ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΘΗΝΩΝ

ATHENS UNIVERSITY
OF ECONOMICS
AND BUSINESS

Μ. Μυτιληναίος - Π. Κατερίνης

ΔΙΑΚΡΙΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΘΗΝΑ 2015

Περιεχόμενα

Μέρος Ι

Εισαγωγή

Μια διαδικασία λέγεται *διακριτή* αν μπορεί να πραγματοποιηθεί βήμα-προς-βήμα. Παραδείγματος χάρη, το να ακολουθήσουμε μια συνταγή, το να πολλαπλασιάσουμε δύο τριψήφιους αριθμούς, και το να λύσουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση είναι διακριτές διαδικασίες.
Διακριτά μαθηματικά είναι τα μαθηματικά που χρησιμοποιούμε για να αναλύσουμε διακριτές διαδικασίες.

Για να αναλύσουμε "συνεχείς" διαδικασίες όπως την κίνηση μιας μπάλλας που ρίξαμε ή την κίνηση ενός ηλεκτρονίου σ' ένα σύρμα, χρησιμοποιούμε "συνεχή μαθηματικά" (όπως απειροστικό λογισμό) αντί διακριτά μαθηματικά. Επειδή όμως οι υπολογιστές πραγματοποιούν διαδικασίες βήμα-προς-βήμα, τα διακριτά μαθηματικά έχουν γίνει ένα σημαντικό εργαλείο στην επιστήμη των υπολογιστών.

Οπως γνωρίζουμε μια λίστα από βήμα-προς-βήμα οδηγίες γιά την πραγματοποίηση μιας διαδικασίας λέγεται *αλγόριθμος*. Αρα τα διακριτά μαθηματικά χρησιμοποιούνται γιά την ανάλυση των αλγορίθμων.

Κεφάλαιο 1

Αναδρομικές Σχέσεις ή Εξισώσεις Διαφορών.

1.1. Γενικά.

Με $\mathbb{N}$ και $\mathbb{R}$ συμβολίζουμε τα σύνολα των φυσικών και πραγματικών αριθμών αντίστοιχα. Μια μονοσήμαντη αντιστοιχία από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$ ονομάζεται *πραγματική ακολουθία*. Δηλαδή κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ λέγεται ακολουθία πραγματικών αριθμών. Συνήθως μια ακολουθία $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ συμβολίζεται a_n, $n \in \mathbb{N}$ ή $a_0, a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots$ αντί $a(0), a(1), a(2), \cdots, a(n), \cdots$.

Παραδείγματος χάρη έχουμε την ακολουθία $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$, επίσης την ακολουθία $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$.

Τις περισσότερες φορές, μια ακολουθία δίνεται από μια γενική αλγεβρική έκφραση γιά τον n-οστό της όρο a_n, δηλαδή γιά τις παραπάνω ακολουθίες έχουμε $a_n = \frac{1}{n}$, $n > 0$ και $\beta_n = \frac{1}{2^n}$, $n \geq 0$.

Παρατηρούμε όμως ότι κάθε όρος της ακολουθίας β_n, $n \in \mathbb{N}$ είναι το μισό του προηγουμένου του, δηλαδή η τιμή του β_n είναι $\frac{1}{2}$ επί την τιμή του β_{n-1} γιά όλα τα n. Επομένως $\beta_n = \frac{1}{2}\beta_{n-1}$ γιά κάθε $n \geq 1$ με $\beta_0 = 1$.

Για μια ακολουθία a_n, $n \in \mathbb{N}$ μια εξίσωση που συσχετίζει τον n-οστό όρο της a_n με μερικούς από τους προηγούμενούς του στην ακολουθία, γιά οποιοδήποτε n, λέγεται μια *αναδρομική σχέση* ή μια *εξίσωση διαφορών*. Αρα στο παραπάνω παράδειγμα η εξίσωση $\beta_n = \frac{1}{2}\beta_{n-1}$ είναι μια εξίσωση διαφορών. Για να μπορέσουμε όμως να αρχίσουμε τον υπολογισμό πρέπει να γνωρίζουμε έναν ή περισσότερους όρους της ακολουθίας και στην προκειμένη περίπτωση τον $\beta_0 = 1$.

Και τώρα ένα παράδειγμα. Ο Ιταλός μαθηματικός Fibonacci (1202) έθεσε το παρακάτω πρόβλημα. Ενα ζευγάρι κουνέλια τοποθετείται σε ένα κλειστό χώρο στην αρχή ενός έτους. Κάθε μήνα το θηλυκό ενός ζευγαριού γεννάει ένα καινούργιο ζευγάρι κουνέλια διαφορετικού φύλου. Αρχίζοντας με τον δεύτερο μήνα, κάθε νέο ζευγάρι επίσης γεννάει ένα ζευγάρι κουνέλια κάθε μήνα. Βρείτε τον αριθμό των ζευγαριών μετά από ένα χρόνο.

Κατά τη διάρκεια του πρώτου μήνα το δοσμένο ζευγάρι κουνέλια θα έχει γεννήσει ένα νέο ζευγάρι, και έτσι στο τέλος του πρώτου μήνα θα υπάρχουν 2 ζευγάρια κουνέλια. Κατά την διάρκεια του δεύτερου μήνα μόνο το αρχικό ζευγάρι γεννάει ένα ζευγάρι κουνέλια, και έτσι θα υπάρχουν 3 ζευγάρια κουνέλια στο τέλος του δεύτερου μήνα. Κατά τον τρίτο μήνα και το αρχικό ζευγάρι και το ζευγάρι που γεννήθηκε τον πρώτο μήνα θα γεννήσουν, κάνοντας έτσι τον αριθμό των ζευγαριών στο τέλος του τρίτου μήνα $2 + 3 = 5$.

Για κάθε $n = 1, 2, 3, \cdots$ έστω $f(n)$ ο αριθμός των ζευγαριών στην αρχή του n–οστού μήνα. Εχουμε υπολογίσει ότι $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ και $f(4) = 5$ και θέλουμε να βρούμε το $f(13)$. Στην αρχή του n-οστού μήνα θα υπάρχουν όλα τα ζευγάρια που υπήρχαν στην αρχή του $(n-1)$-στού μήνα και επίσης όλα τα ζευγάρια που δημιουργήθηκαν στην αρχή του $(n-2)$-στού μήνα θα γεννήσουν από ένα ζευγάρι κατά τον $(n-1)$-στό μήνα. Αρα στην αρχή του n-οστού μήνα υπάρχουν $f(n-1) + f(n-2)$ ζευγάρια κουνέλια, δηλαδή

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) \text{ γιά } n = 3, 4, 5, \ldots$$

Εχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
f(5) &= f(4) + f(3) &&= 8\\
f(6) &= f(5) + f(4) &&= 13\\
f(7) &= f(6) + f(5) &&= 21\\
f(8) &= f(7) + f(6) &&= 34\\
f(9) &= f(8) + f(7) &&= 55\\
f(10) &= f(9) + f(8) &&= 89\\
f(11) &= f(10) + f(9) &&= 144\\
f(12) &= f(11) + f(10) &&= 233\\
f(13) &= f(12) + f(11) &&= 377
\end{aligned}$$

Μετά λοιπόν από ένα χρόνο θα υπάρχουν 377 ζευγάρια κουνέλια. Αν θέσουμε $f(0) = 1$, τότε $f(2) = 2 = 1 + 1 = f(1) + f(0)$. Η ακολουθία $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(n)$, $\ldots$ που ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ γιά $n = 3,4,5,\ldots$ με αρχικές τιμές $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, λέγεται η ακολουθία Fibonacci και οι όροι της λέγονται οι αριθμοί Fibonacci.

Σε πολλά διακριτά υπολογιστικά προβλήματα, είναι πολλές φορές ευκολότερο να περιγράψουμε (όπως στο παραπάνω παράδειγμα) μια ακολουθία μέσω μιας αναδρομικής σχέσης παρά να βρούμε μια γενική έκφραση γιά την τιμή της ακολουθίας στο n. Είναι φανερό ότι σύμφωνα με την αναδρομική σχέση μπορούμε να κάνουμε ένα υπολογισμό βήμα-προς-βήμα και να βρούμε το a_n από τα $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$, το a_{n+1} από τα $a_n, a_{n-1}, \ldots$ κ.τ.λ. δεδομένου ότι ένας ή κάποιοι όροι της ακολουθίας έχουν δοθεί γιά να μπορεί να ξεκινήσει ο υπολογισμός. Αυτές οι δοσμένες τιμές (οι όροι) της ακολουθίας λέγονται *οριακές συνθήκες*, ή *αρχικές συνθήκες*.

Στην ακολουθία Fibonacci οι οριακές συνθήκες είναι $f(0) = 1$ και $f(1) = 1$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι μια ακολουθία μπορεί να περιγραφεί από μια αναδρομική σχέση μαζί με ένα κατάλληλο σύνολο οριακών συνθηκών. Η ακολουθία σ'αυτή την περίπτωση λέγεται *λύση της αναδρομικής σχέσης*.

Δοσμένης μιας αναδρομικής σχέσης το σημαντικό είναι να βρούμε ένα τύπο που να μας δίνει τη λύση της αναδρομικής σχέσης, δηλαδή ένα τύπο που να μας δίνει τον n-οστό όρο της ακολουθίας-λύσης συναρτήσει του n. Δυστυχώς δεν υπάρχει γενική μέθοδος γιά την εύρεση λύσης μιας οποιασδήποτε αναδρομικής σχέσης. Θα μελετήσουμε όμως παρακάτω μια κλάση αναδρομικών σχέσεων που λέγονται γραμμικές με σταθερούς συντελεστές, γιά τις οποίες υπάρχει μέθοδος εύρεσης της λύσης τους.

1.2. Γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές.

Μια εξίσωση διαφορών του τύπου

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \cdots + c_kx_{n-k} = f(n)$$

όπου τα c_i, $i = 0,1,\ldots,k$ είναι σταθερές, λέγεται μια *γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές*. Η παραπάνω εξίσωση λέμε ότι είναι *τάξης k* ή k−τάξης εφ'όσον c_0, c_k είναι διάφορα από το μηδέν. Για να βρούμε την τάξη μιας εξίσωσης διαφορών αφαιρούμε τον μικρότερο δείκτη από τον μεγαλύτερο δείκτη.

Για παράδειγμα η τάξη της εξίσωσης διαφορών $x_n - 3x_{n-1} + 7x_{n-4} = n^2 - 2$ είναι 4, ενώ της $x_{n+2} - x_n + x_{n-1} + 2x_{n-3} = 5$ είναι 5. Εστω τώρα ότι έχουμε την γραμμική εξίσωση διαφορών

$$2x_n - 3x_{n-1} + 4x_{n-2} = n^2 + 1.$$

Αν υποθέσουμε ότι $x_3 = 1$ και $x_2 = 4$, μπορούμε να υπολογίσουμε τον x_4
$x_4 = \frac{1}{2}[3{\cdot}1 - 4{\cdot}4 + (4^2 + 1)] = 2$, τον x_5,
$x_5 = \frac{1}{2}[3{\cdot}2 - 4{\cdot}1 + (5^2 + 1)] = 14$ κ.τ.λ. Επίσης μπορούμε να υπολογίσουμε, τον x_1,
$x_1 = \frac{1}{4}[(3^2 + 1) - 2{\cdot}1 + 3{\cdot}4] = 5$ και τον x_0
$x_0 = \frac{1}{4}[(2^2 + 1) - 2{\cdot}4 + 3{\cdot}5] = 3$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η παραπάνω εξίσωση διαφορών μαζί με τις τιμές $x_3 = 1$ και $x_2 = 4$ προσδιορίζει πλήρως την ακολουθία x_n , $n \in \mathbb{N}$. Επίσης βλέπουμε ότι έχουμε 2 αρχικές συνθήκες και ότι η τάξη της εξίσωσης είναι 2. Πράγματι γενικά, γιά μια γραμμική εξίσωση διαφορών k−τάξης, οι τιμές k διαδοχικών όρων x_i είναι πάντα αρκετές γιά να προσδιορίσουν την ακολουθία x_n, $n \in \mathbb{N}$ κατά ένα και μόνο τρόπο. Με άλλα λόγια, οι τιμές k διαδοχικών όρων x_i αποτελούν ένα κατάλληλο σύνολο συνοριακών συνθηκών. Εξ'άλλου, γιά μια εξίσωση διαφορών που είναι γραμμική με σταθερούς συντελεστές και k−τάξης, λιγότερες από k τιμές όρων της ακολουθίας δεν είναι αρκετές γιά να ορίσουν μονοσήμαντα την ακολουθία.

Για παράδειγμα έστω $x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2} = 3$. Αν $x_0 = 1$, μπορούμε να βρούμε πολλές ακολουθίες που ικανοποιούν την εξίσωση διαφορών και την δοσμένη αρχική συνθήκη. Ετσι,
$1, 0, 2, 7, \ldots$
$1, 1, 4, 10, \ldots$
$1, 2, 6, 13, \ldots$
είναι μερικές από τις δυνατότητες. Αν έχουμε παραπάνω από k τιμές όρων της ακολουθίας μπορεί να είναι αδύνατο να βρούμε την ακολουθία που ικανοποιεί την εξίσωση διαφορών και τις δοσμένες οριακές συνθήκες. Για παράδειγμα, γιά την παραπάνω εξίσωση διαφορών, αν μας δοθούν ότι $x_0 = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ τότε προφανώς οι τιμές x_0, x_1, x_2 δεν ικανοποιούν την εξίσωση διαφορών. Συνεπώς δεν υπάρχει ακολουθία που να ικανοποιεί την $x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2} = 3$ και τις οριακές συνθήκες $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ και $x_2 = 3$.

1.3. Λύση της γραμμικής εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές.

Η λύση μιας γραμμικής εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές είναι το άθροισμα δύο μερών, της *γενικής λύσης* της αντίστοιχης ομογενούς, που είναι η εξίσωση διαφορών με αριστερό μέλος το ίδιο και δεξιό το μηδέν, και της *ειδικής λύσης* της δοσμένης εξίσωσης διαφορών. Με άλλα λόγια άν έχουμε την εξίσωση

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \cdots + c_kx_{n-k} = f(n)$$

και α_n, $n \in \mathrm{N}$ είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς $c_0x_n + c_1x_{n-1} + \cdots + c_kx_{n-k} = 0$ και β_n, $n \in \mathrm{N}$ μια ειδική λύση της εξίσωσης διαφορών τότε $c_0\alpha_n + c_1\alpha_{n-1} + \cdots + c_k\alpha_{n-k} = 0$ και $c_0\beta_n + c_1\beta_{n-1} + \cdots + c_k\beta_{n-k} = f(n)$ και άρα έχουμε

$$c_0(\alpha_n + \beta_n) + c_1(\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}) + \cdots + c_k(\alpha_{n-k} + \beta_{n-k}) = f(n)$$

Δηλαδή η ολική λύση της δοσμένης εξίσωσης διαφορών είναι $x_n = \alpha_n + \beta_n$, $n \in \mathrm{N}$. Οπως ξέρουμε πολλές ακολουθίες ικανοποιούν μια εξίσωση διαφορών αλλά μόνο μία από αυτές ικανοποιεί και τις δοσμένες οριακές συνθήκες. Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς δίνεται μέσω κάποιων παραμέτρων. Για κάθε τιμή αυτών των παραμέτρων έχουμε και διαφορετική λύση της ομογενούς. Σημειωτέον ότι γιά την αντίστοιχη ομογενή *δεν* έχουμε οριακές συνθήκες και ότι χρησιμοποιώντας αυτές τις παραμέτρους βρίσκουμε ένα τύπο γιά όλες τις λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς γι'αυτό και τη λύση την λέμε γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς. Η ειδική λύση δεν περιέχει παραμέτρους. Προσδιορίζουμε όμως τις παραμέτρους μονοσήμαντα, δεχόμενοι ότι η ολική λύση $x_n = \alpha_n + \beta_n$ της δοσμένης γραμμικής εξίσωσης διαφορών ικανοποιεί και τις οριακές συνθήκες.

Μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς μιας γραμμικής εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές είναι της μορφής $A\omega_1^n$, όπου ω_1 λέγεται *χαρακτηριστική ρίζα* και A είναι μια σταθερά που προσδιορίζεται από τις οριακές συνθήκες. Αντικαθιστώντας Ax^n γιά τον x_n στην εξίσωση διαφορών με δεξιό μέλος το 0, έχουμε

$$c_0Ax^n + c_1Ax^{n-1} + \cdots + c_kAx^{n-k} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$c_0x^k + c_1x^{k-1} + c_2x^{k-2} + \cdots + c_k = 0,$$

η οποία λέγεται *χαρακτηριστική εξίσωση* της εξίσωσης διαφορών. Επομένως αν ω_1 είναι μια από τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε $A\omega_1^n$ είναι μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς.

Μια χαρακτηριστική εξίσωση k βαθμού έχει k χαρακτηριστικές ρίζες. Εστω ότι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι όλες διαφορετικές (διαφορετικές ανά δύο). Σ'αυτή την περίπτωση είναι εύκολο να δούμε ότι η

$$\alpha_n = A_1\omega_1^n + A_2\omega_2^n + \cdots + A_k\omega_k^n$$

είναι επίσης λύση της αντίστοιχης ομογενούς της εξίσωσης διαφορών, όπου $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_k$ είναι οι διαφορετικές ανά δύο χαρακτηριστικές ρίζες και $A_1, A_2, \ldots, A_k$ είναι σταθερές που προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες.

Παράδειγμα: Η εξίσωση διαφορών γιά την ακολουθία Fibonacci είναι

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

Η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$x^2 - x - 1 = 0$$

η οποία έχει δύο διαφορετικές ρίζες

$$\omega_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \omega_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Επεται λοιπόν ότι η

$$x_n = A_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + A_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

είναι η λύση της ομογενούς αυτής εξίσωσης όπου οι δύο σταθερές A_1 και A_2 πρέπει να προσδιοριστούν από τις οριακές συνθήκες $x_0 = 1, x_1 = 1$.

Παρατηρούμε ότι εάν μια γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές είναι k τάξης τότε η χαρακτηριστική εξίσωση είναι k βαθμού και επομένως θα έχει k ρίζες στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Αν όλες οι ρίζες είναι διαφορετικές ανά δύο και πραγματικές βρισκόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση.

Παράδειγμα: Λύστε την εξίσωση διαφορών $x_n - 7x_{n-1} + 10x_{n-2} = 0$, όταν $x_0 = 0$ και $x_1 = 1$. Η παραπάνω εξίσωση είναι ομογενής. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $x^2 - 7x + 10 = 0$ με χαρακτηριστικές ρίζες $\omega_1 = 2$ και $\omega_2 = 5$. Αρα η λύση της εξίσωσης είναι η

$$x_n = -(2)^n + (5)^n,$$

όπου $A_1 = 1$ και $A_2 = 1$ και προσδιορίσθηκαν από τις οριακές συνθήκες.

Οταν οι συντελεστές (όπως υποθέτουμε) είναι πραγματικοί τότε υπάρχει περίπτωση μερικές από τις χαρακτηριστικες ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης μιας εξίσωσης διαφορών (γραμμικής) να είναι μιγαδικοί αριθμοί. Σ'αυτή την περίπτωση η λύση της αντίστοιχης ομογενούς μπορεί να γραφεί με διαφορετικό τρόπο. Αν ένα πολυώνυμο έχει πραγματικούς συντελεστές, τότε ο μιγαδικός συζυγής κάθε ρίζας είναι επίσης ρίζα του πολυωνύμου. Δηλαδή οι μιγαδικές ρίζες πάντοτε εμφανίζονται σε ζευγάρια. Εστω $\omega_1 = \gamma + \delta i$ και $\omega_2 = \gamma - \delta i$ ένα ζευγάρι μιγαδικών χαρακτηριστικών ριζών. Η αντίστοιχη λύση της ομογενούς θα είναι

$$\mathrm{A}_1(\omega_1)^n + \mathrm{A}_2(\omega_2)^n = \mathrm{A}_1(\gamma+\delta i)^n + \mathrm{A}_2(\gamma-\delta i)^n = \mathrm{B}_1\rho^n\sigma\upsilon\nu(n\theta) + \mathrm{B}_2\rho^n\eta\mu(n\theta)$$

όπου $\rho = \sqrt{\gamma^2+\delta^2}$, $\theta = \varepsilon\varphi^{-1}(\frac{\delta}{\gamma})$, $\mathrm{B}_1 = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2$ και $\mathrm{B}_2 = i(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2)$. Τα B_1 και B_2 είναι σταθερές που προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες.

<u>Παράδειγμα:</u> Εστω ότι θέλουμε να λύσουμε την $x_n - x_{n-1} + x_{n-2} = 0$ με $x_1 = 1$, $x_2 = 0$.

Η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $x^2 - x + 1 = 0$ με χαρακτηριστικές ρίζες

$$\omega_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \omega_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Αρα} \quad x_n = \mathrm{B}_1\sigma\upsilon\nu\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \mathrm{B}_2\eta\mu\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

επειδή $\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ και

$$\varepsilon\varphi^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Εχουμε επίσης $\mathrm{B}_1 = 1$ και $\mathrm{B}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Συνεπώς

$$x_n = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta\mu\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

Τώρα ας υποθέσουμε ότι μερικές από τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι πολλαπλές ρίζες. Εστω ότι η ω_1 είναι ρίζα πολλαπλότητας m. Θα δείξουμε ότι η αντίστοιχη λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι $(A_1 n^{m-1} + A_2 n^{m-2} + \cdots + A_{m-2} n^2 + A_{m-1} n + A_m)\omega_1^n$ όπου τα $A_i, i = 1, \ldots, m$ είναι σταθερές που προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες.

Προφανώς η $A_m \omega_1^n$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς της $c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_k x_{n-k} = f(n)$.

Για να δείξουμε ότι και η $A_{m-1} n \omega_1^n$ είναι επίσης λύση της ομογενούς, βλέπουμε ότι η ω_1 δεν είναι μόνο ρίζα της εξίσωσης $c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_k x^{n-k} = 0$ αλλά επίσης είναι ρίζα και της "παραγώγου" εξίσωσης

$$c_0 n x^{n-1} + c_1 (n-1) x^{n-2} + c_2 (n-2) x^{n-3} + \cdots + c_k (n-k) x^{n-k-1} = 0$$

επειδή η ω_1 είναι πολλαπλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω 'παραγώγου' εξίσωσης με $A_{m-1} x$ και θέτοντας ω_1 όπου x, έχουμε

$$c_0 A_{m-1} n \omega_1^n + c_1 A_{m-1} (n-1) \omega_1^{n-1} + c_2 A_{m-1} (n-2) \omega_1^{n-2} + \cdots + c_k A_{m-1} (n-k) \omega_1^{n-k} = 0$$

που μας δείχνει ότι η $A_{m-1} n \omega_1^n$ είναι πράγματι μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς.

Το γεγονός ότι η ω_1 ικανοποιεί την δεύτερη, τρίτη, $\ldots, (m-1)$-στή 'παράγωγο' εξίσωση της χαρακτηριστικής εξίσωσης, μας δίνει την δυνατότητα να αποδείξουμε με όμοιο τρόπο ότι οι $A_{m-2} n^2 \omega_1^n, A_{m-3} n^3 \omega_1^n, \cdots, A_1 n^{m-1} \omega_1^n$ είναι λύσεις της ομογενούς.

<u>Παράδειγμα:</u> Ας θεωρήσουμε την εξίσωση διαφορών

$$x_n - 4x_{n-1} + 4x_{n-2} = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Αρα $x_n = (A_1 n + A_2) 2^n$ είναι λύση της παραπάνω ομογενούς εξίσωσης, επειδή το 2 είναι διπλή χαρακτηριστική ρίζα.

<u>Παράδειγμα:</u> Ας θεωρήσουμε την εξίσωση διαφορών $x_n - 3x_{n-2} - 2x_{n-3} = 0$, ομογενή, γραμμική και τάξης 3. Η χαρακτηριστική εξίσωση $3^{ου}$ βαθμού είναι η

$x^3 - 3x - 2 = 0$ ή $(x+1)^2(x-2) = 0$. Οι χαρακτηρικές ρίζες είναι $-1, -1, 2$. Συνεπώς, η λύση της ομογενούς αυτής είναι

$$x_n = (A_1 n + A_2)(-1)^n + A_3(2)^n$$

Για τις *ειδικές λύσεις* δεν υπάρχει γενική διαδικασία, δηλαδή γιά την γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές $c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_k x_{n-k} = f(n)$ δεν υπάρχει γενική μέθοδος γιά την εύρεση της ειδικής λύσης. Πρώτα θέτουμε το γενικό τύπο της ειδικής λύσης σύμφωνα με τον τύπο της $f(n)$, και μετά αποφασίζουμε την ακριβή λύση στην δοσμένη εξίσωση διαφορών. Αν έχουμε την γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} = f(n)$$

και η $f(n)$ είναι του τύπου ενός πολυωνύμου βαθμού λ, δηλαδή $f(n) = \gamma_1 n^\lambda + \gamma_2 n^{\lambda-1} + \cdots + \gamma_\lambda n + \gamma_{\lambda+1}$ όπου τα γ_i, $i = 1, \cdots, \lambda+1$ σταθεροί πραγματικοί, τότε δοκιμάζουμε γιά ειδική λύση, ακολουθία του τύπου

$$B_1 n^\lambda + B_2 n^{\lambda-1} + \cdots + B_\lambda n + B_{\lambda+1}$$

<u>Παράδειγμα:</u> Εστω η εξίσωση διαφορών $x_n + 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 8n^2$. Υποθέτουμε ότι ο γενικός τύπος της ειδικής λύσης είναι $B_1 n^2 + B_2 n + B_3$ επειδή $f(n) = 8n^2 = 8n^2 + 0n + 0$, όπου οι B_1, B_2, B_3 είναι σταθερές που θα προσδιορισθούν. Εχουμε

$$B_1 n^2 + B_2 n + B_3 + 4[B_1(n-1)^2 + B_2(n-1) + B_3] + 3[B_1(n-2)^2 + B_2(n-2) + B_3] = 8n^2$$

βάζοντας όπου $x_n = B_1 n^2 + B_2 n + B_3$. Η παραπάνω ισότητα απλοποιείται και γίνεται

$$8B_1 n^2 + (-20B_1 + 8B_2)n + (16B_1 - 10B_2 + 8B_3) = 8n^2$$

Συγκρίνοντας λοιπόν τα παραπάνω ταυτοτικά πολυώνυμα έχουμε το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} 8B_1 &= 8 \\ -20B_1 + 8B_2 &= 0 \\ 16B_1 - 10B_2 + 8B_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

που μας δίνει $B_1 = 1$, $B_2 = \frac{5}{2}$, $B_3 = \frac{9}{8}$.

Επομένως, η ειδική λύση είναι $\beta_n = n^2 + \frac{5}{2}n + \frac{9}{8}$, $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι οι σταθερές B_i δεν προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες, αλλά από την ίδια την εξίσωση ταυτίζοντας τους συντελεστές των ομοβαθμίων όρων μετά την αντικατάσταση.

Τώρα γενικά όταν η $f(n)$ είναι της μορφής β^n, $\beta \in \mathbf{R}$, η αντίστοιχη ειδική λύση είναι της μορφής $B\beta^n$, αν ο β δεν είναι χαρακτηριστική ρίζα της εξίσωσης διαφορών. Αν

$$f(n) = (\gamma_1 n^\lambda + \gamma_2 n^{\lambda-1} + \cdots + \gamma_\lambda n + \gamma_{\lambda+1})\beta^n,$$

δοκιμάζουμε γιά ειδική λύση την ακολουθία

$$(B_1 n^\lambda + B_2 n^{\lambda-1} + \cdots + B_\lambda n + B_{\lambda+1})\beta^n,$$

εφόσον το β δεν είναι χαρακτηριστική ρίζα της εξίσωσης διαφορών.

