμα και με πολύ μεγάλο N το ϑ θα είναι πάντα πεπερασμένος ($\vartheta < \infty$) Γνωρίζουμε όμως (πώς;) ότι για πεπερασμένα ξ ($|\xi| < \infty$)

$$\lim_{N \to \infty} (1 - \frac{\xi}{N})^N = e^{-N}$$ (απόδειξη;)

Άρα αν θεωρήσουμε πολύ μεγάλο αριθμό πληθυσμών ($N \to \infty$) τότε

$$P(Y \geq y) \longrightarrow 1 - e^{-\vartheta y} \qquad (31)$$

Αυτή είναι η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής $F(y)=P(Y \leq y)$.

Παραγωγίζοντας παίρνουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(y) = \frac{dF}{dy} = \vartheta e^{-\vartheta y} \qquad (32)$$

που είναι η εκθετική κατανομή με παράμετρο $\vartheta = N/\mu$

6. ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Θεωρούμε μιά τυχαία διαδικασία αφίξεων με τα εξής χαρακτηριστικά:

Y : Αριθμός αφίξεων ανά μονάδα χρόνου

X : Χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων

Z_n : Χρόνος μέχρι να σημειωθούν n αφίξεις.

Μεταξύ των τριών αυτών χαρακτηριστικών υπάρχει η εξής σχέση:

Αν

$Y \sim$ Poisson $\Longleftrightarrow$ $X \sim$ εκθετική

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$z_n \sim$ Erlang n-τάξεως

Αν δηλαδή τα διαστήματα Χ που μεσολαβούν μεταξύ αφίξεων έχουν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, τότε ο αριθμός αφίξεων θα είναι Poisson με την ίδια παράμετρο λ και ο χρόνος ως την n-οστή άφιξη θα είναι κατανομή Erlang με την ίδια πάλι παράμετρο λ.

Η πρόταση αυτή ισχύει καθ' όλους τους δυνατούς συνδυασμούς. Αναλυτικά:

Αν

$$P(Y=\varkappa) = \frac{\lambda^{\varkappa}}{\varkappa!} e^{-\lambda} \qquad \text{(Poisson)} \qquad (33)$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad \text{(εκθετική)} \qquad (34)$$

$$g(z) = \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z} \qquad \text{(Erlang)} \qquad (35)$$

Οι μέσοι και οι διακυμάνσεις των τριών αυτών κατανομών είναι:

- <u>Εκθετική:</u> $E(x) = \frac{1}{\lambda}$ (μέσος χρόνος μεταξύ αφίξεων).

  $V(x) = 1/\lambda^2$ (36)

- <u>Poisson:</u> $E(y) = \lambda$ (ρυθμός αφίξεων ανά μονάδα χρόνου)

  $V(y) = \lambda$ (37)

- <u>Erlang:</u> $E_n(z) = \frac{n}{\lambda}$ (μέσος χρόνος για n αφίξεις).

  $V_n(z) = \frac{n}{\lambda^2}$ (38)

Η κατανόηση της σχέσης μεταξύ των διαφόρων αυτών κατανομών είναι πολύ σημαντική γιατί μας επιτρέπει να συσχετίζουμε δειγματοληψίες μεταξύ κατανομών.

<u>Παράδειγμα:</u> Αν $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ είναι μια τυχαία δειγματοληψία εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ τότε μπορούμε να λάβουμε μιά δειγματοληψία Poisson για αριθμό αφίξεων σε διαδοχικές χρονικές στιγμές ως εξής:

- Υπολογισμός του διανύσματος:

$$Z(\kappa) = X_1 + X_2 + \ldots + X_\kappa \quad \text{για} \quad \kappa=1,2,3,\ldots,N$$

- Έστω T ο ελάχιστος ακέραιος μετά τον αριθμό Z(N)

$$T = [Z(N)] + 1 \tag{39}$$

- Για κάθε $t=1,2,\ldots,T$ βρίσκεται ο m_t έτσι ώστε:

$$Z(m_t) \leq t < Z(m_t+1) \tag{40}$$

Η σχέση αυτή σημαίνει m_t αφίξεις ως την χρονική στιγμή t.
Άρα η δειγματοληψία Poisson μπορεί να οριστεί σαν:

$$Y_t = m_t - m_{t-1} \qquad \text{(αφίξεις την περίοδο t) με } m_o = 0.$$

<u>Σχέση μεταξύ Poisson και εκθετικής κατανομής.</u>

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ:</u> Αν τα διαστήματα x μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων μιάς διαδικασίας κατανέμονται σύμφωνα με την εκθετική κατανομή

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \tag{41}$$

τότε το πλήθος των αφίξεων στην μονάδα του χρόνου ακολουθεί κατανομή Poisson:

$$P(N=\kappa) = \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!}\, e^{-\lambda} \tag{42}$$

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε δύο Λήμματα:

<u>Λήμμα 1:</u> Αν οι τυχαίες και μεταξύ τους ανεξάρτητες μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$ προέρχονται από την ίδια εκθετική κατανομή (41) τότε το άθροισμα

$$z = x_1 + x_2 + \ldots + x_\varkappa \tag{43}$$

έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (κατανομή <u>Erlang</u>)

$$g(z) = \lambda^\varkappa z^{\varkappa-1} e^{-\lambda z}/(\varkappa-1)! \tag{44}$$

<u>Απόδειξη Λήμματος 1:</u> (Με μαθηματική επαγωγή):

Γιά $\varkappa=1$, $z=x_1$ και η (44) ταυτίζεται με την (41).

Έστω ότι ισχύει για $\varkappa=n-1$, θα δείξουμε ότι ισχύει για $\varkappa=n$.

Θέτουμε:

$$y = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \tag{45}$$

με συνάρτηση πυκνότητας επειδή ισχύει η (44) για $n-1$:

$$h(y) = \lambda^{n-1} \frac{y^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\lambda y} \tag{46}$$

Προφανώς:

$$z = y + x_n \tag{47}$$

Γνωρίζοντας τις συναρτήσεις πυκνότηας δύο μεταβλητών το άθροισμα τους θα έχει συνάρτηση πιθανότητας g που δίνεται από την <u>συνέλιξη</u> (βλέπε, Papoulis, Section 7-1, pp. 189).

$$g(z) = h(y) * f(x)$$

$$= \int_0^z h(y) \cdot f(z-y)dy \tag{48}$$

δεδομένου ότι $0<x,y$.

Αντικαθιστώνας τις (41) και (46) στην (48) παιρνουμε:

$$f(z) = \int_0^z \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} y^{n-1} e^{-\lambda y} \lambda e^{-\lambda(z-y)} dy = \frac{\lambda^n e^{-\lambda z}}{(n-2)!} \int_0^z y^{n-2} dy$$

ή

$$g(z) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda z}}{(n-2)!} \left[\frac{1}{n-1} y^{n-1}\right]_0^z = \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z}$$ ο.ε.δ.

Άρα η (44) ισχύει για $\kappa=n$ και συνεπώς για κάθε ακέραιο. Η κατανομή αυτή στην βιβλιογραφία είναι γνωστή σαν κατανομή ERLANG.

Λήμμα 2: Το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$I_\kappa = \int_0^1 z^{\kappa-1} e^{-\lambda z} dz \tag{49}$$

πληρεί την εξής απλή αναδρομική σχέση:

$$I_{\kappa+1} = \frac{\kappa}{\lambda} I_\kappa - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \tag{50}$$

Απόδειξη Λήμματος 2: Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε:

$$I_\kappa = \int_0^1 z^{\kappa-1} e^{-\lambda z} dz = \frac{1}{\kappa} \int_0^1 e^{-\lambda z} d(z^\kappa)$$

$$= \frac{1}{\kappa}\left[e^{-\lambda z} z^\kappa\right]_0^1 - \frac{1}{\kappa} \int_0^1 z^\kappa de^{-\lambda z}$$

$$= \frac{1}{\kappa} e^{-\lambda} + \frac{\lambda}{\kappa} \int_0^1 z^\kappa e^{-\lambda z} dz$$

Αλλά εξ ορισμού: $\int_0^1 z^\kappa e^{-\lambda z} dz = I_{\kappa+1}$

Άρα $$I_\kappa = \frac{e^{-\lambda}}{\kappa} + \frac{\lambda}{\kappa} I_{\kappa+1}$$

$$\Longrightarrow \quad I_{\kappa+1} = \frac{\kappa}{\lambda} I_\kappa - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}$$ ο.ε.δ.

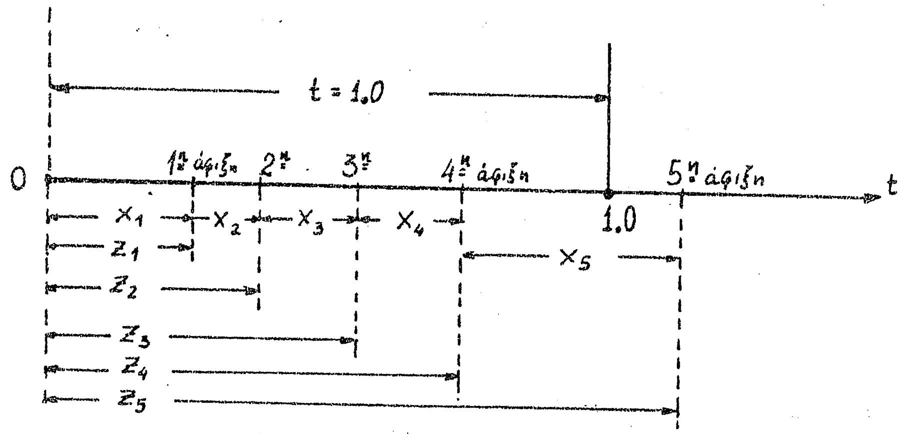
Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το αρχικό θεώρημα.

Απόδειξη θεωρήματος:

Ορίζουμε την αθροιστική μεταβλητή:

$$Z_\kappa = x_1 + x_2 + \ldots + x_\kappa \tag{51}$$

που παριστάνει τον συνολικό χρόνο που παρήλθε μέχρι την κ-οστή άφιξη στην διαδικασία. Παραστατικά:



Αντίστοιχα $Z_{\kappa+1}$ θα παριστάνει τον συνολικό χρόνο μέχρι και την (κ+1) άφιξη. Άρα αν θέλουμε να συμβούν κ αφίξεις σε μια χρονική περίοδο θα πρέπει:

$$Z_\kappa \leq 1 < Z_{\kappa+1} \tag{52}$$

Στο παραπάνω διάγραμμα παριστάνονται κ=4 αφίξεις στην μονάδα χρόνου. Άρα η πιθανότητα N=κ αφίξεων ανά μονάδα χρόνου θα είναι:

$$P(N=\kappa) = P(Z_\kappa \leq 1 < Z_{\kappa+1}) \tag{53}$$

Αν τώρα ορίσουμε την συνάρτηση κατανομής

$$F_\kappa(1) = P(Z_\kappa \leq 1) \tag{54}$$

$$\Longrightarrow \qquad P(Z_\kappa > 1) = 1 - F_\kappa(1)$$

και

$$P(Z_{\kappa+1} < 1) = F_{\kappa+1}(1)$$

Τρεις περιπτώσεις είναι τώρα δυνατές όταν $z_\kappa < z_{\kappa+1}$

ή $\quad 1 < z_\kappa \quad$ με πιθανότητα $\quad 1-F_\kappa(1)$

ή $\quad z_{\kappa+1} < 1 \quad$ με πιθανότητα $\quad F_{\kappa+1}(1)$

ή $\quad z_\kappa < 1 < z_{\kappa+1} \quad$ με πιθανότητα $\quad P(N=\kappa)$

Οι τρεις αυτές πιθανότητες θα έχουν άθροισμα 1, άρα

$$(1-F_\kappa) + F_{\kappa+1} + P(N=\kappa) = 1 \Longrightarrow$$

$$P(N=\kappa) = F_\kappa - F_{\kappa+1} \tag{55}$$

Όμως η $F_\kappa(1)$ είναι συνάρτηση κατανομής της συνάρτησης πυκνότητας (44):

$$F_\kappa(1) = \int_0^1 \lambda^\kappa \frac{z^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!} e^{-\lambda z}\, dz = \frac{\lambda^\kappa}{(\kappa-1)!} I_\kappa \tag{56}$$

και όμοια: $\quad F_{\kappa+1}(1) = \dfrac{\lambda^{\kappa+1}}{\kappa!} I_{\kappa+1}$

Χρησιμοποιώντας την (50) έχουμε:

$$F_{\kappa+1}(1) = \frac{\lambda^{\kappa+1}}{\kappa!} \left\{ \frac{\kappa}{\lambda} I_\kappa - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \right\} = \frac{\lambda^\kappa}{(\kappa-1)!} I_\kappa - \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} e^{-\lambda}$$

$$(16) \Longrightarrow \quad F_{\kappa+1}(1) = F_\kappa(1) - \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} e^{-\lambda}$$

και συνδυάζοντας την με την (15) προκύπτει αμέσως ότι:

$$P(N=\kappa) = \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} e^{-\lambda}$$ <u>ο.ε.δ.</u>

που είναι Poisson με μέσο και διακύμανση λ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΣΥΝΘΕΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

1. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

Περιγραφή: Θεωρούμε μία Τράπεζα όπου οι πελάτες αφικνούνται με ρυθμό $\lambda=200$ ανά ώρα. Ο συνολικός χρόνος ημερήσιας λειτουργίας της Τράπεζας είναι $T=6$ ώρες, στον οποίο επιτρέπεται η είσοδος πελατών. Αν στο πέρας του χρόνου λειτουργίας υπάρχουν μέσα στο κατάστημα πελάτες που δεν έχουν ακόμα εξυπηρετηθεί τότε οι υπάλληλοι εργάζονται επί πλέον μέχρι να τους εξυπηρετήσουν όλους.

Υπάρχουν 6 δυνατές κατηγορίες εξυπηρετήσεων που μπορεί να ζητήσει ένας πελάτης. Οι συχνότητες με τις οποίες εμφανίζονται και οι αντίστοιχοι χρόνοι εξυπηρέτησης δίνονται από τον πίνακα:

Είδος εξυπηρέτησης	Συχνότητα f	Χρόνος εξυπηρέτησης
Α	0.12	4 ± 1 min
Β	0.18	3 ± 3/4 min
Γ	0.25	2 min
Δ	0.05	6 ± 2 min
Ε	0.30	5 ± 2 min
Ζ	0.10	2 ± 1 min
	1.00	

Προς το παρόν θα υποθέσουμε ότι ο κάθε πελάτης που πηγαίνει στην Τράπεζα ζητά μόνο μία από τις παραπάνω εξυπηρετήσεις. Αργότερα όμως το πρόγραμμα μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να παρέχει την δυνατότητα στους πελάτες να διεκπεραιώνουν περισσότερες από μία εξυπηρετήσεις.

