ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

- Σύνολα
- Σχέσεις
- Συναρτήσεις
- Αρχή της επαγωγής
- Ισοδυναμία συνόλων. Αριθμήσιμα σύνολα
- Λογική
- Συνδυαστική ανάλυση
- Θεωρία Γραφημάτων.
- Εξισώσεις Διαφορών

Κεφ 1: Σύνολα

Ορ. (Cantor 1895): Σύνολο είναι ένα σύλλεγμα αντικειμένων σε ολότητα, της αντίληψης ή της νόησης και τα οποία είναι διακριτά μεταξύ τους.

Αντικείμενα συνόλου: στοιχεία συνόλου

$x \in A$ $\qquad\qquad$ $x \notin A$

στοιχείο x ανήκει (δεν ανήκει) στο σύνολο A.

Τρόποι περιγραφής συνόλων

α) $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

β) $\{x : \phi(x)\}$ $\qquad$ π.χ. $\{x : x \in \mathbb{N} \text{ και } x > 4\}$

σύνολο που έχει ως στοιχεία του, αυτά ακριβώς τα αντικείμενα που ικανοποιούν τον τύπο ϕ (την ιδιότητα)

1901: Παράδοξο του Russell.

Έστω σύνολο $A=\{x : x \notin x\}$

Έστω ότι $A \in A$. Τότε $A \notin A$.

Έστω ότι $A \notin A$. Τότε $A \in A$.

Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε κάτι άτοπο. Άρα η αρχική μας υπόθεση ότι το A είναι σύνολο δεν ισχύει.

Εάν έχουμε μια ιδιότητα φ, δεν ισχύει πάντα ότι η κλάση των x που την ικανοποιούν αποτελεί σύνολο. Σίγουρα είναι σύνολο όταν αυτά τα x, τα πάρουμε από ένα σύνολο S.

Ισότητα συνόλων.

Τα σύνολα Α, Β είναι ίσα, αν κάθε στοιχείο του Α ανήκει στο Β και κάθε στοιχείο του Β ανήκει στο Α ($A=B$)

Υποσύνολα.

Ένα σύνολο Α, θα λέμε ότι είναι υποσύνολο ενός συνόλου Β ($A\subseteq B$), αν κάθε στοιχείο του Α ανήκει και στο Β.

Επίσης λέμε ότι το Β είναι υπερσύνολο του Α.

Εάν $A\subseteq B$ και $A\neq B$, τότε θα λέμε ότι το Α είναι γνήσιο υποσύνολο του Β ($A\subset B$)

Παρατήρηση: $A=B \Longleftrightarrow A\subseteq B$ και $B\subseteq A$

(Εικασία του Goldbach

A : σύνολο των άρτιων που είναι μεγαλύτεροι του 4.

B: σύνολο των αθροισμάτων $p+q$ με p, q περιττούς πρώτους.

$$A \overset{?}{=} B$$)

Κενό σύνολο.

Το σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο. ($\emptyset$)

π.χ.

$$\emptyset = \{x\in\mathbb{R} \mid x^2+1=0\}$$

$$\emptyset = \{x\in\mathbb{N} \mid x>10 \text{ και } x<5\}.$$

Ένωση συνόλων.

Η ένωση δύο συνόλων A, B συμβολίζεται με $A \cup B$ και ορίζεται ως εξής:

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ή $x \in B$ } δηλ. εάν το x ανήκει τουλάχιστον σ' ένα απ' αυτά.

($x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ και $x \notin B$.)

Τομή συνόλων.

Η τομή δύο συνόλων A, B συμβολίζεται με $A \cap B$ και ορίζεται ως εξής:

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ και $x \in B$

($x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$ ή $x \notin B$)

Διαφορά συνόλων

Την διαφορά των συνόλων A, B την συμβολίζουμε με $A-B$ και την ορίζουμε ως εξής: $A-B=\{x\in A \mid x\notin B\}=\{x \mid x\in A$ και $x\notin B\}$

Έχουμε επομένως

$$x\notin A-B \Leftrightarrow x\notin A \text{ ή } x\in B$$

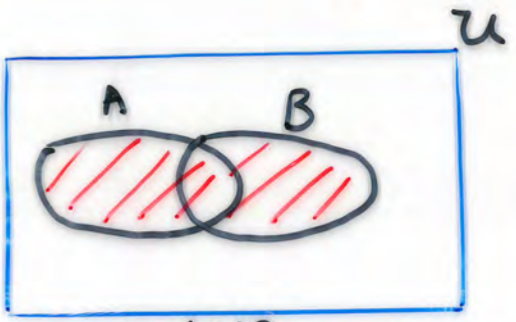
Συμπλήρωμα συνόλου.