<u>Παράδειγμα:</u> Εστω η εξίσωση διαφορών

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 3n2^n$$

Πρώτα, παρατηρούμε ότι το 2 δεν είναι χαρακτηριστική ρίζα, διότι η χαρακτηριστική εξίσωση $x^2 - 4x + 3 = 0$ έχει τους 1,3 γιά χαρακτηριστικές ρίζες. Ο γενικός τύπος της ειδικής λύσης είναι

$$(B_1 n + B_2)2^n$$

Αντικαθιστώντας, έχουμε

$$(B_1 n + B_2)2^n - 4[(B_1(n-1) + B_2)]2^{n-1} + 3[(B_1(n-2) + B_2)]2^{n-2} = 3n2^n$$

και μετά τις απλοποιήσεις

$$-\frac{1}{4}B_1 n2^n + \left(\frac{1}{2}B_1 - \frac{1}{4}B_2\right)2^n = 3n2^n.$$

Συγκρίνοντας τις δύο πλευρές, έχουμε το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} -\tfrac{1}{4}B_1 &= 3 \\ \tfrac{1}{2}B_1 - \tfrac{1}{4}B_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Αρα, $B_1 = -12$, $B_2 = -24$ και η ειδική λύση είναι $\beta_n = (-12n - 24)2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Για την περίπτωση που ο β είναι χαρακτηριστική ρίζα πολλαπλότητας m, όταν η $f(n)$ είναι της μορφής

$$(\gamma_1 n^\lambda + \gamma_2 n^{\lambda-1} + \cdots + \gamma_\lambda n + \gamma_{\lambda+1})\beta^n,$$

η αντίστοιχη ειδική λύση είναι της μορφής

$$n^m(\mathrm{B}_1 n^\lambda + \mathrm{B}_2 n^{\lambda-1} + \cdots + \mathrm{B}_\lambda n + \mathrm{B}_{\lambda+1})\beta^n.$$

<u>Παράδειγμα:</u> Αν θεωρήσουμε την εξίσωση διαφορών

$$x_n - 3x_{n-1} = 2{\cdot}3^n,$$

τότε το 3 είναι χαρακτηριστική ρίζα πολλαπλότητας 1, και ο γενικός τύπος της ειδικής λύσης είναι

$$\mathrm{B}n3^n$$

Αντικαθιστώντας, έχουμε

$$\mathrm{B}n3^n - 3\mathrm{B}(n-1)3^{n-1} = 2{\cdot}3^n \quad \textit{δηλαδή}$$

$$\mathrm{B}{\cdot}3^n = 2{\cdot}3^n \text{ ή } \mathrm{B} = 2$$

Αρα η ειδική λύση είναι $\beta_n = 2n3^n$, $n \in \mathrm{N}$.

<u>Παράδειγμα:</u> Εστω η εξίσωση διαφορών

$$x_n - 4x_{n-1} + 4x_{n-2} = (n+1)2^n$$

Επειδή το 2 είναι διπλή χαρακτηριστική ρίζα, η γενική μορφή της ειδικής λύσης είναι

$$n^2(\mathrm{B}_1 n + \mathrm{B}_2)2^n$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση διαφορών στην θέση του x_n, την παραπάνω παράσταση και μετά από απλοποιήσεις έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{c} 6\mathrm{B}_1 n2^n = n2^n \\ (-6\mathrm{B}_1 + 2\mathrm{B}_2)2^n = 2^n \end{array} \right\}$$

Αυτό το σύστημα μας δίνει $\mathrm{B}_1 = \frac{1}{6}$ και $\mathrm{B}_2 = 1$. Επομένως, η ειδική λύση είναι

$$\beta_n = n^2(\frac{1}{6}n + 1)2^n, \; n \in \mathrm{N}.$$

<u>Παράδειγμα:</u> Ας θεωρήσουμε την εξίσωση διαφορών

$$x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 2^n + n$$

Ο γενικός τύπος της ειδικής λύσης είναι

$$B_1 n 2^n + B_2 n + B_3$$

επειδή εφ'ενός η $f(n) = 2^n + n$ αποτελείται από ένα εκθετικό μέρος το 2^n και από ένα πολυωνυμικό μέρος το n και αφ'ετέρου το 2 είναι χαρακτηριστική ρίζα της εξίσωσης διαφορών πολλαπλότητας 1. Αντικαθιστώντας και συγκρίνοντας, έχουμε:

$$B_1 = -2, B_2 = \frac{1}{2}, B_3 = \frac{7}{4}$$

και η ειδική λύση $\beta_n = -n2^{n+1} + \frac{1}{2}n + \frac{7}{4}$, $n \in \mathrm{N}$.

Ας προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε την ειδική λύση της εξίσωσης διαφορών $x_n - x_{n-1} = n$. Παρατηρούμε ότι $f(n) = n$ δηλαδή ένα πολυώνυμο και σύμφωνα με την πρώτη περίπτωση που μελετήσαμε δοκιμάζουμε γιά ειδική λύση την ακολουθία $B_1 n + B_2$. Αν όμως αντικαταστήσουμε έχουμε $B_1 n + B_2 - B_1(n-1) - B_2 = n$ ή $B_1 n + B_2 - B_1 n + B_1 - B_2 = n$ και τελικά $B_1 = n$ άτοπο, γιατί το B_1 είναι σταθερά. Δηλαδή με αυτό τον τρόπο δεν μπορούμε να βρούμε μια ειδική λύση της παραπάνω εξίσωσης διαφορών. Αν όμως γράψουμε την $f(n) = n \cdot 1^n$ βλέπουμε ότι βρισκόμαστε στην τρίτη περίπτωση που μελετήσαμε γιατί το 1 είναι χαρακτηριστική ρίζα της εξίσωσης.

Δοκιμάζουμε λοιπόν γιά ειδική λύση την ακολουθία

$$n(B_1 n + B_2)1^n = n(B_1 n + B_2)$$

Αντικαθιστώντας και απλοποιώντας βρίσκουμε $B_1 = B_2 = \frac{1}{2}$ και η ειδική λύση είναι $\beta_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathrm{N}$.

Το παραπάνω παράδειγμα μας λέει ότι δεν είναι πάντοτε σίγουρο με τις παραπάνω μεθόδους ότι θα βρούμε μια ειδική λύση. Βρίσκουμε μια λύση τις περισσότερες φορές. Αν όμως με μια μέθοδο δεν μπορούμε να βρούμε μια ειδική λύση, τότε πρέπει να δοκιμάσουμε άλλη μέθοδο.

Για να βρούμε την ολική λύση μιας εξίσωσης διαφορών όμως, τελικά πρέπει να συνδυάσουμε την λύση της αντίστοιχης ομογενούς και την ειδική λύση και να αποφασίσουμε τις τιμές των παραμέτρων στην λύση της ομογενούς. Για μια εξίσωση διαφορών k τάξης, οι k άγνωστοι συντελεστές $A_1, A_2, \ldots, A_k$ στη λύση της ομογενούς μπορούν να προσδιορισθούν από τις οριακές συνθήκες.

<u>Παράδειγμα:</u> Λύστε την εξίσωση διαφορών $x_n + 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 8n^2$, όπου $x_0 = 0, x_1 = 1$. Η εξίσωση είναι 2ης τάξης και η χαρακτηριστική εξίσωσή της 2ου βαθμού. Η αντίστοιχη ομογενής

$$x_n + 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 0$$

και η χαρακτηριστική εξίσωση $x^2 + 4x + 3 = 0$ με χαρακτηριστικές ρίζες $\omega_1 = -1$ και $\omega_2 = -3$.

Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η $A_1(-1)^n + A_2(-3)^n$ και μια ειδική λύση έχουμε βρεί πιο πάνω την $\beta_n = n^2 + \frac{5}{2}n + \frac{9}{8}$. Αρα η ολική λύση της δοσμένης εξίσωσης είναι $A_1(-1)^n + A_2(-3)^n + n^2 + \frac{5}{2}n + \frac{9}{8}$, αφού προσδιορίσουμε τις σταθερές A_1 και A_2 από τις οριακές συνθήκες $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Εχουμε

$$\left\{ \begin{array}{rl} A_1 + A_2 + \frac{9}{8} = & 0 \\ -A_1 - 3A_2 + 1 + \frac{5}{2} + \frac{9}{8} = & 1 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_2 = -\frac{9}{8} \\ A_1 + 3A_2 = \frac{29}{8} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{ A_1 = -\frac{28}{8}, A_2 = \frac{19}{8} \right\}$$

Συνεπώς η ολική λύση είναι η

$$x_n = -\frac{28}{8}(-1)^n + \frac{19}{8}(-3)^n + n^2 + \frac{5}{2}n + \frac{9}{8}, \; n \in \mathrm{N},$$

δηλαδή λύση της εξίσωσής που ικανοποιεί και τις οριακές συνθήκες.

<u>Παράδειγμα:</u> Λύστε την εξίσωση $x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 3n2^n$, με $x_0 = 0, x_1 = 1$. Ομοια όπως στο προηγούμενο παράδειγμα βρίσκουμε σαν ολική λύση την

$$x_n = \frac{49}{2}3^n - \frac{1}{2} + (-12n - 24)2^n, \; n \in \mathrm{N}.$$

<u>Παράδειγμα:</u> Λύστε την εξίσωση $x_n - 3x_{n-2} - 2x_{n-3} = 4$, όπου $x_0 = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$. Η αντίστοιχη

ομογενής είναι η $x_n - 3x_{n-2} - 2x_{n-3} = 0$ και η χαρακτηριστική εξίσωση η $x^3 - 3x - 2 = 0$ με χαρακτηριστικές ρίζες τις $-1, -1, 2$.

Η γενική λύση της ομογενούς είναι η $(A_1 n + A_2)(-1)^n + A_3 2^n$ και μια ειδική λύση της αρχικής εξίσωσης είναι της μορφής σταθεράς B και ισούται με -1. Αρα η ολική λύση θα είναι της μορφής $(A_1 n + A_2)(-1)^n + A_3 2^n - 1$, όπου θα πρέπει να προσδιορίσουμε τις σταθερές A_1, A_2, A_3 από τις δοσμένες οριακές συνθήκες.

Υπολογίζονται ότι είναι $A_1 = -1$, $A_2 = \frac{5}{3}$, $A_3 = \frac{1}{3}$ και άρα η ολική λύση της εξίσωσης είναι

$$x_n = (-n + \frac{5}{3})(-1)^n + \frac{1}{3}2^n - 1, \; n \in \mathbb{N}.$$

Ασκήσεις

1) Λύστε την εξίσωση διαφορών

$$x_n = x_{n-1} + 9x_{n-2} - 9x_{n-3}, \text{ με } x_0 = 0, x_1 = 1, \text{ και } x_2 = 2$$

2) Λύστε την εξίσωση διαφορών

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3}, \text{ όταν } x_0 = 1, x_1 = 0, \text{ και } x_2 = 0$$

3) Λύστε την εξίσωση διαφορών

$$x_n = 8x_{n-1} - 16x_{n-2}, \text{ όταν } x_0 = -1 \text{ και } x_1 = 0$$

4) Λύστε τις εξισώσεις διαφορών

α) $x_n - 7x_{n-1} + 10x_{n-2} = 3^n$, όταν $x_0 = 0$ και $x_1 = 1$

β) $x_n + 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = 3$, όταν $x_0 = 0$ και $x_1 = 1$

γ) $x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 2^n$, όταν $x_0 = 1$ και $x_1 = 1$

δ) $x_n - 4x_{n-1} + 4x_{n-2} = 2^n$, όταν $x_0 = 1$ και $x_1 = 2$.

Κεφάλαιο 2

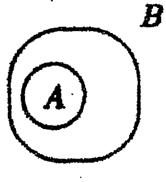
Βασικές έννοιες

2.1. Σύνολα

Η έννοια του *συνόλου* είναι μια απ'τις πιό σημαντικές έννοιες των μαθηματικών. Παραδείγματα συνόλων υπάρχουν παντού π.χ. το σύνολο των βιβλίων της βιβλιοθήκης του Πανεπιστημίου, το σύνολο των ανθρώπων στη γή, το σύνολο των άστρων του σύμπαντος. Τα αντικείμενα ενός συνόλου τα λέμε *στοιχεία* του συνόλου. Για να συμβολίζουμε ότι ένα στοιχείο x ανήκει σε ένα σύνολο A γράφουμε $x \in A$ και λέμε ότι το x ανήκει στο A ή ότι το x είναι στοιχείο του A. Για παράδειγμα το 3 ανήκει στο σύνολο των φυσικών, το γράφουμε $3 \in \mathbf{N}$ και ότι το π είναι πραγματικός αριθμός, το γράφουμε $\pi \in \mathbf{R}$.

Αν το α δεν ανήκει στο σύνολο A γράφουμε $\alpha \notin A$. Συνήθως χρησιμοποιούμε μικρά γράμματα γιά στοιχεία συνόλων και κεφαλαία γιά σύνολα. Για να συμβολίσουμε το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta$ θα γράφουμε $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta\}$. Θα λέμε ότι δύο σύνολα A και B είναι *ίσα* και θα γράφουμε $A = B$ όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Αυτό σημαίνει ότι ένα σύνολο καθορίζεται μονοσήμαντα από τα στοιχεία του. Για παράδειγμα τα σύνολα $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ και $\{\beta,\gamma,\alpha\}$ είναι ίσα και $\{\alpha,\beta\} = \{\beta,\alpha\}$. Οταν δύο σύνολα A και B δεν είναι ίσα, γράφουμε $A \neq B$.

Αν A και B είναι σύνολα και αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B, λέμε ότι το A είναι *υποσύνολο* του B, ή ότι το B περιέχει το A, και γράφουμε $A \subseteq B$ ή $B \supseteq A$.



Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι γιά κάθε σύνολο A, $A \subseteq A$, δηλαδή η σχέση του περιέχεσθαι είναι *ανταναχλαστική* ή *αυτοπαθής*. Αν τα A και B είναι σύνολα και $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε τα σύνολα A, B έχουν τα ίδια στοιχεία και άρα $A = B$. Δηλαδή η σχέση του περιέχεσθαι ($\subseteq$) είναι *αντισυμμετρική*. Επίσης αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq C$ τότε $A \subseteq C$ (*μεταβατική* ιδιότητα).

Παρατηρούμε ότι η σχέση του ανήκειν ($\in$) και η σχέση του περιέχεσθαι ($\subseteq$) είναι διαφορετικές. Για παράδειγμα η $\subseteq$ είναι πάντοτε ανταναχλαστική ενώ η $\in$ όχι, δηλαδή $A \subseteq A$ ενώ δεν ξέρουμε αν $A \in A$. Επίσης η $\subseteq$ είναι μεταβατική ενώ η $\in$ όχι.

Για να συμβολίσουμε τα σύνολα αντικειμένων που έχουν κάποια ιδιότητα θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\{x \mid \varphi(x)\}$. Αυτό το σύνολο έχει ως στοιχεία αυτά ακριβώς τα αντικείμενα που έχουν την ιδιότητα φ. Επομένως

$$a \in \{x \mid \varphi(x)\} \text{ εάν και μόνο αν } \varphi(a).$$

Ετσι γράφουμε $\{x \mid x \in N \text{ και } x \leq 20\}$. Πρέπει όμως να προσέχουμε γιάτί η συλλογή των x που έχουν την ιδιότητα φ δεν είναι πάντα σύνολο. Σίγουρα είναι σύνολο *όταν πάρουμε από ένα σύνολο A* αυτά τα στοιχεία x που έχουν την ιδιότητα φ, κάτι που το συμβολίζουμε $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$.

Διαφορετικά, δηλαδή όταν πάρουμε τα αντικείμενα x που έχουν μια ιδιότητα χωρίς κανένα περιορισμό από που προέρχονται, μπορεί να *μην* σχηματίσουμε σύνολο. Γιά παράδειγμα, έστω ότι στον ρόλο της $\varphi(x)$ έχουμε την πρόταση $x \notin x$. Αν δεν υπήρχε περιορισμός τότε το $\mathcal{R} = \{x \mid x \notin x\}$ θα ήταν σύνολο. Το $\mathcal{R}$ αποτελείται από τα σύνολα που δεν ανήκουν στον εαυτό τους. Μα, είναι $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$;

Αν $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ τότε $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$, και

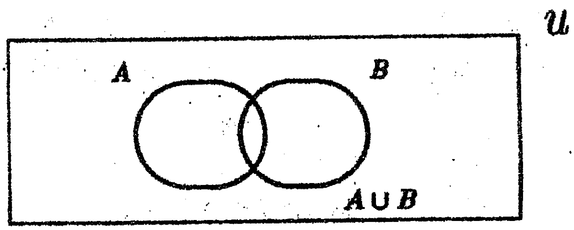
αν $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ τότε $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$.

Αρα έχουμε μια αντίφαση, επομένως το $\mathcal{R}$ δεν μπορεί να είναι σύνολο. Το παραπάνω παράδειγμα λέγεται *παράδοξο του Russell*. Γι'αυτό το λόγο γράφουμε π.χ. $\{x \in \mathbf{R} \mid x < 7 \text{ και } |x| \geq 5\}$.

Το σύνολο $\{a\}$ που περιέχει ένα μόνο στοιχείο λέγεται *μονοσύνολο* και αυτό που περιέχει δύο μόνο στοιχεία π.χ. το $\{a, b\}$, λέγεται *ζεύγος*. Πολλή χρήσιμη είναι η έννοια του *κενού συνόλου*, δηλαδή του συνόλου που δεν έχει κανένα στοιχείο. Το κενό σύνολο είναι μοναδικό και το συμβολίζουμε με $\emptyset$. Παραδείγματος χάρη $\emptyset = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 1 = 0\}, \emptyset = \{x \in N \mid x > 10$ και $x < 5\}$.

Υπάρχει ένα είδος διαγράμματος που λέγεται *διάγραμμα του Venn* το οποίο μπορούμε να χρησιμοποιούμε γιά να απεικονίσουμε σύνολα που εκλέξαμε από ένα σύμπαν $\mathcal{U}$. Πρώτα γράφουμε ένα ορθογώνιο που αντιπροσωπεύει το $\mathcal{U}$, και μετά μέσα σ'αυτό γράφουμε κύκλους ή άλλα σχήματα που αντιπροσωπεύουν σύνολα.

Εστω A, B σύνολα. Το σύνολο που έχει στοιχεία όλα τα στοιχεία του A και όλα τα στοχεία του B λέγεται *ένωση* των A και B, και συμβολίζεται με $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$. Εχουμε λοιπόν, $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{x \mid x \in \mathrm{A}$ ή $x \in \mathrm{B}\}$.



Είναι φανερό από τον ορισμό της ένωσης συνόλων ότι $x \notin \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \Leftrightarrow (x \notin \mathrm{A}$ και $x \notin \mathrm{B})$.
Παραθέτουμε μερικές ιδιότητες της ένωσης που αποδεικνύονται εύκολα:

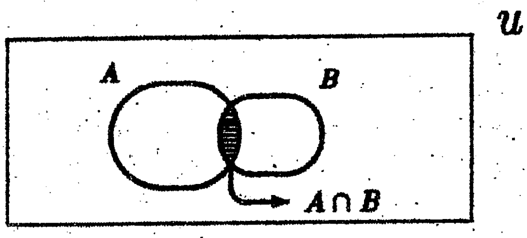
$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} \cup \emptyset &= \mathrm{A} & & \\
\mathrm{A} \cup \mathrm{B} &= \mathrm{B} \cup \mathrm{A} & & (\text{αντιμεταθετικότητα}) \\
\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) &= (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup \mathrm{C} & & (\text{προσεταιριστικότητα}) \\
\mathrm{A} \cup \mathrm{A} &= \mathrm{A} & & (\text{αδύναμον})
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \text{ αν και μόνο αν } \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B}.$$

Για να αποδείξουμε ότι δύο σύνολα A, B είναι ίσα αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ και $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$, δηλαδή ότι αν $x \in \mathrm{A}$ τότε και $x \in \mathrm{B}$ καθώς επίσης και ότι αν $y \in \mathrm{B}$ τότε $y \in \mathrm{A}$.

Αν Α και Β είναι σύνολα, η *τομή* των Α και Β είναι το σύνολο $A \cap B$ που ορίζεται από την ισότητα

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\} = \{x \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$$



Οι βασικές ιδιότητες των τομών, όπως και οι αποδείξεις τους είναι παρόμοιες με αυτές των ενώσεων

$$\begin{aligned} A \cap \emptyset &= \emptyset \\ A \cap B &= B \cap A && (\textit{αντιμεταθετικότητα}) \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C && (\textit{προσεταιριστικότητα}) \\ A \cap A &= A \end{aligned}$$

$$A \subseteq B \text{ αν και μόνο αν } A \cap B = A.$$

Δύο σύνολα Α, Β με τομή το κενό σύνολο, δηλαδή, $A \cap B = \emptyset$, λέγονται *ξένα μεταξύ τους*.

Δύο χρήσιμες αλήθειες γιά τις ενώσεις και τις τομές είναι οι παρακάτω ισότητες:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Αυτές οι ισότητες λέγονται *επιμεριστικοί νόμοι*. Αν Α και Β είναι σύνολα, η *διαφορά* του Β από το Α, ή το *σχετικό συμπλήρωμα* του Β στο Α, ορίζεται από την ισότητα:

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

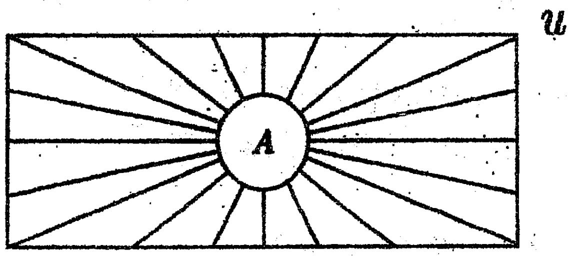
Για να διατυπώσουμε τις ιδιότητες του συμπληρώματος, υποθέτουμε ότι όλα τα σύνολα που θα αναφέρουμε είναι υποσύνολα ενός συνόλου $\mathcal{U}$ και ότι όλα τα συμπληρώματα θα σχηματισθούν σε σχέση με το $\mathcal{U}$. Γράφουμε A' αντί $\mathcal{U} - A$. Οι βασικές ιδιότητες γιά τα συμπληρώματα είναι:

$$(A')' = A$$

$$\emptyset' = \mathcal{U}, \quad \mathcal{U}' = \emptyset$$

$$A \cap A' = \emptyset, \quad A \cup A' = \mathcal{U}$$

$$A \subseteq B \text{ αν και μόνο αν } B' \subseteq A'.$$



Δύο πολύ σημαντικές ισότητες γιά τα συμπληρώματα είναι οι παρακάτω *νόμοι του De Morgan*

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

Μερικές εύκολες ασκήσεις γιά τα συμπληρώματα είναι οι παρακάτω:

$$A - B = A \cap B'$$

$$A - (A - B) = A \cap B$$

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

$$A \cap B \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C')$$

$$(A \cup C) \cap (B \cup C') \subseteq A \cup B$$

Για κάθε σύνολο A, το σύνολο όλων των υποσυνόλων του υπάρχει, συμβολίζεται με $\mathcal{P}(A)$ και λέγεται το *δυναμοσύνολο* του A, δηλαδή

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

Εχουμε
$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$$

$$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

Ασκήσεις

1) Αποδείξτε τους επιμεριστικούς νόμους και τους νόμους του De Morgan.

2) $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup \mathrm{C} = \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C})$ αν και μόνο αν $\mathrm{C} \subseteq \mathrm{A}$

3) Δείξτε ότι $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$ και
$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

4) Βρείτε το σύνολο $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$.

2.2. Σχέσεις

Γνωρίζουμε ότι ένα σύνολο με δύο μόνο στοιχεία λέγεται ζεύγος, π.χ. το $\{a, b\}$. Αν όμως ξέρουμε και ποιό από τα δύο στοιχεία είναι πρώτο και ποιό από τα δύο στοιχεία είναι δεύτερο, τότε λέμε ότι εχουμε ένα *διατεταγμένο ζεύγος* και το συμβολίζουμε με (a, b). Δηλαδή το διατεταγμένο ζεύγος (a, b) είναι ζεύγος με πρώτο στοιχείο το a και δεύτερο το b. Το a λέγεται και *πρώτη συντεταγμένη* ενώ το b *δεύτερη συντεταγμένη* του διατεταγμένου ζεύγους (a, b).

Δυο διατεταγμένα ζεύγη (a, b) και (x, y) είναι ίσα, $(a, b) = (x, y)$ αν και μόνο αν $a = x$ και $b = y$, δηλαδή έχουν τις πρώτες συντεταγμένες ίσες και τις δεύτερες ίσες. Αυτό *δεν* ισχύει γιά τα ζεύγη.

Εστω τώρα δύο σύνολα A και B. Το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (α, β) με $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ είναι ένα σύνολο που συμβολίζεται με $A \times B$ και το λέμε *Καρτεσιανό γινόμενο* των A και B.

$$A \times B = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in A \text{ και } \beta \in B\}$$

Προφανώς $A \times B \neq B \times A$ γενικά.

Διμελής σχέση μεταξύ των στοιχείων δύο συνόλων X και Y ονομάζουμε κάθε υποσύνολο $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$. Αν $(x, y) \in \mathcal{R}$ τότε θα λέμε ότι το x βρίσκεται στη σχέση $\mathcal{R}$ με το y και θα το συμβολίζουμε επίσης και ως $x\mathcal{R}y$. Τις διμελείς σχέσεις θα τις λέμε *σχέσεις*. Οι σχέσεις που εξετάζονται στα μαθηματικά είναι σχέσεις μεταξύ των στοιχείων ενός συνόλου. Δηλαδή ενδιαφερόμαστε γιά $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$ με $X = Y$.

Μια σχέση στο σύνολο X σημαίνει μια διμελής σχέση μεταξύ των στοιχείων του X, δηλαδή ένα υποσύνολο του $X \times X$. Ετσι π.χ. η ανισότητα των πραγματικών αριθμών είναι μια σχέση στο $\mathbf{R}$ και η συνθήκη "το 3 διαιρεί την διαφορά $x - y$" ορίζει μια σχέση στο σύνολο των ακεραίων Z, δηλαδή

$$<\,= \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R} \text{ με } x < y\} \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

$$\equiv_3 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z} \text{ με } 3 \mid x - y\} \subseteq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}.$$

Το πεδίο ορισμού μιας σχέσης $\mathcal{R}$ στο σύνολο A είναι το σύνολο $\{x \mid \text{ γιά κάποιο } y, x\mathcal{R}y\} \subseteq A$,
και το πεδίο τιμών της $\mathcal{R}$ είναι το σύνολο $\{y \in A \mid \text{ γιά κάποιο } x,\ x\mathcal{R}y\} \subseteq A$.

Μια σχέση $\mathcal{R}$ στο A ($\mathcal{R} \subseteq A \times A$) είναι *αυτοπαθής* αν $a\mathcal{R}a$ ($(a, a) \in \mathcal{R}$) γιά κάθε $a \in A$. Ειναι *συμμετρική* αν $a\mathcal{R}b$ συνεπάγεται $b\mathcal{R}a$ και είναι *μεταβατική* αν $x\mathcal{R}y$ και $y\mathcal{R}z$ συνεπάγονται $x\mathcal{R}z$. Μια σχέση στο σύνολο A που είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική λέγεται *σχέση ισοδυναμίας*. Αν $\mathcal{R}$ είναι μιά σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο A ($A \neq \emptyset$) η *κλάση ισοδυναμίας* του $a \in A$ ως προς την $\mathcal{R}$ είναι το σύνολο $[a]_{\mathcal{R}} = \{b \in A \mid a\mathcal{R}b\}$. Το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας ως προς την $\mathcal{R}$ είναι το σύνολο $A/\mathcal{R} = \{[a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A\}$ είναι υποσύνολο του $\mathcal{P}(A)$ και λέγεται *σύνολο πηλίκο*.

Τα σύνολα $[a]_{\mathcal{R}}(a \in A)$ μέλη του $A/\mathcal{R}$ έχουν τις παρακάτω ιδιότητες

1) $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow a\mathcal{R}b$ γιά $a, b \in A$

2) $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset \Rightarrow [a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$ γιά $a, b \in A$

3) $\bigcup\{[a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A\} = A$

Η 1) είναι εύκολη (αποδείξτε την). Για την 2) έστω $x \in [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}}$. Τότε $a\mathcal{R}x$ και $b\mathcal{R}x$, και επειδή η $\mathcal{R}$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο A θα έχουμε $a\mathcal{R}x$ και $x\mathcal{R}b$. Αρα $a\mathcal{R}b$, επειδή η $\mathcal{R}$ μεταβατική και από την 1) θα έχουμε $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$. Οσον αφορά την 3) επειδή κάθε $a \in A$ ανήκει σε κάποια κλάση ισοδυναμίας (γιά παράδειγμα $a \in [a]_{\mathcal{R}}$) είναι προφανές ότι η ένωση όλων των κλάσεων ισοδυναμίας είναι το A.

Επομένως το σύνολο $A/\mathcal{R}$ είναι σύνολο υποσυνόλων του A που η ένωσή τους μας κάνει το A, τα δε υποσύνολα αυτά είναι ξένα μεταξύ τους ανά δύο (από την ιδιότητα 2). Δηλαδή το σύνολο $A/\mathcal{R}$ είναι ένας *μερισμός* του A, που σημαίνει

1) $[a]_{\mathcal{R}} \in A/\mathcal{R} \Rightarrow [a]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$

2) $[a]_{\mathcal{R}}, [b]_{\mathcal{R}} \in A/\mathcal{R}$ και $[a]_{\mathcal{R}} \neq [b]_{\mathcal{R}} \Rightarrow [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ και

3) $\bigcup(A/\mathcal{R}) = A$

Το $A/\mathcal{R}$ χωρίζει το σύνολο A σε υποσύνολα ξένα μεταξύ τους ανά δύο, των οποίων η ένωση μας κάνει το A. Αρα απ'ότι αποδείξαμε παραπάνω κάθε σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ στο A μας δίνει το σύνολο $A/\mathcal{R}$ που είναι μερισμός του A.