Η Τράπεζα διαθέτει 4 θέσεις εξυπηρέτησης (γκισέ) με 4 υπαλλήλους τοποθετημένους αντίστοιχα.

Η Διεύθυνση εξετάζει τρεις διαφορετικούς τρόπους οργάνωσης της εξυπηρέτησης των πελατών:

Σύστημα Ι: Σταθερή αντιστοίχιση εξυπηρετήσεων. (ΣΑΕ)
Σύμφωνα με το σύστημα αυτό κάθε γκισέ παρέχει ορισμένες μόνο κατηγορίες εξυπηρετήσεων με βάση την συχνότητα που ζητούνται και τον μέσο χρόνο που απαιτούν. Το γινόμενο

(% συχνότητα) x (χρόνος εξυπηρέτησης)

δίνει ένα μέτρο του φόρτου της κάθε εξυπηρέτησης.

Τα γινόμενα αυτά είναι για τις 6 κατηγορίες:

Α	48
Β	54
Γ	50
Δ	30
Ε	150
Ζ	20

και μία ισοβαρής κατανομή εξυπηρετήσεων-θέσεων θα ήταν:

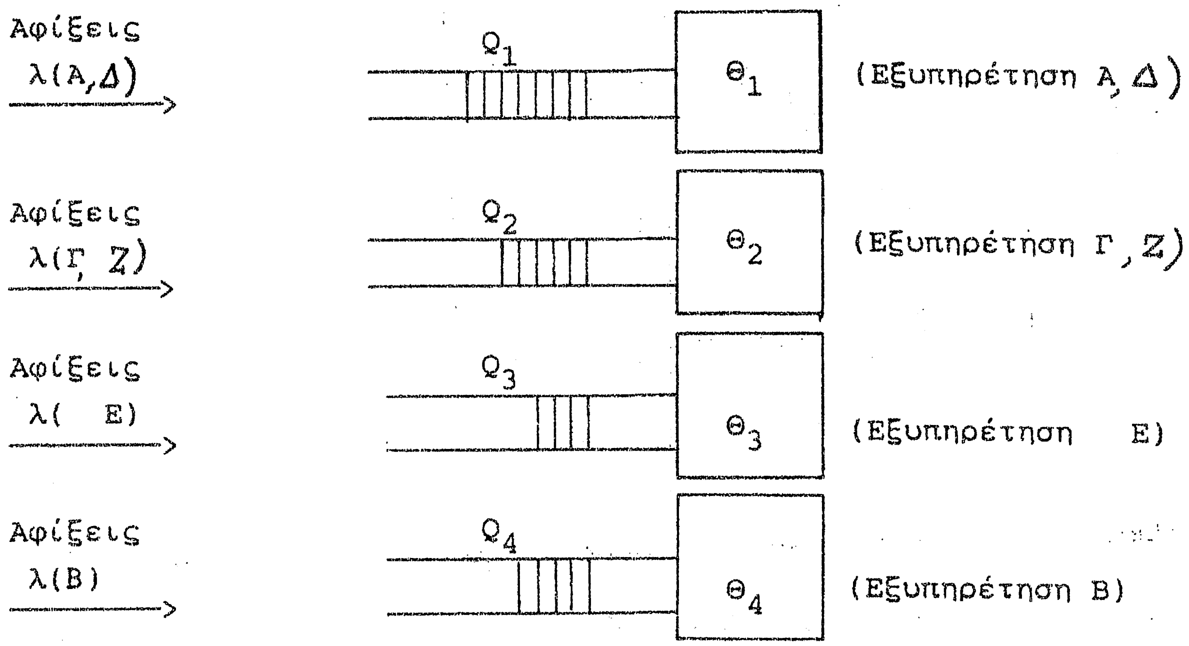
Θ1:	Κατηγορία	Α + Δ	(48 + 30) = 78
Θ2:	"	Γ + Ζ	(50 + 20) = 70
Θ3:	"	Ε	150
Θ4:	"	Β	(54)

Το σύστημα αυτό δεν μπορεί πάντα βέβαια να εξασφαλίζει σχετικά ισότιμη κατανομή φόρτου και παρουσιάζει δύο σοβαρά μειονεκτήματα:

(i) Σε περίπτωση που ο πελάτης επιθυμεί 2 ή περισσότερες εξυπηρετήσεις θα πρέπει να περιμένει σε 2 ή περισσότερες ουρές.

(ii) Προκαλεί μονοτονία στους υπαλλήλους που ασχολούνται με το ίδιο πράγμα όλη την διάρκεια εργασίας.

Σε μερικές περιπτώσεις όμως όταν οι εξυπηρετήσεις είναι απόλυτα εξειδικευμένες έχει το πλεονέκτημα ότι τις πραγματοποιούν όσοι έχουν την απαιτούμενη εμπειρία σ' αυτές.

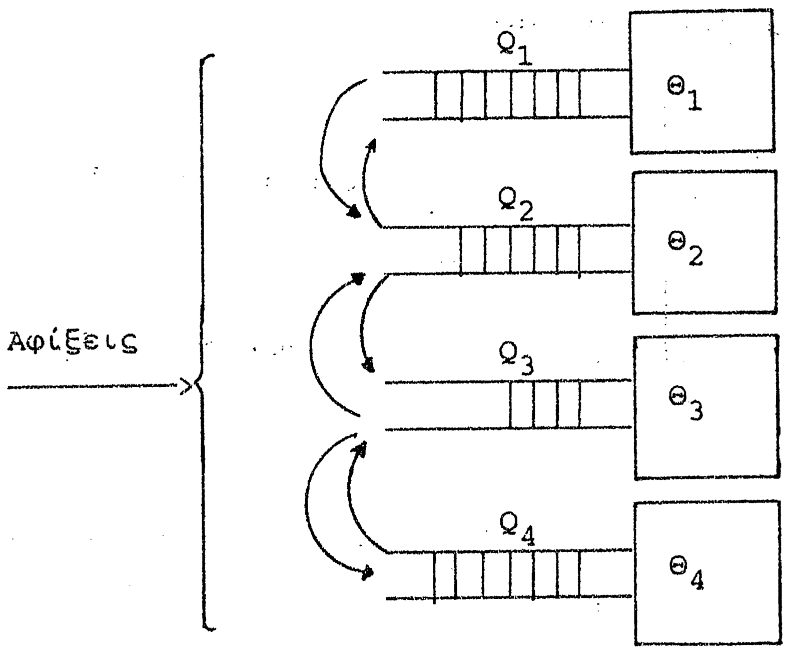


Οι ουρές έχουν θεωρητικά μεν απεριόριστη χωρητικότητα, στην πράξη όμως ένας πελάτης που θα δει ότι η ουρά που αντιστοιχεί στην εξυπηρέτησή του έχει περισσότερα των 10 ατόμων φεύγει και δεν επιστρέφει την ίδια ημέρα.

Σύστημα II: Πολλές ουρές - Πολλαπλές εξυπηρετήσεις (ΠΟΠΕ)

Κάθε γκισέ προσφέρει όλες τις εξυπηρετήσεις. Οι πελάτες που φτάνουν σχηματίζουν ουρές αναμονής στα γκισέ και εξυπηρετούνται με το σύστημα Πρώτος Εντός-Πρώτος Εκτός, (FIFO).

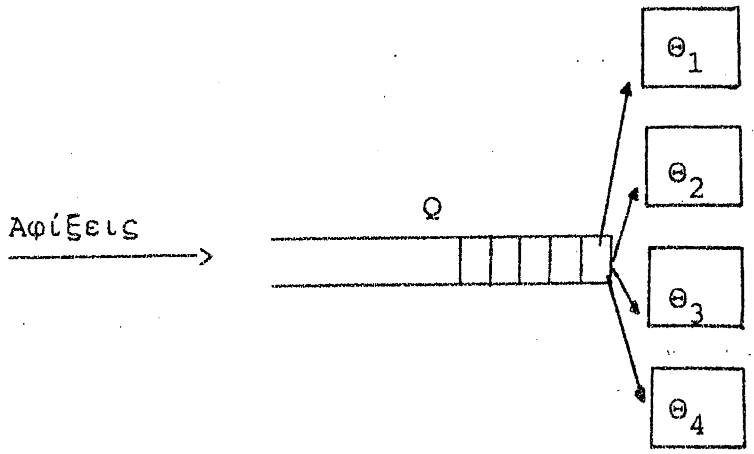
- Ο πελάτης επιλέγει την ουρά με το μικρότερο μήκος.
- Αν κατά την διάρκεια αναμονής σε μία ουρά ένας πελάτης αντιληφθεί ότι μία διπλανή ουρά βρίσκεται με λιγώτερους πελάτες τότε φεύγει από την δική του και ενώνεται με την μικρότερη. Θα υποθέσουμε ότι ο τελευταίος της ουράς φεύγει πρώτος να πάει στην ουρά μικρότερου μήκους.
- Αν όλες οι ουρές έχουν περισσότερα των 10 ατόμων ο πελάτης φεύγει χωρίς να επιστρέφει την ίδια μέρα.



Συστημα III: Κοινή ουρά - Πολλαπλές εξυπηρετήσεις (ΚΟΠΕ)

Κάθε γκισέ προσφέρει όλες τις εξυπηρετήσεις. Οι πελάτες που φτάνουν σχηματίζουν μία κοινή ουρά και με το σύστημα FIFO πηγαίνουν σε όποιο γκισέ αδειάσει πρώτο.

Η μετάβαση από το ύψος της ουράς έως την θέση εξυπηρέτησης διαρκεί $1 \div 3$ sec.



Στο σύστημα αυτό ο πελάτης δεν ενώνεται στην ουρά μόνο όταν αυτή περιλαμβάνει άνω των 40 ατόμων.

ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ: Για τα 3 συστήματα:

- Αριθμός ανικανοποίητων πελατών κατά κατηγορία.
- Μέσος χρόνος παραμονής πελάτη στο σύστημα.

(Το παραπάνω σύστημα εξυπηρέτησης περιγράφεται στο βιβλιο: "Simulation Using GPSS", T.J. Schriber, John Wiley, 1974).

2. ΣΚΟΠΙΜΟΤΗΤΑ ΕΠΕΝΔΥΣΗΣ

Μία Εταιρεία Χάλυβα λειτουργεί μία προβλήτα (dock) σ' ένα λιμάνι όπου ξεφορτώνει τα μεταλλεύματα που φθάνουν από μία παραγωγό ξένη χώρα. Η προβλήτα μπορεί να υποδεχθεί 2 πλοία κάθε φορά. Τα πλοία είναι όλα του ίδιου τύπου και της ίδιας χωρητικότητας.

Ο χρόνος εκφόρτωσης ενός πλοίου είναι τουλάχιστον 24hrs, αλλά συνήθως αυξάνεται αρκετά περισσότερο εξαιτίας βλαβών, έλλειψης συντονισμού κ.λ.π. Από τα στοιχεία του προηγούμενου έτους, προκύπτουν οι εξής απαιτούμενοι χρόνοι εκφόρτωσης:

Χρόνος:	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
Ποσοστό Πλοίων:	4	9	18	13	10	5	4	4	6	8	11	6	2

Πολύ συχνά ένα πλοίο φτάνοντας στο λιμάνι βρίσκει και τις δύο θέσεις της προβλήτας κατειλλημένες και στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να περιμένει μέχρις ότου αδειάσει μία θέση. Μέχρι τώρα όμως η αναμονή αυτή δεν ήταν ιδιαίτερα μεγάλη ώστε να δημιουργεί σοβαρά προβλήματα.

Η Εταιρεία σχεδιάζει τώρα την επέκταση της παραγωγής της και αυτό θα απαιτήσει 500 φορτία τον χρόνο αντί των 250 που ήταν μέχρι σήμερα ο μέσος ρυθμός. Για κάθε πλοίο η εταιρεία πληρώνει 350 χιλιάδες δρχ. την ημέρα και με τον διπλασιασμό του ρυθμού που θα συμβούν στο λιμάνι το κόστος μπορεί να γίνει υπερβολικά υψηλό.

Μία λύση θα ήταν φυσικά να προγραμματίσει η εταιρεία τις αφίξεις με ακρίβεια, αλλά αυτό είναι πάρα πολύ δύσκολο εξ αιτίας των πολλών αστάθμητων παραγόντων και της μεγάλης διάρκειας του ταξιδιού. Τα χρονικά διαστήματα μεταξύ διαδοχικών αφίξεων παρουσιάζουν μιά εμπειρική κατανομή που φαίνεται στο Σχήμα.

Ο μέσος χρόνος θα είναι φυσικά:

$$\frac{365}{500} = 0.73 \text{ days}$$

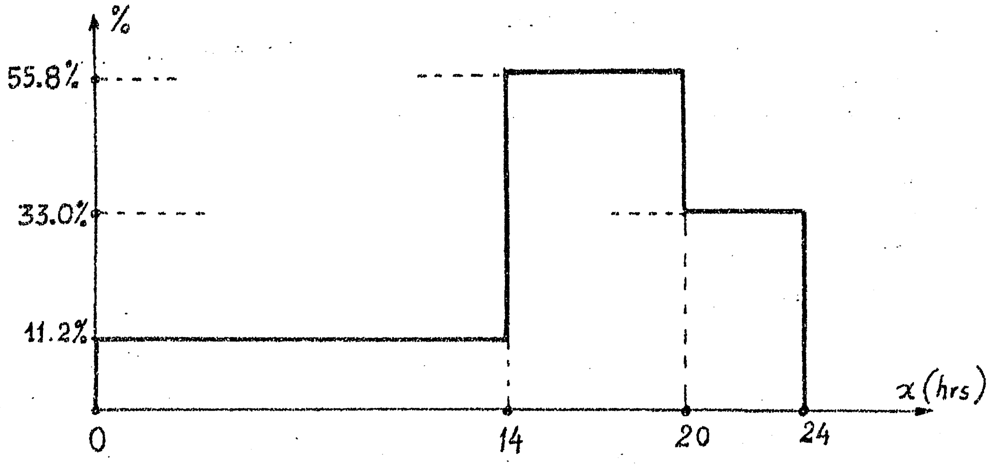
Με βάση αυτά τα δεδομένα η επιχείρηση σκέπτεται το ενδεχόμενο να επεκτείνει την προβλήτα δημιουργώντας μιά νέα θέση εξυπηρέτησης. Η επένδυση αυτή θα απαιτήσει:

- Αρχική Δαπάνη: 280 εκατ. Δρχ.
- Κόστος Ετήσιας Συντήρησης: 7 εκατ. Δρχ.

