Κεφάλαιο Συνόλων

1. Για κάθε σύνολο *A*, *B*, *C* να αποδειχθεί ότι

   A) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
   B) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
   C) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
   D) $(A' \cup B)' = A \cap B'$
   E) $\big((A \cap B') \cup C\big)' = (A' \cap C') \cup (B \cap C')$

2. Βρείτε τα σύνολα

   A) $P(\{a, b, c, d\})$

   B) $P(P(\{3\}))$

3. Για κάθε σύνολο *A*, *B*, να αποδειχθεί ότι (Φεβρουάριος 2013)

   A) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

   B) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

4. Έστω *A*, *B* σύνολα. Ποιο θα είναι το σύνολο $P(A) \cap P(B - A)$?

Κεφάλαιο Σχέσεων

1. Προσδιορίστε αν η διμελής σχέση που δίνεται είναι αυτοπαθής, συμμετρική, μεταβατική ή τίποτα από αυτά.

   A) Η *C* είναι σχέση του κύκλου στο σύνολο των πραγματικών αριθμών: Για κάθε $x, y \in \mathcal{R}, xCy \leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

   B) Η *O* είναι η διμελής σχέση που ορίζεται στο $\mathbb{Z}$ ως εξής: Για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}, mOn \leftrightarrow m - n$ περιττός.

   C) Η *D* είναι η διμελής σχέση "διαιρεί" που ορίζεται στο $\mathbb{Z}$: Για κάθε ακέραιο $m, n, mDn \leftrightarrow m|n$.

D) Η A είναι η διμελής σχέση "απόλυτη τιμή" που ορίζεται στο $\mathcal{R}$: Για κάθε πραγματικό αριθμό x και y, $xAy \leftrightarrow |x| = |y|$

2. Υποθέτουμε ότι R και S είναι διμελείς σχέσεις στο σύνολο A. Εάν οι R, S είναι σχέσεις ισοδυναμίας, ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς;

A) Η $R \cap S$ είναι σχέση ισοδυναμίας; (Ιούλιος 2007)

B) Η $R \cup S$ είναι σχέση ισοδυναμίας;

3. Μια σχέση R, που ορίζεται σε κάποιο σύνολο, ονομάζεται κυκλική όταν ισχύει το εξής: εάν aRb και bRc τότε cRa. Να αποδειχθεί ότι μια σχέση είναι αυτοπάθης και κυκλική εάν και μόνο εάν είναι σχέση ισοδυναμίας. (Σεπτέμβριος 2012)

4. Ορίζουμε την σχέση R στο σύνολο των ακέραιων $\mathbb{Z}$ ως εξής: $(a, b) \in R$ εάν και μόνο εάν $a^2 - b^2 = 3k$ για $k \in \mathbb{Z}$. Είναι η R σχέση ισοδυναμίας; (Φεβρουάριος 2011)

5. Ορίζουμε την σχέση $\equiv_5$ στο σύνολο των ακέραιων $\mathbb{Z}$, ως εξής: $(a, b) \in \equiv_5$ εάν και μόνο εάν η διαφορά $a - b$ είναι πολλαπλάσιο του 5, δηλαδή εάν $a - b = 5k$ για $k \in \mathbb{Z}$.

A) Να αποδειχθεί ότι $\equiv_5$ είναι σχέση ισοδυναμίας.
B) Να βρεθεί το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας στοιχείων του $\mathbb{Z}$ ως προς την $\equiv_5$. (Σεπτέμβριος 2010)

6. Έστω σχέση R στο σύνολο A, η οποία είναι αυτοπαθής, συμμετρική, αντισυμμετρική και μεταβατική. Τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τα στοιχεία της R; (Φεβρουάριος 2013)

7. Έστω σχέση R στο σύνολο των θετικών ρητών αριθμών, η οποία ορίζεται ως εξής: $\left(\frac{\alpha}{b}\right) R \left(\frac{c}{d}\right) \leftrightarrow a * d \leq b * c$. Να αποδειχθεί ότι η R είναι σχέση ολικής διάταξης.

8. Για την σχέση μερικής διάταξης, της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα να βρεθούν:

   Α) Τα σχετικά μέγιστα στοιχεία.