<u>Παράδειγμα:</u> Ορίζουμε την σχέση $\equiv_4$ στο σύνολο των ακεραίων Z. Θα λέμε $(a, b) \in \equiv_4$ ή $a \equiv_4 b$ αν και μόνο αν η διαφορά $a - b$ είναι πολλαπλάσιο του 4, δηλαδή αν $a - b = k{\cdot}4$ γιά $k \in Z$.

$$(a, b) \in \equiv_4 \Leftrightarrow a \equiv_4 b \Leftrightarrow a - b = 4k, k \in Z.$$

Εχουμε $a \equiv_4 a$ γιατί $a - a = 0 = 0{\cdot}4$, γιά κάθε $a \in Z$.
Αν $a \equiv_4 b$ τότε $a - b = 4k \Rightarrow b - a = 4(-k) \Rightarrow b \equiv_4 a$.
Αν $a \equiv_4 b$ και $b \equiv_4 c \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{ll} a - b = & 4\lambda \\ & \qquad (\lambda, \mu \in Z) \\ b - c = & 4\mu \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a - c = 4(\lambda + \mu), \lambda + \mu \in Z \Rightarrow a \equiv_4 c$.

Αρα η σχέση $\equiv_4 \subseteq Z \times Z$ του Z είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική και επομένως είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο Z. Οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι:

$$[0]_{\equiv_4} = \{x \in Z \mid x = 4k \text{ γιά } k \in Z\}$$

$$[1]_{\equiv_4} = \{x \in Z \mid x = 4k + 1 \text{ γιά } k \in Z\}$$

$$[2]_{\equiv_4} = \{x \in Z \mid x = 4k + 2 \text{ γιά } k \in Z\}$$

$$[3]_{\equiv_4} = \{x \in Z \mid x = 4k + 3 \text{ γιά } k \in Z\}$$

Κάθε ακέραιος ή είναι της μορφής $4k$ ή $4k+1$ ή $4k+2$ ή $4k+3$ γιά $k \in Z$, ανάλογα με το τι υπόλοιπο αφήνει άν διαιρεθεί με το 4. Εχουμε λοιπόν

$$Z/\equiv_4 = \{[0]_{\equiv_4}, [1]_{\equiv_4}, [2]_{\equiv_4}, [3]_{\equiv_4}\}$$

$$[0]_{\equiv_4} \neq \emptyset, [1]_{\equiv_4} \neq \emptyset, [2]_{\equiv_4} \neq \emptyset, [3]_{\equiv_4} \neq \emptyset$$

ανά δύο οι κλάσεις είναι ξένες μεταξύ τους και $\bigcup(Z/\equiv_4) = Z$. Αρα το σύνολο $Z/\equiv_4$ είναι ένας μερισμός του Z. Μπορούμε να έχουμε σχέσεις παρόμοιες με την παραπάνω, τις $\equiv_n$ γιά $n \in N$.

Μια σχέση $\mathcal{R}$ στο A ($A \neq \emptyset$) λέγεται *αντισυμμετρική* αν γιά κάθε x και y στο A

$$x\mathcal{R}y \text{ και } y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$$

Μερική διάταξη στο A λέγεται μια σχέση στο A που είναι αυτοπαθής, αντισυμμετρική και μεταβατική. Δηλαδή η $S \subseteq A \times A$ είναι μια μερική διάταξη στο A αν:

$$xSx, \text{ γιά κάθε } x \in A$$

$$xSy \text{ και } ySx \Rightarrow x = y, \text{ και}$$

$$xSy \text{ και } ySz \Rightarrow xSz$$

Αν επιπλέον γιά κάθε $x, y \in A$ είτε xSy ή ySx τότε η μερική διάταξη S λέγεται *ολική ή γραμμική διάταξη*. Ενα *μερικά διατεταγμένο σύνολο* X, είναι ένα σύνολο X με μια μερική διάταξη στο X. Αν $\leq$ είναι μια μερική διάταξη στο X και γιά $x, y \in X$ έχουμε $x \leq y$ και $x \neq y$ γράφουμε $x < y$ και η $<$ είναι τότε μια σχέση στο X με ιδιότητες:
1) Δεν υπάρχουν x και y τέτοια ώστε $x < y$ και $y < x$, και
2) Αν $x < y$ και $y < z \Rightarrow x < z$.
Αν X είναι ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο (ή ολικά διατεταγμένο) τότε μπορεί να συμβεί το X να έχει ένα στοιχείο a τέτοιο ώστε $a \leq x$, γιά κάθε $x \in X$. Σ'αυτή την περίπτωση λέμε ότι το a είναι το *ελάχιστο* στοιχείο του X ως προς την διάταξη $\leq$ του X. Η αντισυμμετρικότητα μιας διάταξης συνεπάγεται ότι αν το X έχει ένα ελάχιστο στοιχείο τότε είναι και μοναδικό. Παρόμοια αν το X έχει στοιχείο b, τέτοιο ώστε $x \leq b$ γιά κάθε $x \in X$, τότε το b είναι το *μέγιστο* στοιχείο του X ως προς τη διάταξη $\leq$ στο X. Αν υπάρχει αυτό το στοιχείο, όπως παραπάνω, είναι μοναδικό.

Οπως πριν, αν X είναι ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο ως προς τη μερική διάταξη $\leq$ στο X, το $a \in X$ λέγεται *σχετικό ελάχιστο* ή *ελάσσον* στοιχείο του X αν $x \leq a \Rightarrow x = a$ ή αν δεν υπάρχει στοιχείο $x \in X$ με $x \leq a$ και $x \neq a$. Παρόμοια το $b \in X$ λέγεται *σχετικό μέγιστο* ή *μείζον* στοιχείο του X αν $b \leq x \Rightarrow x = b$.
Παραδείγματα γραμμικών διατάξεων έχουμε τις σχέσεις $\leq$ στο $\mathbf{N}$ και στο $\mathbf{R}$.

Εστω τώρα το μερικά διατεταγμένο σύνολο $(X, \leq)$. Το $c \in X$ λέγεται *κατώτερο φράγμα* του $E \subseteq X$ αν $c \leq x$ γιά κάθε $x \in E$ και το $d \in X$ λέγεται *ανώτερο φράγμα* του $E \subseteq X$ αν $x \leq d$ γιά κάθε $x \in E$.

Ασκήσεις

1) Βρείτε το σύνολο $A \times A$ αν $A = \{a, b, c\}$. Βρείτε το σύνολο των ζευγών από στοιχεία του A.

2) Αν A,B,X και Y είναι σύνολα τότε

i) $(A \cup B) \times X = (A \times X) \cup (B \times X)$

ii) $(A \cap B) \times (X \cap Y) = (A \times X) \cap (B \times Y)$

3) Δείξτε ότι η $\equiv_5$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbf{Z}$ αν ($a \equiv_5 b \Leftrightarrow a - b = 5k$, γιά κάθε $k \in Z$)

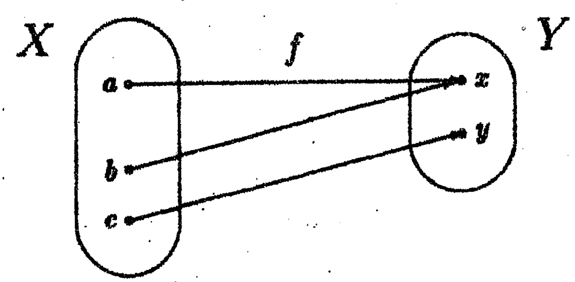
4) Εστω N το σύνολο των φυσικών. Ορίζουμε την σχέση $a \mid b \overset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} a$ διαιρεί το $b \Longleftrightarrow$ υπάρχει $k \in \mathrm{N}$ με $b = ka$. Δείξτε ότι η παραπάνω σχέση είναι σχέση μερικής διάταξης στο N. Είναι ολική διάταξη; γιατί;

5) Ορίζουμε την σχέση $\lhd$ στο $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ ως εξής: $(\alpha, \beta) \lhd (\gamma, \delta) \overset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \alpha < \gamma$ ή ($\alpha = \gamma$ και $\beta \leq \delta$). Δείξτε ότι η $\lhd$ είναι μια σχέση μερικής διάταξης στο $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$.

2.3. Συναρτήσεις

Εστω X και Y σύνολα. Μια *συνάρτηση* από το X στο Y είναι μια σχέση f τέτοια ώστε το πεδίο ορισμού της είναι το X και γιά κάθε $x \in X$ υπάρχει *ένα και μόνο ένα* $y \in Y$ με $(x,y) \in f$. Δηλαδή μια συνάρτηση f από το X στο Y είναι $f \subseteq X \times Y$ και αν $(x,y) \in f$ και $(x,z) \in f \Rightarrow y = z$. Συνήθως το μοναδικό y που αντιστοιχεί στο $x \in X$ με $(x,y) \in f$ συμβολίζεται $f(x)$. Αντί λοιπόν να γράφουμε $(x,y) \in f$ ή xfy γιά την συνάρτηση f, γράφουμε $y = f(x)$. Το στοιχείο y λέγεται *τιμή* της f στο x. Τη φράση " η f είναι μια συνάρτηση από το X στο Y" τη συμβολίζουμε με $f : X \to Y$.

<u>Παράδειγμα:</u> Εστω $X = \{a, b, c\}$ και $Y = \{x, y\}$



Η σχέση $f = \{(a,x),(b,x),(c,y)\} \subseteq X \times Y$ είναι μια συνάρτηση από το X στο Y. Εχουμε $f : X \to Y$ και

$$(a,x) \in f \iff afx \iff f(a) = x$$

$$(b,x) \in f \iff bfx \iff f(b) = x$$

$$(c,y) \in f \iff cfx \iff f(c) = y$$

Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το X στο Y είναι υποσύνολο του δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(X \times Y)$ και συμβολίζεται με Y^X. Εστω $f : X \to Y$ μια συνάρτηση, το σύνολο $\{(x,y) \mid y = f(x)\} \subseteq X \times Y$ λέγεται *γράφημα* της f. Το *πεδίο ορισμού* της $f : X \to Y$ είναι το σύνολο $\{x \in X \mid f(x) = y$ γιά $y \in Y\} = X$, ενώ το *πεδίο τιμών* της είναι το σύνολο $\{y \in Y \mid f(x) = y$ γιά $x \in X\} \subseteq Y$. Αν το πεδίο τιμών της $f : X \to Y$ είναι ίσον με το Y, τότε λέμε ότι η f είναι συνάρτηση από το X *επί* του Y.

Αν $A \subseteq X$, τότε το σύνολο $\{y \in Y \mid$ *υπάρχει* $x \in A$ *με* $f(x) = y\} \subseteq Y$ λέγεται *εικόνα* του A μέσω της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Αν $f : X \to Y$

τότε $f(X)$ = πεδίο τιμών της f και η f είναι *επί* αν $f(X) = Y$. Αν $X \subseteq Y$, η συνάρτηση f που ορίζεται από την $f(x) = x$, γιά κάθε $x \in X$ λέγεται η *συνάρτηση εγκλεισμού* του X στο Y. Η συνάρτηση εγκλεισμού από το X στο X, λέγεται η *ταυτοτική απεικόνιση* του X. Εαν τώρα $f : Y \to Z$ και $X \subseteq Y$ τότε κατασκευάζουμε τη συνάρτηση $g : X \to Z$ τέτοια ώστε $g(x) = f(x)$, γιά κάθε $x \in X$. Η συνάρτηση g λέγεται ο *περιορισμός* της f στο X, και η f λέγεται μια *επέκταση* της g στο Y. Συνήθως γράφουμε $g = f\lceil X$. Έστω X,Y σύνολα. Ορίζουμε μια συνάρτηση $\pi_1 : X \times Y \to X$ με $\pi_1(x, y) = x$. Η συνάρτηση π_1 λέγεται *προβολή* από το $X \times Y$ στο X, ενώ η $\pi_2 : X \times Y \to Y$ με $\pi_2(x, y) = y$, λέγεται η *προβολή* από το $X \times Y$ στο Y.

Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται *ένα-προς-ένα* αν $(x, y) \in f$ και $(z, y) \in f \Rightarrow x = z$ ή $f(x) = f(z) \Rightarrow x = z$. Δηλαδή μια συνάρτηση λέγεται ένα-προς-ένα αν αντιστοιχεί διαφορετικά στοιχεία του πεδίου ορισμού σε διαφορετικές εικόνες στο πεδίο τιμών της.

Αν $A \subseteq X$, η *χαρακτηριστική συνάρτηση* του A είναι η συνάρτηση $\mathcal{X}_A : X \to \{0, 1\}$ τέτοια ώστε

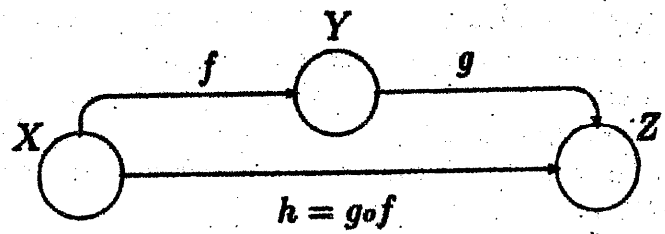
$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Δοσμένης μιας συνάρτησης $f : X \to Y$ και $B \subseteq Y$ τότε ορίζουμε το σύνολο $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ και το λέμε *αντίστροφη εικόνα* του B μέσω της f. Το $f^{-1}(B)$ αποτελείται από εκείνα τα στοιχεία του X που η f απεικονίζει στο B.

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη γιά να είναι η $f : X \to Y$ *επί* είναι η αντίστροφη εικόνα μέσω της f κάθε μη κενού υποσυνόλου του Y να είναι μη κενό υποσύνολο του X. Η ικανή και αναγκαία συνθήκη γιά να είναι η f *ένα-προς-ένα* είναι η αντίστροφη εικόνα μέσω της f κάθε συνόλου $\{b\} \subseteq Y$, με b στοιχείο του πεδίου τιμών της f, να είναι μονοσύνολο, δηλαδή $\{a\} \subseteq X$ για κάποιο $a \in X$.

Αν η τελευταία συνθήκη ικανοποιείται τότε το σύμβολο f^{-1} χρησιμοποιείται γιά την παρακάτω συνάρτηση: f^{-1} : (πεδίο τιμών της f) $\to X$ με $f^{-1}(y) = x$ αν $f(x) = y$, δηλαδή η τιμή της f^{-1} γιά κάθε $y \in$ (πεδίο τιμών της f) είναι το μοναδικό $x \in X$ γιά το οποίο $f(x) = y$. Με άλλα λόγια αν η $f : X \to Y$ είναι ένα-προς-ένα τότε $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ γιά κάθε y στο πεδίο τιμών της f. Επίσης αν $f : X \to Y$ είναι ένα-προς-ένα και επί, τότε η f^{-1} ορίζεται γιά κάθε $y \in Y, f^{-1} : Y \to X$ και $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ γιά κάθε $y \in Y$. Η f^{-1} λέγεται τότε *αντίστροφη* συνάρτηση της f.

Εστω τώρα $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$. Κάθε στοιχείο στο πεδίο τιμών της f ανήκει στο πεδίο ορισμού της g και επομένως έχει νόημα το $g(f(x))$ γιά κάθε $x \in X$. Η συνάρτηση $h : X \to Z$ που ορίζεται με $h(x) = g(f(x))$ καλείται *σύνθεση* των συναρτήσεων f και g και συμβολίζεται με $g \circ f$.



Παρατηρούμε ότι η διάταξη είναι σπουδαία στη σύνθεση συναρτήσεων. Για να ορισθεί η $g \circ f$ πρέπει το πεδίο τιμών της f να περιέχεται στο πεδίο ορισμού της g, ενώ γιά να ορισθεί η $f \circ g$ πρέπει το πεδίο τιμών της g να περιέχεται στο πεδίο ορισμού της f.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Αλλά ακόμα και στην περίπτωση που και οι δύο συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ ορίζονται μπορεί να μην είναι οι ίδιες συναρτήσεις. Με άλλα λόγια η σύνθεση συναρτήσεων δεν είναι αναγκαστικά *μεταθετική*. Παρ'όλα αυτά όμως είναι *προσεταιριστική*. Γιατί αν $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z, h : Z \to W$ τότε γιά $x \in X$ έχουμε

$$[h\circ(g\circ f)](x) = h\circ[(g\circ f)(x)] = h(g(f(x))) = (h\circ g)(f(x)) = [(h\circ g)\circ f](x)\,,$$

δηλαδή $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Αν έχουμε δύο ένα-προς-ένα και επί συναρτήσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ τότε όπως ξέρουμε ορίζονται και οι αντίστροφες $f^{-1} : Y \to X$ και $g^{-1} : Z \to Y$ που είναι και αυτές ένα-πρός-ένα και επί. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι και οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι ένα-προς-ένα και επί. Αλλά

$$g \circ f : X \to Z \text{ και } (g \circ f)^{-1} : Z \to X$$

$$(g \circ f)^{-1}(z) = x \Leftrightarrow (g \circ f)(x) = z \Leftrightarrow g(f(x)) = z \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g(y) = z \Leftrightarrow g^{-1}(z) = y \Leftrightarrow g^{-1}(z) = f(x) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f^{-1}(g^{-1}(z)) = x$ γιά κάθε $z \in \mathrm{Z}$. Η παραπάνω ισοδυναμίες ισχύουν γιατί οι $f, g, f \circ g, g \circ f$ είναι ένα-προς-ένα και επί και υπάρχουν οι αντίστροφές των που είναι και αυτές ένα-προς-ένα και επί. Τα x και y είναι μοναδικά. Οι ισοδυναμίες παραπάνω μας δείχνουν ότι $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Ασκήσεις

1) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με $f(x) = |x|$ *δεν* είναι 1-1.

2) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι 1-1 αλλά όχι επί.

3) Δείξτε ότι γιά $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}, \mathrm{B} \subseteq \mathrm{X}$ και $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$,

   i) $f(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) \cup f(\mathrm{B})$

   ii) $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subseteq f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})$

4) Δείξτε ότι γιά $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{Y}, \mathrm{B} \subseteq \mathrm{Y}$ και $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$,

   i) $f^{-1}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = f^{-1}(\mathrm{A}) \cup f^{-1}(\mathrm{B})$

   ii) $f^{-1}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = f^{-1}(\mathrm{A}) \cap f^{-1}(\mathrm{B})$

5) Εστω $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, και $\mathcal{R} = \{(a,b) \mid f(a) = f(b)\} \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{A}$. Δείξτε ότι η $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο A.

6) Εστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = \sqrt{x}$. Βρείτε τη σύνθεση $g \circ f$.

2.4. Φυσικοί Αριθμοί. Αρχή της Επαγωγής

Τους αριθμούς 0,1,2,... τους λέμε φυσικούς. Το σύνολο των φυσικών το συμβολίζουμε με N. Αυτό έχει την εξής δυνατότητα: αν ένας αριθμός $n \in \mathrm{N}$ τότε και ο αριθμός $n+1 \in \mathrm{N}$. Θα δεχθούμε σαν *αξίωμα* την παρακάτω, διαισθητικά προφανή ιδιότητα των φυσικών αριθμών:

Αρχή του ελαχίστου: Κάθε μη κενό υποσύνολο του συνόλου N έχει ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή γιά κάθε $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{N}$, $\mathrm{X} \neq \emptyset$ υπάρχει $n \in \mathrm{X}$ τέτοιο ώστε γιά κάθε $m \in \mathrm{X}$ ισχύει $n \leq m$.

Με βάση την αρχή του ελαχίστου αποδεικνύουμε την αρχή της επαγωγής, που είναι η σημαντικότερη αρχή που αφορά τους φυσικούς. Αυτή η αρχή έχει πολλές διατυπώσεις. Μια από αυτές είναι:

Αρχή της επαγωγής: Εστω $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{N}$ τέτοιο ώστε:

1) $0 \in \mathrm{X}$, και

2) γιά κάθε φυσικό, n, αν $n \in \mathrm{X}$ τότε $(n+1) \in \mathrm{X}$

Τότε το X=N.

Εστω ότι το $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{N}$ έχει τις ιδιότητες 1) και 2). Απο την 1) βλέπουμε ότι $0 \in \mathrm{X}$. Το 2) ισχύει γιά κάθε φυσικό άρα γιά τον 0 έχουμε: $0 \in \mathrm{X} \Rightarrow 1 \in \mathrm{X}$. Αρα $1 \in \mathrm{X}$. Συνεχίζοντας έτσι βλέπουμε ότι $2 \in \mathrm{X}$, $3 \in \mathrm{X}$ κ.ο.κ. άρα $\mathrm{X} = \mathrm{N}$. Ας αποδείξουμε τώρα αυστηρά την αρχή της επαγωγής από την αρχή του ελαχίστου.

Ας υποθέσουμε ότι $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{N}$ και ότι το X έχει τις ιδιότητες 1) και 2). Ας υποθέσουμε ότι $X \neq \mathrm{N}$, δηλαδή ότι υπάρχουν φυσικοί που δεν ανήκουν στο X. Αυτό σημαίνει ότι το συμπλήρωμα $\mathrm{N} - \mathrm{X}$ δεν είναι κενό. Αρα υπάρχει $n_0 \in \mathrm{N} - \mathrm{X}$ που είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\mathrm{N} - \mathrm{X}$. Επειδή $0 \in \mathrm{X}$ έχουμε $n_0 > 0$, άρα $n_0 = m + 1$ γιά κάποιο $m \in \mathrm{N}$. Ο αριθμός $m \notin \mathrm{N} - \mathrm{X}$ άρα $m \in \mathrm{X}$. Απο την ιδιότητα 2) έχουμε όμως ότι $m + 1 \in \mathrm{X}$. Επεται ότι $n_0 \in \mathrm{X}$ και $n_0 \in \mathrm{N} - \mathrm{X}$, άτοπο. Αρα η υπόθεσή μας $\mathrm{X} \neq \mathrm{N}$ μας οδήγησε σε άτοπο.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η αρχή του ελαχίστου είναι ισοδύναμη με την αρχή της επαγωγής, δηλαδή αν δεχτούμε ότι αληθεύει η αρχή της επαγωγής τότε μπορούμε να αποδείξουμε την αρχή του ελαχίστου. Πραγματικά, έστω $\mathrm{X} \neq \emptyset, \mathrm{X} \subseteq \mathrm{N}$. Ας υποθέσουμε ότι το X δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Θεωρούμε το σύνολο S που αποτελείται από τους φυσικούς που είναι μικρότεροι από όλα τα στοιχεία του X, δηλαδή

$$k \in S \Leftrightarrow \text{γιά κάθε } m \in \mathrm{X} : k < m$$

Παρατηρούμε ότι $0 \in S$ (αλλιώς θάταν ελάχιστο στοιχείο του X). Εστω ότι $n \in S$. Τότε όλα τα στοιχεία του X είναι μεγαλύτερα από το n. Απο την υπόθεση ότι το X δεν έχει ελάχιστο στοιχείο έπεται ότι $n+1 \notin X$, άρα όλα τα στοιχεία του X είναι μεγαλύτερα από $n+1$. Αυτό σημαίνει ότι $n+1 \in S$. Η υπόθεση λοιπόν $n \in S$ συνεπάγεται ότι $n+1 \in S$. Με βάση την αρχή της επαγωγής λοιπόν συμπεραίνουμε ότι $S = \mathrm{N}$, και άρα $X = \emptyset$ που είναι άτοπο.

Μια άλλη διατύπωση της αρχής της επαγωγής είναι η ακόλουθη. Εστω Φ μια ιδιότητα των φυσικών τέτοια ώστε: 1) $\Phi(0)$, δηλαδή ο 0 έχει την ιδιότητα Φ, και 2) γιά κάθε φυσικό n: αν $\Phi(n)$ τότε $\Phi(n+1)$, δηλαδή αν το n έχει την ιδιότητα Φ τότε και το $n+1$ έχει την ιδιότητα Φ. Τότε όλοι οι φυσικοί έχουν την ιδιότητα Φ. Η παραπάνω διατύπωση της αρχής της επαγωγής λέγεται και επαγωγική απόδειξη.

<u>Παραδείγματα:</u> 1) Θα δείξουμε ότι γιά κάθε $n \in N : n < 2^n$. Εστω $\Phi(n)$ η συνθήκη: $n < 2^n$. Προφανώς $\Phi(0)$, γιατί $0 < 2^0 = 1$. Ας υποθέσουμε την $\Phi(n)$, δηλαδή $n < 2^n$ τότε $2n < 2^{n+1}$ και επειδή $n+1 \leq n+n$ έχουμε

$$n+1 \leq n+n \leq 2n < 2^{n+1} \text{ ή } n+1 < 2^{n+1}$$

άρα έχουμε την $\Phi(n+1)$. Επομένως $n < 2^n$ γιά κάθε $n \in N$.

2) *Δείξτε ότι* $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \; n \geq 1$

i) *Το βασικό βήμα:* Για $n = 1$, έχουμε

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

ii) *Το επαγωγικό βήμα:* Εστω ότι

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Εχουμε ότι $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$

$$= \frac{(n+1[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$$

Αρα η πρόταση $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ισχύει γιά κάθε $n \geq 1$.
Η αρχή της Επαγωγής μπορεί να διατυπωθεί με μια αλλη μορφή που είναι επίσης ισοδύναμη με την αρχή του Ελαχίστου (αν και φαίνεται πιο ισχυρή από την πρώτη διατύπωση).

Αρχή Επαγωγής (β' μορφή) Εστω $X \subseteq N$ και ας υποθέσουμε ότι:
1) $0 \in X$
2) γιά κάθε $n \in N : \{0, 1, 2, \ldots, n\} \subseteq X \Rightarrow (n+1) \in X$
(δηλαδή από το γεγονός ότι όλοι οι αριθμοί $k \leq n$ ανήκουν στο X συνεπάγεται $n + 1 \in X$). Τότε X=N.

Παράδειγμα: Θα δείξουμε ότι κάθε φυσικός n έχει την ιδιότητα: "είτε $n = 1$ είτε έχει πρώτο διαιρέτη ", αν $n \neq 0$. Εστω X το σύνολο όλων των φυσικών που ικανοποιούν την πιο πάνω πρόταση (ιδιότητα). Προφανώς $1 \in X$. Ας υποθέσουμε ότι $\{1, 2, \ldots, n\} \subseteq X$. Αν ο αριθμός $n + 1$ είναι πρώτος τότε $(n+1) \in X$. Αν ο $n+1$ δεν είναι πρώτος τότε γράφεται σαν γινόμενο $n + 1 = k \cdot m$ όπου $1 < k < n + 1$ και $1 < m < n + 1$. Επειδή $k \in X$ και δεν είναι ίσος με 1 έχουμε ότι ο k έχει πρώτο διαιρέτη. Κάθε διαιρέτης του k, είναι και διαιρέτης του $n + 1$. Η υπόθεση λοιπόν ότι όλοι οι αριθμοί $k \leq n$ ανήκουν στο X συνεπάγεται ότι $(n+1) \in X$. Αυτή η παρατήρηση και το γεγονός ότι $1 \in X$ μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι $X = N$ με βάση την β' μορφή της αρχής της επαγωγής.

Συχνά χρησιμοποιείται μια γενικευμένη μορφή της αρχής της επαγωγής. Οταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια ιδιότητα Φ την έχουν όλοι οι φυσικοί n οι μεγαλύτεροι από τον $k \in N$, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο $k + 1$ έχει την ιδιότητα Φ και ότι γιά κάθε $n \geq k+1$: "αν $\Phi(n)$ τότε $\Phi(n+1)$". Δηλαδή αν θέλουμε να δείξουμε ότι το σύνολο $X \subseteq N$ είναι το $N - \{0, 1, \ldots, k\}$ τότε
1) Δείχνουμε ότι $k + 1 \in X$, και ότι
2) γιά κάθε $n \geq k+1 : n \in X \Rightarrow (n+1) \in X$.

Παράδειγμα: Για $n \geq 3$ ισχύει $2n + 1 \leq n^2$.
Πράγματι γιά n=3 έχουμε $7 \leq 9$. Παρατηρούμε ότι

$$2n+1 \leq n^2 \Rightarrow 2n+1+2 \leq n^2+2 \leq n^2+2n+1 \Rightarrow 2(n+1)+1 \leq (n+1)^2,$$

δηλαδή ότι γιά κάθε φυσικό n αν $2n + 1 \leq n^2$ τότε $2(n + 1) + 1 \leq (n + 1)^2$. Μαζί με το $2 \cdot 3+1 < 3^2$, έχουμε ότι γιά κάθε φυσικό $n \geq 3$ ισχύει $2n+1 \leq n^2$.

Ασκήσεις

1) Δείξτε ότι αν το σύνολο A έχει n στοιχεία τότε το $\mathcal{P}(A)$ έχει 2^n στοιχεία.

2) Δείξτε ότι γιά κάθε $n \in N, n \geq 1$

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \times X = (A_1 \times X) \cup (A_2 \times X) \cup \ldots \cup (A_n \times X)$$

3) Δείξτε ότι ο $n^3 + 2n$ είναι διαιρετός από το 3 γιά όλα τα $n \geq 1$.