Η διάρκεια ζωής της επένδυσης είναι N=25 έτη και το κόστος κεφαλαίου r=10%.

Αν η επένδυση αρχίσει τώρα εκτιμάται ότι θα είναι έτοιμη ταυτόχρονα με την έναρξη της προγραμματιζόμενης επέκτασης παραγωγής.

ΖΗΤΕΙΤΑΙ: Να βρεθεί η οικονομικώτερη λύση.



$\bar{x} = 17.52$ hrs $= 0.73$ days

Το πρόβλημα επενδύσεων αντλήθηκε από το βιβλίο: "Quantitative Methods in Management", P. Vatter κλπ. Μέρος IV: Simulations in the Analysis of Complex Decisions.

3. ΔΙΚΤΥΟ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ

Μία εταιρεία διεθνών μεταφορών έχει 4 σταθμούς εξυπηρέτησης σε μία μεγάλη πόλη, καθένας από τους οποίους έχει αρμοδιότητα σε ένα αντίστοιχο γεωγραφικό τεταρτημόριο ως εξής:

ΒΔ	ΒΑ
ΝΔ	ΝΑ

Κάθε σταθμός διαθέτει 1 φορτηγό του ίδιου τύπου, που περιμένει στον σταθμό. Όταν ένας πελάτης τηλεφωνήσει για μιά μεταφορά εμπορευμάτων το φορτηγό πηγαίνει, φορτώνει, μεταφέρει και ξεφορτώνει τα εμπορεύματα στον σταθμό.

Οι συνολικοί χρόνοι εξυπηρέτησης μεταβάλλονται τυχαία σύμφωνα με την παρακάτω εμπειρική αθροιστική κατανομή:

Ποσοστό	5%	25	50	75	100	
Τόπος: ΝΔ	60	95	105	120	165	Σέ minutes
ΒΔ, ΒΑ, ΝΑ	50	70	80	95	140	

Από τους παραπάνω χρόνους 20min σταθερά σε κάθε περίπτωση αφιερώνονται στην φόρτωση/εκφόρτωση και ο υπόλοιπος χρόνος καταναλίσκεται σε διαδρομές.

Για λόγους ασφαλείας (αλλά και χωρητικότητας) η εταιρεία εξυπηρετεί ένα-ένα πελάτη χωριστά και δεν επιτρέπει την διπλοφόρτωση.

Οι ειδοποιήσεις πελατών ακολουθούν κατανομή Poisson με ημερήσιους ρυθμούς (σε <u>8ωρη</u> βάση λειτουργίας):

$$\lambda = \begin{array}{cccc} \underline{\text{ΒΔ}} & \underline{\text{ΒΑ}} & \underline{\text{ΝΑ}} & \underline{\text{ΝΔ}} \\ 8 & 7 & 4 & 5 \end{array} \quad \text{ανά ημέρα}$$

Η εταιρεία για να μειώσει τον χρόνο αναμονής των πελατών σκέπτεται να επιτρέψει σε τυχόν αδρανή φορτηγά να διασχίζουν σε άλλα τετράγωνα και να εκτελούν τις παραγγελίες προς το αντίστοιχο κέντρο. Όταν η παραγγελία εκτελεστεί τα φορτηγά θα περιμένουν στο τελευταίο κέντρο που ξεφόρτωσαν, μέχρις ότου παρουσιαστεί νέα παραγγελία.

Ο <u>επιπλέον</u> χρόνος που απαιτείται για να διασχίσει κάθε φορά ένα τετράγωνο είναι:

10 min για γειτονικά (ΒΔ <—> ΒΑ <—> ΝΑ <—> ΝΔ <—> ΒΔ)

20 min για διαγώνια (ΒΔ <—> ΝΑ, ή ΒΑ <—> ΝΔ)

Μένουν φυσικά να προσδιοριστούν μιά σειρά από άλλες λεπτομέρειες, όπως αν οι ανικανοποίητοι πελάτες μιάς ημέρας είτε:

- εξυπηρετούνται οπωσδήποτε ==> υπερωριακό κόστος προσωπικού

είτε - μεταφέρονται την επόμενη μέρα ==> αύξηση χρόνου αναμονής.

Σε προβλήματα τέτοια να προτείνετε <u>δικές</u> σας λύσεις.

<u>ΖΗΤΕΙΤΑΙ</u>: Να εκτιμηθεί η απόδοση των δύο εναλλακτικών συστημάτων με την σύγκριση του χρόνου αναμονής πελατών.

(<u>Πηγή</u>: "Quantitative Methods in Management", P. Vatter, κλπ.
Μέρος IV: Simulations in the Analysis of Complex Decisions.)

4. <u>ΒΙΟΛΟΓΙΚΟΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ</u>

Ένας πληθυσμός κυττάρων παρουσιάζει μιά διάρκεια ζωής που κατανέμεται εκθετικά (γιατί;) με μέσο όρο $\mu=15$ χρονικές μονάδες. Στο τέλος της περιόδου αυτής υπάρχουν οι εξής δυνατότητες:

- Θάνατος του κυττάρου με $p_1 = 40\%$
- Γονιμοποίηση με $p_2 = 60\%$

Αν ένα κύτταρο γονιμοποιηθεί τότε εισέρχεται σε μιά περίοδο επώασης που διαρκεί 4±1 χρονικές μονάδες και έχει σαν αποτέλεσμα την

- παραγωγή 1 νέου κυττάρου	με	πιθανότητα	45%
- " 2 νέων κυττάρων	"	"	25%
- " 3 νέων κυττάρων	"	"	18%
- αποτυχία και καταστροφή	"	"	12%

Αν ο αρχικός πληθυσμός ήταν N=1000 να βρεθεί η εξέλιξη του πληθυσμού, σε κάθε χρονική στιγμή.

Να βρεθεί επίσης ποιά είναι η κρίσιμη τιμή των p_1, p_2 για τις οποίες ο πληθυσμός

- σταθεροποιείται
- αυξάνεται διαρκώς
- εξαφανίζεται

5. ΡΟΥΛΕΤΤΑ

Ένας παίκτης διαθέτει ένα ποσό Q_o μάρκες και παίζει σε μία ρουλέττα καζίνου (18 μαύρα, 18 κόκκινα, 1 πράσινο). Όταν ποντάρει ένα ποσό Y στο μαύρο ή κόκκινο τότε κερδίζει το ίδιο ποσό αν έλθει το χρώμα. Αν παίξει στο πράσινο και έλθει τότε κερδίζει 10Y.

Ο παίκτης έχει αποφασίσει να σταματήσει το παιχνίδι αν:

- Συμπληρώσει 20 παιχνίδια.
- Συγκεντρώσει ένα ποσό $5Q_o$.
- Τα χάσει όλα. (Αδυναμία δανεισμού).

Ο κανόνας που θα ακολουθήσει στην τοποθέτηση των χρημάτων εξαρτάται από το ποσό Q_t που κατέχει σε κάθε παιχνίδι.

Έτσι αν $Q_t \geqq Q_o$ (κερδίζει) θα παίζει $X_t = 30\% Q_t$

$Q_t < Q_o$ (χάνει) $X_t = 15\% Q_t$

Ο παίκτης δεν είναι προληπτικός στα χρώματα και μπορεί να ακολουθεί διάφορους κανόνες. Παραδείγματα:

(I) Συνέχεια κόκκινο, αλλά κάθε 4 φορές πράσινο.

(II) 2 κόκκινα, 2 μαύρα, 1 πράσινον συνεχόμενα.

(III) Αν η ρουλέττα φέρει μαύρο παίζει κόκκινο

" κόκκινο " μαύρο

" πράσινο " κόκκινο

Αν ο παίκτης ξεκινήσει με $Q_o = 1000$ να βρεθεί αν έχει καμμιά σημασία η τακτική που ακολουθεί.

Υποθέτουμε φυσικά ότι πάντα το καζίνο έχει αρκετά χρήματα ώστε να πληρώνει τους παίκτες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΩΝ

1. ΕΛΕΓΧΟΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΜΕ ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ KOLMOGOROV-SMIRNOV.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύνολο παρατηρήσεων $X=\{x_i \mid i=1,n\}$ και θέλομε να ελέγξουμε αν ανήκει σε μιά <u>θεωρητική</u> κατανομή που έχει συνάρτηση πιθανότητας $f(\xi)$ και αθροιστική κατανομή

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} f(v)dv$$

Για παράδειγμα αν θέλω να ελέγξω αν το σύνολο X είναι ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (α, β) θα θεωρήσω:

$$f(\xi) = \frac{1}{\beta-\alpha}$$

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \frac{1}{\beta-\alpha}\, d\xi = \int_{\alpha}^{\xi} \frac{1}{\beta-\alpha}\, d\xi = \frac{\xi-\alpha}{\beta-\alpha}$$

Για κάθε ξ του διαστήματος όπου ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε την κατανομή υπολογίζω τις εξής ποσότητες:

$$G(\xi) = \frac{1}{n} \cdot [\text{αριθμός των } x_i \text{ που είναι} \leq \xi] \qquad (1)$$

και σχηματίζω τα δύο στατιστικά κριτήρια:

$$K_1 = \sqrt{n} \cdot \max_{\xi} [G(\xi)-F(\xi)] \qquad (2)$$

$$K_2 = \sqrt{n} \cdot \max_{\xi} [F(\xi)-G(\xi)] \qquad (3)$$

<u>Υπόθεση (Υ1)</u>: Τα $\{x_i\}$ ανήκουν στην κατανομή $F(\Xi)$, δηλαδή η $G(\Xi)$ είναι η κατανομή $F(\Xi)$. Αν η υπόθεση Υ1 είναι αληθής τότε τα K_1 και K_2 ανήκουν στην ίδια κατανομή $K(\Xi)$ που έχει αθροιστική συνάρτηση (Kolmogorov-Smirnov):

$$K(\Xi) = P(Z \leq \Xi)$$

$$= \frac{\Xi}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{\kappa=0}^{M} \binom{n}{\kappa} \cdot \left(\frac{\kappa}{n} - \frac{\Xi}{\sqrt{n}}\right)^{\kappa} \cdot \left(\frac{\Xi}{\sqrt{n}} - \frac{\kappa}{n} + 1\right)^{n-\kappa+1}$$

όπου $M = [\Xi\sqrt{n}\,]$ = ακέραιο μέρος του $\Xi\sqrt{n}$ (4)

και $\binom{n}{\kappa} = \frac{n!}{\kappa!(n-\kappa)!}$

Όταν το n είναι πολύ μεγάλο ($n>500$) τότε η παραπάνω κατανομή προσεγγίζεται για $\Xi \geq 0$ από

$$K(\Xi) = 1-e^{-2\Xi^2} \qquad (5)$$

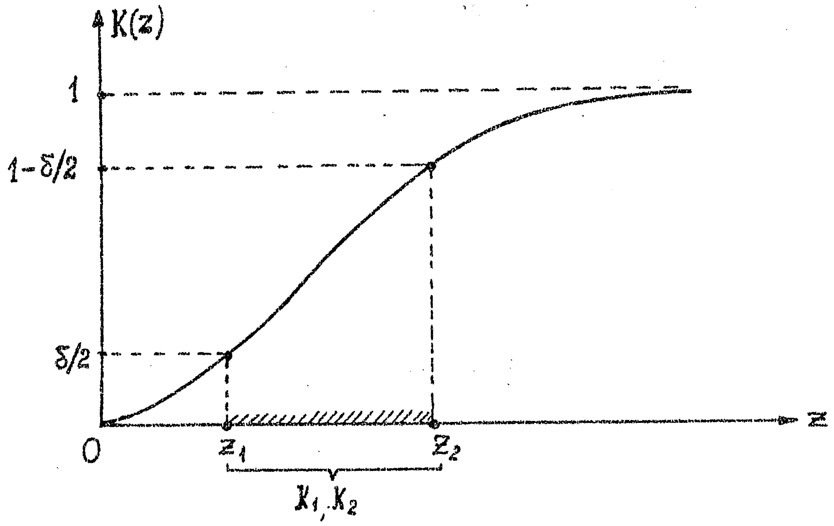
Ας θεωρήσουμε τώρα ένα διάστημα εμπιστοσύνης δ (π.χ. δ=5%).

Χρησιμοποιώντας τους πίνακες της κατανομής Kolmogrov-Smirnov βρίσκουμε δύο τιμές Ξ_1 και Ξ_2 έτσι ώστε:

$$K(\Xi_1) = \delta/2$$

$$K(\Xi_2) = 1-\delta/2$$

Η υπόθεση αληθεύει με το δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης αν τα K_1 και K_2 βρίσκονται μέσα στο διάστημα Ξ_1, Ξ_2.



Σημειώσεις:

1) Το διάστημα (z_1, z_2) διευρύνεται όταν αυξάνουμε το πλήθος των μετρήσεων n.

2) Ο υπολογισμός των $G(z)$ για κάθε z διευκολύνεται αν διατάξουμε τα $\{x_i\}$ κατά αύξουσα σειρά.

3). Επειδή ο προσεγγιστικός τύπος (5) ισχύει μόνο για $z \geq 0$ αν έχουμε αρνητικά x_i μπορούμε να τα μετατοπίζουμε κατά $\theta = \min\{x_i\}$ έτσι ώστε να έχουμε να ελέγξουμε ένα θετικό σύνολο.

2. ΑΝΤΙΘΕΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΙΣ

Ορισμός: Αν σε μία προσομοίωση χρησιμοποιήσουμε τους ψευδοτυχαίους αριθμούς $U=\{u_i \mid i=1,\ldots,n\}$ τότε η αντιθετική προσομοίωση χρησιμοποιεί τους ψευδοτυχαίους

$$U' = \{1-u_i \mid i=1,\ldots,n\}$$

όπου $0 \leq u_i \leq 1$ γιά κάθε $i=1,\ldots,n$.