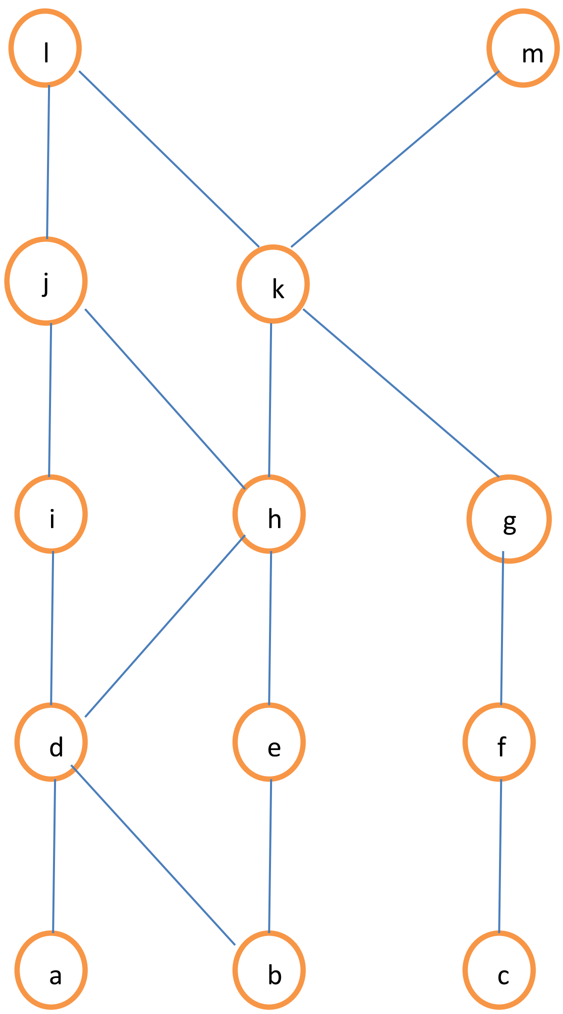
   Β) Τα σχετικά ελάχιστα στοιχεία.

   Γ) Υπάρχει μέγιστο στοιχείο;

   Δ) Υπάρχει ελάχιστο στοιχείο;

   Ε) Να βρεθούν τα πάνω φράγματα του συνόλου $\{\alpha, b, c\}$

   ΣΤ) Να βρεθούν τα κάτω φράγματα του συνόλου $\{f, g, h\}$



Κεφάλαιο Συναρτήσεων

1. Για κάθε συνάρτηση $f: X \xrightarrow[1-1\ και\ επί]{} Y$, να αποδειχθεί ότι $f^{-1}: Y \xrightarrow[1-1\ και\ επί]{} X$.

2. Να δωθεί παράδειγμα συνάρτησης $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, η οποία είναι:

   A) 1-1 αλλά όχι “επί”.

   B) “επί” αλλά όχι 1-1.

3. Έστω f, g, h συναρτήσεις από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{N}$ με τύπο $f(n) = n + 1,\ g(n) = 2 * n, h(n) = \begin{cases} 0,\ όταν\ n\ άρτιος \\ 1, διαφορετικά \end{cases}$. Να βρεθούν οι τύποι των συναρτήσεων $fog, gof, goh, hog, (fog)oh$.

Κεφάλαιο Επαγωγής

1. Να αποδειχθούν οι παρακάτω προτάσεις χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή:

   A) Για όλους τους ακέραιους $n \geq 1, 2 + 4 + 6 + \cdots + 2 * n = n^2 + n$.

   B) Για κάθε σύνολο A με n στοιχεία, $|P(A)| = 2^n$.

2. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να αποδειχθεί ότι: Για όλους τους ακέραιους $n \geq 1$, ο $5^n - 1$ διαιρείται με το 4.

Κεφάλαιο Ισοδυναμίας

1. Έστω ότι $3\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z} | n = 3 * k, για\ κάποιο\ ακέραιο\ k\}$. Αποδείξτε ότι τα $\mathbb{Z}$ και $3\mathbb{Z}$ είναι ισοδύνα σύνολα.

2. Θεωρούμε τα σύνολα $S = \{x \in \mathcal{R} | 0 < x < 1\}$ και $T = \{x \in \mathcal{R} | a < x < b\}$. Είναι τα S και T ισοδύναμα σύνολα; (Σεπτέμβριος 2013)

3. Είναι το σύνολο $3\mathbb{Z}$ αριθμήσιμο σύνολο;

4. Έστω ότι το Π είναι το σύνολο όλων των περιττών ακέραιων και $2\mathbb{Z}$ το σύνολο όλων των άρτιων ακέραιων. Να αποδειχθεί ότι το Π και το $2\mathbb{Z}$ είναι ισοδύναμα σύνολα.