4) Δείξτε ότι: $n^2 < 2^n$ γιά $n \geq 5$

5) Δείξτε ότι:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

γιά κάθε $n \geq 1$.

2.5. Ισοδυναμία συνόλων. Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα.

Με $|X|$ συμβολίζουμε τον αριθμό των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου X, π.χ. $|\{a_1, a_2, a_3\}| = 3$. Λέμε ότι δύο σύνολα X και Y είναι *ισοδύναμα* και γράφουμε $X \sim Y$ όταν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων των συνόλων X και Y, δηλαδή όταν υπάρχει $f : X \xrightarrow[\text{επί}]{1\text{-}1} Y$. Προφανώς γιά δύο πεπερασμένα σύνολα A και B έχουμε $A \sim B \iff |A| = |B|$.

Παραδείγματα: 1) Η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $f(x) = 2x$ γιά $x \in \mathrm{N}$ είναι μια $f : \mathrm{N} \xrightarrow[\text{επί}]{1\text{-}1} \{2x \mid x \in \mathrm{N}\}$ Βλέπουμε λοιπόν ότι το σύνολο N και το σύνολο των αρτίων φυσικών είναι ισοδύναμα.

2) Το σύνολο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και το $\mathbf{R}$ είναι ισοδύναμα επειδή έχουμε $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \xrightarrow[\text{επί}]{1\text{-}1} \mathbf{R}$, $f(x) = \varepsilon\varphi x$.

Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

1) $X \sim X$

2) $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$
3) $X \sim Y$ και $Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$.

Πραγματικά η 1) ισχύει επειδή έχουμε $i_x : X \xrightarrow[\text{επί}]{1\text{-}1} X$ όπου i_x η ταυτοτική απεικόνιση στο X. Για την 2) αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν $f : X \xrightarrow[\text{επί}]{1\text{-}1} Y$ τότε $f^{-1} : Y \xrightarrow[\text{επί}]{1\text{-}1} X$. Ξέρουμε επίσης ότι αν $f : X \xrightarrow[\text{επί}]{1\text{-}1} Y$ και $g : Y \xrightarrow[\text{επί}]{1\text{-}1} Z$ τότε $g \circ f : X \xrightarrow[\text{επί}]{1\text{-}1} Z$. Αυτό αποδεικνύει την 3).

Εστω $N_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ γιά $k \in N, k > 0$. Τα σύνολα N_k είναι *αρχικά* τμήματα του συνόλου των φυσικών. Ενα σύνολο λέγεται *πεπερασμένο* όταν είναι ισοδύναμο με κάποιο από τα σύνολα N_k. Εύκολα βλέπουμε ότι $X \sim N_k \Leftrightarrow |X| = k$. Το σύνολο N των φυσικών δεν είναι πεπερασμένο. Τα σύνολα που δεν είναι πεπερασμένα τα λέμε *άπειρα*. Μεταξύ των απείρων συνόλων θα ξεχωρίσουμε αυτά τα σύνολα που δέχονται μια "αρίθμηση" με τη βοήθεια των φυσικών. Ενα σύνολο X λέγεται *αριθμήσιμο* όταν $X \sim N$, δηλαδή όταν υπάρχει $f : X \xrightarrow[\text{επί}]{1\text{-}1} N$. Ολα τα άπειρα σύνολα δεν είναι αριθμήσιμα. Αν το X είναι αριθμήσιμο τότε γράφουμε $|X| = \aleph_0$.

<u>Παραδείγματα:</u> 1) Το N είναι αριθμήσιμο.
2) Το σύνολο A των περιττών φυσικών είναι αριθμήσιμο. Πράγματι η συνάρτηση $f(k) = 2k + 1$ δίνει την ισοδυναμία του A με το N.
3) Η συνάρτηση $f : N \to Z$ που ορίζεται από το

$$f(n) = \begin{cases} k, & \text{αν } n = 2k \\ -k, & \text{αν } n = 2k - 1 \end{cases}$$

είναι $1 - 1$ και επί. Αρα έχουμε $N \sim Z$, δηλαδή το Z είναι αριθμήσιμο.
4) Το σύνολο $N \times N$ είναι αριθμήσιμο αφού η συνάρτηση $g(n, m) = 2^n \cdot (2m + 1) - 1$ είναι $1 - 1$ και επί από το $N \times N$ στο N.

Πρόταση: Αν X,Y είναι αριθμήσιμα τότε και το σύνολο $X \times Y$ είναι αριθμήσιμο. Πράγματι, εστω $f : N \xrightarrow[\text{επί}]{1\text{-}1} X$ και $g : N \xrightarrow[\text{επί}]{1\text{-}1} Y$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε μιά $h : N \times N \xrightarrow[\text{επί}]{1\text{-}1} X \times Y$ με $h(n, m) = (f(n), g(m))$. Αρα $X \times Y \sim N \times N$ και επειδή $N \times N \sim N$ έχουμε $X \times Y \sim N$.

Το σύνολο **Q** των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο. Αυτό φαίνεται από την παρακάτω απόδειξη. Η συνάρτηση $f(\frac{k}{m}) = (k, m)$, όπου $m > 0$ και $|k|, m$

πρώτοι μεταξύ τους, απεικονίζει το $\mathbf{Q}$ στο $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ και είναι $1-1$. Επειδή όμως $\mathbf{Z} \times \mathbf{N} \sim \mathbf{N}$, το $\mathbf{Q}$ θα είναι το πολύ αριθμήσιμο και αφού είναι άπειρο θα έχουμε $\mathbf{Q} \sim \mathbf{N}$.

Παραπάνω γνωρίσαμε πολλά άπειρα σύνολα που είναι αριθμήσιμα. Ολα τα άπειρα σύνολα δεν είναι αριθμήσιμα, γιά παράδειγμα το ανοικτό διάστημα $(0,1) \subseteq \mathbf{R}$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών μεταξύ 0 και 1 *δεν* είναι αριθμήσιμο. Ας υποθέσουμε ότι το $(0,1)$ είναι αριθμήσιμο (γιά να καταλήξουμε σε άτοπο). Τοτε θα είχαμε όλα τα στοιχεία του $(0,1)$ σε μια λίστα $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ που θα μας δινόταν από την ισοδυναμία $(0,1) \sim \mathbf{N}$.

Συνεπώς θα μπορούσαμε να εξαντλήσουμε όλους τους πραγματικούς μεταξύ 0 και 1 σ'αυτή τη λίστα, δηλαδή κάθε πραγματικός $a \in \mathbf{R}$ με $0 < a < 1$, θα ήταν κάποιος a_i με $i \in \mathbf{N}$. Θα είχαμε λοιπόν τη λίστα:

$$\begin{array}{rl}
a_0 = & 0, a_{00}\ a_{01}\ a_{02}\ a_{03} \cdots \\
a_1 = & 0, a_{10}\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \cdots \\
a_2 = & 0, a_{20}\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \cdots \\
\ldots & \ldots \\
a_n = & 0, a_{n0}\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3} \cdots\ a_{nn} \cdots \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

γράφοντας σαν δεκαδικό κάθε $a_i, i \in N$, όπου a_{ij} είναι το j-οστό ψηφίο του i-στού αριθμού στην λίστα. Ας θεωρήσουμε τώρα τον αριθμό

$$0,\ b_0\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4 \cdots \text{ όπου}$$

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } a_{ii} = 9 \\ 9 - a_{ii} & \text{αν } a_{ii} = 0, 1, 2, \cdots, 8 \text{ γιά όλα τα } i \in N \end{cases}$$

Προφανώς, ο αριθμός $0,\ b_0\ b_1\ b_2 \cdots$ είναι ένας πραγματικός μεταξύ 0 και 1, ο οποίος είναι διαφορετικός από τον κάθε αριθμό στη λίστα. Αυτό συμβαίνει γιάτί διαφέρει από τον a_0 στο μηδενικό ψηφίο, από a_1 στο πρώτο ψηφίο, από τον a_2 στο δεύτερο ψηφίο κ.ο.κ., δηλαδή διαφέρει από τον a_k στο k-οστό ψηφίο γιατί $b_k \neq a_{kk}$. Αρα ο αριθμός $b = 0,\ b_0\ b_1\ b_2 \cdots$ δεν είναι στη λίστα. Ατοπο, γιατί στη λίστα ευρίσκεται κάθε πραγματικός μεταξύ 0 και 1. Συνεπώς το διάστημα $(0,1) \subseteq \mathbf{R}$ *δεν* είναι αριθμήσιμο. Μπορούμε να δείξουμε ότι $(0,1) \sim \mathbf{R}$, και άρα και το $\mathbf{R}$ *δεν* είναι αριθμήσιμο.

Ασκήσεις

Δείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο X τέτοιο ώστε $X \sim \mathcal{P}(X)$.

Κεφάλαιο 3

Λογική

3.1. Γενικά

Μια οδηγία γιά να κάνουμε κάτι αν μια πρόταση είναι αληθής και να κάνουμε κάτι άλλο διαφορετικά, λέγεται *υποθετική* οδηγία. Η δύναμη των υπολογιστών εν μέρει οφείλεται στην ικανότητά τους να πραγματοποιούν υποθετικές οδηγίες. Για να πραγματοποιήσει μια υποθετική οδηγία ένας υπολογιστής θα χρειασθεί να αποφασίσει την αλήθεια ή το ψεύδος μιας πρότασης. Συνεπώς στα διακριτά μαθηματικά είναι χρήσιμο να μελετήσουμε τις προτάσεις, πώς συνδυάζονται μεταξύ τους και πώς αποφασίζουμε ότι μια πρόταση είναι ισοδύναμη με μια άλλη.

Οταν χρησιμοποιούμε την λέξη *πρόταση*, θα εννοούμε από δω και μπρος μια μη αντιφατική αποφαντική πρόταση. Για παράδειγμα έστω οι εκφράσεις

- " Πέντε και τρία μας κάνει οκτώ "
- " Τρία και δύο μας κάνει επτά "
- " Το πέντε και δύο είναι μεγάλο "
- " Αυτό το βιβλίο είναι μεγάλο "
- " Πήγες πουθενά χθες βράδυ; "

Οι δύο πρώτες είναι προτάσεις. Η τρίτη δεν είναι, γιατί δεν ξέρουμε ως προς τι είναι μεγάλο. Το ίδιο και γιά τη τέταρτη. Ως προς την πέμπτη δεν είναι αποφαντική. Συνεπώς μια πρόταση είναι είτε αληθής είτε ψευδής.

3.2. Προτασιακός Λογισμός.

Θα μελετήσουμε την γλώσσα Γ του προτασιακού λογισμού. Η Γ είναι φτωχή σε σύγκριση με τη φυσική γλώσσα. Δεν έχει γράμματα με τα οποία φτιάχνονται λέξεις, αλλά μόνο σύμβολα-προτάσεις που με τη χρήση μερικών συνδετικών συμβόλων-λέξεων μας δίνουν νέες προτάσεις. Το σύνολο των συμβόλων της, που συμβολίζουμε με $\Sigma(\Gamma)$, έχει τα εξής στοιχεία:

α) $p_0, p_1, p_2, \cdots$, που λέγονται *προτασιακές μεταβλητές*.

β) $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, που λέγονται *σύνδεσμοι*, αντίστοιχα *άρνηση, σύζευξη, διάζευξη, συνεπαγωγή, ισοδυναμία*.

γ) (,) που λέγονται *παρενθέσεις*, αντίστοιχα *αριστερή παρένθεση, δεξιά παρένθεση*. Το σύνολο των προτασιακών μεταβλητών συμβολίζουμε με $M(\Gamma)$. Οι σύνδεσμοι και οι παρενθέσεις λέγονται *λογικά σύμβολα*, γιατί, όπως θα δούμε, έχουν καθορισμένο νόημα, ενώ οι προτασιακές μεταβλητές μπορούν να ερμηνευθούν με διαφόρους τρόπους.

Ορισμός: *Έκφραση* της Γ ονομάζεται μια πεπερασμένη ακολουθία από σύμβολά της π.χ.

$$\vee \rightarrow p_0\ ,\ ) \wedge p_1 \leftrightarrow$$

Με $E(\Gamma)$ συμβολίζουμε το σύνολο των εκφράσεων της Γ. Βέβαια, μερικές μόνο από τις εκφράσεις της Γ θα παίξουν τον ρόλο που παίζουν οι προτάσεις σε μια φυσική γλώσσα. Αυτές περιγράφονται από τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός: Μια έκφραση φ λέγεται *προτασιακός τύπος* αν και μόνο αν

i) είναι προτασιακή μεταβλητή, ή

ii) είναι της μορφής $(\neg\beta), (\beta \wedge \gamma), (\beta \vee \gamma), (\beta \rightarrow \gamma)$ $(\beta \leftrightarrow \gamma)$ όπου β,γ προτασιακοί τύποι ήδη κατασκευασμένοι.

Να μερικοί, προτασιακοί τύποι:

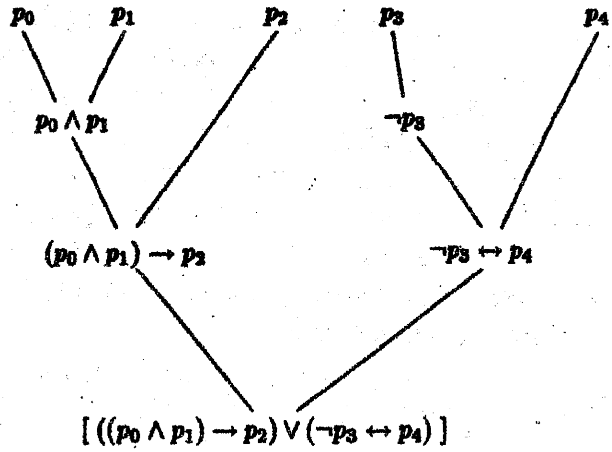
$$p_5, p_0 \wedge p_3,\ (\neg p_1) \vee (p_0 \rightarrow p_2)$$

Το σύνολο των προτασιακών τύπων της Γ συμβολίζεται με $T(\Gamma)$.

Είναι προφανές ότι σε κάθε προτασιακό τύπο αντιστοιχεί ένα δενδροδιάγραμμα, ένα διάγραμμα δηλαδή που δείχνει πώς κατασκευάζεται ο τύπος αυτός από προτασιακές μεταβλητές με τη βοήθεια των λογικών συμβόλων, π.χ. στον προτασιακό τύπο

$$[((p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2) \vee (\neg p_3 \leftrightarrow p_4)]$$

αντιστοιχεί το ακόλουθο διάγραμμα:



Επειδή το Τ(Γ) ορίσθηκε αναδρομικά όταν θέλουμε να δείξουμε ότι όλοι οι προτασιακοί τύποι έχουν μια ιδιότητα, μπορούμε να το κάνουμε επαγωγικά όπως φαίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα (Αρχή της επαγωγής γιά το Τ(Γ)): Αν $\mathcal{A} \subseteq T(\Gamma)$ τέτοιο που

i) $M(\Gamma) \subseteq \mathcal{A}$

ii) γιά κάθε $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$, οι $(\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi)$ $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ανήκουν στο $\mathcal{A}$,
τότε $\mathcal{A} = T(\Gamma)$.

Μια ερμηνεία της Γ είναι η εξής:

α) Οι προτασιακές μεταβλητές αντιστοιχούν σε στοιχειώδεις προτάσεις της ελληνικής γλώσσας, προτάσεις δηλαδή που

  i) δεν περιέχουν μικρότερες, και

  ii) είναι αληθείς ή ψευδείς.

β) Οι σύνδεσμοι αντιστοιχούν στις φράσεις *δεν*, *και*, *ή*, *αν ... τότε ...*, ... *αν και μόνον αν ...*.

γ) Οι παρενθέσεις αντιστοιχούν σε σημεία στίξεως που υποδηλώνουν την αρχή και το τέλος μιας πρότασης. Μ'αυτή την ερμηνεία οι προτασιακοί τύποι της Γ αντιστοιχούν στις προτάσεις της ελληνικής γλώσσας.

Ορισμός: *Αποτίμηση* καλείται μια συνάρτηση $v : M(\Gamma) \to \{A, \Psi\}$, όπου τα Α, Ψ καλούνται *τιμές αλήθειας* και αντιστοιχούν στις έννοιες *αληθής, ψευδής*.

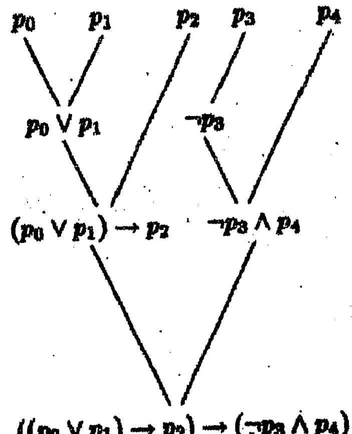
Η απόδοση μιας τιμής αλήθειας, σε κάθε προτασιακό τύπο της Γ, δηλαδή η εύρεση μιας συνάρτησης $\bar{v} : T(\Gamma) \to \{A, \Psi\}$, όταν έχει δοθεί μια αποτίμηση v, γίνεται σύμφωνα με τους κανόνες-πίνακες παρακάτω. Οι πίνακες αυτοί καλούνται *πίνακες αλήθειας* και υποβάλλονται από την ερμηνεία της Γ.

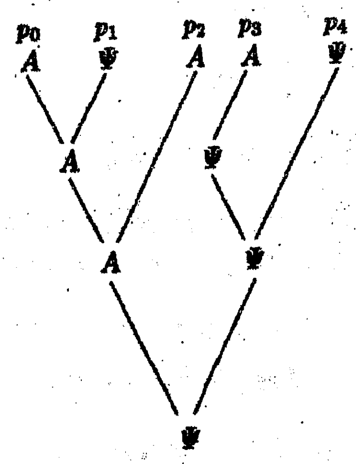
Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται γιά τη στήλη που αντιστοιχεί στην συνεπαγωγή. Δοσμένης μιας αποτίμησης v, υπάρχει επέκταση $\bar{v}$ της v που υπακούει στους κανόνες-πίνακες που ακολουθούν.

$\bar{v}(\varphi)$	$\bar{v}(\neg\varphi)$
Α	Ψ
Ψ	Α

$\bar{v}(\varphi)$	$\bar{v}(\psi)$	$\bar{v}(\varphi \wedge \psi)$	$\bar{v}(\varphi \vee \psi)$	$\bar{v}(\varphi \to \psi)$	$\bar{v}(\varphi \leftrightarrow \psi)$
Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α

<u>Παράδειγμα:</u> Εστω v μια αποτίμηση τέτοια που $v(p_0) = v(p_2) = v(p_3) = A$ και $v(p_1) = v(p_4) = \Psi$. Τότε βρίσκουμε την $\bar{v}(((p_0 \vee p_1) \to p_2) \to (\neg p_3 \wedge p_4))$ ως εξής:





Οταν έχουμε μια αποτίμηση v, γιά να βρούμε την $\bar{v}(\varphi)$ χρησιμοποιούμε το δενδροδιάγραμμα του φ. Προφανώς η $\bar{v}(\varphi)$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές αλήθειας που η v αντιστοιχεί στις πεπερασμένες το πλήθος προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στο φ.

Ορισμός: Εστω $T \subseteq T(\Gamma)$. Θα λέμε ότι:

α) η αποτίμηση v *ικανοποιεί* τον φ αν και μόνον αν $\bar{v}(\varphi) = A$ και η αποτίμηση v *ικανοποιεί* το T αν και μόνον αν η v ικανοποιεί κάθε στοιχείο του T.

β) το T είναι *ικανοποιήσιμο* αν και μόνον αν υπάρχει αποτίμηση που το ικανοποιεί.

γ) ο φ είναι *ταυτολογία* αν και μόνον αν κάθε αποτίμηση ικανοποιεί τον φ.

δ) ο φ είναι *αντίφαση* αν ο $\neg\varphi$ είναι ταυτολογία.

Ορισμός: $T \subseteq T(\Gamma)$, $\varphi \in T(\Gamma)$. Θα λέμε ότι το T *ταυτολογικά συνεπάγεται τον* φ, και θα γράφουμε $T \models \varphi$, αν κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το T ικανοποιεί και τον φ. Προφανώς $T \models \varphi$ γιά κάθε $\varphi \in T$.

Παρατηρήσεις: i) $\emptyset \models \varphi$ αν ο φ είναι ταυτολογία, αφού κάθε αποτίμηση ικανοποιεί το $\emptyset$.

ii) Αν το T δεν είναι ικανοποιήσιμο, τότε προφανώς $T \models \varphi$, γιά κάθε φ.

iii) Αν $T = \{\psi\}$ και $T \models \varphi$, τότε γράφουμε $\psi \models \varphi$ και λέμε ότι ο ψ *ταυτολογικά συνεπάγεται* τον φ.

iv) Αν $\varphi \models \psi$ και $\psi \models \varphi$, τότε γράφουμε $\varphi \models\!\dashv \psi$ και λέμε ότι οι φ, ψ είναι *ταυτολογικά ισοδύναμοι*.

Θα δούμε τώρα ένα αλγόριθμο με βάση τον οποίο αποφασίζουμε αν ένα πεπερασμένο σύνολο προτασιακών τύπων ταυτολογικά συνεπάγεται ένα προτασιακό τύπο ή όχι. Εστω λοιπόν ότι έχουμε ένα πεπερασμένο $T \subseteq T(\Gamma)$ και ένα τύπο φ. Μας ενδιαφέρουν μόνο οι τιμές αλήθειας που μια αποτίμηση αντιστοιχεί στις προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στα στοιχεία του $T \cup \{\varphi\}$. Εστω ότι n διαφορετικές προτασιακές μεταβλητές εμφανίζονται στα στοιχεία του $T \cup \{\varphi\}$. Κατασκευάζουμε ένα πίνακα αλήθειας με 2^n σειρές και m στήλες, όπου m ο αριθμός των διαφορετικών προτασιακών τύπων που εμφανίζονται στα δενδροδιαγράμματα των στοιχείων του $T \cup \{\varphi\}$. Αφού προσδιορίσουμε τις τιμές αλήθειας σ'όλες τις στήλες, εξετάζουμε τις σειρές γιά να δούμε αν κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το T ικανοποιεί και τον φ ή όχι.

Παραδείγματα: 1) Θα δείξουμε ότι

$$(p \wedge q) \rightarrow s \models p \rightarrow (q \rightarrow s)$$

p	q	s	$p \wedge q$	$q \to s$	$p \wedge q \to s$	$p \to (q \to s)$
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α

Απο τις δύο τελευταίες στήλες βλέπουμε ότι ο $p \to (q \to s)$ παίρνει την τιμή αλήθειας Α κάθε φορά που ο $(p \wedge q) \to s$ παίρνει την τιμή Α, οπότε έχουμε το ζητούμενο.

2) Θα δείξουμε ότι ο τύπος $p \to (q \to p)$ είναι ταυτολογία:

p	q	$q \to p$	$p \to (q \to p)$
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α

Απο την τελευταία στήλη βλέπουμε ότι ο προτασιακός μας τύπος παίρνει πάντα την τιμή Α. Αρα είναι ταυτολογία.

Μερικές γνωστές ταυτολογίες είναι οι εξής:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi \\ \varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \varphi \end{array}\right\} \text{αντιμεταθετικότητα}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \\ \varphi \vee (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \vee \chi \end{array}\right\} \text{προσεταιριστικότητα}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \wedge (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \\ \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \end{array}\right\} \text{επιμεριστικότητα}$$

$$\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi \quad \text{διπλή άρνηση}$$

$$\neg(\varphi \to \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \neg\psi$$

$$\left.\begin{array}{l} \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi \\ \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi \end{array}\right\} \text{νόμοι του De Morgan}$$

$\varphi \vee \neg\varphi$ νόμος της απόκλεισης του τρίτου

$(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$ αντιθετοαντιστροφή.

Ορισμός: Εστω $k \in N$. *Συνάρτηση Boole με k+1 μεταβλητές* λέγεται κάθε συνάρτηση $f : \{A, \Psi\}^{k+1} \to \{A, \Psi\}$. Είναι προφανές ότι σε κάθε προτασιακό τύπο με $k+1$ διαφορετικές προτασιακές μεταβλητές αντιστοιχεί μια συνάρτηση Boole με $k+1$ μεταβλητές. Για το αντίστροφο έχουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα: Αν f μια συνάρτηση Boole με $k+1$ μεταβλητές, $k \in \mathrm{N}$, τότε υπάρχει προτασιακός τύπος φ στο οποίο εμφανίζονται οι $p_0, p_1, \ldots, p_k$ τέτοιος που γιά κάθε αποτίμηση v να ισχύει: $\bar{v}(\varphi) = f(v(p_0), v(p_1), \cdots, v(p_k))$, δηλαδή ο πίνακας αληθείας του φ να περιγράφει πλήρως την f. Θα δείξουμε με ένα παράδειγμα πως βρίσκεται ο τύπος φ. Εστω f η συνάρτηση Boole με τρείς μεταβλητές που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{array}{ll} f(A,A,A) = \Psi & f(\Psi,A,A) = A \\ f(A,A,\Psi) = A & f(\Psi,A,\Psi) = \Psi \\ f(A,\Psi,A) = A & f(\Psi,\Psi,A) = A \\ f(A,\Psi,\Psi) = \Psi & f(\Psi,\Psi,\Psi) = \Psi \end{array}$$

Προσδιορίζουμε κατ'αρχήν τα στοιχεία του $\{A, \Psi\}^3$ στα οποία η f αντιστοιχεί την τιμή A. Αυτά είναι τα εξής: (A,A,Ψ), (A,Ψ,A), (Ψ,A,A), (Ψ,Ψ,A). Σε κάθε μια απ'αυτές τις διατεταγμένες τριάδες αντιστοιχούμε ένα προτασιακό τύπο στον οποίο εμφανίζονται μόνο οι p_0, p_1, p_2 ως εξής: Αν το πρώτο στοιχείο της τριάδας είναι A, τότε παίρνουμε την p_0, ενώ αν είναι Ψ, παίρνουμε την $\neg p_0$. Ομοια γιά τα άλλα δύο στοιχεία της τριάδας και τελικά παίρνουμε την σύζευξη των τριών στοιχειωδών προτασιακών τύπων που προκύπτουν. Ετσι στην (A,A,Ψ) αντιστοιχεί ο προτασιακός τύπος $p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2$.

Η διάζευξη των προτασιακών τύπων που αντιστοιχούν στις τέσσερεις διατεταγμένες τριάδες είναι ο προτασιακός τύπος

$$(p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_0 \wedge p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2)$$

του οποίου ο πίνακας αλήθειας περιγράφει πλήρως την f.

Οταν ο πίνακας αλήθειας του φ περιγράφει πλήρως την συνάρτηση Boole f, θα λέμε ότι ο φ *αντιπροσωπεύει* την f. Συνήθως υπάρχουν περισσότεροι από ένας προτασιακοί τύποι που αντιπροσωπεύουν την ίδια συνάρτηση Boole f. Θα λέμε ότι ένας προτασιακός τύπος είναι σε *κανονική διαζευκτική μορφή* αν είναι της μορφής $\psi_0 \vee \psi_1 \vee \cdots \vee \psi_n$ όπου κάθε $\psi_i, i = 0, \cdots, n$ είναι σύζευξη προτασιακών μεταβλητών ή αρνήσεων προτασιακών μεταβλητών.

Απο το παραπάνω θεώρημα έπεται ότι κάθε προτασιακός τύπος είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με ένα προτασιακό τύπο σε κανονική διαζευκτική μορφή.

Ορισμός: Εστω $C \subseteq \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Θα λέμε ότι το C είναι *πλήρες* αν κάθε προτασιακός τύπος είναι ταυτολογικά ισοδύναμος μ'ένα προτασιακό τύπο που περιέχει μόνο συνδέσμους που ανήκουν στο C. Οπως είδαμε το $\{\neg, \wedge, \vee\}$ είναι πλήρες.

Ασκήσεις

1) Ποιός από τους παρακάτω δύο τύπους ταυτολογικά συνεπάγεται τον άλλο;
$$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow s), (p \wedge (q \wedge s)) \vee [\neg p \wedge ((\neg q) \wedge (\neg s))]$$

2) Είναι ο προτασιακός τύπος $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ μια ταυτολογία;

3) Δείξτε ότι $\{p \rightarrow q, \neg q \vee s\} \models \neg(p \wedge \neg s)$.

4) Δείξτε ότι $\models (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow p)$

5) Βρείτε τύπο σε κανονική διαζευκτική μορφή που να είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον $(p_0 \rightarrow p_1) \wedge (\neg p_0 \rightarrow p_2)$

6) Εστω η συνάρτηση Boole με τρείς μεταβλητές, που ορίζεται από:
$$\begin{array}{ll} g(\mathrm{A},\mathrm{A},\mathrm{A}) = \Psi & g(\Psi,\mathrm{A},\mathrm{A}) = \Psi \\ g(\mathrm{A},\mathrm{A},\Psi) = \Psi & g(\Psi,\mathrm{A},\Psi) = \mathrm{A} \\ g(\mathrm{A},\Psi,\mathrm{A}) = \Psi & g(\Psi,\Psi,\mathrm{A}) = \Psi \\ g(\mathrm{A},\Psi,\Psi) = \mathrm{A} & g(\Psi,\Psi,\Psi) = \mathrm{A} \end{array}$$
Βρείτε ένα προτασιακό τύπο φ που αντιπροσωπεύει την g.