Ο σκοπός της χρησιμοποίησης αντιθετικών προσομοιώσεων είναι η σμίκρυνση του διαστήματος εμπιστοσύνης όπου εκτιμούμε μία παράμετρο. Αυτό συμβαίνει επειδή ελαττώνεται η διακύμανση.

Ας υποθέσουμε ότι η παράμετρος εκτιμάται σαν ο μέσος όρος των μετρήσεων από την κανονική και την αντιθετική προσομοίωση:

$$\Xi = \frac{x_i + x_i'}{2} \tag{6}$$

Ισχύει:

1) $$E(\Xi) = \frac{1}{2}\,E(x_i) + \frac{1}{2}\,E(x_i') = \frac{1}{2}\,(\mu+\mu) = \mu$$

όπου μ ο πραγματικός (άγνωστος) μέσος του πληθυσμού.
Άρα η εκτίμηση είναι αμερόληπτη.

2) $$V(\Xi) = \frac{1}{4}\{\,Var(x) + Var(x') + 2\,Cov(x,x')\} \tag{7}$$

Αν ρ είναι ο συντελεστής συσχέτισης ισχύει:

$$\rho = \frac{Cov(x,\,x')}{\{Var(x)\cdot Var(x')\}^{\frac{1}{2}}} \tag{8}$$

και φυσικά Var(x)=Var(x')= άγνωστη διακύμανση πληθυσμού.

Άρα:

$$V(\Xi) = \frac{1}{2}\cdot Var(x)\cdot(1+\rho) \tag{9}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι με $\boxed{\rho<0}$ μειώνεται η διακύμανση της εκτιμώμενης παραμέτρου και περιορίζεται έτσι το διάστημα εμπιστοσύνης.

Κατά την χρήση αντιθετικών προσομοιώσεων θα πρέπει να ελέγχεται αν το ρ είναι πράγματι αρνητικό (αν δηλαδή τα αποτελέσματα x_i, x_i' είναι όντως αρνητικά συσχετισμένα) και μετά να συνεχίζεται η ολοκλήρωση των υπολογισμών.

Οι αντιθετικές προσομοιώσεις χρησιμοποιούνται όταν πρόκειται να εκτιμήσουμε τις τιμές παραμέτρων.

<u>Σημείωση:</u> Όταν θέλουμε να συγκρίνουμε την συμπεριφορά μιάς μεταβλητής του συστήματος κάτω από δύο διαφορετικές πολιτικές I και II τότε εκτιμούμε την διαφορά των μετρήσεων:

$$\Xi = x_I - x_{II} \qquad (10)$$

Για να περιορίσουμε τώρα την διακύμανση του Ξ θα πρέπει να κάνουμε προσομοιώσεις με <u>θετική</u> συσχέτιση ($\rho>0$). Η απλούστερη περίπτωση θετικά συσχετισμένων προσομοιώσεων είναι η χρήση του <u>ίδιου</u> συνόλου ψευδο-τυχαίων αριθμών.

3. Η ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΕΝΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ

3.1. <u>Απλό σύστημα</u>

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα με <u>μία</u> ουρά αναμονής και <u>μία</u> εξυπηρέτηση και ας ορίσουμε τις μεταβλητές:

λ : ρυθμός άφιξης στο σύστημα

q : χρόνος παραμονής στην ουρά

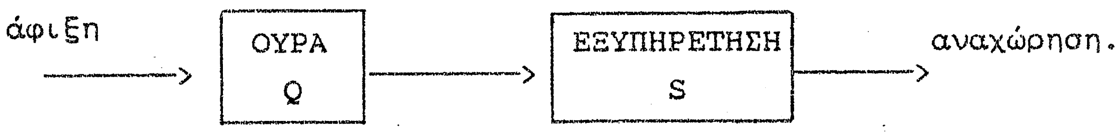
s : χρόνος εξυπηρέτησης

r : συνολικός χρόνος παραμονής στο σύστημα

m : αριθμός ατόμων στο σύστημα/μονάδα χρόνου

m_q : αριθμός ατόμων στην ουρά/μονάδα χρόνου

m_s : αριθμός εξυπηρετούμενων ατόμων/μονάδα χρόνου.



Ο τύπος του Little μας δίνει:

$$\left(\begin{matrix}\text{αριθμός ατόμων}\\ \text{στο σύστημα}\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}\text{ρυθμός}\\ \text{αφίξεων}\end{matrix}\right) \times \left(\begin{matrix}\text{μέσος χρόνος}\\ \text{παραμονής}\end{matrix}\right) \qquad (11)$$

Ο τύπος αυτός ισχύει και για το γενικό σύστημα και γιά κάθε επιμέρους υποσύστημα. Έτσι θα έχουμε:

$$m = \lambda r \qquad (12)$$

$$m_q = \lambda q \qquad (13)$$

Αλλά $\quad r = q + s \quad$ και $\quad m = m_q + m_s \quad$ Άρα:

$$m_s = \lambda(r-q) \implies \boxed{m_s = \lambda s} \qquad (14)$$

Προφανώς για να μπορεί μακροπρόσθεμα να ισορροπεί το σύστημα θα πρέπει ο αναμενόμενος αριθμός εξυπηρετούμενων ατόμων να μην υπερβαίνει τις θέσεις εξυπηρέτησης. Δηλ.

$$m_s < 1 \quad \text{ή} \quad \boxed{\lambda \cdot s < 1} \qquad (15)$$

3.2 Σύστημα πολλαπλών ουρών-εξυπηρετήσεων.

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα με N κατηγορίες πελατών που αφικνούνται με ρυθμούς $\lambda_i (i=1,\ldots,N)$ και M σταθμούς εξυπηρέτησης. Αν r_i, q_i, s_i είναι οι μέσοι χρόνοι συνολικής παραμονής στο σύστημα, αναμονής στην ουρά και διάρκειας εξυπηρέτησης για τον τύπο i, τότε η εφαρμογή του τύπου του Little στο υποσύστημα i θα μας δώσει με εντελώς παρόμοιο τρόπο τα εξής:

$$\left.\begin{array}{l} m_i = \lambda_i r_i \\ m_i^q = \lambda_i q_i \end{array}\right\} \implies m_i^s = \lambda_i (r_i - q_i) = \lambda_i s_i$$

Ο συνολικός αριθμός εξυπηρετούμενων είναι $\sum_{i=1}^{N} m_i^s$ και δεν πρέπει να υπερβαίνει τις διαθέσιμες θέσεις M. Άρα η ισορροπία του συστήματος εξασφαλίζεται μόνο αν:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i s_i \quad < \quad M} \qquad (16)$$

Ο τύπος αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την αναπροσαρμογή των χρόνων εξυπηρέτησης s_i έτσι ώστε τελικά να επιτυγχάνεται ισορροπία του συστήματος και αποφυγή διαρκούς συσσώρευσης πελατών στην ουρά αναμονής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

1. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Διακριτά καλούνται τα συστήματα που περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών και αντιπροσωπεύουν μεταβολές καταστάσεων ανά καθορισμένα (και πεπερασμένα) χρονικά διαστήματα.
Αν παραστήσουμε με τα διανύσματα:

y_t : ενδογενείς μεταβλητές (έξοδοι)

u_t : εξωγενείς μεταβλητές (είσοδοι)

το διακριτό σύστημα έχει τη μορφή:

$$y_{t+1} = f(y_t, u_t, t) \tag{1}$$

όπου $f(\bullet)$ διανυσματική συνάρτηση γενικής μορφής.
Ειδικώτερες περιπτώσεις είναι:

- Γραμμικά συστήματα: $y_{t+1} = Ay_t + Bu_t$ (2)

- Συστήματα εσωτερικών εξισώσεων πεπλεγμένα

$$y_{t+1} = My_{t+1} + Ay_t + Bu_t \tag{3}$$

ή γενικώτερα

$$y_{t+1} = f(y_{t+1}, y_t, u_t) \tag{4}$$

Η επίλυση των γραμμικών συστημάτων (2 ή 3) μπορεί να γίνει με αναλυτικό τρόπο.

Συστήματα της μορφής (1), (4) αλλά και (2) και (3) λύνονται με κατάλληλες μεθόδους προσομοίωσης, επαναληπτικές μεθόδους ή με βήμα-προς-βήμα υπολογισμούς.

Τα διακριτά συστήματα είναι η συνηθέστερη μορφή οικονομικών υποδειγμάτων. Χρησιμοποιούνται επίσης για την προσεγγιστική επίλυση συνεχών συστημάτων.

1.1 Το πρόβλημα της ευστάθειας

Ένα σύστημα της μορφής (1) λέγεται ευσταθές, όταν για εξωγενείς μεταβλητές πεπερασμένου μεγέθους ($|u_t| < \infty$) οι ενδογενείς μεταβλητές y_t παραμένουν πάντοτε πεπερασμένες.

Ας θεωρήσουμε το απλό πρωτοβάθμιο γραμμικό σύστημα:

$$x_{t+1} = \alpha x_t + \beta u_t \tag{5}$$

με αρχική κατάσταση για t=0 : x_0.

Εφαρμόζοντας την (5) αναδρομικά βρίσκουμε:

$$x_1 = \alpha x_0 + \beta u_0$$

$$x_2 = \alpha x_1 + \beta u_1 = \alpha^2 x_0 + \alpha\beta u_0 + \beta u_1$$

$$x_3 = \alpha x_2 + \beta u_2 = \alpha^3 x_0 + \alpha^2 \beta u_0 + \alpha\beta u_1 + \beta u_2$$

$$\vdots$$

$$x_t = \alpha^t x_0 + \sum_{\kappa=0}^{t-1} \alpha^{t-1-\kappa} \beta u_\kappa \tag{6}$$

Αν θεωρήσουμε ότι x_0, $\{u_\kappa, \kappa=0,1,2,\ldots\}$ είναι πεπερασμένα τότε από την (6) βλέπουμε πως το x_t είναι πεπερασμένο για κάθε $t=0,1,2,\ldots$ μόνο αν:

$$|\alpha| \leq 1 \quad \text{ή} \quad -1 \leq \alpha \leq 1 \tag{7}$$

Το α καλείται χαρακτηριστική ρίζα του συστήματος και η (7) αποτελεί τη <u>συνθήκη ευστάθειας.</u>

(Δοκιμάστε παραδείγματα με $\alpha=0.8$ και $\alpha=2$)

Σε ένα σύστημα πολλών διαστάσεων όπως το (2) θα έχουμε με <u>ακριβώς</u> τον ίδιο τρόπο:

$$x_{t+1} = A^t x_0 + \sum_{\kappa=0}^{t-1} A^{t-1-\kappa} B u_\kappa \tag{8}$$

Η A καλείται πίνακας μετάβασης (transition matrix) και

η B καλείται πίνακας εισόδου (input matrix).

Ο διαγώνιος μετασχηματισμός της μήτρας A είναι:

$$A = T \; \Lambda \; T^{-1} \tag{9}$$

όπου

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{(μήτρα των ιδιοτιμών).}$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$A^t = T \; \Lambda^t \; T^{-1}$$

και επειδή η Λ είναι διαγώνια μήτρα:

$$A^t = T \bullet \begin{bmatrix} \lambda_1^t & & & \\ & \lambda_2^t & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^t \end{bmatrix} \bullet T^{-1} \tag{10}$$

Για να είναι τώρα οι τιμές του x_t πεπερασμένες θα πρέπει η A^t να είναι πεπερασμένη, και επειδή οι μήτρες T, T^{-1} είναι σταθερές θα πρέπει τα στοιχεία $\lambda_1^t, \lambda_2^t, \ldots, \lambda_n^t$ να είναι πεπερασμένα για κάθε t, δηλ.:

$$|\lambda_i| \leq 1 \quad , \quad i=1,2,\ldots,n \tag{11}$$

<u>Συμπέρασμα:</u> Ένα γραμμικό <u>διακριτό</u> σύστημα της μορφής

$$x_{t+1} = Ax_t + By_t$$

είναι ευσταθές όταν <u>όλες</u> οι ιδιοτιμέςτης μήτρας A έχουν μέτρο που δεν υπερβαίνει την <u>μονάδα.</u>*

Παρατηρείστε ότι οι ιδιοτιμές της B δεν επηρρεάζουν την ευστάθεια του συστήματος.

<u>Σημείωση:</u> Θυμηθείτε ότι για ένα γραμμικό <u>συνεχές</u> σύστημα $\dot{x}=Ax+Bu$ η συνθήκη ευστάθειας απαιτεί οι ιδιοτιμές της μήτρας A να μην έχουν πραγματικό μέρος μεγαλύτερο του <u>μηδενός</u>, δηλ. $Re(\lambda_i) \leq 0$.

2. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

Ένα δυναμικό σύστημα συνεχούς χρόνου περιγράφεται από Διαφορικές Εξισώσεις και έχει τη γενική μορφή:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = f(y, u, t) \tag{13}$$

Σε μερικές περιπτώσεις η (13) λύνεται αναλυτικά, ενώ σε άλλες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε <u>αναλογικούς</u> υπολογιστές. Η συνηθέστερη όμως μέθοδος επίλυσης βασίζεται στις διακριτές προσομοιώσεις.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω y μία απλή μεταβλητή και f(t) η τιμή της παραγώγου της τη χρονική στιγμή t.

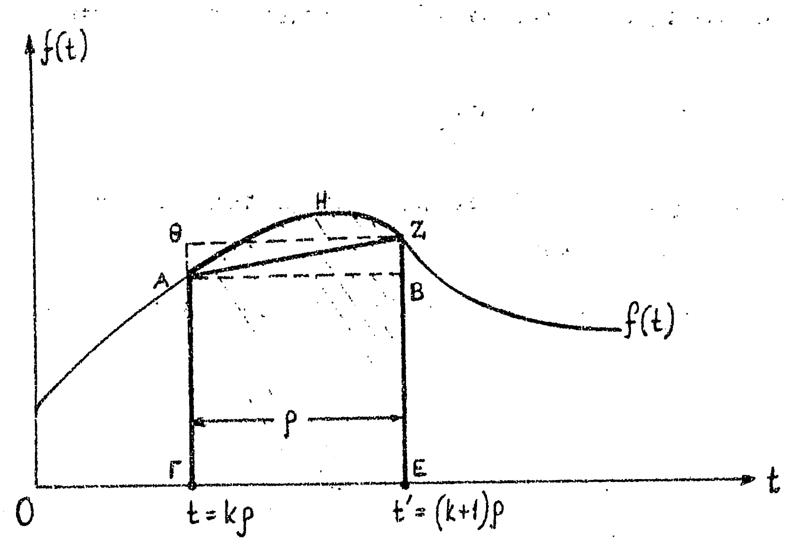
Επίλυση της (13) για μιά χρονική στιγμή t΄ σημαίνει υπολογισμό του γραμμοσκιασμένου ολοκληρώματος.