Συχνά εξετάζονται σύνολα που είναι υποσύνολα ενός προκαθορισμένου συνόλου $\mathcal{U}$. Σ' αυτή την περίπτωση τα συμπληρώματα αυτών των συνόλων σχηματίζονται (ορίζονται) σε σχέση με το $\mathcal{U}$.

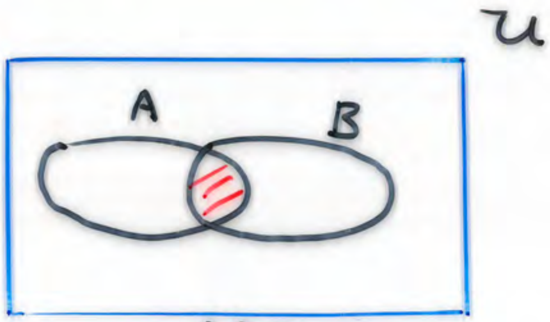
Γράφουμε A' (συμπλήρωμα του A) αντί $\mathcal{U}-A$.

Προφανώς $(A')'=A$

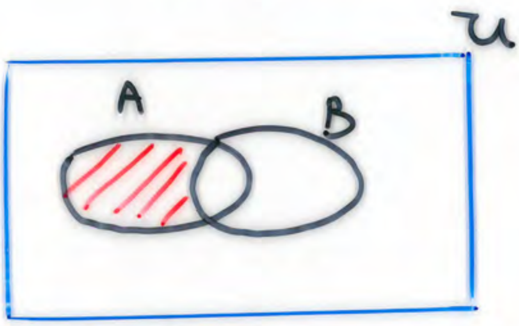
Διαγράμματα.



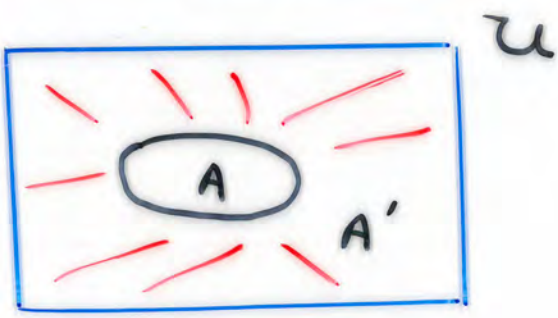
$A \cup B$



$A \cap B$



$A - B$



Ιδιότητες

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $\qquad$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\qquad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Νόμοι του De Morgan

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ $\qquad$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ $\qquad$ $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Αποδείξεις.

$\boxed{(A\cup B)' = A'\cap B'}$

Έστω $x\in(A\cup B)'$. Αυτό σημαίνει $x\notin A\cup B$ δηλ. $x\notin A$ και $x\notin B$. Άρα $x\in A'$ και $x\in B'$. Επομένως $x\in A'\cap B'$.

Άρα $(A\cup B)' \subseteq A'\cap B'$ $\quad -(1)$

Έστω τώρα $x\in A'\cap B'$. Αυτό σημαίνει $x\in A'$ και $x\in B'$, δηλ. $x\notin A$ και $x\notin B$.

Άρα $x\notin A\cup B$. Οπότε $x\in(A\cup B)'$.

Άρα έχουμε

$$A'\cap B' \subseteq (A\cup B)' \quad -(2)$$

Από (1) και (2) συνεπάγεται

$$(A\cup B)' = A'\cap B'$$

$\boxed{(A\cap B)' = A'\cup B'}$

Έστω $x\in(A\cap B)'$. Τότε $x\notin A\cap B$

δηλ. $x \notin A$ ή $x \notin B$. Άρα $x \in A'$ ή $x \in B'$.

Επομένως $x \in A' \cup B'$. Άρα

$$(A \cap B)' \subseteq A' \cup B' \qquad -(1)$$

Έστω τώρα ότι $x \in A' \cup B'$. Τότε $x \in A'$ ή $x \in B'$ δηλ. $x \notin A$ ή $x \notin B$. Άρα $x \notin A \cap B$. Επομένως $x \in (A \cap B)'$.

Οπότε έχουμε

$$A' \cup B' \subseteq (A \cap B)' \qquad -(2).$$

Από (1) και (2) έχουμε

$$A' \cup B' = (A \cap B)'$$

<u>Ορισμός</u>. Για κάθε σύνολο A, το σύνολο των υποσυνόλων του, συμβολίζεται με $\mathcal{P}(A)$ και ονομάζεται δυναμοσύνολο του A, δηλ. $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$

π.χ. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$.