7) Δείξτε ότι τα σύνολα $\{\neg, \wedge\}, \{\neg, \vee\}$ και $\{\neg, \rightarrow\}$ είναι πλήρη σύνολα συνδέσμων.

8) Δείξτε ότι το σύνολο $\{\wedge, \rightarrow\}$ *δεν* είναι πλήρες σύνολο συνδέσμων.

3.3. Πράξεις μεταξύ Συνόλων και Λογικοί σύνδεσμοι.

Στην Αλγεβρα μαθαίνουμε γιά μεταβλητές. Οι εξισώσεις είναι προτάσεις που αφορούν μεταβητές. Για παράδειγμα η εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ όπου x, y φυσικοί, είναι μια πρόταση γιά τις μεταβλητές x και y. Ας υποθέσουμε ότι ρίχνουμε δύο κέρματα. Η πρόταση "Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο και στα δύο κέρματα" προφανώς είναι μια πρόταση και η λέξη αποτέλεσμα παίζει το ρόλο μεταβλητής.

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να είναι μια από τις τέσσερεις δυνατότητες ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ,ΓΓ και μόνο όταν έχουμε ΚΚ ή ΓΓ γίνεται η παραπάνω πρόταση αληθής. Το *σύμπαν* γιά μια πρόταση ή μια συζήτηση είναι το σύνολο του οποίου τα στοιχεία μελετάμε. Στην προκειμένη περίπτωση με τα κέρματα το σύμπαν είναι το {ΚΚ,ΚΓ,ΓΚ,ΓΓ}. Εαν έχουμε μια πρόταση γιά μια μεταβλητή x θα συμβολίζουμε την πρόταση με $p(x)$ όπου η μεταβλητή x θα τρέχει σε κάποιο σύμπαν.

Το σύνολο όλων των τιμών του x στο σύμπαν μας που κάνουν την πρόταση $p(x)$ αληθή λέγεται το *σύνολο αλήθειας* γιά την p. Για παράδειγμα το σύνολο αλήθειας γιά την πρόταση "Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο και στα δύο κέρματα", όταν ρίχνουμε δύο κέρματα, είναι το {ΚΚ,ΓΓ}.

Εστω ότι το σύμπαν μας είναι οι πραγματικοί αριθμοί, και έστω $p(x)$ η πρόταση " το τετράγωνο του x είναι 4". Τότε το σύνολο αλήθειας της $p(x)$ είναι το $\{-2, 2\}$. Αν τώρα το σύμπαν μας είναι το $Z \times Z$ και η πρόταση $p(x, y)$ είναι η "$x^2 + y^2 = 1$ τότε το σύνολο αλήθειας της $p(x, y)$ είναι το

$$\{(0,1),(1,0),(-1,0),(0,-1)\} \subseteq Z \times Z.$$

Εστω τώρα δύο προτάσεις $p(x)$ και $q(x)$ όπου το x τρέχει σε κάποιο σύμπαν $\mathcal{U}$. Τότε προφανώς οι δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες εφ'όσον έχουν τα ίδια σύνολα αλήθειας. Δηλαδή η ισότητα μεταξύ των συνόλων αλήθειας δύο προτάσεων αντιστοιχεί με το ότι είναι ισοδύναμες. Για παράδειγμα, έστω ότι ρίχνουμε ένα κέρμα τρείς φορές και θέλουμε να βρούμε το σύνολο αλήθειας της πρότασης "Το αποτέλεσμα έχει ακριβώς 2 κορώνες" και το σύνολο αλήθειας της πρότασης "Το αποτέλεσμα έχει ακριβώς μια φορά γράμματα". Το σύμπαν είναι το {ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ}.

Οι δύο παραπάνω προτάσεις έχουν το ίδιο σύνολο αλήθειας {ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ} και άρα είναι ισοδύναμες. Εστω λοιπόν δύο προτάσεις $p(x)$ και $q(x)$.

Το σύνολο αλήθειας γιά την $p(x)$ είναι το $\{x \mid p(x)$ *αληθής*$\}$ και το σύνολο αλήθειας της $q(x)$ είναι το $\{x \mid q(x)$ *αληθής*$\}$. Εχουμε επομένως $\{x \mid p(x)$ *αληθής*$\} = \{x \mid q(x)$ *αληθής*$\}$ αν και μόνον αν $p(x) \leftrightarrow q(x)$.

Αν p και q είναι προτάσεις και P και Q τα σύνολα αλήθειας των, τότε μπορούμε να δείξουμε ότι:
1) το σύνολο $\mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$ είναι το σύνολο αλήθειας της $p \wedge q$,
2) το σύνολο $\mathrm{P} \cup \mathrm{Q}$ είναι το σύνολο αλήθειας της $p \vee q$ και
3) το σύνολο P' είναι το σύνολο αλήθειας της $\neg p$. Θα δείξουμε μόνο το 1) μέρος.

Τα μέρη 2) και 3) αποδεικνύονται παρόμοια. Πρώτα έστω $x \in \mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$. Εχουμε $x \in \mathrm{P} \cap \mathrm{Q} \Rightarrow x \in \mathrm{P}$ *και* $x \in \mathrm{Q} \Rightarrow$ (το x κάνει την p αληθή) και (το x κάνει την q αληθή) $\Rightarrow$ το x κάνει την $p \wedge q$ αληθή $\Rightarrow$ το x ανήκει στο σύνολο αλήθειας της $p \wedge q$.

Εστω τώρα ότι το y ανήκει στο σύνολο αλήθειας της $p \wedge q$. Τότε το y κάνει αληθή την $p \wedge q$ και επομένως πρέπει να κάνει και την p και την q αληθή. Αρα $y \in \mathrm{P}$ και $y \in \mathrm{Q}$. Συνεπώς $y \in \mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$.

Δείξαμε λοιπόν ότι το $\mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$ και το σύνολο αλήθειας της $p \wedge q$ έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, άρα είναι το ίδιο σύνολο.

♦

3.4. Κατηγορηματική Λογική. Ποσοδείκτες

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να ορίσουμε τη σχέση $A \subseteq B$ γιά σύνολα A και B. Ξέρουμε ότι η παραπάνω σχέση λέει ότι κάθε x στο A είναι στο B. Μπορούμε να πούμε, γιά δοσμένο x στο σύμπαν μας, αν το x είναι στο A τότε είναι στο B ή $x \in \mathrm{A} \to x \in \mathrm{B}$. Αλλιώς, γιά όλα τα $x[x \in \mathrm{A} \to x \in \mathrm{B}]$. Γράφουμε $\forall x[x \in \mathrm{A} \to x \in \mathrm{B}]$ αντί γιά την "γιά όλα τα x (στο σύμπαν) αν $x \in \mathrm{A}$ τότε $x \in \mathrm{B}$".

Μια πρόταση του παραπάνω τύπου λέγεται *καθολική πρόταση* και το σύμβολο $\forall$ λέγεται *καθολικός ποσοδείκτης*. Αρα αν $s(x)$ είναι μια πρόταση, γράφουμε $\forall x s(x)$ γιά την πρόταση "γιά όλα τα x, $s(x)$". Επίσης γράφουμε $\exists x s(x)$ γιά την πρόταση "υπάρχει x τέτοιο ώστε $s(x)$". Το σύμβολο $\exists$ λέγεται *υπαρξιακός ποσοδείκτης* και λέμε ότι η $\exists x s(x)$ είναι μια *υπαρξιακή πρόταση*.

<u>Παράδειγμα:</u> Ξαναγράψτε τις παρακάτω προτάσεις με συμβολικό τρόπο, χρησιμοποιώντας τα κάτωθι:

$s(x) =$ "x είναι άρτιος"

$t(x, y) =$ "$x = 2y$"

$p(x) =$ " ο x είναι πρώτος"

$r(x) =$ " $x > 2$"

Το σύμπαν μας είναι οι φυσικοί αριθμοί.

α) Αν ο x είναι άρτιος τότε υπάρχει y τέτοιος ώστε $x = 2y$.

β) Υπάρχει πρώτος x τέτοιος ώστε $x = 2y$ γιά κάποιο y.

γ) Για όλους τους πρώτους x, αν $x > 2$ τότε ο x δεν είναι άρτιος.
Για την α) $s(x) \to \exists y t(x, y)$
γιά την β) $\exists x(p(x) \wedge \exists y t(x, y))$ και
γιά την γ) $\forall x(p(x) \to (r(x) \to \neg s(x)))$

Αν $s(x)$ είναι μια πρόταση γιά το x, τότε η $\forall x s(x)$ είναι *αληθής* αν η $s(x)$ είναι αληθής γιά κάθε x στο σύμπαν. Η $\forall x s(x)$ είναι *ψευδής* αν υπάρχει ένα στοιχείο στο σύμπαν γιά το οποίο η s είναι ψευδής. Δηλαδή η $\forall x s(x)$ είναι αληθής αν το σύνολο αλήθειας της $s(x)$ είναι όλο το σύμπαν.

Η πρόταση $\exists x s(x)$ είναι *αληθής* αν η $s(x)$ είναι αληθής γιά τουλάχιστον ένα x στο σύμπαν. Η $\exists x s(x)$ είναι *ψευδής* αν η $s(x)$ είναι ψευδής γιά όλα τα x, δηλαδή το σύνολο αλήθειας της $s(x)$ είναι κενό.

Παράδειγμα: Αν p, r και s είναι οι προτάσεις του προηγούμενου παραδείγματος, ποιές από τις παρακάτω είναι αληθείς και ποιές ψευδείς;

$$\begin{array}{ll} \alpha)\ \forall x p(x) & \gamma)\ \exists x(p(x) \wedge s(x)) \\ \beta)\ \exists x p(x) & \delta)\ \exists x(p(x) \wedge s(x) \wedge r(x)) \end{array}$$

Η α) είναι ψευδής, γιατί π.χ. ο $x = 4$ δεν είναι πρώτος. Η β) είναι αληθής, γιά παράδειγμα ο $x = 3$. Η γ) αληθής γιά παράδειγμα ο $x = 2$ και η δ) ψευδής.

Θα λέμε ότι δύο προτάσεις p, q με ποσοδείκτες είναι *ισοδύναμες* αν ανεξάρτητα από ποιό σύμπαν επιλέγουμε και τι προτάσεις γιά αυτό το σύμπαν αντικαθιστούμε γιά τα προτασιακά σύμβολα στην p και q, οι τελικές προτάσεις γιά το σύμπαν είναι ισοδύναμες. Για παράδειγμα οι $\neg\forall x s(x)$ και $\exists x(\neg s(x))$ είναι ισοδύναμες.

Ασκήσεις

1) Αν το σύμπαν μας είναι όλοι οι άνθρωποι και $L(x, y)$ σημαίνει ότι "ο x αγαπά τον y" γράψτε συμβολικά την πρόταση "Κανένας δεν αγαπά όλους".

2) Αν το σύμπαν μας είναι όλα τα πράγματα και

   $\mathrm{P}(x)$ σημαίνει "ο x είναι πρόσωπο"

   $\mathrm{T}(x)$ σημαίνει "ο x είναι χρόνος"

   $\mathrm{F}(x, y)$ σημαίνει "μπορείς να χοροιδέψεις τον x την y στιγμή"

   γράψτε συμβολικά τις προτάσεις

   α) Μπορείς να χοροϊδέψεις μερικούς ανθρώπους όλες τις φορές.

   β) Μπορείς να χοροϊδέψεις όλους τους ανθρώπους μερικές φορές.

   γ) Δεν μπορείς να χοροϊδέψεις όλους τους ανθρώπους όλες τις φορές.

3) Αν το σύμπαν μας είναι όλα τα πράγματα και
   $\mathrm{N}(x)$ σημαίνει "ο x είναι αριθμός"
   $\mathrm{I}(x)$ σημαίνει "ο x είναι ενδιαφέρων"
   $<(x, y)$ σημαίνει "ο x είναι μικρότερος του y"
   και 0 είναι μια σταθερά και σημαίνει το μηδέν, γράψτε συμβολικά τις παρακάτω προτάσεις:

   α) Το μηδέν είναι μικρότερο κάθε αριθμού.

   β) Αν κάθε αριθμός είναι ενδιαφέρων, τότε και το μηδέν είναι ενδιαφέρον.

   γ) Κανένας αριθμός δεν είναι μικρότερος του μηδενός.

   δ) Δεν υπάρχει αριθμός τέτοιος ώστε όλοι οι αριθμοί να είναι μικρότεροι από αυτόν.

   ε) Δεν υπάρχει αριθμός τέτοιος ώστε κανένας αριθμός να μην είναι μικρότερος από αυτόν.

3.5. Αλγεβρα Boole

Οι πράξεις μεταξύ υποσυνόλων ενός σύμπαντος $\mathcal{U}$ ικανοποιούν τους παρακάτω αλγεβρικούς νόμους:

$$1)\quad \left.\begin{aligned} A\cup(B\cup C) &= (A\cup B)\cup C \\ A\cap(B\cap C) &= (A\cap B)\cap C \end{aligned}\right\}\text{προσεταιριστικότητα}$$

$$2)\quad \left.\begin{aligned} A\cup B &= B\cup A \\ A\cap B &= B\cap A \end{aligned}\right\}\text{αντιμεταθετικότητα}$$

$$3)\quad \left.\begin{aligned} A\cap(B\cup C) &= (A\cap B)\cup(A\cap C) \\ A\cup(B\cap C) &= (A\cup B)\cap(A\cup C) \end{aligned}\right\}\text{επιμεριστικότητα}$$

$$4)\quad \begin{aligned} A\cup(A\cap B) &= A \\ A\cap(A\cup B) &= A \end{aligned}$$

$$5)\quad \begin{aligned} A\cup\emptyset &= A \\ A\cap\mathcal{U} &= A \end{aligned}$$

$$6)\quad \begin{aligned} A\cup A' &= \mathcal{U} \\ A\cap A' &= \emptyset \end{aligned}$$

Οταν εφαρμόζουμε τους παραπάνω νόμους γιά τις πράξεις μεταξύ συνόλων γιά να βγάλουμε άλλους νόμους αλγεβρικά, λέμε ότι κάνουμε *άλγεβρα του Boole*. Είναι η χρήση των παραπάνω νόμων που χαρακτηρίζει μια άλγεβρα του Boole και όχι το γενονός ότι δουλεύουμε με σύνολα. Ανάλογοι νόμοι υπάρχουν και σε άλλα πλαίσια, και η χρησιμοποίηση των νόμων σ'αυτά τα πλαίσια επίσης λέγεται άλγεβρα του Boole. Γνωρίζουμε ότι δύο προτάσεις είναι *ισοδύναμες* αν τα σύνολα αλήθειας τους είναι ίσα.

Αρα ένας τύπος που λέει ότι δυο σύνολα είναι *ίσα* αντιστοιχεί σ'ένα τύπο που λέει ότι δύο προτάσεις είναι *ισοδύναμες*. Επίσης γνωρίζουμε ότι τα σύμβολα $\cap$, $\cup$, αντιστοιχούν στα σύμβολα $\wedge, \vee, \neg$ γιά προτάσεις. Αρα μπορούμε να "μεταφράσουμε" όλους τους παραπάνω νόμους και να τους κάνουμε νόμους γιά προτάσεις. Για παράδειγμα ένας από τους προσεταιριστικούς νόμους γίνεται $p\wedge(q\wedge s)\leftrightarrow(p\wedge q)\wedge s$. Αρα όλοι οι νόμοι της άλγεβρας Boole γιά σύνολα γίνονται νόμοι άλγεβρας Boole γιά προτάσεις.

3.6. Τί είναι απόδειξη

Στα μαθηματικά χρησιμοποιούμε αποδείξεις. Μια απόδειξη μιας πρότασης είναι ένα επιχείρημα που μας πείθει ότι η πρόταση είναι αληθής. Η λογική ασχολείται με το τι κάνει τα επιχειρήματα πειστικά. Μια τεχνική που έχουμε χρησιμοποιήσει και χρησιμοποιείται, είναι η *αρχή της ευθείας απόδειξης*. Αυτή η αρχή είναι ένα παράδειγμα ενός αποδεικτικού κανόνα; και μας λέει ότι αν γνωρίζουμε ότι η r είναι αληθής και ότι η $r \to s$ είναι αληθής, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η s είναι αληθής επίσης. Θα λέμε μια μαθηματική πρόταση ότι είναι *θεώρημα* αν έχουμε μια απόδειξη ότι είναι αληθής. Ενα μαθηματικό θεώρημα είναι μια πρόταση του τύπου:

$$Αν\ p, q, \cdots\ τότε\ t,\ ή\ p \land q \land \cdots \to t$$

Οι προτάσεις $p, q, \ldots$ λέγονται *υποθέσεις* και η πρόταση t λέγεται *το συμπέρασμα.*

Μια *ευθεία απόδειξη* του συμπεράσματος από τις υποθέσεις είναι μια πεπερασμένη ακολουθία $s_1, s_2, s_3, \cdots, s_k$ από προτάσεις, όπου $s_k = t$, το συμπέρασμα και κάθε $s_i, i = 1, 2, \ldots, k$ είναι ή υπόθεση ή κάποια παραδεδεγμένη αλήθεια (αξίωμα ή γνωστό αποδειγμένο θεώρημα) ή είναι το αποτέλεσμα εφαρμογής της αρχής της ευθείας απόδειξης σε δύο προηγούμενες προτάσεις (δηλαδή σε δύο s_m και s_n με $m < n < i$).

Ενα *αντιπαράδειγμα* σε μια πρόταση γιά κάποιο σύμπαν είναι ένα στοιχείο του σύμπαντος γιά το οποίο η πρόταση είναι ψευδής.

<u>Παράδειγμα:</u> Είναι η πρόταση "Αν n φυσικός τότε το n είναι το άθροισμα δύο τετραγώνων", θεώρημα των φυσικών αριθμών;
Η απάντηση είναι όχι γιατί γιά τον 6 δεν υπάρχουν φυσικοί a και b τέτοιοι που $6 = a^2 + b^2$. Αρα το 6 είναι ένα αντιπαράδειγμα και επομένως η πρόταση δεν είναι θεώρημα.

Εχουμε όμως και *μή-ευθείες* αποδείξεις. Αν θέλουμε να αποδείξουμε ένα θεώρημα που όπως αναφέραμε παραπάνω είναι μια υποθετική πρόταση $s \to t$ όπου $s = p \land q \land \cdots$, και $p, q, \cdots$ είναι οι υποθέσεις, τότε η *αρχή της απόδειξης με αντιθετοαντιστροφή* μας λέει ότι αρκεί να αποδείξουμε την πρόταση $\neg t \to \neg s$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε την παραπάνω αρχή γιατί οι προτάσεις $s \to t$ και $\neg t \to \neg s$ είναι ταυτολογικά ισοδύναμες.

Εστω τώρα ότι θέλουμε να αποδείξουμε το θεώρημα $s \to t$. Η *αρχή της απόδειξης μέσω αντίφασης* μας λέει ότι από την s και την $(s \land \neg t) \to \neg s$ μπορούμε να συμπεράνουμε την t. Συνεπώς η αρχή της απόδειξης μέσω αντίφασης λέει ότι, αν υποθέτοντας ότι οι s και η άρνηση της t είναι αληθείς, μπορέσουμε να δείξουμε την άρνηση της s αληθή, τότε η s συνεπάγεται την t.

Τέλος, αν θέλουμε να αποδείξουμε το θεώρημα $s \to t$, η *αρχή της επαγωγής σε άτοπο* μας λέει ότι από την s και την $s \wedge \neg t \to r \wedge \neg r$ μπορούμε να συμπεράνουμε την t. Δηλαδή, αν υποθέτοντας την s και την άρνηση της t αληθείς, μπορέσουμε να έχουμε μια αντίφαση, τότε η s συνεπάγεται την t.

Παράδειγμα: Δείξτε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός. Ας υποθέσουμε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός και μάλιστα $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ όπου m, n φυσικοί και πρώτοι προς αλλήλους (δηλαδή δεν έχουν άλλο κοινό διαιρέτη εκτός από τη μονάδα). Τότε $m^2 = 2n^2$. Αρα ο m διαιρείται από το 2 και επομένως $m = 2k$, γιά $k \in \mathrm{N}$, και $m^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2 \Rightarrow$ ο n είναι πολλαπλάσιο του 2, δηλαδή $n = 2\lambda$. Μα τότε οι m, n έχουν κοινό διαιρέτη το 2, άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι είναι πρώτοι προς αλλήλους. Επομένως ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

3.7. Δυο θεμελιώδεις τεχνικές απόδειξης

Εχουμε γνωρίσει μια ισχυρή τεχνική γιά να αποδεικνύουμε καθολικές προτάσεις γιά τους φυσικούς αριθμούς, την αρχή της επαγωγής. Μια άλλη αρχή είναι η *αρχή του περιστερώνα* που διατυπώνεται ως εξής: " Δεν υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση από το αρχικό τμήμα N_k στο N_{k+1}". Με άλλα λόγια μας λέει ότι το τμήμα N_{k+1} έχει περισσότερα στοιχεία από το N_k γιά κάθε $k \in \mathrm{N}$.

Η *αρχή της διαγωνοποίησης* διατυπώνεται ως ακολούθως: Εστω $\mathcal{R}$ μια διμελής σχέση στο σύνολο Α και $\mathrm{D} = \{a \in \mathrm{A} \mid (a,a) \notin \mathcal{R}\}$,
$\mathcal{R}_a = \{b \in \mathrm{A} \mid (a,b) \in \mathcal{R}\}$ γιά κάθε $a \in \mathrm{A}$. Τότε $\mathrm{D} \neq \mathcal{R}_a$ γιά κάθε $a \in \mathrm{A}$.
Η απόδειξη είναι εύκολη, γιατί αν $(a,a) \in \mathcal{R}$ τότε $a \notin \mathrm{D}$ και $a \in \mathcal{R}_a$. Αν $(a,a) \notin \mathcal{R}$ τότε $a \in \mathrm{D}$ και $a \notin \mathcal{R}_a$. Μάλιστα τα παραπάνω ισχύουν γιά κάθε $a \in \mathrm{A}$.

Ασκήσεις

1) Αποδείξτε την αρχή του περιστερώνα με τη χρήση της αρχής της επαγωγής.

2) Δείξτε ότι σ'ένα σύνολο ανθρώπων υπάρχουν τουλάχιστον δύο άτομα που έχουν τον ίδιο αριθμό γνωριμιών μέσα στο σύνολο.

Μέρος II

Κεφάλαιο 1

Βασικές αρχές απαρίθμησης

Οι βασικές αρχές απαρίθμησης είναι απλές μαθηματικές προτάσεις, που όμως είναι πολύ χρήσιμες στη λύση δύσκολων συνδυαστικών προβλημάτων. Συγκεκριμένα μας βοηθούν στο να προσδιορίσουμε το πλήθος των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου, τα οποία έχουν ορισμένες προκαθορισμένες ιδιότητες.

1.1. Προσθετική αρχή απαρίθμησης

Εστω A, B πεπερασμένα σύνολα ξένα μεταξύ τους. Επειδή $A \cap B = \emptyset$ οποιοδήποτε στοιχείο του συνόλου $A \cup B$ ανήκει είτε μόνο στο A είτε μόνο στο B. Αρα $|A \cup B| = |A| + |B|$. Με επαγωγή μπορούμε να αποδείξουμε ότι η παραπάνω παρατήρηση ισχύει και για περισσότερα από δύο σύνολα. Το γεγονός αυτό εκφράζεται από το παρακάτω Θεώρημα, που ονομάζεται προσθετική αρχή απαρίθμησης.

<u>Θεώρημα 1.1:</u> Αν τα πεπερασμένα σύνολα $A_1, A_2, \cdots, A_\nu$ είναι ανά δύο ξένα, τότε

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\nu| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_\nu|$$

Ας δούμε μερικά απλά παραδείγματα εφαρμογής του Θεωρήματος 1.1.

<u>Παράδειγμα 1.1:</u> Πόσες λέξεις μήκους[1] 2 μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα γράμματα α,β,γ,δ;

<u>Απ:</u> Εστω X_α το σύνολο των λέξεων μήκους 2 που έχουν για πρώτο τους

[1] Σαν μήκος μιας λέξης ορίζουμε το πλήθος των γραμμάτων της.

γράμμα το α. Ομοια ορίζονται τα σύνολα $X_\beta, X_\gamma, X_\delta$. Το ζητούμενο σύνολο λέξεων είναι το $X_\alpha \cup X_\beta \cup X_\gamma \cup X_\delta$. Τα σύνολα $X_\alpha, X_\beta, X_\gamma, X_\delta$ είναι ανά δύο ξένα και το καθένα έχει 4 στοιχεία. Επομένως υπάρχουν 16 λέξεις.

Παράδειγμα 1.2: Μεταξύ 10 ατόμων πρέπει να εκλεγεί ένας πρόεδρος και ένας αντιπρόεδρος. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η εκλογή;

Απ. Κάθε τρόπος εκλογής μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα διατεταγμένο ζεύγος ονομάτων, εκ των οποίων το πρώτο αντιστοιχεί στο πρόεδρο και το δεύτερο στον αντιπρόεδρο. Εστω $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_{10}\}$ το σύνολο των ονομάτων και έστω B_i το σύνολο των τρόπων εκλογής στους οποίους το a_i όνομα είναι πρόεδρος, $\forall i = 1, 2, \ldots, 10$ (δηλαδή το σύνολο B_i αποτελείται από τα διεταταγμένα ζεύγη των οποίων το πρώτο μέλος είναι το a_i). Κάθε σύνολο B_i έχει 9 στοιχεία, τα σύνολα B_i είναι ανά δύο ξένα, ενώ η ένωσή τους αποτελεί το σύνολο όλων των δυνατών τρόπων εκλογής. Αρα από το Θεώρημα 1.1 θα έχουμε 90 δυνατούς τρόπους εκλογής.

1.2. Πολλαπλασιαστική αρχή απαρίθμησης

Λήμμα 1.2: Εστω Α,Β πεπερασμένα σύνολα. Τότε

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Απόδειξη: Εστω $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ και $B = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$. Ορίζουμε $A_i = \{a_i\}$ $\forall i = 1, 2, \ldots, k$. Προφανώς $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$. Αρα $A \times B = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \times B$. Ομως $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \times B = (A_1 \times B) \cup \cdots \cup (A_k \times B)$. Επομένως επειδή τα σύνολα $(A_1 \times B), (A_2 \times B), \ldots, (A_k \times B)$ είναι ανά δύο ξένα από το Θεώρημα 1.1 έχουμε ότι:

$$|(A \times B)| = |(A_1 \times B) \cup (A_2 \times B) \cup \cdots \cup (A_k \times B)|$$
$$= |(A_1 \times B)| + |(A_2 \times B)| + \ldots + |(A_k \times B)| \qquad -(1.1)$$

Τώρα $\forall i = 1, 2, \ldots, k$ το καρτεσιανό γινόμενο $A_i \times B$ είναι ένα σύνολο, που αποτελείται από διατεταγμένα ζεύγη των οποίων το πρώτο στοιχείο είναι το a_i, ενώ το δεύτερο στοιχείο είναι κάποιο στοιχείο β_j όπου $j = 1, 2, \ldots, m$.

Αρα $\forall i = 1, 2, \ldots, k$ $|A_i \times B| = |B| = m$. Επομένως από την (1.1) έχουμε ότι $|A \times B| = |A| \cdot |B| = k \cdot m$.

Με επαγωγή μπορούμε να αποδείξουμε ότι το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει για πάνω από δύο σύνολα. Το γεγονός αυτό εκφράζεται από το παρακάτω

Θεώρημα που ονομάζεται πολλαπλασιαστική αρχή απαρίθμησης.
<u>Θεώρημα 1.3:</u> Αν $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$, πεπερασμένα σύνολα, τότε

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\nu| = |A_1||A_2|\ldots|A_\nu|$$

Ως γνωστόν κάθε στοιχείο του συνόλου $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\nu$ είναι μια διατεταγμένη ν-άδα $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$, όπου $\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2, \ldots, \alpha_\nu \in A_\nu$. Επομένως στο παραπάνω Θεώρημα αποδείξαμε ότι το σύνολο $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\nu$ έχει για στοιχεία του $k_1 \cdot k_2 \ldots k_\nu$ τέτοιες διατεταγμένες ν-άδες, όπου k_i είναι ο πληθικός αριθμός του συνόλου $A_i, i = 1, 2, \ldots, \nu$. Για να σχηματίσουμε μια τέτοια διατεταγμένη ν-άδα επιλέγουμε μια-μια τις συνιστώσες της και για την επιλογή της i-συνιστώσας υπάρχουν k_i δυνατότητες, όσες ακριβώς και ο αριθμός των στοιχείων του συνόλου A_i. Επομένως η πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης μπορεί να διατυπωθεί και με τον εξής τρόπο:

Αν υπάρχουν k_i δυνατότητες για την επιλογή της i-συνιστώσας μιας διατεταγμένης ν-άδας, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε $k_1 \cdot k_2 \ldots k_\nu$ διατεταγμένες ν-άδες.