Ας υποθέσουμε ότι εισάγουμε μία σταθερή χρονική περίοδο ρ, σε πολλαπλάσια της οποίας θα υπολογίζουμε την τιμή του ολοκληρώματος.

Υπάρχουν οι εξής δυνατές προσεγγίσεις (μεταξύ άλλων):

---

* Για μιά εκτενέστερη ανάλυση της ευστάθειας συστημάτων διακριτού και συνεχούς χρόνου βλέπε <u>Ν. Χριστοδουλάκη, Θεωρία Αυτομάτου Ελέγχου και Εφαρμογές,</u> Αθήνα, 1987.



- (Euler) : (ΑΓΕΖΗΑ) ≈ (ΑΓΕΒ)
- (Ανάστροφη Euler) : (ΑΓΕΖΗΑ) ≈ (ΘΓΕΖ)
- Τραπεζοειδής : (ΑΓΕΖΗΑ) ≈ (ΑΓΕΒΖΑ)

Για μιά πιό αυστηρή ανάλυση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σειρά Taylor για την ζητούμενη συνάρτηση y.

$$y(t+\rho) = y(t) + \rho \cdot y'(t) + \underbrace{\frac{\rho^2}{2} y''(t) + \ldots}_{\text{αμελούνται}} \qquad (80)$$

Επειδή: $\dot{y}(t) = f(y, t)$ έχουμε:

$$y(t+\rho) = y(t) + \rho \cdot f(y,t)$$

ή

$$y_{\kappa+1} = y_\kappa + \rho \cdot f(y_\kappa) \qquad (15)$$

Με βάση τη σχέση αυτή μπορούμε να υπολογίζουμε την τιμή της y σε κάθε διάστημα t+ρ αναδρομικά για t=ρ, 2ρ, 3ρ, 4ρ, ...

Ο τύπος (15) αντιστοιχεί στην μέθοδο Euler.
Η αντίστροφη Euler αντιστοιχεί στη σχέση:

$$y_{\kappa+1} = y_\kappa + \rho \cdot f(y_{\kappa+1}) \tag{16}$$

(Το σύστημα αυτό είναι της μορφής των εσωτερικών εξισώσεων).

Η τραπεζοειδής προσέγγιση αντιστοιχεί στον τύπο:

$$y_{\kappa+1} = y_\kappa + \frac{\rho}{2} \cdot \{ f(y_\kappa) + f(y_{\kappa+1}) \} \tag{17}$$

Υπολογισμοί σφάλματος

Το προσεγγιστικό σφάλμα της μεθόδου Euler είναι προφανώς ίσο με την επιφάνεια ΑΒΖΗ.
Συνεπώς, δίνεται από τη σχέση:

$$\varepsilon = \left|y(t')-y_\kappa\right| = \frac{\rho}{2} \cdot \left| y_{\kappa+1}-y_\kappa \right| = \frac{\rho^2}{2} \cdot \left|f(y_\kappa)\right| \tag{18}$$

3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΩΝ

- Όσο μεγαλύτερο επιλέγεται το βήμα ρ τόσο λιγώτερο είναι το κόστος υπολογισμών.
- Μεγάλο ρ όμως σημαίνει μεγάλο σφάλμα (δες (18)).
- Υπάρχουν επίσης περιπτώσεις που επιλογή μεγάλου βήματος ρ οδηγεί σε αστάθεια αλγορίθμου. Αυτό σημαίνει πως ένα πεπερασμένο ολοκλήρωμα θα προσεγγίζεται από μιά τιμή που θα αυξάνει απεριόριστα και φυσικά το αποτέλεσμα θα είναι εσφαλμένο. Γιά παράδειγμα ας πάρουμε την απλή συνάρτηση:

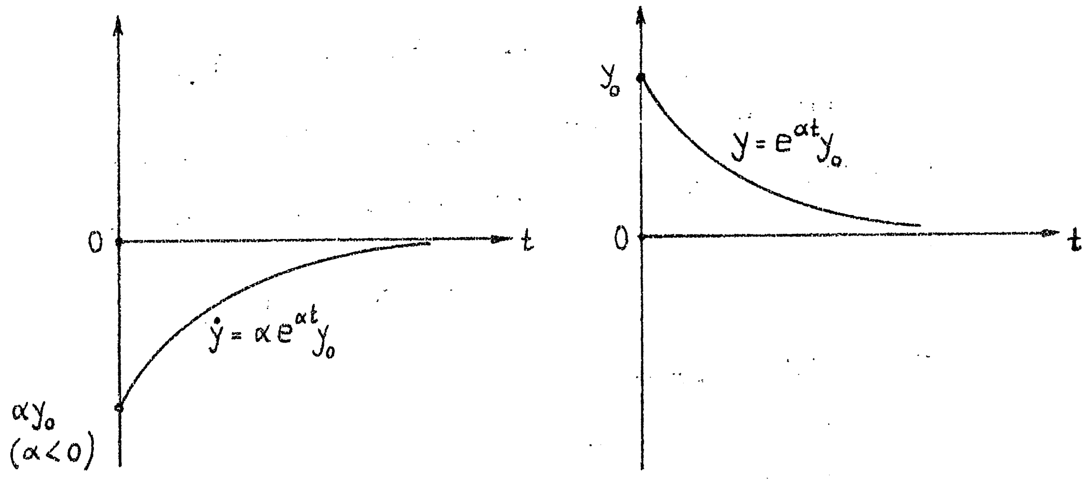
$$\dot{y} = \alpha y$$

Με $y(0) = y_0$ και $\alpha < 0$ (ευσταθές σύστημα).

Ας θεωρήσουμε ένα βήμα ρ και την απλή προσέγγιση Euler:

$$y_{\kappa+1} = y_\kappa + \rho f(y_\kappa)$$

ή αντικαθιστώντας $y_{\kappa+1} = y_\kappa + \rho\alpha y_\kappa$



δηλαδή $$y_{\kappa+1} = (1 + \rho\alpha)\, y_{\kappa}$$

Το διακριτό αυτό σύστημα είναι <u>ευσταθές</u> μόνο όταν:

$$|1+\rho\alpha| \leqq 1 \implies -1 \leqq 1+\rho\alpha \geqq 1$$

ή $$(-\alpha) \cdot \rho \leqq 2 \quad \text{και} \quad \rho\alpha < 0$$
(αυτονόητο)

$$\boxed{\rho \leqq \frac{2}{|\alpha|}} \qquad (19)$$

Η συνθήκη αυτή σημαίνει πως το βήμα της προσομοίωσης δεν πρέπει να υπερβαίνει μιά ορισμένη τιμή που καθορίζεται από την <u>χαρακτηριστική ρίζα</u> του συνεχούς συστήματος.

Αν το συνεχές σύστημα ήταν πολλών διαστάσεων και ευσταθές η συνθήκη ευστάθειας της προσομοίωσης θα είναι:

$$\rho \leqq \frac{2}{|\lambda max|} \qquad (20)$$

όπου λmax η μέγιστη κατ' απόλυτη τιμή ιδιοτιμή της μήτρας A του συνεχούς συστήματος.

4. Η ΧΡΗΣΗ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΤΥΠΟΥ

Η παρουσίαση αλγορίθμων διακριτής προσομοίωσης συνεχών συστημάτων και τα προβλήματα που προκύπτουν στην εφαρμογή τους (επιλογή μεθόδου, βήματος, ευστάθειας κ.λ.π.) δημιουργούν δύο εύλογα ερωτήματα:

Ε1: Γιατί δεν λύνουμε τις διαφορικές εξισώσεις αναλυτικά;

Ε2: Γιατί χρησιμοποιούμε ακόμη συστήματα διαφορικών εξισώσεων και δεν κατασκευάζουμε απευθείας μοντέλα διακριτού τύπου;

Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα είναι εύκολη. Η αναλυτική λύση θα ήταν προτιμητέα επειδή θα ήταν ακριβής και όχι προσεγγιστική, αλλά όμως αναλυτικές μέθοδοι λύσης υπάρχουν για μιά περιορισμένη μόνο κατηγορία διαφορικών εξισώσεων. Εξισώσεις που περικλείουν πολύπλοκες μη-γραμμικές παραστάσεις πιθανόν να μην λύνονται αναλυτικά και αναγκαστικά θα πρέπει να καταφύγουμε σε προσομοίωση.

Ακόμα όμως και αν υπάρχει αναλυτική λύση, ο υπολογισμός της ενδέχεται να περιέχει πολύπλοκους υπολογισμούς, ιδίως όταν το συνεχές σύστημα είναι υψηλού βαθμού. Για παράδειγμα το γραμμικό σύστημα:

$$\frac{dy}{dt} = Ay + Bu$$

έχει την αναλυτική λύση:

$$y(t) = e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-r)}\ Bu(r)dr$$

ο υπολογισμός όμως της οποίας απαιτεί εκθετικά πινάκων και ολοκληρώματα που στα περισσότερα προγράμματα λύνονται πάλι με προσομοιώσεις!

Η απάντηση στο δεύτερο ερώτημα είναι πιό σύνθετη. Ο κύριος λόγος που σε πολλές περιπτώσεις μας επιβάλλει να κατασκευάζουμε <u>συνεχή υποδείγματα</u> είναι ότι η χρήση διαφορικών εξισώσεων αναπαριστά με μεγαλύτερη ακρίβεια τα φυσικά φαινόμενα. Έτσι τα μαθηματικά υποδείγματα που περιγράφουν φυσικά και χημικά συστήματα, κινητικά συστήματα, ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα κ.λ.π. είναι εύλογο να γράφονται με την μορφή διαφορικών εξισώσεων. Με την ίδια άλλωστε μορφή είναι γνωστοί και οι νόμοι της φυσικής και της χημείας που χρησιμοποιούνται κατά την διάρκεια κατασκευής του μοντέλου.

'Ενας δεύτερος λόγος χρησιμοποίησης συνεχών συστημάτων για την παράσταση δυναμικών φαινομένων είναι ότι η πολύ σημαντική μελέτη της ευστάθειας τους είναι απλούστερη απ' ότι στα αντίστοιχα διακριτά συστήματα. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε το απλό σύστημα:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y + \beta u$$

Το δυναμικό αυτό σύστημα είναι ευσταθές αν $\alpha<0$, πράγμα που αποτελεί μιά απλή ανισότητα.

Το αντίστοιχο διακριτό σύστημα θα αντικαθιστούσε την παράγωγο $\frac{dy}{dt}$ με την διαφορά $y_{t+1}-y_t$ και θα είχαμε

$$y_{t+1} - y_t = \alpha y_t + \beta u_t$$

ή

$$y_{t+1} = (1+\alpha)y_t + \beta u_t$$

Το σύστημα αυτό είναι ευσταθές αν $|1+\alpha|<1$ ή $-2<\alpha<0$

Απαιτούνται δηλαδή τώρα δύο ανισότητες αντί μιάς. Η πολυπλοκότητα αυξάνει πολύ περισσότερο για συστήματα μεγάλου βαθμού και κάνει γιαυτό τα συνεχή συστήματα προτιμώτερα για την μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς.

5. ΤΙΜΕΣ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ

Ας θεωρήσουμε ένα δυναμικό σύστημα, το οποίο είναι ευσταθές. Σε μιά πεπερασμένη σταθερή μεταβολή των εξωγενών μεταβλητών θα αντιστοιχεί μιά επίσης πεπερασμένη μεταβολή των ενδογενών μεταβλητών. Αν οι τελευταίες τείνουν ασυμπτωτικά $(t \longrightarrow \infty)$ σε κάποια σταθερά επίπεδα, τότε αυτά θα τα ονομάζουμε τιμές σταθερής καταστάσεως.

Σ' ένα ασταθές σύστημα οι Τ.Σ.Κ. είναι σημεία ασταθούς ισορροπίας γιατί η πεπερασμένη διέγερση των εξωγενών μεταβλητών θα προκαλέσει μιά απεριόριστη και ανεξέλεγκτη μεταβολή των ενδογενών μεταβλητών.

Υπάρχει τέλος η περίπτωση συστήματος που είναι οριακά ευσταθές και ταυτόχρονα περιέχει χαρακτηριστικές ρίζες που προκαλούν αμείωτες ταλαντώσεις. Στην περίπτωση αυτή ενώ το σύστημα δεν συμπεριφέρεται ανεξέλεγκτα, δεν έχει νόημα να μιλάμε για τιμές σταθερής καταστάσεως, δεδομένου ότι το σύστημα δεν ισορροπεί σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο.

Ο υπολογισμός των Τ.Σ.Κ. (Steady-State Value) σε ένα ΣΥΝΕΧΕΣ σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dy}{dt} = f(y, u) \tag{21}$$

γίνεται θέτοντας $\frac{dy}{dt} = 0$ και λύνοντας το στατικό σύστημα εξισώσεων ως προς το διάνυσμα y.

$$f(y, u) = 0 \tag{22}$$

Αν η σταθερή τιμή του εξωγενούς διανύσματος u είναι $\bar{u}$ και παραστήσουμε τις Τ.Σ.Κ. του y με $\bar{y}$ ή y_∞ θα πάρουμε μιά έκφραση της μορφής:

$$\bar{y} = g(\bar{u}) \tag{23}$$

που αποτελούν τις τιμές σταθερής καταστάσεως.

Έστω το δυναμικό σύστημα $\dot{x}=Ax+Bu$ (24)

με όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα A να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος $(Re(\lambda)<0)$ ώστε να εξασφαλίζεται η ευστάθεια. Για να βρούμε τις Τ.Σ.Κ. του διανύσματος x θεωρούμε το σύστημα να τείνει προς μιά κατάσταση "ακινησίας" (steady-state) όπου $\dot{x} \longrightarrow 0$.
Θα έχουμε έτσι:

$$0 = A\bar{x} + B\bar{u}$$

ή

$$\bar{x} = (-A^{-1}B) \cdot \bar{u} \tag{25}$$

Οι Τ.Σ.Κ. εξαρτώνται λοιπόν γενικά από το επίπεδο των εξωγενών μεταβλητών. Η μεταβολή των Τ.Σ.Κ. του x που αντιστοιχεί σε μιά μεταβολή των σταθερών τιμών τηςεξωγενούς μεταβλητής $\bar{u}$, καλείται πολλαπλασιαστής.

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό των μερικών παραγώγων μπορούμε να γράψουμε ότι ο πολλαπλασιαστής δίδεται από τον πίνακα:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{u}} = -A^{-1}B \qquad (26)$$

Παρατηρούμε έτσι ότι στα γραμμικά συστήματα της μορφής (24) ο πολλαπλασιαστης είναι ανεξάρτητος του επιπέδου των εξωγενών μεταβλητών. Αυτό δεν ισχύει πάντοτε στα μη-γραμμικά συστήματα της γενικής μορφής (21).

Οι Τ.Σ.Κ. μας δίνουν πληροφορίες για την μακροχρόνια συμπεριφορά του συστήματος. Η μεταβατική συμπεριφορά, καθώς το σύστημα διεγείρεται από μία εξωτερική παρέμβαση ή αφήνεται να επιστρέψει στο σημείο ισορροπίας, μας δίνει πληροφορίες για το πώς το σύστημα πλησιάζει προς τις Τ.Σ.Κ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Π1. Έστω το σύστημα $\frac{dy}{dt} = -5y+4u$ που είναι ευσταθές επειδή $-5<0$.

Η Τ.Σ.Κ. βρίσκεται αν θέσουμε $dy/dt = 0$ και είναι

$$\bar{y} = \frac{4}{5}\,\bar{u} = 0.80\,\bar{u}$$

Έτσι αν $\bar{u} = 1 \Rightarrow \bar{y} = 0.80$

αν $\bar{u} = 2 \Rightarrow \bar{y} = 1.60$

$\bar{u} = 1/3 \Rightarrow \bar{y} = 0.2666$

Ο πολλαπλασιαστής του y ως προς u είναι πάντα $\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{u}} = 0.80$.

Π2. Έστω το σύστημα:

$$y_1 = -4y_1 + 1.75y_2 + 6u_1 + u_2$$

$$y_2 = y_1 - y_2 - u_1$$

Ο Πίνακας $A = \begin{bmatrix} -4 & 1.75 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές τις ρίζες

του πολυωνύμου: $|\lambda I - A| = (\lambda+4)(\lambda+1) - 1.75 = \lambda^2+5\lambda+2.25$

που είναι: $\lambda_1 = -0.50, \quad \lambda_2 = -4.50$

Επειδή $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$ το συνεχές σύστημα είναι <u>ευσταθές.</u>

Για να βρούμε τις Τ.Σ.Κ. θέτουμε $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0$ και έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -4\bar{y}_1 + 1.75\bar{y}_2 + 6u_1 + u_2 \\ 0 &= \bar{y}_1 - \bar{y}_1 + u_1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1.75 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Εύκολα βρίσκουμε για την αναστροφή του πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1.75 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.77 \\ 0.44 & 1.77 \end{bmatrix}$$

και τελικά:

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.77 \\ 0.44 & 1.77 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.41 & 0.44 \\ 4.41 & 0.44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix}$$

Το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει τα εξής:

(i) Αν η εξωγενής μεταβλητή $\bar{u}_1$ διεγερθεί σταθερά στο 1 ενώ η u_2 παραμείνει αδιέγερτη ($\bar{u}_2=0$) τότε η ενδογενής μεταβλητή y_1 θα ισορροπήσει τελικά στο $\bar{y}_1=3.41$ και η $\bar{y}_2$ στο 4.41 .

(ii) Αν η $\bar{u}_1=0$ και η u_2 διεγερθεί σταθερά στο $\bar{u}_2=1$ τότε η y_1 θα καταλήξει κάποτε στην τελική τιμή 0.44 και η y_2 στην τελική τιμή 0.44 .

(iii) Για οποιοδήποτε άλλο συνδυασμό u_1, u_2 οι τελικές τιμές των $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ θα προκύπτουν ανάλογα..
π.χ. για $\bar{u}_1=1/2$ και $\bar{u}_2=-0.60$ θα έχουμε:

$$\bar{y}_1 = 3.41*1/2 + 0.44*(-0.60) = 1.441$$

$$\bar{y}_2 = 4.41*1/2 + 0.44*(-0.60) = 1.941$$

Στα <u>ΔΙΑΚΡΙΤΑ</u> συστήματα που περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών της μορφής:

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t) \tag{27}$$

ο υπολογισμός των Τ.Σ.Κ. γίνεται θέτοντας

$$x_{t+1} = x_t = \bar{x} \tag{28}$$

εφ' όσον βέβαια το σύστημα είναι ευσταθές. Πρέπει έτσι να λύσουμε το εξής σύστημα εξισώσεων:

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) \qquad (29)$$

για να πάρουμε στην γενική μορφή:

$$\bar{x} = g(\bar{u}) \qquad (30)$$

Στην γραμμική περίπτωση $x_{\kappa+1} = Ax_\kappa + Bu_\kappa$ με τις ιδιοτιμές του A να πληρούν τη συνθήκη $|\lambda(A)| < 1$ ώστε να εξασφαλίζεται η ευστάθεια, οι Τ.Σ.Κ. υπολογίζονται ως εξής:

$$\bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u} \implies (I-A)\bar{x} = B\bar{u}$$

όπου I παριστάνει τον μοναδιαίο πίνακα ισοδιάστατο με τον A.

Λύνοντας:

$$\bar{x} = (I-A)^{-1}B \cdot \bar{u} \qquad (31)$$

Σημειώστε την διαφορετική μορφή μεταξύ (25) και (31) που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις συνεχούς και διακριτού συστήματος.

Η έννοια του πολλαπλασιαστή είναι παρόμοια.

<u>Άσκηση:</u> Επαναλάβετε παραδείγματα διακριτών συστημάτων με τρόπο όμοιο μ' αυτόν που αναπτύχθηκε στα Π.1, Π.2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

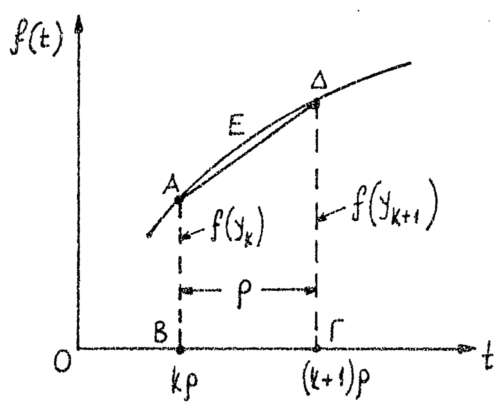
ΑΛΛΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΩΝ

1. RUNGE-KUTTA

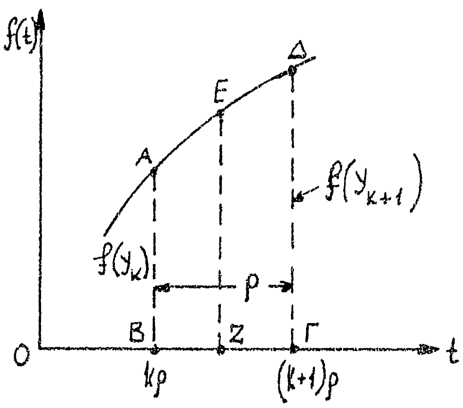
Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε πως η τραπεζοειδής μέθοδος αποτελεί μιά ενδιάμεση επιλογή μεταξύ της απλής και της ανάστροφης μεθόδου Euler. Απαιτεί όμως για την εφαρμογή της την γνώση της τιμής της συνάρτησης στο επόμενο βήμα (κ+1), πράγμα που καθιστά αναγκαία την υιοθέτηση επαναληπτικών μεθόδων για την επίλυση. Μιά διαφορετική προσέγγιση, παρόμοια της τραπεζοειδούς θα ήταν να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τραπεζίου χρησιμοποιώντας την τιμή της διαμέσου. Γραφικά για το απλοποιημένο παράδειγμα της διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{dy}{dt} = f(t)$$

οι δύο μέθοδοι παρίστανται ως εξής:



$(ΑΒΓΔΕ) \approx \frac{\rho}{2}\{ f(y_\kappa)+f(y_{\kappa+1}) \}$



$(ΑΒΓΔΕ) \approx \rho \cdot (ΕΖ)$

Το πρόβλημα είναι τώρα πώς μπορούμε να υπολογίσουμε κατά προσέγγιση την "διάμεσο" ΕΖ, δηλ. την τιμή της παραγώγου στο σημείο $\kappa+\frac{\rho}{2}$.

Εφαρμόζοντας την ανάπτυξη Taylor γύρω από το σημείο κ και σε απόσταση ρ/2 έχουμε την σχέση:

$$y_{\kappa+\rho/2} = y_\kappa + \frac{\rho}{2}\frac{dy}{dt}\bigg|_\kappa + \frac{(\rho/2)^2}{2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\bigg|_\kappa + \dots \qquad (1)$$

Όμως:

$$\frac{dy}{dt}\bigg|_\kappa = f(y_\kappa) \qquad (\text{γνωστή}) \qquad (2)$$

και παραλείποντας του υψηλόβαθμους όρους της σειράς μπορούμε να γράψουμε την προσέγγιση:

$$y_{\kappa+\rho/2} \approx y_\kappa + \frac{\rho}{2} f(y_\kappa) \qquad (3)$$

Άρα

$$(EZ) = f(y_{\kappa+\rho/2}) \approx f\{y_\kappa + \frac{\rho}{2} f(y_\kappa)\} \qquad (4)$$

Με βάση αυτή την προσέγγιση μπορούμε να κατασκευάσουμε την διακριτή προσομοίωση ως εξής:

$$y_{\kappa+1} = y_\kappa + (\text{ΑΒΓΔΕ})$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{y_{\kappa+1} = y_\kappa + \rho \cdot f\{y_\kappa + \frac{\rho}{2} f(y_\kappa)\}} \qquad (5)$$

Η μέθοδος αυτή καλείται RUNGE-KUTTA και είναι 2ου βαθμού.

Παρατηρείστε ότι σε κάθε βήμα απαιτείται κλήση της υπορουτίνας της παραγώγου 2 φορές:

Μία φορά για να υπολογιστεί η $f(y_\kappa)$ και άλλη μία για να υπολογιστεί η f(x) όπου

$$x = y_{\kappa} + \frac{\rho}{2} f(y_{\kappa})$$

2. ADAMS - BASHFORTH

Η μέθοδος Runge-Kutta έχει το πλεονέκτημα ότι δεν χρειάζεται επαναληπτικές μεθόδους για να επιλυθεί, απαιτεί όμως την πολλαπλή κλήση της υπορουτίνας f(y,t) σε κάθε βήμα.

Όταν ο αριθμός των διαφορικών εξισώσεων είναι πολύ μεγάλος οι κλήσεις αυτές καταντούν ύπολογιστικά πολυέξοδες.

Από την άλλη μεριά, τόσο στην μέθοδο Runge-Kutta, όσο και στην τραπεζοειδή και τις μεθόδους Euler δεν αξιοποιούμε καμμιά προηγούμενη προσέγγιση που κάναμε στα βήματα κ-1, κ-2 κλπ.

Το πρόβλημα αυτό προσπαθεί να αντιμετωπίσει η μέθοδος Adams-Bashforth, που αντί να υπολογίζει την τιμή $f(y_{\kappa+\rho/2})$ της διαμέσου προσπαθεί να την "μαντεύσει" με την μέθοδο της εξωτερικής παρεμβολής (extrapolation).

Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή η τιμή της παραγώγου $f(y_{\kappa+\rho/2})$ προσεγγίζεται με ένα αριθμητικό μέσο όρο των ήδη γνωστών τιμών $f(y_{\kappa})$, $f(y_{\kappa-1})$ κλπ.

Τύποι τέτοιων προσεγγίσεων υπάρχουν φυσικά άφθονοι και η ακριβής μορφή τους προσδιορίζεται από τις δυνατότητες αποθήκευσης προγενέστερων υπολογισμών.

Παραδείγματα εξωτερικών παρεμβολών είναι:

- 2ου βαθμού: $f(y_{\kappa+\rho/2}) \cong \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2} \{\alpha_1 f(y_{\kappa})+\alpha_2 f(y_{\kappa-1})\}$

- 3ου βαθμού: $f(y_{\kappa+\rho/2}) \cong \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \{\alpha_1 f(y_{\kappa})+\alpha_2 f(y_{\kappa-1})+\alpha_3 f(y_{\kappa-2})$

Οι σταθερές α_1, α_2, α_3 κλπ. επιλέγονται εμπειρικά από τον χρήστη.

Παράδειγμα: Για $\alpha_1=3$, $\alpha_2=-1$ η διακριτή προσομοίωση Adams-Bashforth 2ου βαθμού γράφεται:

$$f(y_{\kappa+\rho/2}) \approx \frac{1}{3-1}\{3f(y_\kappa) - f(y_{\kappa-1})\}$$

και κατά συνέπεια:

$$\boxed{y_{\kappa+1} = y_\kappa + \frac{\rho}{2} * \{3f(y_\kappa) - f(y_{\kappa-1})\}} \qquad (6)$$

Θέτοντας $\alpha_1=23$, $\alpha_2=-16$, $\alpha_3=5$ και παρατηρώντας ότι $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=12$ μπορούμε να πάρουμε τη διακριτή προσομοίωση Adams Bashforth 3ου βαθμού:

$$\boxed{y_{\kappa+1} = y_\kappa + \frac{\rho}{12} * \{23f(y_\kappa) - 16f(y_{\kappa-1}) + 5f(y_{\kappa-2})\}} \qquad (7)$$

Είναι αυτονόητο ότι όσο αυξάνεται ο βαθμός της παρεμβολής, βελτιώνεται <u>ίσως</u> η ακρίβεια της προσέγγισης αλλά αυξάνονται οι απαιτήσεις <u>αποθήκευσης</u> των αποτελεσμάτων των προηγούμενων βημάτων.