<u>Παράδειγμα 1.3</u>: Με πόσους τρόπους μπορεί να ντυθεί κάποιος που έχει 6 πουκάμισα, 4 παντελόνια και 3 ζευγάρια παπούτσια;

<u>Απ:</u> Εστω Α το σύνολο των πουκάμισων, Β το σύνολο των παντελονιών και Γ το σύνολο των παπουτσιών. Τώρα κάθε πιθανό ντύσιμο μπορεί να θεωρηθεί σαν μια διατεταγμένη τριάδα (α,β,γ), όπου $\alpha \in A, \beta \in B, \gamma \in \Gamma$. Εμείς θέλουμε να προσδιορίσουμε τον αριθμό όλων αυτών των διατεταγμένων τριάδων, άρα ουσιαστικά θέλουμε να προσδιορίσουμε το $|A \times B \times \Gamma|$. Επομένως από το Θεώρημα 1.3 έχουμε ότι $|A \times B \times \Gamma| = |A| \cdot |B| \cdot |\Gamma| = 72$. Αρα ο κάτοχος των ρούχων μπορεί να ντυθεί με 72 διαφορετικούς τρόπους.

<u>Παράδειγμα 1.4</u>: Το πρόβλημα που αναφέραμε στο Παράδειγμα 1.1 μπορεί να λυθεί και διαφορετικά. Κάθε λέξη μήκους 2 είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος (x, y), όπου $x, y \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Επομένως ουσιαστικά θέλουμε να προσδιορίσουμε το πλήθος των στοιχείων του καρτεσιανού γινομένου $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \times \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Αυτό θα έχει $4 \cdot 4 = 16$ στοιχεία.

Κεφάλαιο 2

Διατάξεις

Εστω σύνολο $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$. Διάταξη των ν στοιχείων του Α ανά μ ονομάζουμε μια διατεταγμένη μ-άδα $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu)$, όπου $\beta_i \in A$, $\forall i = 1, 2, \ldots, \mu$. Τα στοιχεία μιας διάταξης των ν ανά μ μπορεί να είναι διαφορετικά στοιχεία του Α, αλλά μπορεί να έχουμε και επαναλήψεις στοιχείων. Στην πρώτη περίπτωση χρησιμοποιούμε απλώς τον όρο διάταξη των ν ανά μ, ενώ στην δεύτερη περίπτωση χρησιμοποιούμε τον όρο διάταξη των ν ανά μ, με επανάληψη. Προφανώς μια διάταξη των ν ανά μ έχει έννοια μόνον όταν $1 \leq \mu \leq \nu$, ενώ μια διάταξη των ν ανά μ με επανάληψη έχει πάντα έννοια όταν $\nu \geq 1$ *και* $\mu \geq 1$.

2.1. Πλήθος διατάξεων ν στοιχείων ανά μ

<u>Θεώρημα 2.1</u>: Ο αριθμός των διατάξεων των ν ανά μ συμβολίζεται με P(ν,μ) και δίδεται από την σχέση

$$P(\nu,\mu) = \nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\mu+1) \qquad (2.1)$$

<u>Απόδειξη</u>: Εστω σύνολο $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$. Σε κάθε διάταξη $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu)$ των ν στοιχείων του Α ανά μ, το πρώτο στοιχείο της, το β_1, μπορεί να επιλεγεί από το σύνολο $A = A_1$, το οποίο περιέχει ν στοιχεία. Μετά από αυτήν την επιλογή, το δεύτερο στοιχείο της διάταξης, το β_2, θέλουμε να είναι διαφορετικό του β_1, άρα αυτό μπορεί να επιλεγεί από το σύνολο $A_2 = A - \{\beta_1\}$, το οποίο περιέχει $\nu - 1$ στοιχεία. Εάν τώρα έχουν επιλεγεί τα στοιχεία $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\mu-1}$ το τελευταίο στοιχείο της διάταξης, το β_μ, μπορεί να επιλεγεί από το σύνολο

$A_\mu = A - \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\mu-1}\}$, το οποίο περιέχει $\nu - (\mu - 1)$ στοιχεία. Αρα από την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης
$P(\nu, \mu) = \left|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\mu\right| = |A_1| \cdot |A_2| \ldots \left|A_\mu\right| = \nu(\nu - 1)\ldots(\nu - \mu + 1)$.
Παρατηρήσεις: 1) Μια διάταξη των ν στοιχείων ανά μ, όπου ν=μ, την ονομάζουμε ειδικότερα μετάθεση. Αρα ο αριθμός των μεταθέσεων ν στοιχείων είναι

$$P(\nu, \nu) = \nu(\nu - 1)(\nu - 2)\ldots(\nu - \nu + 1) = \nu!$$

2) Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας την (2.1) με $(\nu - \mu)!$ παίρνουμε

$$P(\nu, \mu) = \frac{\nu(\nu - 1)\ldots(\nu - \mu + 1)(\nu - \mu)!}{(\nu - \mu)!} = \frac{\nu!}{(\nu - \mu)!}$$

Παράδειγμα 2.1: Με πόσους τρόπους μπορεί να εκλεγεί ένας πρόεδρος, ένας αντιπρόεδρος, ένας γραμματέας και ένας ταμίας από ένα σύνολο 10 ατόμων;
Απ: Εστω Α , το σύνολο των 10 ατόμων. Κάθε εκλογή μπορεί να θεωρηθεί σαν μια διατεταγμένη 4-άδα στοιχείων (διαφορετικών μεταξύ τους) του συνόλου Α. Αρα το σύνολο των πιθανών εκλογών είναι το σύνολο των διατάξεων των 10 στοιχείων του Α ανά 4. Επομένως

$$P(10, 4) = \frac{10!}{6!} = (10)\cdot(9)\cdot(8)\cdot(7) = 5040.$$

2.2. Πλήθος διατάξεων ν στοιχείων ανά μ, με επανάληψη

Θεώρημα 2.2: Το πλήθος των διατάξεων των ν στοιχείων ανά μ με επανάληψη συμβολίζεται με $P^*(\nu, \mu)$ και δίδεται από την σχέση $P^*(\nu, \mu) = \nu^\mu$.
Απόδειξη: Εστω σύνολο $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$ και έστω $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu)$ διάταξη των ν στοιχείων του Α ανά μ με επανάληψη. Εστω A_j το σύνολο των στοιχείων του Α από το οποίο μπορεί να επιλεγεί το στοιχείο β_j της διάταξης $\forall j = 1, 2, \ldots, \mu$. Επειδή εδώ αναφερόμαστε σε διατάξεις στις οποίες επιτρέπεται επανάληψη στοιχείων, $\forall j = 1, 2, \ldots, \mu$ έχουμε ότι $A_j = A$. Αρα από την πολλαπλασιαστική αρχή απαρίθμησης έχουμε οτι
$P^*(\nu, \mu) = \left|A_1 \times A_2 \times \ldots A_\mu\right| = \underbrace{|A \times A \times \ldots \times A|}_{\mu-\text{φορές}} = \underbrace{|A| \cdot |A| \ldots |A|}_{\mu-\text{φορές}} = \nu^\mu$.

Παράδειγμα 2.2: Να υπολογισθεί ο αριθμός των διαφορετικών στηλών που μπορούμε να συμπληρώσουμε στο ΠΡΟ-ΠΟ.

Απάντηση: Ως γνωστό ένα δελτίο ΠΡΟ-ΠΟ περιέχει 13 αγώνες. Για να συμπληρώσουμε μια στήλη πρέπει να αντιστοιχίσουμε σε κάθε αγώνα ένα από τα σύμβολα 1,Χ,2. Αρα ο αριθμός των διαφορετικών στηλών που μπορούμε να συμπληρώσουμε είναι ίσος με τον αριθμό των διατεταγμένων 13-άδων, κάθε στοιχείο των οποίων ανήκει στο σύνολο Α={1,Χ,2} και όπου επιτρέπεται επανάληψη στοιχείων. Δηλαδή, ο ζητούμενος αριθμός είναι ίσος με τον αριθμό των διατάξεων των 3 στοιχείων του Α ανά 13 με επανάληψη. Αρα $P^*(3,13) = 3^{13}$.

2.3. Ειδική περίπτωση διάταξης των ν ανά μ με επανάληψη

Εστω σύνολο $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$. Θα εξετάσουμε το σύνολο των διατάξεων των ν στοιχείων του Α ανά μ με επανάληψη, σε κάθε μια από τις οποίες το στοιχείο α_1 εμφανίζεται μ_1 φορές, το στοιχείο α_2 εμφανίζεται μ_2 φορές,..., το στοιχείο α_ν εμφανίζεται μ_ν φορές και όπου $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\nu = \mu$.

Θεώρημα 2.3: Ο πληθικός αριθμός του συνόλου διατάξεων που περιγράψαμε συμβολίζεται με $M(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu)$ και δίδεται από την σχέση

$$M(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu) = \frac{\mu!}{\mu_1!\mu_2!\ldots\mu_\nu!}$$

Απόδειξη: Εστω S το σύνολο των διατάξεων του οποίου τον πληθικό αριθμό θέλουμε να προσδιορίσουμε και έστω $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu)$ μια διάταξη η οποία είναι στοιχείο του S. Παίρνουμε όλα τα στοιχεία της $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu)$ τα οποία είναι α_1, που είναι μ_1 τον αριθμό και τα αριθμούμε από το 1 έως το μ_1 : $\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \ldots, \alpha_{1,\mu_1}$. Μεταθέτουμε τώρα όλα αυτά τα στοιχεία στην διάταξη κατά όλους τους δυνατούς τρόπους, διατηρώντας όμως τις θέσεις που κατείχε το στοιχείο α_1. Ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να το κάνουμε είναι ίσος με $\mu_1!$. Αρα μετά από μια τέτοια ενέργεια από την διάταξη $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu)$ θα προκύψουν $\mu_1!$ καινούργιες διατάξεις. Παίρνουμε κάθε μία από αυτές τις καινούργιες διατάξεις και αριθμούμε τα στοιχεία α_2, μ_2 τον αριθμό, από το $\mu_1 + 1$ έως το $\mu_1 + \mu_2$: $\alpha_{2,\mu_1+1}, \ldots, \alpha_{2,\mu_1+\mu_2}$.
Αφού τα αριθμήσουμε, τα μεταθέτουμε κατά όλους τους δυνατούς τρόπους, διατηρώντας όμως τις θέσεις που κατείχε το α_2. Υπάρχουν $\mu_2!$ τρόποι με τους οποίους μπορούμε να το κάνουμε. Αρα από κάθε μια από τις $\mu_1!$ διατάξεις του προηγούμενου βήματος παίρνουμε $\mu_2!$ καινούργιες διατάξεις.

Επαναλαμβάνοντας αυτή την διαδικασία μέχρι να εξαντληθούν και τα ν είδη στοιχείων, τελικά από την αρχική διάταξη $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu)$ θα προκύψουν $\mu_1!\mu_2!\ldots\mu_\nu!$ μεταθέσεις του συνόλου

$$R = \{a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{2,\mu_1+1}, \ldots, a_{\nu,\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_\nu}\}.$$

Εάν τώρα $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\mu)$ είναι μια οποιαδήποτε άλλη διάταξη που ανήκει στο S, εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία όπως στην $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu)$ παίρνουμε $\mu_1!\mu_2!\ldots\mu_\nu!$ μεταθέσεις του R. Παρατηρούμε ότι οι μεταθέσεις που προκύπτουν από την $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu)$ είναι διαφορετικές από αυτές που προκύπτουν από την $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\mu)$, διότι οι θέσεις των ομοίων στοιχείων σε κάθε βήμα διατηρούνται. Επίσης παρατηρούμε ότι κάθε μετάθεση του R προκύπτει από μια αρχική διάταξη που αποτελεί στοιχείο του S.

Αρα από τις αρχικές $M(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu)$ διατάξεις (τα στοιχεία του S) προκύπτουν οι $\mu_1!\mu_2!\ldots\mu_\nu! M(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu)$ μεταθέσεις του R. Ομως ο αριθμός των μεταθέσεων του R είναι ίσος με $\mu!$ (Το R έχει μ στοιχεία). Επομένως $M(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu) = \dfrac{\mu!}{\mu_1!\mu_2!\ldots\mu_\nu!}$

<u>Παράδειγμα 2.3:</u> Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε στην σειρά 5 άτομα εκ των οποίων 2 είναι άντρες και 3 γυναίκες; (Εδώ θεωρούμε ότι τα αντικείμενα κάθε ομάδας είναι όμοια).

<u>Απ.</u> Εχουμε το σύνολο $S = \{A, \Gamma\}$ και θέλουμε να βρούμε τον αριθμό των διατάξεων των 2 στοιχείων του S ανά 5, όπου 2 στοιχεία σε αυτές τις διατάξεις είναι Α και 3 είναι Γ. Αρα $M(2,3) = \frac{5!}{3!2!} = 10$.

Κεφάλαιο 3

Συνδυασμοί

Εστω σύνολο $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$. Συνδυασμό των ν στοιχείων του Α ανά μ, ονομάζουμε μια συλλογή μ στοιχείων $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu\}$, όπου $\beta_i \in A$, $\forall_i = 1, 2, \ldots, \mu$. Οπως και στην περίπτωση της διάταξης, τα στοιχεία β_i μπορεί να είναι διαφορετικά στοιχεία του Α, αλλά μπορεί να έχουμε και επαναλήψεις στοιχείων. Στην πρώτη περίπτωση χρησιμοποιούμε απλώς τον όρο συνδυασμός των ν ανά μ, ενώ στην δεύτερη περίπτωση χρησιμοποιούμε τον όρο συνδυασμό των ν ανά μ με επανάληψη.

Θεώρημα 3.1: Ο αριθμός των συνδυασμών των ν στοιχείων του $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$ ανά μ συμβολίζεται με $C(\nu, \mu)$ και δίνεται από την σχέση

$$C(\nu, \mu) = \frac{\nu!}{\mu!(\nu - \mu)!}.$$

Απόδειξη: Εστω S το σύνολο των ζητούμενων συνδυασμών και S' το σύνολο των διατάξεων των ν στοιχείων του Α ανά μ. Εάν $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu\} \in S$, μεταθέτοντας τα στοιχεία του κατά όλους τους δυνατούς τρόπους, παίρνουμε όλες τις μεταθέσεις του συνόλου $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu\}$. Αυτές είναι $\mu!$ τον αριθμό και φυσικά οι μεταθέσεις αυτές είναι στοιχεία του S'. Αρα σε κάθε στοιχείο του S αντιστοιχούν $\mu!$ στοιχεία του S'. Τώρα σε δύο διαφορετικά στοιχεία του S αντιστοιχούν διαφορετικά στοιχεία του S' και κάθε στοιχείο του S' προκύπτει από κάποιο στοιχείο του S.

$$\text{Αρα} \quad |S|\mu! = |S'| \Rightarrow \mu!\, C(\nu, \mu) = P(\nu, \mu) \Rightarrow C(\nu, \mu) = \frac{\nu!}{\mu!(\nu - \mu)!}.$$

Παράδειγμα 3.1: Λέξεις $0 - 1$ ονομάζουμε τις λέξεις που έχουν για γράμματά τους, το 0 και το 1. Να προσδιορισθεί ο αριθμός των $0 - 1$ λέξεων μήκους 8

που έχουν ακριβώς 5 μηδενικά.
Απ.: Κάθε μια από τις ζητούμενες λέξεις καθορίζεται από τις 5 θέσεις στις οποίες βρίσκεται το γράμμα 0, δηλαδή από ένα υποσύνολο του $\{1,2,3,\ldots,8\}$ που έχει 5 στοιχεία. Υπάρχουν λοιπόν $C(8,5) = \frac{8!}{3!5!} = 56$ ζητούμενες λέξεις.
Θεώρημα 3.2: Ο αριθμός των συνδυασμών των ν στοιχείων του $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$ ανά μ με επανάληψη συμβολίζεται με $C^*(\nu,\mu)$ και δίνεται από τη σχέση

$$C^*(\nu,\mu) = \frac{(\nu+\mu-1)(\nu+\mu-2)\ldots(\nu+1)\nu}{\mu!}$$

Απόδειξη: Κάθε ζητούμενος συνδυασμός μπορεί να θεωρηθεί σαν μια λίστα, η οποία περιέχει μ αστερίσκους και $\nu-1$ κάθετες γραμμές. Οι $\nu-1$ κάθετες γραμμές χωρίζουν την λίστα σε ν διαφορετικά μέρη και ο αριθμός των αστερίσκων που βρίσκονται στο i μέρος αντιπροσωπεύει τον αριθμό των φορών που εμφανίζεται το στοιχείο α_i στον συνδυασμό, όπου $i = 1,2,\ldots,\nu$. Π.χ. η λίστα $** \mid * \parallel ***$ μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας συνδυασμός 4 στοιχείων ανά 6 με επανάληψη, ο οποίος περιέχει το πρώτο στοιχείο του συνόλου 2 φορές, το δεύτερο 1, το τρίτο καμία και το τέταρτο 3 φορές.
Τώρα ο αριθμός των λιστών που περιέχουν μ αστερίσκους και $\nu-1$ κάθετες γραμμές είναι ίσος με τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων που μπορούμε να τοποθετήσουμε τους μ αστερίσκους στις $\nu-1+\mu$ θέσεις της λίστας, δηλαδή αυτός θα είναι ίσος με $C(\nu-1+\mu,\mu)$.
Αρα $C^*(\nu,\mu) = C(\nu-1+\mu,\mu) = \frac{(\nu-1+\mu)!}{\mu!(\nu-1)!} = \frac{(\nu+\mu-1)\ldots(\nu+1)\nu}{\mu!}$.
Παράδειγμα 3.2: Να προσδιορισθεί το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων μιας ρίψης 2 μη διακεκριμένων κύβων.
Απ. Ο ζητούμενος αριθμός είναι ίσος με $C^*(6,2) = \frac{7\cdot 6}{2!} = 21$ (όσοι είναι δηλαδή οι συνδυασμοί των 6 εδρών $\{1,2,3,4,5,6\}$ ανά 2 με επανάληψη).
Θεώρημα 3.3: Εστω ν και μ θετικοί ακέραιοι με $\nu \geq \mu$. Τότε $C(\nu+1,\mu) = C(\nu,\mu-1) + C(\nu,\mu)$.
Απόδειξη: Εστω σύνολο A με ν+1 στοιχεία και έστω $\alpha \in A$. Ορίζουμε σύνολο $B = A - \{\alpha\}$. Ο αριθμός των υποσυνόλων του A που έχουν μ στοιχεία είναι ίσος με $C(\nu+1,\mu)$. Τώρα, αυτά τα σύνολα διακρίνονται σε εκείνα που έχουν για στοιχεία τους το α και $\mu-1$ στοιχεία του B και σε εκείνα που περιέχουν μ στοιχεία του B και δεν περιέχουν το α. Ο αριθμός των υποσυνόλων του A με μ στοιχεία που περιέχουν το α είναι ίσος με $C(\nu,\mu-1)$, διότι υπάρχουν $C(\nu,\mu-1)$ υποσύνολα του B με $\mu-1$ στοιχεία. Επίσης ο αριθμός

των υποσυνόλων του A με μ στοιχεία που δεν περιέχουν το α είναι ίσος με $C(\nu,\mu)$, διότι υπάρχουν $C(\nu,\mu)$ υποσύνολα του B με μ στοιχεία. Επομένως $C(\nu+1,\mu) = C(\nu,\mu-1) + C(\nu,\mu)$.

Τους αριθμούς $C(\nu,\mu)$ (όπου $\mu=0,1,\ldots,\nu$) μπορούμε να τους βρούμε σ' ένα άπειρο τριγωνικό πίνακα που λέγεται τρίγωνο του PASCAL. Η κατασκευή αυτού του πίνακα βασίζεται στο Θεώρημα 3.3, το οποίο μας δίδει έναν αναδρομικό τύπο για την εύρεση των συντελεστών $C(\nu,\mu)$. Τους αριθμούς $C(\nu,\mu)$ τους τοποθετούμε στον παρακάτω τριγωνικό πίνακα.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C(0,0) & & & & \\
 & & & C(1,0) & & C(1,1) & & & \\
 & & C(2,0) & & C(2,1) & & C(2,2) & & \\
 & C(3,0) & & C(3,1) & & C(3,2) & & C(3,3) & \\
C(4,0) & & C(4,1) & & C(4,2) & & C(4,3) & & C(4,4) \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}$$

Τώρα βάσει του Θεωρήματος 3.3 κάθε στοιχείο του πίνακα είναι ίσο με το άθροισμα των δύο όρων που βρίσκονται ακριβώς πάνω απ' αυτό. Έτσι λοιπόν έχουμε:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Χρησιμοποιώντας συνδυαστικής φύσης επιχειρήματα μπορούμε να αποδείξουμε το Διωνυμικό Θεώρημα.

Θεώρημα 3.4:

$$(x+y)^{\nu} = \sum_{r=0}^{\nu} C(\nu, r) x^{\nu-r} y^{r}$$

Απόδειξη: Κάθε όρος του αναπτύγματος $(x+y)^{\nu}$ είναι της μορφής $x^{\nu-r}y^{r}$, με $0 \leq r \leq \nu$, και προκύπτει αν από τα ν αθροίσματα $(x+y)$ επιλέξουμε $\nu - r$ φορές το x και r φορές το y. Η επιλογή αυτή μπορεί να γίνει κατά $C(\nu, \nu - r) = C(\nu, r)$ τρόπους.
Επομένως υπάρχουν στο ανάπτυγμα $C(\nu, r)$ όροι ίσοι με $x^{\nu-r}y^{r}$.

Παράδειγμα 3.3: Να προσδιορισθεί το ανάπτυγμα του $(x+y)^4$.
Απ.:

$$(x+y)^4 = \sum_{r=0}^{4} C(4, r) x^{4-r} y^{r} =$$

$$C(4,0)x^4 + C(4,1)x^3y + C(4,2)x^2y^2 + C(4,3)xy^3 + C(4,4)y^4 =$$

$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

Κεφάλαιο 4

Η αρχή του Εγκλεισμού και Αποκλεισμού

Η αρχή του Εγκλεισμού και Αποκλεισμού αναφέρεται στον υπολογισμό του πληθικού αριθμού της ένωσης ν πεπερασμένων συνόλων. Στο Κεφάλαιο 1 είδαμε ότι εάν A_1, A_2 είναι δύο πεπερασμένα σύνολα, ξένα μεταξύ τους τότε $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$. Το επόμενο Θεώρημα αποτελεί γενίκευση της παραπάνω πρότασης.

<u>Θεώρημα 4.1</u>: Εάν A_1, A_2 οποιαδήποτε πεπερασμένα σύνολα, τότε

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

<u>Απόδειξη</u>: Αθροίζουμε πρώτα τα στοιχεία του A_1 και τα στοιχεία του A_2. Το άθροισμα αυτό είναι ίσο με $|A_1| + |A_2|$ και επειδή κάθε στοιχείο του $A_1 \cup A_2$ θέλουμε να υπολογισθεί μόνο μια φορά, αφαιρούμε από αυτό το άθροισμα τον αριθμό των στοιχείων που ανήκουν και στα δύο σύνολα.

Το επόμενο θεώρημα με την σειρά του αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος 4.1.

<u>Θεώρημα 4.2</u>: Εστω $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ πεπερασμένα σύνολα. Τότε

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu| = \sum_{1 \le i \le \nu} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le \nu} |A_i \cap A_j| +$$

$$\sum_{1 \le i < j < k \le \nu} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{\nu+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_\nu| \quad - (4.1)$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.2 θα χρησιμοποιήσουμε το εξής Λήμμα.

Λήμμα 4.3: Εστω ν θετικός αριθμός. Τότε

$$\sum_{r=0}^{\nu}(-1)^r C(\nu,r) = 0$$

Απόδειξη: Απο το Θεώρημα 3.4 (Διωνυμικό Θεώρημα) έχουμε ότι

$$0 = (1+(-1))^\nu = \sum_{r=0}^{\nu} C(\nu,r)(-1)^{\nu-r}\cdot(-1)^r = \sum_{r=0}^{\nu} C(\nu,r)(-1)^r.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2:
Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 4.2, αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε στοιχείο του συνόλου $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu$ μετριέται ακριβώς μια φορά στο δεξιό μέρος της εξίσωσης 4.1. Εστω λοιπόν στοιχείο α του συνόλου $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu$ και έστω ότι το α ανήκει ακριβώς σε k σύνολα αυτής της ένωσης.
Παρατηρούμε ότι το στοιχείο α μετριέται $C(k,1)$ φορές στον όρο $\Sigma\,|A_i|$, $C(k,2)$ φορές στον όρο $\Sigma\,|A_i \cap A_j|$ και γενικά σ' ένα άθροισμα που συμμετέχουν r σύνολα, το α μετριέται $C(k,r)$ φορές. Αρα το στοιχείο α μετριέται συνολικά

$$C(k,1) - C(k,2) + C(k,3) - \ldots + (-1)^{k+1}C(k,k).$$

Ομως από το Λήμμα 4.3 έχουμε ότι

$$C(k,0) - C(k,1) + C(k,2) - \ldots + (-1)^k C(k,k) = 0.$$

Αρα

$$1 = C(k,0) = C(k,1) - C(k,2) + \ldots + (-1)^{k+1}C(k,k).$$

Επομένως κάθε στοιχείο α του συνόλου $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu$ μετριέται ακριβώς μια φορά στο δεξιό μέρος της εξίσωσης 4.1. Αρα το Θεώρημα 4.2 ισχύει.

Παράδειγμα 4.1: Σ' ένα Πανεπιστήμιο, 1232 φοιτητές παρακολουθούν Ισπανικά, 879 Γαλλικά και 114 Γερμανικά. Ο αριθμός των φοιτητών που παρακολουθούν ταυτόχρονα Ισπανικά και Γαλλικά είναι 103, αυτών που παρακολουθούν Ισπανικά και Γερμανικά είναι 23 και αυτών που παρακολουθούν Γαλλικά και Γερμανικά 14.
Επίσης ο αριθμός των φοιτητών που παρακολουθεί μαθήματα σε τουλάχιστον μία από τις παραπάνω γλώσσες είναι 2092. Να προσδιορισθεί ο αριθμός των φοιτητών, που παρακολουθούν μαθήματα και στις 3 ξένες γλώσσες.
Απ. Ορίζουμε σύνολα, S σύνολο φοιτητών που παρακολουθούν Ισπανικά, F

σύνολο φοιτητών που παρακολουθούν Γαλλικά, G σύνολο φοιτητών που παρακολουθούν Γερμανικά.
Τότε έχουμε $|S| = 1232$, $|F| = 879$, $|G| = 114$, $|S\cap F| = 103$, $|S\cap G| = 23$, $|F\cap G| = 14$ και $|S\cup F\cup G| = 2092$.
Από το θεώρημα 4.2 έχουμε ότι

$$|S\cup F\cup G| = |S|+|F|+|G|-|S\cap F|-|S\cap G|-|F\cap G|+|S\cap F\cap G| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2092 = 1232+879+114-103-23-14+|S\cap F\cap G| \Longrightarrow |S\cap F\cap G| = 7.$$

Αρα υπάρχουν 7 φοιτητές που παρακολουθούν ταυτόχρονα Γαλλικά, Ισπανικά και Γερμανικά.

Κεφάλαιο 5

Γραφήματα και υπογραφήματα.

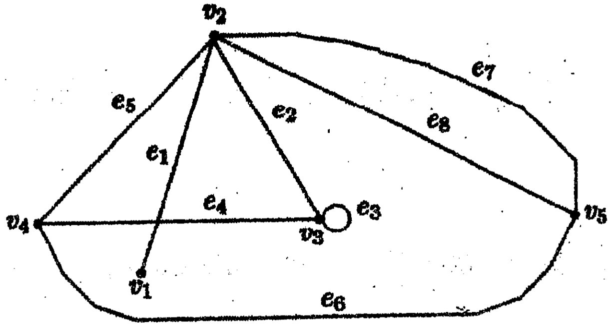
5.1. Ορισμοί και βασικές έννοιες.

Ενα γράφημα G είναι μια διατεταγμένη τριάδα $(V(G), E(G), \psi_G)$, η οποία αποτελείται (i) από ένα σύνολο V(G), όπου $V(G) \neq \emptyset$, τα στοιχεία του οποίου ονομάζονται κορυφές, (ii) ένα σύνολο E(G), όπου $E(G) \cap V(G) = \emptyset$, τα στοιχεία του οποίου ονομάζονται ακμές και (iii) από μια συνάρτηση ψ_G, βάσει της οποίας σε κάθε ακμή του G αντιστοιχεί ένα μη διατεταγμένο ζεύγος (όχι απαραίτητα διαφορετικών) κορυφών του G.