Όποτε εφαρμόζεται Adams-Bashforth θα πρέπει να γίνεται κάποια προκαταρκτική διερεύνηση για την επιλογή των συντελεστών $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ και ίσως χρειάζεται αναπροσαρμογή του βήματος προσομοίωσης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α:
ΜΕΘΟΔΟΙ MONTE-CARLO

Οι στοχαστικές προσομοιώσεις αποτελούν στην ουσία μία προσπάθεια εκτίμησης ενός μεγέθους, για ένα φαινόμενο του οποίου γνωρίζουμε την κατανομή. Έτσι για παράδειγμα, γνωρίζοντας την κατανομή του χρόνου παραμονής στην ουρά ενός συστήματος εξυπηρέτησης, κατασκευάζουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης για τον μέσο χρόνο. Αν ένα φαινόμενο ακολουθεί διωνυμική κατανομή με πιθανότητα p, τότε μπορούμε να το προσομοιώσουμε n φορές να μετρήσουμε πόσες φορές (φ) παρατηρείται το φαινόμενο και να πάρουμε έτσι μιά εκτίμηση $\hat{p}=\varphi/n$ για την άγνωστη πιθανότητα, κλπ.

Η μέθοδος αυτή μπορεί να επεκταθεί και για την κατά προσέγγιση μέτρηση μεγεθών, που καμμιά σχέση δεν έχουν με τυχαία φαινόμενα. Απλώς θεωρούμε κάποιο τυχαίο φαινόμενο, η πιθανότητα του οποίου σχετίζεται με το προς το μέτρηση μέγεθος, και με διαδικασία προσομοίωσης βρίσκουμε μιά εκτίμηση για την πιθανότητα και κατά συνέπεια και μία εκτίμηση για το άγνωστο μέγεθος.

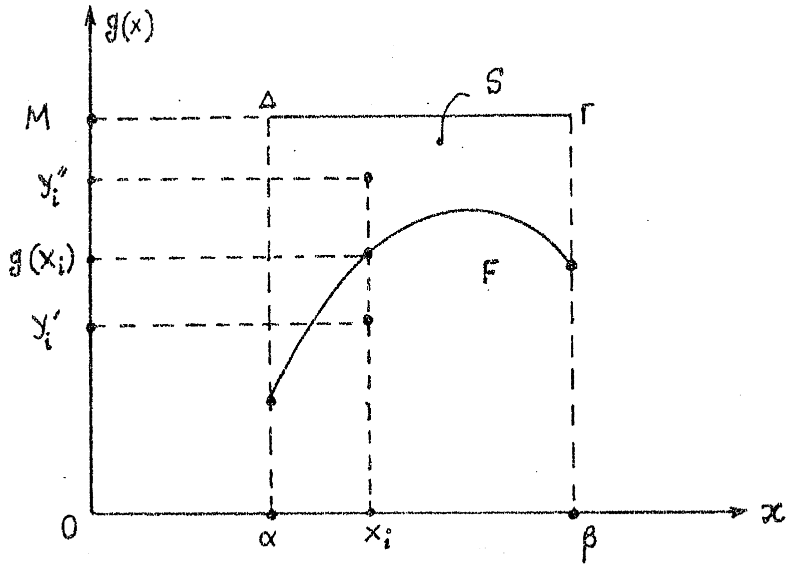
Επειδή οι προσεγγιστικές αυτές μέθοδοι βασίζονται στην παραγωγή <u>τυχαίων</u> δειγματοληψιών, ονομάζονται μέθοδοι Monte-Carlo από το ομώνυμο καζίνο τυχερών παιχνιδιών.

1. Monte-Carlo ολοκλήρωση θετικών συναρτήσεων.

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση g(x) στο διάστημα $\alpha \le x \le \beta$ με $g(x) \ge 0$, όπως στο Σχήμα A1. Θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$F = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

χωρίς να χρησιμοποιήσουμε αναλυτικές μεθόδους.



Σχήμα Α1: Θετική Συνάρτηση.

Έστω Μ ένας επαρκώς μεγάλος αριθμός έτσι ώστε $M>g(x)$ για κάθε x του διαστήματος [α, β] και S η επιφάνεια του ορθογωνίου (α β Γ Δ), δηλαδή:

$$S = M \cdot (\beta-\alpha)$$

Αν υποθέσουμε τώρα ότι θεωρούμε ένα ζεύγος τυχαίων και μεταξύ τους ανεξάρτητων αριθμών (x_i, y_i) μέσα στο ορθογώνιο S, τότε η πιθανότητα να βρίσκονται κάτω της καμπύλης $g(x)$ είναι προφανώς (γιατί;)

$$p = F/S$$

Άρα η άγνωστη επιφάνεια: $F = pS = pM(\beta-\alpha)$.
Μένει λοιπόν να εκτιμήσουμε την πιθανότητα p. Αν επαναλάβουμε n φορές τον προσδιορισμό των συντεταγμένων (x_i, y_i) και φ φορές το αντίστοιχο σημείο βρεθεί "κάτω" της καμπύλης, τότε προφανώς η εκτίμηση της p είναι $x=\varphi/n$ και συνεπώς:

$$\hat{F} = \frac{\varphi}{n} M(\beta-\alpha)$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η διαδικασία εύρεσης αν το σημείο (x_i, y_i) βρίσκεται κάτω της $g(x)$ ομοιάζει με την ρίψη βέλους στην επιφάνεια S και "επιτυχή σκόπευση" του ολοκληρώματος F. Η σκόπευση κρίνεται με τον έλεγχο της ανισότητας:

$f(x_i) < y_i \implies$ Σημείο (x_i, y_i) ΕΚΤΟΣ

$f(x_i) \geq y_i \implies$ Σημείο (x_i, y_i) ΕΝΤΟΣ

Ένα πρόγραμμα ολοκλήρωσης Monte-Carlo περιλαμβάνει τα εξής βήματα:

1. Εισαγωγή συνάρτησης $g(x)$ και διαστήματος $[\alpha, \beta]$.
2. Καθορισμός ενός M, έτσι ώστε $M>g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$

Επί n φορές επανάληψη των βημάτων:

3. Λήψη 2 τυχαίων u_1, u_2 της ομοιόμορφης κατανομής $U(0,1)$
   $x = \alpha+(\beta-\alpha)u_1$
   $y = M \cdot u_2$
4. Υπολογισμός του $g(x)$.
   Αν $g(x)<y$, επιστροφή στο βήμα 3.
   Αν $g(x)>y \implies \varphi = \varphi+1$, επιστροφή στο βήμα 3.
5. Εκτίμηση ολοκληρώματος: $\hat{F} = \frac{\varphi}{n} M(\beta-\alpha)$.

Η εκτίμηση του διαστήματος εμπιστοσύνης $[F_1, F_2]$ με πιθανότητα δ%, έτσι ώστε:

$$P\{ F_1 \leqq F \leqq F_2 \} \geqq 1-\delta$$

μπορεί να υπολογιστεί με την βοήθεια της ανισότητα του Cheby hev (Τσέμπυσεφ) που λέει ότι για οποιαδήποτε κατανομή (μ, σ^2) και οποιαδήποτε θετική σταθερά $\varepsilon>0$ ισχύει:

$$p\{| x-\mu | > \varepsilon\} \leqq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

ή ισοδύναμα:

$$P\{\ |x-\mu| \leq \varepsilon\ \} > 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Ας θέσουμε: $\delta = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \Longrightarrow \varepsilon = \sigma/\sqrt{\delta}$

΄Εχουμε: $|x-\mu| < \varepsilon \iff x-\varepsilon < \mu < x+\varepsilon \iff$

$$x - \frac{\sigma}{\sqrt{\delta}} \leq \mu \leq x + \frac{\sigma}{\sqrt{\delta}}, \quad \text{όπου} \quad x = \frac{\varphi}{n}$$

Επειδή αγνοούμε την διακύμανση σ, θα πρέπει ή να επαναλάβουμε την Monte-Carlo K φορές και να υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση S αντί της σ, ή να χρησιμοποιήσουμε την προσεγγιστική έκφραση για την διακύμανση της διωνυμικής κατανομής:

$$\sigma^2 \approx \frac{\varphi}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{\varphi}{n}\right)$$

και να αρκεστούμε σε μία μόνο εκτέλεση του πειράματος.

Τα άκρα του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι προφανώς:

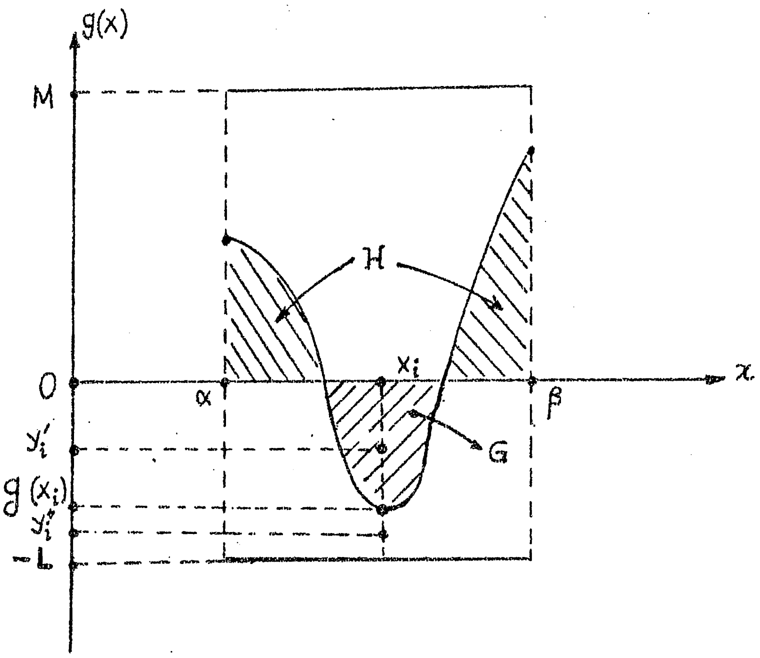
$$F_1 = \left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{\delta}}\right).M.(\beta-\alpha)$$

$$F_2 = \left(\bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{\delta}}\right).M.(\beta-\alpha)$$

2. Monte-Carlo ολοκλήρωση γενικών συναρτήσεων

΄Εστω τώρα ότι η συνάρτηση g(x) μπορεί να παίρνει και αρνητικές τιμές στο διάστημα [α, β] , όπως δείχνει το Σχήμα Α2. Αν καλέσουμε H τα μέρη της επιφάνειας άνω του άξονα και G την επιφάνεια κάτω του άξονα, είναι προφανές ότι το συνολικό εμβαδόν F=H-G, επειδή η κάτω του άξονα επιφάνεια προσμετράται αρνητικά.

Για τον υπολογισμό του G θα πρέπει να θεωρήσουμε έναν αριθμό (-L) επαρκώς αρνητικό ώστε να έχουμε $-L \leq g(x)$ για κάθε σημείο του διαστήματος.



Σχήμα Α2: Συνάρτηση γενικής μορφής.

Σε κάθε τυχαία τετμημένη $x_i \in [\alpha,\beta]$ θα αντιστοιχούμε μία τυχαία τεταγμένη στο διάστημα $(-L,M)$ ως εξής:

$$y_i = -L + (M+L)u_2$$

- Αν $y_i \geq 0$ τότε χρησιμοποιούμε το ζεύγος (x_i, y_i) για την εκτίμηση της άνω επιφάνειας (Η), όπως στην προηγούμενη περίπτωση.

- Αν $y_i < 0$ τότε ελέγχουμε αν η σκόπευση είναι εντός της G ως εξής:

ΕΑΝ $g(x_i) \leq y_i$ ΕΝΤΟΣ

ΕΑΝ $g(x_i) > y_i$ ΕΚΤΟΣ

(Προσέξτε ότι οι ανισότητες έχουν τώρα αντιστραφεί επειδή συγκρίνουμε αρνητικούς αριθμούς).

Έστω ότι πραγματοποιούμε συνολικά N ρίψεις από τις οποίες:

n ρίψεις στο πάνω ορθογώνιο ($y>0$)

φ ρίψεις εντός της επιφάνειας H

m ρίψεις στο κάτω ορθογώνιο ($y<0$)

ψ ρίψεις εντός της κάτω επιφάνειας G

τότε οι εκτιμήσεις των άνω και κάτω επιφανειών αντίστοιχα θα είναι:

$$\hat{H} = \frac{\varphi}{n} M\ (\beta-\alpha)$$

$$\hat{G} = \frac{\psi}{m} L\ (\beta-\alpha)$$

και συνεπώς:

$$\hat{F} = \hat{H} - \hat{G}$$

Η μέθοδος αυτή έχει το μειονέκτημα ότι χρησιμοποιεί διαφορετικές (n και m) ρίψεις για την άνω και κάτω επιφάνεια. Για να αποφύγει αυτό ο χρήστης θα μπορούσε να παράγει ένα $y>0$ και ένα $y<0$ για κάθε τετμημένη x.

Ένα πρόβλημα που συχνά παρουσιάζεται στις ολοκληρώσεις Monte-Carlo είναι η δυσκολία να βρούμε τους κατάλληλους αριθμούς M και L για τα άνω και κάτω όρια της περιοχής. Αν κανείς θεωρήσει πολύ μεγάλους αριθμούς για να είναι σίγουρος ότι δεν θα τους υπερβεί καμμία τιμή $g(x)$, τότε η εκτίμηση $x=\varphi/n$ γίνεται πολύ πτωχή και θα πρέπει να αυξήσουμε πολύ τον αριθμό των ρίψεων (n).

Μιά εύκολη διέξοδος σ'αυτό το πρόβλημα είναι να αρχίσουμε με ένα "λογικό" M και σε κάθε σκόπευση της επιφάνειας $g(x_i)>y_i$ να ελέγχουμε και αν $g(x_i)>M$.

Στην περίπτωση αυτή σημαίνει ότι το M δεν είναι άνω φράγμα της συνάρτησης. Θα πρέπει τότε να αναπροσαρμόζουμε το $M=(1+\vartheta).g(x_i)$, όπου ϑ ένα ποσοστό 10-20% και να ακυρώνουμε την συγκεκριμένη ρίψη.

Οι προηγούμενες ρίψεις μπορούν να παραμείνουν ως έχουν, αν και αυτό εισάγει μία ελαφρά μεροληψία στην εκτίμηση (γιατί;).

Στην τελική εκτίμηση θα χρησιμοποιηθεί φυσικά η τελευταία τιμή του Μ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. G. GORDON, System Simulation, Prentice-Hall, 1978.
Κλασσικό βιβλίο προσομοίωσης συστημάτων διακριτών γεγονότων.

2. A. LAW, και W.D. KELTON, Simulation Modelling and Analysis, McGrawHill, 1982, pp.400.
Εκτεταμένο και αναλυτικό βιβλίο για Προσομοίωση συστημάτων διακριτών γεγονότων, όπως και δυναμικών συστημάτων. Περιέχει περιγραφές πολλών Γλωσσών Προσομοίωσης όπως SIMLIB, SIMSCRIPT, GPSS και SLAM.

3. J. R. LEIGH, Modelling and Simulation, IEE Edition, 1983, pp.95.
Περιέχει βασικές μεθόδους αριθμητικής προσομοίωσης,καθώς και μεθόδους εκτίμησης και αναγνώρισης παραμέτρων.

4. D.H. MEADOWS και J.M. ROBINSON, The Electronic Oracle: Computer Models and Social Decisions, Wiley, 1985,pp 444.
Αν και αναφέρεται κυρίως στην χρήση της Γλώσσας DYNAMO,περιέχει πολλές ενδιαφέρουσες εφαρμογές και μιά εκτεταμένη ανασκόπηση των διαφόρων προσεγγίσεων στην κατασκευή υποδειγμάτων.

5. I. MITRANI: Simulation Techniques for Discrete Event Systems, Cambridge University Press, 1982, pp 185.
Το βιβλίο αυτό είναι πάρα πολύ ενημερωμένο σε μεθόδους προσομοίωσης διακριτών γεγονότων. Οι Σημειώσεις έχουν σε μεγάλο βαθμό στηριχθεί στην μεθοδολογία και την προσέγγιση που χρησιμοποιεί.

6. A. PRITSKER, Introduction to Simulation and SLAM II, Wiley, 1984, pp.612.
Εκτεταμένη ανάλυση των μεθόδων προσομοίωσης, και περιγραφή της Γλώσσας SLAM.

7. N. ROBERTS, D. ANDERSON, R. DEAL, M. GARET, W. SHAFFER, Introduction to Computer Simulation, 1983, pp. 562.
Αναφέρεται σε προσομοιώσεις συστημάτων συνεχούς χρόνου, και περιγράφει την Γλώσσα DYNAMO. Περιέχει πολλά ενδιαφέροντα παραδείγματα εφαρμογής προσομοίωσης.

8. T. SHRIBER, Simulation Using GPSS, Wiley, 1974, pp. 534.
Το βιβλίο περιέχει τις βασικές μεθόδους προσομοίωσης, αλλά είναι γραμμένο κυρίως για τους χρήστες της Γλώσσας GPSS.

9. PAPOULIS A., Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGrawHill, 1965, pp 583.
Κλασσικό βιβλίο πιθανοτήτων και στοχαστικού λογισμού, απαραίτητο για όποιον θέλει να ασχοληθεί σοβαρά με την μελέτη των στοχαστικών συστημάτων.

10. VATTER P., BRADLEY S., FREY S., JACKSON B., 1978, Quantitative Methods in Management, IRWIN Inc.,
Περιέχει πολλές ενδιαφέρουσες εφαρμογές Προσομοίωσης στη λήψη Αποφάσεων σε Επιχειρήσεις. Δίνει έτσι μία εικόνα των μεγάλων δυνατοτήτων που έχουν τα συστήματα Προσομοίωσης στην αντιμετώπιση πολύπλοκων πραγματικών προβλημάτων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

1. Με προσομοίωση Monte-Carlo να βρεθεί το ολοκλήρωμα των εξής συναρτήσεων:

   α) $f(x) = 5x^2 + 4$ στο διάστημα $[2,5]$

   β) $f(x) = 5x\cos^2 x + 6\log(\sin^2 x) + 12\cos(x^2+1)$ στο διάστημα $[1,3]$.

   Να υπολογιστούν τα διαστήματα εμπιστοσύνης και να συγκριθούν (στην πρώτη περίπτωση) με την ακριβή τιμή.

2. Να κατασκευαστούν προγράμματα που θα παράγουν τις εξής βασικές κατηγορίες τυχαιων δειγματοληψιών:

   (1) Ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,1)$.
   Να χρησιμοποιηθεί κατά προτίμηση η προσθετική αναδρομική μέθοδος υπολοίπου.

   (2) Ομοιόμορφη κατανομή σε τυχόν διάστημα (α,β).

   (3) Εκθετική κατανομή με ρυθμό λ, (δηλαδή μέσο $\frac{1}{\lambda}$).

   (4) Κανονική κατανομή $N(0,1)$
   και
   Κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma)$
   για οποιεσδήποτε τιμέςτων μ και σ $(\sigma>0)$.

   Τα προγράμματα θα πρέπει να είναι εύχρηστα και να απαιτούν από τον χρήστη τις παραμέτρους της κατανομής (δηλ. τα α, β, λ, μ, σ κατά περίσταση) και προαιρετικά τον σπόρο με τον οποίο ξεκινά η παραγωγή των τυχαίων στο $(0,1)$.

3. Να κατασκευαστούν τυχαίες δειγματοληψίες των εξής κατανομών:

   α) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq 0.25 \\ 3/7, & 0.25 \leq x<2 \end{cases}$

   β) $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{αν } 1<x<\infty \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

γ) $f(x) = \begin{cases} 0.25 + \alpha\,(x-1) & 1 \leq x \leq 2 \\ 0.25 - \alpha\,(x-3) & 2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

δ) Διακριτή κατανομή της ακέραιας μεταβλητής x με τις αντίστοιχες φορές που παρατηρήθηκε στην συγκεκριμένη τιμή:

x_i	N_i
1	72
2	85
3	44
4	23
5	2

4. Το ύψος x ημερήσιας παραγωγής μιάς εταιρείας ακολουθεί κανονική κατανομή με $\mu=6.000$ και $\sigma^2=40.000$. Ένα ποσοστό p της παραγωγής καταστρέφεται (scrap) και έτσι η καθαρή παραγωγή είναι $y=x-px$. Αν το ποσοστό p ακολουθεί κατανομή

$$g(p) = 99(1-p)^{98}$$

να σχεδιαστεί τρόπος παραγωγής μιάς στοχαστικής δειγματοληψίας της απομένουσας ημερήσιας παραγωγής y.

5. Δεδομένης της σχέσης που υπάρχει μεταξύ της εκθετικής κατανομής των διαστημάτων διαδοχικών αφίξεων και της διαδικασίας Poisson που περιγράφει τον αριθμό των αφίξεων σε μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο να γράψετε ένα απλό πρόγραμμα γεννήτριας Poisson χρησιμοποιώντας ψευδοτυχαίους στο διάστημα (0,1).

6. Ας υποθέσουμε ότι έγιναν 10 προσομοιώσεις με ανεξάρτητες σειρές τυχαίων αριθμών και έδωσαν τις εξής μετρήσεις για την μεταβλητή Y:

262 323 317 238 286 240 289 285 311 260

Να κατασκευαστεί ένα διάστημα εμπιστοσύνης 95%.

Πραγματοποιούμε τώρα άλλες 10 προσομοιώσεις χρησιμοποιώντας τις <u>αντιθετικές</u> σειρές των προηγούμενων και παιρνουμε τις εξής μετρήσεις:

311	280	256	323	273	325	292	300	264	309

<u>Ζητούνται:</u> α) Ελέγξτε αν όντως είναι αντιθετικές προσομοιώσεις.

β) Βρείτε το νέο διάστημα εμπιστοσύνης 95%.

γ) Αξίζει τον κόπο η πραγματοποίηση των αντιθετικών προσομοιώσεων;

7. Έστω ότι διαθέτουμε έναδείγμα ομοιόμορφης κατανομής στο διάστημα (1, β) όπου β είναι μία παράμετρος που μπορούμε να επιλέξουμε κατά βούληση. Θέλουμε ναδημιουργήσουμε μία τυχαία δειγματοληψία κανονικής κατανομής Ν(μ, σ) όπου μ και σ είναι δεδομένα. Για τον σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση:

$$x = \sum_{i=1}^{n} u_i - \psi$$

όπου n είναι ένας μεγάλος αριθμός (n>30) και ψ άγνωστη σταθερά. Ζητούνται να προσδιοριστούν τα ψ και β ώστε να παιρνουμε <u>κατ' ευθείαν</u> χωρίς άλλους μετασχηματισμούς την Ν(μ, σ).

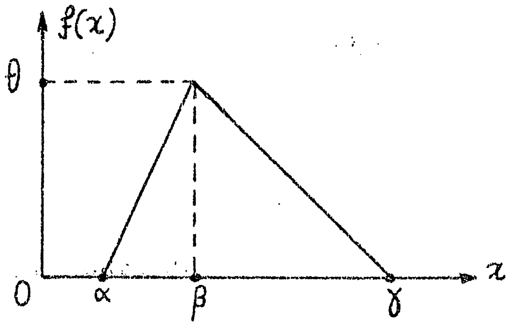
8. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να προσομοιώσουμε την κίνηση επιβατών σε ένα τρένο 2 θέσεων που συνδέει 3 πόλεις Α, Β, Γ προκειμένου να καθορίσουμε τον αριθμό των βαγονιών που θα διατεθούν και τον αριθμό των δρομολογίων. Μπορείτε να περιγράψετε <u>ΣΥΝΤΟΜΑ</u> πώς θα καταστρώσετε το πρόγραμμα (διάγραμμα ροής) και τί πληροφορίες θα απαιτήσετε να έχετε;

9. Σας δίνουν 6 αποτελέσματα προσομοιώσεων του ίδιου συστήματος: X_i= 45 49 51 50 46 44.
Υπάρχει μία υποψία ότι τα 3 πρώτα είναι συσχετισμένα με τα 3

δεύτερα (X_4, X_5, X_6).

Πώς μπορείτε να προχωρήσετε στον προσδιορισμό του διαστήματος εμπιστοσύνης 95% για την προσδοκώμενη τιμή του X;

10. Δοθέντων των (α, β, γ) να βρεθεί τρόπος προσδιορισμού του θ και παραγωγής τυχαίας δειγματοληψίας με πυκνότητα f(x) από την U(0,1).



11. Θεωρείστε το σύστημα $x_{t+1} = \alpha x_t + \beta u_t$ με $\alpha=0.80$ ή $\alpha=1.20$ Παρατηρείστε γραφικά την συμπεριφορά του x_t για $t=0,1,\ldots,5$ για τις περιπτώσεις:

$u_t = \{1, 0, 0, 0, \ldots\}$ (κρουστική απόκριση)

$u_t = \{1, 1, 1, 1, \ldots\}$ (βηματική απόκριση)

12. Ποιές είναι οι τιμές ισορροπίας του x_t όταν $t \to \infty$ (Αυτές, όταν υπάρχουν, καλούνται τιμές σταθερής καταστάσεως).

13. Θεωρείστε το σύστημα:

$$x_1(t+1) = 0.2x_1(t) + 1.3x_2(t) + 0.4u_1(t)$$

$$x_2(t+1) = -0.6x_1(t) + 1.1x_2(t) - 1.60u_2(t)$$

Να μελετηθεί η ευστάθεια του συστήματος.

14. Να υπολογίσετε τις διακριτές προσομοιώσεις των εξής συστημάτων διαφορικών εξισώσεων:

(I) $\frac{dy}{dt} = -2y$, $y_0=1$

(II) $\frac{dy_1}{dt} = -2y_1 + y_2$, $y_1(0)=2$

$\frac{dy_2}{dt} = y_1 - 2y_2$, $y_2(0)=0$.

Να βρεθεί το απαιτούμενο βήμα για εφαρμογή της απλής μεθόδου Euler.

15. Για την διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dt} = \alpha y$ να βρεθεί η συνθήκη ευστάθειας διακριτών προσομοιώσεων στην ανάστροφη μέθοδο Euler και στην τραπεζοειδή μέθοδο.

16. Να υπολογίσετε τις αποκρίσεις του συστήματος διαφορικών εξισωσεων:

$$\frac{dy_1}{dt} = -3y_1 + y_2 + u_1 - 2u_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1 - 2y_2 + 2u_1$$

για τις εξής περιπτώσεις εξωγενών μεταβλητών:

α) $u_1 = \{1, 1, 1, \ldots\}$ $u_2 = \{0, 0, \ldots\}$

β) $u_1 = \{0, 0, 0, ,,,\}$ $u_2 = \{1, 1, 1, 1, \ldots\}$

γ) $u_1 = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\}$

$u_2 = \{-1, -1, -1, -1, \ldots\}$

Αρχικές τιμές $y_1(0) = y_2(0) = 0$.

- Σε κάθε περίπτωση να βρείτε <u>αναλυτικά</u> τιμές σταθερής κατα στάσεως (αν υπάρχουν) και να τις συγκρίνετε με τα αποτελέσματα της προσομοίωσης.

- Επειδή το σύστημα είναι γραμμικό, μπορείτε να υπολογίσετε τις τιμές σταθερής καταστάσεως στην (γ) περίπτωση χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα στις (α) και (β);

17. Να εφαρμόσετε την μέθοδο της διακριτής προσομοίωσης για να λύσετε προσεγγιστικά το εξής μικτό σύστημα διαφορικών εξισώσεων και εξισώσεων διαφορών:

$$x_{t+1} = 0.80x_t + 0.50y_t + u_1$$

$$\frac{dy}{dt} = -2y_t + x_t + u_2$$

με τις εξωγενείς μεταβλητές u_1, u_2 να μεταβάλλονται ως εξής:

$$u_1 = \{1, 1, 1, \ldots, 1\}$$

$$u_2 = 2e^{-t/2}$$

18. Να λύσετε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων της άσκησης 14 με άλλες 2 διαφορετικές μεθόδους της επιλογής σας και να συγκρίνετε την ακρίβεια της λύσης, τον χρόνο υπολογισμού και το βήμα που χρησιμοποιήσατε.

19. Να προσομοιώσετε την διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta x^2, \quad \text{με} \quad x_0=1, \quad \alpha=2, \quad \beta=0{,}50$$

(Αυτή είναι η εξίσωση της περίφημης καμπύλης S).

20. Να προσομοιώσετε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy, \quad \alpha=4, \quad \beta=1, \quad x_0=0{,}80$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy, \quad \gamma=6, \quad \delta=2, \quad y_0=1.20$$