<u>Παράδειγμα 5.1</u>: $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ όπου $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, και όπου η ψ_G ορίζεται ως εξής:

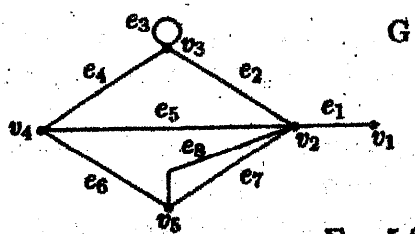
$$\begin{array}{llll} \psi_G(e_1) = \{v_1, v_2\}, & \psi_G(e_2) = \{v_2, v_3\}, & \psi_G(e_3) = \{v_3, v_3\}, & \psi_G(e_4) = \{v_3, v_4\} \\ \psi_G(e_5) = \{v_2, v_4\}, & \psi_G(e_6) = \{v_4, v_5\}, & \psi_G(e_7) = \{v_2, v_5\}, & \psi_G(e_8) = \{v_2, v_5\} \end{array}$$

Η μέχρι τώρα ορολογία που χρησιμοποιήσαμε (ακμές,κορυφές,κ.λ.π.) προέρχεται από την εξής γραφική παράσταση των γραφημάτων:
Κάθε κορυφή απεικονίζεται μ' ένα σημείο στο επίπεδο και κάθε ακμή με μια γραμμή που συνδέει το ζεύγος των κορυφών στις οποίες αντιστοιχεί, δηλαδή η ακμή e συνδέει τις κορυφές u και v αν και μόνο αν $\psi(G) = \{u, v\}$.
Στο σχήμα 5.1 έχουμε την γραφική παράσταση του γραφήματος G του Παραδείγματος 5.1.



Σχ. 5.1

Εδώ θα πρέπει να παρατηρήσουμε, ότι η γραφική παράσταση ενός γραφήματος G εκφράζει απλώς την σχέση που υπάρχει μεταξύ των κορυφών του και των ακμών του, έτσι όπως καθορίζεται αυτή από την συνάρτηση ψ_G. Επομένως οι θέσεις των σημείων και γραμμών στο επίπεδο δεν έχουν σημασία. Για παράδειγμα στο Σχ. 5.2 έχουμε ένα διαφορετικό τρόπο γραφικής παράστασης του γραφήματος G του Παρ. 5.1.



Σχ. 5.2

Ο ορισμός του γραφήματος δεν αποκλείει δύο διαφορετικές ακμές ενός γραφήματος G να αντιστοιχούν στο ίδιο ζεύγος κορυφών, δηλαδή μπορεί να υπάρχουν $e_1, e_2 \in E(G)$ με $e_1 \neq e_2$, έτσι ώστε $\psi_G(e_1) = \psi_G(e_2) = \{u, v\}$. Σε μια τέτοια περίπτωση οι ακμές αυτές ονομάζονται παράλληλες ή πολλαπλές. Επίσης δεν αποκλείεται μια ακμή του G να αντιστοιχεί σε ζεύγος κορυφών της μορφής $\{v, v\}$, δηλαδή μπορεί να υπάρχει $e \in E(G)$, έτσι ώστε $\psi_G(e) = \{v, v\}$. Μια τέτοια ακμή ονομάζεται βρόχος.

Στο γράφημα του Σχ.5.2 οι ακμές e_7, e_8 είναι πολλαπλές ακμές, ενώ η ακμή e_3 είναι βρόχος.
Εάν ένα γράφημα δεν περιέχει πολλαπλές ακμές και βρόχους, τότε ονομάζεται απλό γράφημα. Ενα γράφημα G ονομάζεται πεπερασμένο, εάν τα σύνολα V(G) και E(G) είναι πεπερασμένα. Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με πεπερασμένα γραφήματα.
Επομένως, όταν λέμε γράφημα ουσιαστικά εννοούμε πεπερασμένο γράφημα.

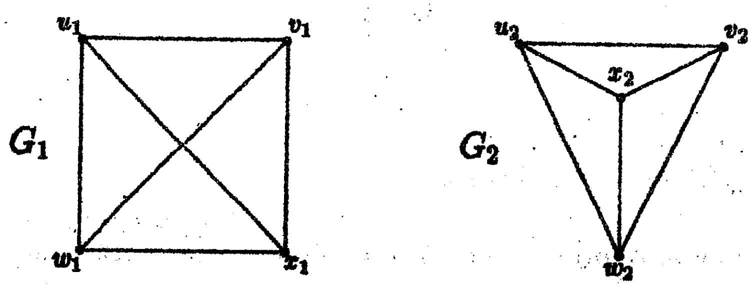
Εάν $e \in E(G), u, v \in V(G)$ και $\psi_G(e) = \{u, v\}$ τότε χρησιμοποιείται η πιο κάτω ορολογία.

α) Η ακμή e συνδέει τις κορυφές u και v.
β) Οι κορυφές u και v αποτελούν τα άκρα της ακμής e.
γ) Οι κορυφές u και v είναι γειτονικές.
δ) Η κορυφή u είναι προσκείμενη στην v και αντίστροφα.

Ολες οι παραπάνω προτάσεις είναι ισοδύναμες.
Ο αριθμός των κορυφών και ακμών ενός γραφήματος G συμβολίζεται με $\nu(G)$ και $\varepsilon(G)$ αντίστοιχα ή πιο απλά με ν και ε.

5.2. Ισομορφισμός γραφημάτων

Δύο απλά γραφήματα G_1 και G_2 ονομάζονται ισομορφικά, εάν υπάρχει συνάρτηση $f : V(G_1) \xrightarrow[\text{επί}]{1\text{-}1} V(G_2)$, για την οποία ισχύει ότι οι κορυφές u, v είναι γειτονικές στο G_1, εάν και μόνο εάν, οι κορυφές $f(u), f(v)$ είναι γειτονικές στο G_2. Η συνάρτηση f ονομάζεται ισομορφισμός από το G_1 στο G_2. Τα γραφήματα του Σχ.5.3 είναι δύο ισομορφικά γραφήματα.



Σχ. 5.3

Πράγματι υπάρχει η συνάρτηση $f : V(G_1) \xrightarrow[\text{επί}]{1\text{-}1} V(G_2)$ με $f(u_1) = u_2, f(v_1) = v_2, f(x_1) = x_2, f(w_1) = w_2$, η οποία έχει την παραπάνω ιδιότητα.

5.3. Υπογραφήματα.

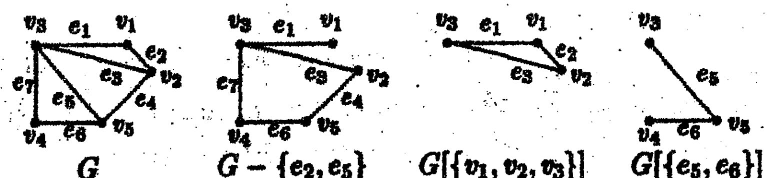
Ενα γράφημα H είναι υπογράφημα κάποιου γραφήματος G (αυτό συμβολίζεται με $H \subseteq G$), εάν (i) $V(H) \subseteq V(G)$, (ii) $E(H) \subseteq E(G)$ και (iii) η ψ_H είναι περιορισμός της ψ_G στο E(H).

Εστω ότι V' είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $V(G)$. Το υπογράφημα του G, που έχει σαν σύνολο κορυφών του το V' και σαν σύνολο ακμών του τις ακμές εκείνες του G που έχουν και τα δύο άκρα τους στο V', λέμε ότι προέρχεται από το V' και συμβολίζεται με $G[V']$.

Εστω E' μη κενό υποσύνολο του $E(G)$. Το υπογράφημα του G, που έχει σαν σύνολο ακμών του το E', και σαν σύνολο κορυφών του τα άκρα των ακμών που ανήκουν στο E', λέμε ότι προέρχεται από το E' και συμβολίζεται με $G[E']$.

Εστω $V' \subseteq V(G)$. Με $G - V'$ συμβολίζουμε το γράφημα που προκύπτει από το G εάν διαγράψουμε τις κορυφές εκείνες που ανήκουν στο V' καθώς επίσης και τις ακμές των οποίων τουλάχιστον ένα άκρο ανήκει στο V'.

Εστω $E' \subseteq E(G)$. Με $G - E'$ συμβολίζουμε το γράφημα που προκύπτει από το G, εάν διαγράψουμε τις ακμές που αποτελούν στοιχεία του E'. (Βλέπε Σχ. 5.4 για παραδείγματα των πιο πάνω ορισμών).



Σχ. 5.4

5.4. Βαθμός κορυφών

Ο βαθμός μιας κορυφής u ενός γραφήματος G συμβολίζεται με $d_G(u)$ και είναι ίσος με τον αριθμό των ακμών που έχουν ως άκρο τους την κορυφή u. (Κάθε βρόχος υπολογίζεται για δύο ακμές).

<u>Θεώρημα 5.1</u>:

$$\sum_{x \in V(G)} d_G(x) = 2e(G).$$

Απόδειξη: Κάθε ακμή έχει δύο άκρα. Επομένως κάθε ακμή "συνεισφέρει" τον αριθμό 2 στο άθροισμα

$$\sum_{x\in V(G)} d_G(x).$$

Αρα

$$\sum_{x\in V(G)} d_G(x) = 2\varepsilon(G).$$

Το Θεώρημα 5.1 θεωρείται σαν το πρώτο θεώρημα της Θεωρίας Γραφημάτων.
Με $\delta(G)$ και $\Delta(G)$ συμβολίζουμε τον ελάχιστο και μέγιστο βαθμό κορυφών αντίστοιχα σ' ένα γράφημα G.

5.5. Μονοπάτια, κύκλοι και συνεκτικότητα

Μια πεπερασμένη ακολουθία $W = v_0e_1v_1e_2v_2\dots e_kv_k$, της οποίας οι όροι είναι αλληλοδιαδόχως κορυφές και ακμές, όπου για $1 \le i \le k$ τα άκρα της ακμής e_i είναι οι κορυφές v_{i-1} και v_i, ονομάζεται περίπατος στο G. Οι κορυφές v_0 και v_k ονομάζονται αρχή και τέλος αντίστοιχα του περιπάτου W. Οι κορυφές $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ ονομάζονται εσωτερικές κορυφές του W. Στα απλά γραφήματα ο περίπατος $v_0e_1v_1\dots e_kv_k$ μπορεί να προσδιορισθεί με την ακολουθία των κορυφών του, δηλαδή με την $v_0v_1v_2\dots v_k$.

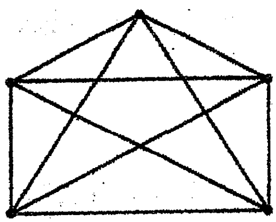
Εάν οι ακμές $e_1, e_2, \dots, e_k$ του περιπάτου W είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε ο W ονομάζεται ίχνος. Εάν ο W είναι κλειστός περίπατος όπου δεν παρατηρείται επανάληψη εσωτερικών κορυφών, τότε ο W ονομάζεται κύκλος. Εάν τώρα οι κορυφές $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ του W είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε ο W ονομάζεται μονοπάτι.

Ενα γράφημα ονομάζεται συνεκτικό, αν για κάθε ζεύγος διαφορετικών κορυφών του, u και v, υπάρχει μονοπάτι με αρχή την u και τέλος την v. Ενα τέτοιο μονοπάτι ονομάζεται (u, v) – *μονοπάτι*.
Συνιστώσα ενός γραφήματος G ονομάζουμε ένα συνεκτικό υπογράφημά του H, το οποίο δεν περιέχεται σε άλλο συνεκτικό υπογράφημα του G που έχει περισσότερες κορυφές ή ακμές από το H. O αριθμός των συνιστωσών του G συμβολίζεται με ω(G) και ω(G)=1, εάν και μόνον εάν το G είναι συνεκτικό.

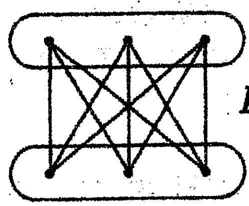
5.6. Γραφήματα ειδικής μορφής

5.6.1. Πλήρη γραφήματα

Ενα απλό γράφημα ονομάζεται πλήρες, εάν κάθε ζεύγος κορυφών του συνδέεται με μια ακμή. Ενα πλήρες γράφημα με n κορυφές συμβολίζεται με K_n (Βλέπε Σχ. 5.5).



Σχ. 5.5



Σχ. 5.6

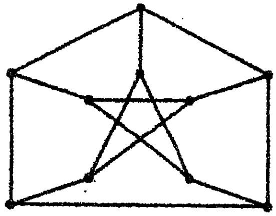
5.6.2. Διμερή γραφήματα

Ενα γράφημα G ονομάζεται διμερές, εάν το σύνολο των κορυφών του μπορεί να χωριστεί σε δύο σύνολα X και Y, ξένα μεταξύ τους, έτσι ώστε κάθε ακμή του G να συνδέει ένα στοιχείο του X με ένα στοιχείο του Y. Το ζεύγος (X, Y) ονομάζεται διαμερισμός του G.

Εάν τώρα σ'ένα διμερές γράφημα G με διαμερισμό (X, Y), όπου $|X| = m$ και $|Y| = n$, κάθε κορυφή του X είναι γειτονική με όλες τις κορυφές του Y, τότε λέμε ότι το G είναι πλήρες διμερές γράφημα και συμβολίζεται με $K_{m,n}$. (Βλέπε Σχ. 5.6)

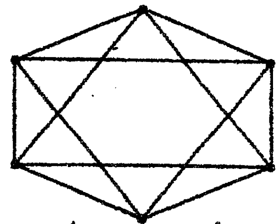
5.6.3. Κανονικά γραφήματα

Ενα γράφημα G ονομάζεται $k-$ *κανονικό* εάν $d_G(x) = k \quad \forall x \in V(G)$.



3 – κανονικό

Σχ. 5.7



4 – κανονικό

Σχ. 5.8

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.1 μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε το παρακάτω πόρισμα.

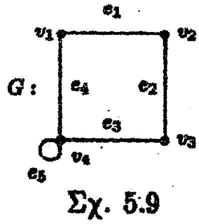
Πόρισμα 5.2: Εάν το G είναι k – κανονικό γράφημα, όπου το k είναι περιττός αριθμός, τότε το G περιέχει άρτιο αριθμό κορυφών.

5.7. Πίνακες γειτνίασης και πρόσπτωσης

Σ' ένα γράφημα G αντιστοιχεί ένας πίνακας $\nu \times \varepsilon$, ο οποίος ονομάζεται πίνακας πρόσπτωσης. Εάν οι κορυφές του G είναι οι $v_1, v_2, \dots, v_\nu$ και οι ακμές του οι $e_1, e_1, \dots, e_\varepsilon$ τότε ο πίνακας πρόσπτωσης του G είναι ο πίνακας $B(G) = [b_{ij}]$, όπου b_{ij} συμβολίζει πόσες φορές η κορυφή v_i είναι άκρο της ακμής e_j (δηλαδή το b_{ij} μπορεί να πάρει τις τιμές $0, 1, 2$, την τιμή 2 την παίρνει όταν η ακμή e_j είναι βρόχος και έχει για άκρα της την u_i).

Ενας άλλος πίνακας, ο οποίος αντιστοιχεί σ' ένα γράφημα G, είναι ο πίνακας γειτνίασης. Αυτός είναι ο $\nu \times \nu$ πίνακας $A(G) = [a_{ij}]$, όπου a_{ij} είναι ο αριθμός των ακμών που συνδέουν τις κορυφές v_i και v_j.

Παράδειγμα 5.2:



$$B(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}, \quad A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Σχ. 5.9

Κεφάλαιο 6

Κατευθυνόμενα γραφήματα

Ενα κατευθυνόμενο γράφημα D είναι μία διατεταγμένη τριάδα $(V(D), A(D), \psi_D)$, η οποία αποτελείται (i) από ένα σύνολο $V(D)$, όπου $V(D) \neq \emptyset$, τα στοιχεία του οποίου ονομάζονται κορυφές, (ii) ένα σύνολο $A(D)$, όπου $A(D) \cap V(D) = \emptyset$, τα στοιχεία του οποίου ονομάζονται τόξα και (iii) από μια συνάρτηση ψ_D, βάσει της οποίας σε κάθε τόξο του D αντιστοιχεί ένα διατεταγμένο ζεύγος κορυφών του D.

Κάθε κατευθυνόμενο γράφημα D μπορεί να απεικονισθεί ως εξής: Κάθε κορυφή απεικονίζεται μ' ένα σημείο στο επίπεδο και κάθε στοιχείο a του $A(D)$ μ'ένα τόξο, το οποίο κατευθύνεται από την κορυφή x προς την κορυφή y, όπου $\psi_D(a) = (x, y)$. Εστω τόξο a και κορυφές x, y, έτσι ώστε $\psi_D(a) = (x, y)$. Τότε λέμε ότι η x αποτελεί την ουρά, ενώ η y την κεφαλή του a.

Ο έσω-βαθμός $d_D^-(u)$ μιας κορυφής u είναι ο αριθμός των τόξων που έχουν για κεφαλή την u, ενώ ο έξω-βαθμός $d_D^+(u)$ της u είναι ο αριθμός των τόξων που έχουν για ουρά την u. Ο ελάχιστος και μέγιστος έσω-βαθμός και έξω-βαθμός του D συμβολίζεται με $\delta^-(D), \Delta^-(D)$ και $\delta^+(D), \Delta^+(D)$ αντίστοιχα. Ο αριθμός των κορυφών του D συμβολίζεται με $\nu(D)$, ενώ ο αριθμός των τόξων με $\varepsilon(D)$.

Ενας κατευθυνόμενος περίπατος στο D είναι μια πεπερασμένη ακολουθία $W = u_0 a_1 u_1 \ldots a_k u_k$, της οποίας οι όροι είναι αλληλοδιαδόχως κορυφές και τόξα όπου $\forall i = 1, 2, \ldots, k$ το τόξο a_i έχει για κεφαλή την u_i και για ουρά την u_{i-1}. Ενας κατευθυνόμενος περίπατος ονομάζεται κλειστός, εάν έχει την ίδια κορυφή για αρχή και τέλος.

Κατευθυνόμενο μονοπάτι είναι ένας κατευθυνόμενος περίπατος του οποίου όλες οι κορυφές είναι διαφορετικές. Κατευθυνόμενο κύκλο ονομάζουμε ένα κλειστό κατευθυνόμενο περίπατο, όπου εκτός της ταύτισης αρχής και τέλους δεν παρατηρείται άλλη επανάληψη κορυφών.

Θεώρημα 6.1: Για κάθε κατευθυνόμενο γράφημα D ισχύει οτι

$$\sum_{u \in V(D)} d_D^-(u) = \varepsilon(D) = \sum_{u \in V(D)} d_D^+(u).$$

Απόδειξη: Κάθε τόξο "συνεισφέρει" τον αριθμό 1 στον έξω-βαθμό της ουράς του και τον αριθμό 1 στον έσω-βαθμό της κεφαλής του. Αρα

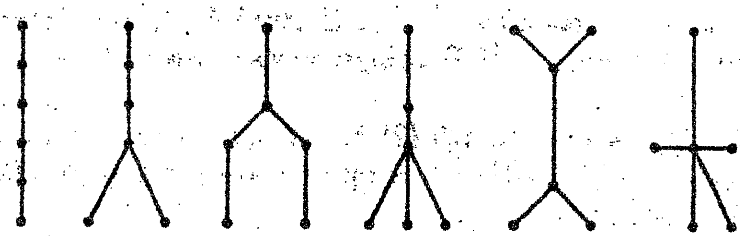
$$\sum_{u \in V(D)} d_D^-(u) = \varepsilon(D) = \sum_{u \in V(D)} d_D^+(u).$$

Κεφάλαιο 7

Δέντρα

7.1. Γενικά περί δέντρων

Δέντρο ονομάζουμε ένα συνεκτικό γράφημα το οποίο δεν περιέχει κύκλους. Στο Σχ.7.1 απεικονίζονται όλα τα δέντρα με 6 κορυφές.



Σχ. 7.1

Θεώρημα 7.1: Για ένα απλό γράφημα G οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(1) Το G είναι δέντρο.

(2) Για κάθε $u, v \in V(G)$ υπάρχει ακριβώς ένα $(u, v)-$*μονοπάτι*.

(3) Το G είναι συνεκτικό και $\nu(G) = \varepsilon(G) + 1$.

(4) Το G δεν περιέχει κύκλους και $\nu(G) = \varepsilon(G) + 1$.

(5) Το G δεν περιέχει κύκλους και για κάθε ζεύγος μη-γειτονικών κορυφών u και v, το γράφημα που προκύπτει από την προσθήκη μιας ακμής που έχει για άκρα τις u, v, περιέχει ακριβώς ένα κύκλο.

Απόδειξη:

(1) $\Rightarrow$ (2).
Επειδή το G είναι συνεκτικό, κάθε ζεύγος κορυφών συνδέεται με κάποιο μονοπάτι. Εστω P_1, P_2 διαφορετικά μονοπάτια, τα οποία συνδέουν τις κορυφές u και v του G, και έστω w η πρώτη κορυφή στο P_1 (καθώς πηγαίνουμε από το u στο v) για την οποία ισχύει ότι (i) η w είναι κορυφή και των δύο μονοπατιών και (ii) η αμέσως επόμενη κορυφή της w στο P_1 δεν ανήκει στο P_2.
Εστω επίσης w' η επόμενη κοινή κορυφή των P_1, P_2 μετά την w (πάντα καθώς πηγαίνουμε από το u στο v). Σ' αυτή την περίπτωση όμως παρατηρούμε ότι τα τμήματα των μονοπατιών P_1 και P_2, τα οποία βρίσκονται μεταξύ των κορυφών w και w' αποτελούν κύκλο του G. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι το G είναι δέντρο. Αρα $\forall u, v \in V(G)$ υπάρχει ακριβώς ένα $(u, v) - μονοπάτι$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Προφανώς από την (2) έχουμε ότι το G είναι συνεκτικό. Θα αποδείξουμε ότι $\nu(G) = \varepsilon(G) + 1$ με την μέθοδο της επαγωγής. Εάν $\nu(G) = 1$ τότε $\varepsilon(G) = 0 = \nu(G) - 1$.

Εστω ότι το Θεώρημα ισχύει για όλα τα γραφήματα που έχουν λιγότερες από $\nu(G)$ κορυφές. Εάν $e \in E(G)$ με άκρα τις κορυφές u και v, τότε από την (2) το γράφημα $G - \{e\}$ δεν περιέχει $(u, v) - μονοπάτι$. Επομένως το γράφημα $G - \{e\}$ δεν είναι συνεκτικό και συγκεκριμένα $\omega(G - \{e\}) = 2$. Εστω G_1, G_2 οι δύο συνιστώσες του $G - \{e\}$. Τα γραφήματα G_1, G_2 είναι δέντρα και περιέχουν λιγότερες από $\nu(G)$ κορυφές, άρα από την υπόθεση της επαγωγής $\nu(G_i) = \varepsilon(G_i) + 1 \quad \forall i = 1, 2$.
Επομένως $\nu(G) = \nu(G_1) + \nu(G_2) = \varepsilon(G_1) + 1 + \varepsilon(G_2) + 1 \Rightarrow \nu(G) = \varepsilon(G) + 1$, διότι $\varepsilon(G_1) + \varepsilon(G_2) + 1 = \varepsilon(G)$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Εστω ότι το G περιέχει κύκλο C μήκους n. Προφανώς ο κύκλος C περιέχει n κορυφές και n ακμές. Τώρα για κάθε κορυφή u που δεν ανήκει στον κύκλο C (υπάρχουν $\nu(G) - n$ τέτοιες κορυφές) βρίσκουμε το συντομότερο μονοπάτι P που συνδέει την u με τον C και αντιστοιχούμε στην κορυφή u την πρώτη ακμή του P (καθώς πηγαίνουμε από την u στον C.) Η αντιστοιχία αυτή είναι $1-1$. Αρα γενικά έχουμε ότι $\varepsilon(G) \geq \nu(G)$. Αυτό όμως είναι άτοπο,

διότι από την (3) έχουμε ότι $\nu(G) = \varepsilon(G) + 1$.

(4) $\Rightarrow$ (5). Εστω $G_1, G_2, \ldots, G_k$ συνιστώσες του G. Επειδή το G δεν περιέχει κύκλους κάθε μια απ' αυτές τις συνιστώσες είναι δέντρο. Αρα $\forall i = 1, 2, \ldots, k$ $\nu(G_i) = \varepsilon(G_i) + 1$, από το οποίο συνεπάγεται ότι $\nu(G) = \varepsilon(G) + k$. Ομως από την (4) έχουμε ότι $\nu(G) = \varepsilon(G) + 1$, επομένως $k = 1$ και άρα το G είναι συνεκτικό. Με άλλα λόγια το G είναι δέντρο και από την (1) $\Rightarrow$ (2), έχουμε ότι $\forall u, v \in V(G)$, υπάρχει ακριβώς ένα (u, v)-μονοπάτι. Εάν τώρα οι u, v δεν είναι γειτονικές, τότε η προσθήκη μιας ακμής που θα τις συνδέει θα μας δώσει ακριβώς ένα κύκλο στο G.

(5) $\Rightarrow$ (1). Από την (5) έχουμε ότι το G είναι συνεκτικό και ότι δεν περιέχει κύκλους. Αρα το G είναι δέντρο.

7.2. Το πρόβλημα σύνδεσης

Εστω ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα σιδηροδρομικό δίκτυο, το οποίο θα συνδέει n πόλεις. Γιά οικονομικούς λόγους θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος κατασκευής αυτού του δίκτυου.

Εστω ότι οι πόλεις του δίκτυου αποτελούν το σύνολο των κορυφών του γραφήματος K_n και έστω ότι σε κάθε ακμή e του K_n, η οποία έχει για άκρα της τις κορυφές u_i και u_j αντιστοιχεί ένας πραγματικός μη αρνητικός αριθμός $w(e)$ ο οποίος συμβολίζει το κόστος σύνδεσης της πόλης u_i με την πόλη u_j. Σ' αυτή την περίπτωση η εύρεση ενός δίκτυου που ελαχιστοποιεί το κόστος κατασκευής, ισοδυναμεί με την εύρεση ενός δέντρου T, που έχει το ίδιο σύνολο κορυφών όπως και το K_n (Ενα τέτοιο δέντρο ονομάζεται *επικαλυπτικό δέντρο* του K_n) και το οποίο ελαχιστοποιεί τον αριθμό

$$\sum_{e \in E(T)} w(e).$$

Ενα τέτοιο επικαλυπτικό δέντρο ονομάζεται optimal.

Ο αλγόριθμος του Kruskal μας παρέχει έναν απλό τρόπο για την εύρεση ενός optimal επικαλυπτικού δέντρου.

<u>Αλγόριθμος του Kruskal.</u>

(1) Επιλέγουμε μια ακμή e_1 έτσι ώστε το $w(e_1)$ να είναι ελάχιστο.

(2) Εάν οι ακμές $e_1, e_2, \ldots, e_i$ έχουν επιλεγεί, τότε επιλέγουμε ακμή e_{i+1} από το σύνολο $E - \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ έτσι ώστε:

(i) $G[\{e_1, e_2, \ldots, e_{i+1}\}]$ δεν περιέχει κύκλους.

(ii) $w(e_{i+1})$ είναι ελάχιστο ως προς (i).

(3) Η διαδικασία διακόπτεται όταν το (2) δεν είναι δυνατόν να εκτελεσθεί.

Θεώρημα 7.2: Κάθε επικαλυπτικό δέντρο $T^* = G[\{e_1, e_2, \ldots, e_{\nu-1}\}]$ ενός γραφήματος G, το οποίο προκύπτει από τον αλγόριθμο του **Kruskal** είναι optimal.
Απόδειξη: Εστω ότι το επικαλυπτικό δέντρο T^* δεν είναι optimal. Τότε θα υπάρχει επικαλυπτικό δέντρο S του G έτσι ώστε

$$\sum_{e \in E(S)} w(e) < \sum_{e \in E(T^*)} w(e)$$

Εστω e_k η πρώτη ακμή της ακολουθίας $e_1, e_2, \ldots, e_{\nu-1}$ που δεν ανήκει στο S. Εάν προσθέσουμε την ακμή e_k στο S, τότε το γράφημα που θα προκύψει θα περιέχει ακριβώς ένα κύκλο (Βλέπε Θεώρημα 7.1), έστω C, ο οποίος με την σειρά του περιέχει την ακμή e_k. Επειδή τώρα ο κύκλος C περιέχει μια ακμή e_l, η οποία ανήκει στο S αλλά όχι στο T^*, συνεπάγεται ότι το γράφημα S' που θα προκύψει από το S, αν αντικαταστήσουμε την e_l με την e_k, είναι πάλι επικαλυπτικό δέντρο του G. Από τον τρόπο κατασκευής του T^* όμως, έχουμε ότι $w(e_k) \leq w(e_l)$ και έτσι

$$\sum_{e \in E(S')} w(e) \leq \sum_{e \in E(S)} w(e).\ \text{Αρα} \sum_{e \in E(S')} w(e) < \sum_{e \in E(T^*)} w(e).$$

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία, αλλάζοντας μια ακμή κάθε φορά, μπορούμε να πάρουμε από το δέντρο S το δέντρο T^*. Κατά την διάρκεια αυτής της διαδικασίας όμως το συνολικό κόστος δεν αυξάνεται, άρα

$$\sum_{e \in E(S)} w(e) \geq \sum_{e \in E(T^*)} w(e).$$

Εμείς όμως υποθέσαμε ότι

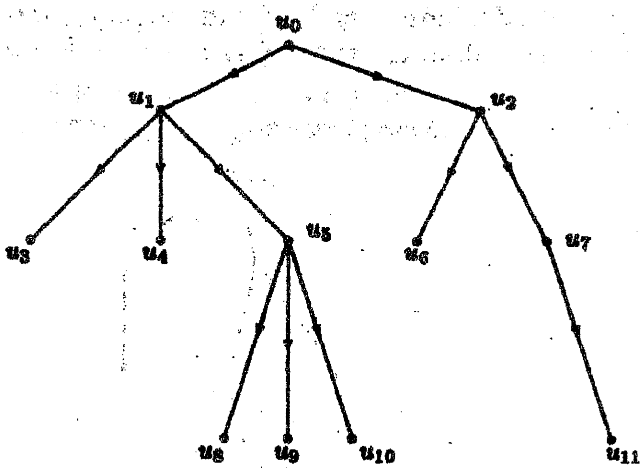
$$\sum_{e \in E(S)} w(e) < \sum_{e \in E(T^*)} w(e).$$

Επομένως το T^* είναι optimal επικαλυπτικό δέντρο του G.

7.3. Δέντρα με ρίζες

Ενα κατευθυνόμενο γράφημα D ονομάζεται κατευθυνόμενο δέντρο, εάν από την αντικατάσταση των τόξων του D με ακμές προκύπτει ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα που είναι δέντρο.

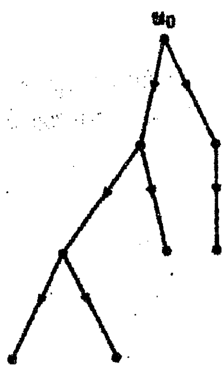
Ενα κατευθυνόμενο δέντρο λέμε ότι έχει ρίζα, εάν (i) υπάρχει σ' αυτό ακριβώς μια κορυφή u_0 με $d_D^-(u_0) = 0$ και (ii) για όλες τις άλλες κορυφές u_i ισχύει ότι $d_D^-(u_i) = 1$. Η κορυφή u_0 ονομάζεται ρίζα του κατευθυνόμενου δέντρου D και όλες οι κορυφές u_j για τις οποίες ισχύει οτι $d_D^+(u_j) = 0$ ονομάζονται φύλλα. Επίσης όλες οι κορυφές που δεν είναι φύλλα ονομάζονται εσωτερικές κορυφές.



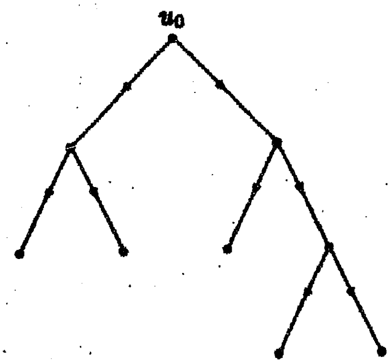
Σχ. 7.2

Το γράφημα του Σχ.7.2 είναι ένα κατευθυνόμενο δέντρο με ρίζα. Η κορυφή u_0 απότελεί ρίζα του, ενώ για φύλλα του έχει τις κορυφές $u_3, u_4, u_6, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}$.

Ενα κατευθυνόμενο δέντρο D με ρίζα ονομάζεται δυαδικό εάν $d_D^+(u_i) \leq 2 \ \forall u_i \in V(D)$. Το D ονομάζεται πλήρες δυαδικό εάν για κάθε κορυφή u_i που δεν είναι φύλλο του ισχύει ότι $d_D^+(u_i) = 2$.



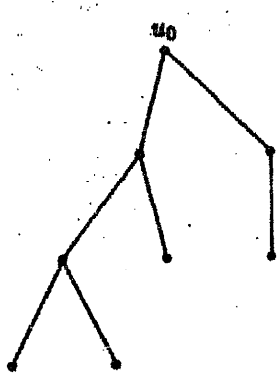
Σχ. 7.3



Σχ. 7.4

Στο Σχ. 7.3 έχουμε ένα δυαδικό δέντρο ενώ στο Σχ. 7.4 έχουμε ένα πλήρες δυαδικό δέντρο.

Τώρα σ' ένα κατευθυνόμενο δέντρο με ρίζα, τα τόξα του μπορούν να αντικατασταθούν με ακμές, διότι η επιλογή μιας κορυφής σαν ρίζα ουσιαστικά προσδιορίζει τις "κατευθύνσεις" των τόξων του γραφήματος.



Σχ. 7.5

Για παράδειγμα εάν έχουμε το γράφημα του Σχ. 7.5, τότε αμέσως μπορούμε να προσδιορίσουμε το κατευθυνόμενο γράφημα με ρίζα, από το οποίο προέρχεται. Στην προκείμενη περίπτωση, αυτό θα είναι το γράφημα του Σχ. 7.3.

Επομένως από εδώ και πέρα τα κατευθυνόμενα δέντρα με ρίζα θα τα απεικονίζουμε με μη-κατευθυνόμενα δέντρα.

Θεώρημα 7.3: Σε ένα πλήρες δυαδικό δέντρο T, ο αριθμός των φύλλων L σε σχέση με τον αριθμό των εσωτερικών κορυφών I ικανοποιούν την εξίσωση $L = I + 1$.

Απόδειξη: Οι κορυφές που αποτελούν τα φύλλα του T, είναι όλες οι κορυφές που έχουν βαθμό 1. Οι εσωτερικές κορυφές του T, πλην της ρίζας, είναι όλες οι κορυφές που έχουν βαθμό 3, ενώ η ρίζα είναι κορυφή βαθμού 2. Αρα

$$2\varepsilon(T) = \sum_{x \in V(T)} d_T(x) = L + 3(I-1) + 2 \qquad -(7.1)$$

Ομως από το Θεώρημα 7.1 έχουμε ότι $\nu(G) = \varepsilon(G) + 1$ και επειδή $\nu(G) = L + I$, από την (7.1) παίρνουμε ότι $L = I + 1$.

Σαν ύψος μιας κορυφής u σ' ένα δέντρο με ρίζα, ορίζουμε το μήκος του μοναδικού μονοπατιού που συνδέει την ρίζα με την u. Επίσης σαν ύψος του δέντρου ορίζουμε την μέγιστη τιμή ύψους κορυφής.

Θεώρημα 7.4: Σ' ένα δυαδικό δέντρο T ύψους h υπάρχουν το πολύ 2^h φύλλα.

Απόδειξη: Θα το αποδείξουμε με επαγωγή ως προς h. Εάν $h = 1$ τότε προφανώς το T θα έχει ένα ή δύο φύλλα. Αρα σ' αυτή την περίπτωση το Θεώρημα ισχύει. Εστω τώρα ότι έχουμε ένα δυαδικό δέντρο T ύψους h. Διαγράφουμε από το T τις ακμές που έχουν για άκρο τους την ρίζα του T. Επειδή το T είναι δυαδικό, αυτές είναι το πολύ 2. Από αυτή την διαγραφή των ακμών θα προκύψουν (i) ένα γράφημα που αποτελείται από μία μόνον κορυφή, βαθμού 0 και (ii) ένα ή δύο δυαδικά δέντρα ύψους το πολύ $h - 1$. Από την υπόθεση της επαγωγής, καθένα από αυτά τα δυαδικά δέντρα ύψους το πολύ $h - 1$ έχει το πολύ 2^{h-1} φύλλα.

Τώρα η ένωση των συνόλων των φύλλων αυτών των δυαδικών δέντρων ισούται με το σύνολο των φύλλων του T. Αρα το T έχει το πολύ $2 \cdot 2^{h-1} = 2^h$ φύλλα.

Πόρισμα 7.5: Εάν έχουμε ένα δυαδικό δέντρο ύψους h, το οποίο έχει L φύλλα, τότε $h \geq \lceil \log_2 L \rceil$. (Με $\lceil x \rceil$ συμβολίζουμε τον μικρότερο ακέραιο που είναι μεγαλύτερος ή ίσος με x.)

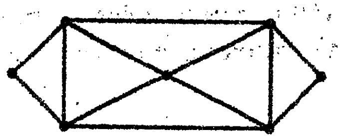
Απόδειξη: Από το Θεώρημα 7.4 έχουμε ότι $L \leq 2^h$. Αρα $\log_2 L \leq h$ και επειδή το h είναι ακέραιος $h \geq \lceil \log_2 L \rceil$.

Κεφάλαιο 8

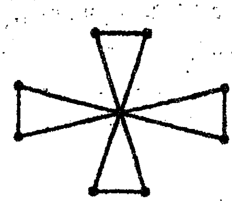
Ιχνη του Euler και κύκλοι του Hamilton

8.1. Ιχνη του Euler

Ενα συνεκτικό γράφημα G ονομάζεται Eulerian εάν υπάρχει ένα κλειστό ίχνος στο G το οποίο περιέχει όλες του τις ακμές. Ενα τέτοιο ίχνος ονομάζεται ίχνος του Euler (Πρώτος ο Euler εξέτασε την ύπαρξη τέτοιων ιχνών σ' ένα γράφημα). Τα παρακάτω γραφήματα είναι Eulerian.



Σχ. 8.1



Σχ. 8.2

<u>Θεώρημα 8.1</u>: Για ένα συνεκτικό γράφημα G οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(1) Το G είναι Eulerian.

(2) Ο βαθμός κάθε κορυφής είναι άρτιος.

(3) Υπάρχει ένα σύνολο $B = \{C_1, C_2, \ldots, C_\ell\}$, τα στοιχεία του οποίου είναι κύκλοι του G, έτσι ώστε (i) $E(C_1) \cup \ldots \cup E(C_\ell) = E(G)$ και (ii) $E(C_i) \cap E(C_j) = \emptyset$ $\forall i, j = 1, 2, \ldots, \ell$ όπου $i \neq j$.

<u>Απόδειξη</u>: (1) $\Rightarrow$ (2)

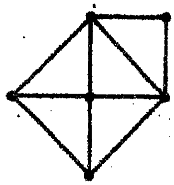
Εστω T ίχνος του Euler στο G. Κάθε φορά που το T "περνάει" από μια κορυφή u, χρησιμοποιεί δύο διαφορετικές ακμές ή ένα βρόχο που έχει την u άκρο. Επειδή στο T εμφανίζονται όλες οι ακμές, η u πρέπει να έχει άρτιο βαθμό.

(2) $\Rightarrow$ (3). Επειδή το G είναι συνεκτικό και ο βαθμός κάθε κορυφής είναι άρτιος, $\delta(G) \geq 2$. Επομένως το G θα περιέχει κύκλο, έστω τον C_1. Μετά τη διαγραφή των ακμών του C_1 από το G, θα προκύψει ένα γράφημα G_1 κάθε κορυφή του οποίου θα έχει άρτιο βαθμό. Εάν το G_1 δεν έχει ακμές τότε προφανώς η (3) ισχύει. Εάν τώρα το G_1 έχει ακμές η εφαρμογή του ίδιου επιχειρήματος στο G_1 θα μας δώσει κάποιο κύκλο C_2, η διαγραφή των ακμών του οποίου από το G_1, θα μας δώσει με την σειρά της ένα γράφημα G_2 στο οποίο ο βαθμός κάθε κορυφής θα είναι άρτιος. Αν εφαρμόσουμε αυτή την διαδικασία μέχρι να προκύψει ένα γράφημα χωρίς ακμές, τότε θα έχουμε βρεί ένα σύνολο κύκλων του G που θα ικανοποιεί τις ιδιότητες (i) και (ii) της πρότασης (3).

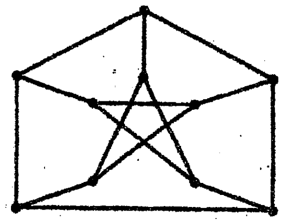
(3) $\Rightarrow$ (1). Εστω $Z_1 \in B$. Εάν $E(Z_1) = E(G)$ τότε προφανώς το G είναι Eulerian. Εάν $E(Z_1) \neq E(G)$, τότε επειδή το G είναι συνεκτικό υπάρχει κύκλος $Z_2 \in B$ έτσι ώστε Z_1 και Z_2 έχουν τουλάχιστον μια κοινή κορυφή, έστω την u. Το ίχνος που έχει σαν αρχή την u και περιέχει διαδοχικά τους κύκλους Z_1 και Z_2 είναι ένα κλειστό ίχνος στο G, το οποίο περιέχει τις ακμές του Z_1 και Z_2. Εάν $E(Z_1) \cup E(Z_2) = E(G)$, τότε προφανώς το G είναι Eulerian. Εάν $E(Z_1) \cup E(Z_2) \neq E(G)$ τότε συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να βρούμε τελικά ένα κλειστό ίχνος του G, το οποίο περιέχει όλες τις ακμές του. Αρα το G είναι Eulerian.

Ενα μονοπάτι το οποίο περιέχει όλες τις κορυφές ενός γραφήματος G ονομάζεται μονοπάτι του Hamilton στο G. Παρόμοια ένας κύκλος ο οποίος περιέχει όλες τις κορυφές του G ονομάζεται κύκλος του Hamilton στο G και το G ονομάζεται Hamiltonian γράφημα.

<u>Παράδειγμα 8.1</u>: Το γράφημα του Σχ. 8.3 είναι Hamiltonian, ενώ το γράφημα του Σχ. 8.4 δεν είναι Hamiltonian, αλλά περιέχει μονοπάτι του Hamilton.



Σχ. 8.3

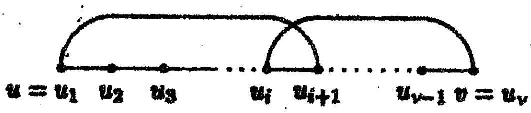


Σχ. 8.4

<u>Θεώρημα 8.2</u>: (Dirac 1952). Εστω G απλό γράφημα με (i) $\nu(G) \geq 3$ και (ii) $\delta(G) \geq \nu(G)/2$. Τότε το G είναι Hamiltonian.

<u>Απόδειξη</u>: Εστω ότι το G δεν είναι Hamiltonian και έστω ότι το G έχει μέγιστο αριθμό ακμών (αυτό σημαίνει ότι η προσθήκη μιας νέας ακμής στο G θα μας δώσει ένα Hamiltonian γράφημα). Το G δεν είναι προφανώς πλήρες διότι κάθε πλήρες γράφημα με τουλάχιστον 3 κορυφές είναι Hamiltonian. Εστω u, v μη γειτονικές κορυφές στο G. Επειδή το G έχει μέγιστο αριθμό ακμών το γράφημα $G + \{e\}$, όπου e είναι η ακμή που συνδέει τις u και v, είναι Hamiltonian. Επειδή το G δεν είναι Hamiltonian, κάθε κύκλος του Hamilton του γραφήματος $G + \{e\}$ θα περιέχει την ακμή e. Επομένως υπάρχει μονοπάτι του Hamilton στο G, έστω $u_1 u_2 \ldots u_\nu$, με αρχή την $u = u_1$ και τέλος την $v = u_\nu$.

Εστω $S = \{u_i \mid u \text{ και } u_{i+1} \text{ είναι γειτονικές κορυφές }\}$



Σχ. 8.5

και $T = \{u_i \mid v \text{ και } u_i \text{ είναι γειτονικές κορυφές }\}$. Επειδή έχουμε $u_\nu \notin S \cup T$,

$$|S \cup T| < \nu(G). \qquad -(8.1)$$

Επίσης

$$|S \cap T| = 0 \qquad -(8.2)$$

διότι εάν το σύνολο $S \cap T$ περιέχει κάποια κορυφή u_i, τότε το G θα περιέχει τον κύκλο του Hamilton $u_1 u_2 u_3 \ldots u_i u_\nu u_{\nu-1} \ldots u_{i+1} u_1$ (Βλέπε Σχ. 8.5). Χρησιμοποιώντας (8.1) και (8.2) έχουμε :

$$d_G(u) + d_G(v) = |S| + |T| = |S \cup T| + |S \cap T| < \nu(G)$$

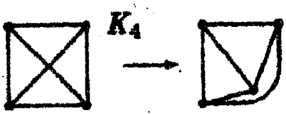
Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι $\delta(G) \geq \nu(G)/2$. Αρα το G είναι Hamiltonian.

Κεφάλαιο 9

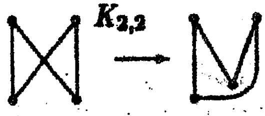
Επίπεδα γραφήματα και χρωματισμός γραφημάτων

9.1. Επίπεδα γραφήματα

Τα γραφήματα που μπορούν να απεικονισθούν στο επίπεδο, έτσι ώστε οι γραμμές που αντιστοιχούν στις ακμές του γραφήματος να μη τέμνονται σε σημεία που δεν είναι κορυφές, ονομάζονται επίπεδα γραφήματα.
Παράδειγμα 9.1: Τα γραφήματα K_4 και $K_{2,2}$ είναι επίπεδα γραφήματα.

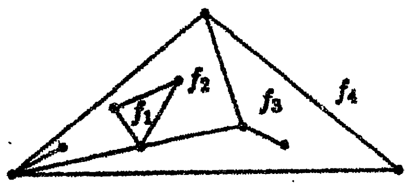


Σχ. 9.1



Σχ. 9.2

Οι περιοχές που ορίζει στο επίπεδο μια τέτοια γραφική απεικόνιση, ονομάζονται έδρες του επίπεδου γραφήματος G και ο αριθμός τους συμβολίζεται με $f(G)$.
Παράδειγμα 9.2: Το γράφημα του Σχ. 9.3 έχει 4 έδρες.



Σχ. 9.3

<u>Θεώρημα 9.1</u>: (Euler 1750). Εστω G συνεκτικό επίπεδο γράφημα. Τότε $\nu(G) + f(G) = \varepsilon(G) + 2$.
<u>Απόδειξη</u>: Θα το αποδείξουμε με επαγωγή ως προς τον αριθμό των ακμών του G.

Εάν $\varepsilon(G) = 0$ τότε $\nu(G) = 1$ (διότι το G είναι συνεκτικό). Αρα $f(G) = 1$ και επομένως το Θεώρημα ισχύει.

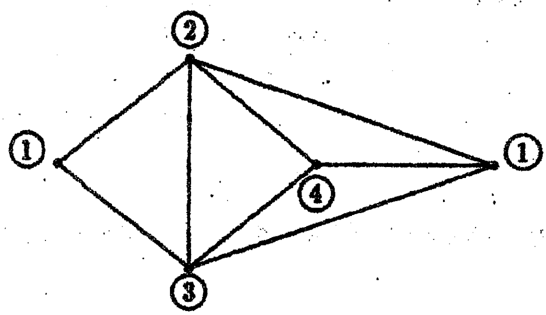
Ας υποθέσουμε ότι το Θεώρημα ισχύει για όλα τα συνεκτικά επίπεδα γραφήματα με $\varepsilon(G) - 1$ ακμές. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
<u>Περίπτωση 1</u>: Το G δεν περιέχει κύκλο.
Τότε $f(G) = 1$ και $\varepsilon(G) = \nu(G) - 1$. Αρα το θεώρημα ισχύει.
<u>Περίπτωση 2</u>: Το G περιέχει κύκλο.
Αν διαγράψουμε από το G μια ακμή του κύκλου θα προκύψει ένα επίπεδο συνεκτικό γράφημα, έστω G_1, με $\varepsilon(G) - 1$ ακμές. Επομένως από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε ότι $\nu(G_1) + f(G_1) = \varepsilon(G_1) + 2$. Ομως $\nu(G_1) = \nu(G)$ και $f(G_1) = f(G) - 1$. Αρα
$\nu(G_1) + f(G_1) = \varepsilon(G_1) + 2 \Rightarrow \nu(G) + f(G) = \varepsilon(G) + 2$.
<u>Πόρισμα 9.2</u>: Για κάθε απλό συνεκτικό επίπεδο γράφημα G με $\nu(G) \geq 3$, $\varepsilon(G) \leq 3\nu(G) - 6$.
<u>Απόδειξη</u>: Κάθε έδρα του G "φράσσεται" τουλάχιστον από 3 ακμές και κάθε ακμή "φράσσει" το πολύ 2 έδρες. Επομένως εάν υπολογίσουμε το άθροισμα των ακμών γύρω από κάθε έδρα έχουμε ότι $3f(G) \leq 2\varepsilon(G)$. Αρα από το Θεώρημα 9.1
$3(\varepsilon(G) + 2 - \nu(G)) \leq 2\varepsilon(G) \Rightarrow \varepsilon(G) \leq 3\nu(G) - 6$.
<u>Θεώρημα 9.3</u>: Κάθε απλό επίπεδο γράφημα G περιέχει τουλάχιστον μια κορυφή βαθμού το πολύ 5.
<u>Απόδειξη</u>: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το G είναι συνεκτικό και ότι έχει τουλάχιστον 3 κορυφές. Αν κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον 6, τότε

$$6\nu(G) \leq \sum_{x \in V(G)} d_G(x) = 2\varepsilon(G),$$

δηλαδή $3\nu(G) \leq \varepsilon(G)$. Από το Πόρισμα 9.2, $\varepsilon(G) \leq 3\nu(G) - 6$. Άρα το Θεώρημα ισχύει δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή βαθμού το πολύ 5.

9.2. Χρωματισμός γραφημάτων

Λέμε ότι ένα γράφημα G χωρίς βρόχους, μπορεί να χρωματισθεί με ℓ χρώματα, αν σε κάθε κορυφή του μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα από τα ℓ χρώματα έτσι ώστε να μην υπάρχουν γειτονικές κορυφές με το ίδιο χρώμα.
Παράδειγμα 9.3: Το γράφημα του Σχ. 9.4 μπορεί να χρωματισθεί με 4 χρώματα.



Σχ. 9.4

Ο μικρότερος αριθμός χρωμάτων, με τα οποία μπορεί να χρωματισθεί ένα γράφημα G, ονομάζεται χρωματικός αριθμός του G και συμβολίζεται με $\mathcal{X}(G)$.
Θεώρημα 9.4: Κάθε επίπεδο γράφημα G μπορεί να χρωματισθεί με 5 χρώματα (δηλ. $\mathcal{X}(G) \leq 5$).

Ασκήσεις

1) Πόσοι ακέραιοι υπάρχουν μεταξύ του 100 και του 199, οι οποίοι έχουν διαφορετικά ψηφία;

2) Πόσοι από τους ζητούμενους ακέραιους της προηγούμενης άσκησης είναι περιττοί;

3) Πόσοι από τους πρώτους 10.000 θετικούς ακέραιους έχουν διαφορετικά ψηφία;

4) Πόσους περιττούς ακέραιους μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5 οι οποίοι (i)έχουν 4 ψηφία και (ii) τα ψηφία αυτά είναι διαφορετικά μεταξύ τους;

5) Πόσοι ακέραιοι υπάρχουν οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι του 53.000 και έχουν ταυτόχρονα τις εξής ιδιότητες: (i)τα ψηφία τους είναι διαφορετικά και (ii) δεν εμφανίζονται σε αυτούς τα ψηφία 0 και 9;

6) Εστω το σύνολο $A = \{0, 1\}$. Λέξεις 0-1 ονομάζουμε τις λέξεις που έχουν για γράμματά τους στοιχεία του Α.

α) Πόσες 0-1 λέξεις υπάρχουν οι οποίες έχουν οκτώ γράμματα και αρχίζουν με 1100;

β) Πόσες 0-1 λέξεις υπάρχουν οι οποίες έχουν οκτώ γράμματα εκ των οποίων δύο ακριβώς είναι 1;

7) Τα γράμματα Α,Β,Γ,Δ χρησιμοποιούνται για να σχηματίσουμε λέξεις μήκους 3.

α) Πόσες λέξεις υπάρχουν που περιέχουν το γράμμα Α, επιτρεπομένων των επαναλήψεων;

β) Πόσες λέξεις υπάρχουν που αρχίζουν με Α, επιτρεπομένων των επαναλήψεων;

8)Ενα διαγώνισμα πολλαπλής επιλογής περιέχει ν ερωτήσεις με $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$ απαντήσεις αντίστοιχα. Ο εξεταζόμενος σημειώνει μια απάντηση σε κάθε ερώτηση. Να υπολογισθεί το πλήθος των τρόπων που μπορεί να απαντηθεί το διαγώνισμα.

Το Αγγλικό αλφάβητο περιέχει 26 γράμματα εκ των οποίων 5 είναι φωνήεντα.

9) Πόσες λέξεις μήκους 5 μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας 3 διαφορετικά σύμφωνα και 2 διαφορετικά φωνήεντα;

10) Πόσες από τις λέξεις της άσκησης 9 περιέχουν το γράμμα b;

11) Πόσες από τις λέξεις της άσκησης 9 αρχίζουν με a και περιέχουν το b;

12) Πόσες από τις λέξεις της άσκησης 9 αρχίζουν με b και τελειώνουν με c;

13) Ενας καθηγητής συγκεντρώνει ν εργασίες από ισάριθμους φοιτητές και σκοπεύει να τις δώσει στους φοιτητές για να τις διορθώσουν. Η επιστροφή των εργασιών πρέπει να γίνει με ένα τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε να αποκλεισθεί η περίπτωση, κάποιος φοιτητής να διορθώσει την δική του εργασία. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η κατανομή των εργασιών;

14) Για κάθε απλό γράφημα G, να αποδειχθεί ότι

$$\varepsilon(G) \leq \binom{\nu(G)}{2}$$

Ισότητα έχουμε όταν $G \cong K_\nu$.

15) Να αποδειχθεί ότι (i) $\varepsilon(K_{m,n}) = m{\cdot}n$. (ii) Εάν το G είναι απλό και διμερές τότε $\varepsilon(G) \leq \frac{(\nu(G))^2}{4}$.

16) Εάν το G είναι απλό και $\delta(G) \geq k$ τότε το G περιέχει μονοπάτι μήκους k.

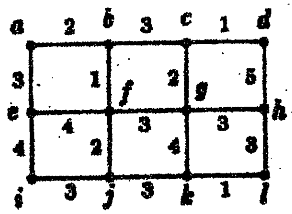
17) Εάν το G είναι απλό και $\delta(G) \geq 2$, να αποδειχθεί ότι το G περιέχει κύκλο.

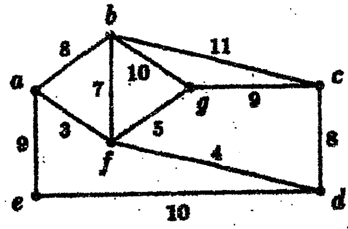
18) Εστω G k-κανονικό διμερές γράφημα με διαμερισμό (X,Y). Να αποδειχθεί ότι $|X| = |Y|$.

19) Εστω G απλό γράφημα και έστω $V(G) = \{u_1, u_2, \ldots, u_\nu\}$. Εάν A(G) είναι ο πίνακας γειτνίασης του G, να αποδειχθεί ότι το στοιχείο που βρίσκεται στην θέση (m, ℓ) του πίνακα $(A(G))^n$ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των διαφορετικών (u_m, u_ℓ)-περιπάτων μήκους n.

20) Ανοιγμα ενός γραφήματος ονομάζουμε το ελάχιστο μήκος κύκλου σ'αυτό το γράφημα. Να αποδειχθεί ότι : Ενα k-κανονικό γράφημα με άνοιγμα 4 έχει τουλάχιστον 2k κορυφές.

21) Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Kruskal, να προσδιορισθούν βέλτιστα επικαλυπτικά δέντρα στα δύο παρακάτω γραφήματα.





22) Να δοθεί παράδειγμα απλού γραφήματος, το οποίο είναι Eulerian και δεν είναι Hamiltonian.
23) Να δοθεί παράδειγμα απλού γραφήματος, το οποίο είναι Hamiltonian και δεν είναι Eulerian.
24) Να δοθεί παράδειγμα απλού γραφήματος G, για το οποίο ισχύει ότι (i) Το G δεν είναι Hamiltonian και (ii) $\delta(G) = \frac{\nu(G)}{2} - 1$.

Βιβλιογραφία

1) Bondy, J.A., Murty, U.S.R.:Graph theory with applicanions. North Holland 1976.

2) Liu C.L.Liu, Elements of Discrete Mathematics, Mc Graw-Hill international editions, Computer Science Series.

3) Mc Eliece, Ash R.B,Ash C,Introduction to Discrete Mathematics, Mc Graw- Hill, international editions, Computer Science Series.

4) Rossen K.H., Discrete Mathematics and its applications, The Random House / birkhauser Mathematics Series.

5) Χαραλαμπίδη Χ., Συνδυαστική.