Κεφ. 2 Σχέσεις

$\{a,b\}$: ζεύγος

(a,b): διατεταγμένο ζεύγος

Έστω σύνολα A, B. Το καρτεσιανό γινόμενο των A και B συμβολίζεται με $A \times B$ και ορίζεται ως εξής: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$

Προφανώς $A \times B \neq B \times A$. όταν $A \neq B$

Ορ. Διμελή σχέση R μεταξύ των στοιχείων δύο συνόλων X και Y ονομάζουμε κάθε υποσύνολο $R \subseteq X \times Y$

Εμείς θα εξετάσουμε κυρίως σχέσεις $R \subseteq X \times Y$ όπου $X = Y$, δηλ. ενδιαφερόμαστε για σχέσεις που ορίζονται σ' ένα σύνολο X

π.χ. $R = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}$ με $x<y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$R = \{(x,y) \mid 2x+6=y,\ x,y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Έστω διμελής σχέση $\mathcal{R} \subseteq A \times A$

Πεδίο ορισμού της $\mathcal{R} = \{x \,/\, \text{για κάποιο } y, (x,y) \in \mathcal{R}\} \subseteq A$

Σύνολο τιμών της $\mathcal{R} = \{y \in A \,/\, \text{για κάποιο } x, (x,y) \in \mathcal{R}\} \subseteq A$

Αν $(x,y) \in \mathcal{R}$ τότε θα λέμε ότι το x βρίσκεται στην σχέση $\mathcal{R}$ με το y (συμβολ. με $x\mathcal{R}y$).

Η $\mathcal{R}$ ονομάζεται αυτοπαθής εάν $a\mathcal{R}a$, για κάθε $a \in A$.

Η $\mathcal{R}$ ονομάζεται συμμετρική όταν ισχύει το εξής: εάν $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$

Η $\mathcal{R}$ ονομάζεται μεταβατική όταν ισχύει το εξής: εάν $a\mathcal{R}b$ και $b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$.

<u>Ορ.</u> Μια σχέση στο σύνολο A που είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική ονομάζεται <u>σχέση ισοδυναμίας</u>

π.χ.

$$\equiv_4 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Z} \text{ με } 4 \mid (x-y)\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

δηλ. $x-y=4k$
όπου $k \in \mathbb{Z}$

Η $\equiv_4$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Αποδ.

(a) Η $\equiv_4$ είναι αυτοπαθής.

Πράγματι $\forall x \in \mathbb{Z}$, $x-x=0=0.4$

(b) Η $\equiv_4$ είναι συμμετρική

Αν $x \equiv_4 y$ τότε $x-y=4k \Rightarrow y-x=4(-k) \Rightarrow y \equiv_4 x$.

(c) Η $\equiv_4$ είναι μεταβατική.

Έστω ότι $x \equiv_4 y$ και $y \equiv_4 z$. Αυτό σημαίνει ότι $x-y=4k_1$ και $y-z=4k_2$. Άρα $x-z=4(k_1+k_2)$.

Επομένως $x \equiv_4 z$.

Ορ. Έστω $\underset{\sim}{R}$ σχέση ισοδυναμίας στο A και έστω $a \in A$. Η κλάση ισοδυναμίας του a ως προς την $\underset{\sim}{R}$ συμβολίζεται με $[a]_{\underset{\sim}{R}}$ και ορίζεται ως εξής:

$$[a]_{\underset{\sim}{R}} = \{ b \in A \mid a \underset{\sim}{R} b \}.$$

Το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας ως προς την $\underset{\sim}{R}$ συμβολίζεται με $A/\underset{\sim}{R}$ και ονομάζεται σύνολο πηλίκο.

Θεώρημα: Τα μέλη του $A/\underset{\sim}{R}$ έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

(1) $[a]_{\underset{\sim}{R}} = [b]_{\underset{\sim}{R}} \Longleftrightarrow a \underset{\sim}{R} b$ για $a, b \in A$.

(2) $[a]_{\underset{\sim}{R}} \cap [b]_{\underset{\sim}{R}} \neq \emptyset \Rightarrow [a]_{\underset{\sim}{R}} = [b]_{\underset{\sim}{R}}$ για $a, b \in A$.

(3) $\bigcup \{ [a]_{\underset{\sim}{R}} \mid a \in A \} = A$.

Αποδ. (1)

$\Longrightarrow$ Επειδή η $\underset{\sim}{R}$ είναι αυτοπαθής

$\alpha \in [\alpha]_{\mathcal{R}}$ και $b \in [b]_{\mathcal{R}}$. Άρα $\alpha, b \in [\alpha]_{\mathcal{R}}$, $\alpha, b \in [b]_{\mathcal{R}}$. Επομένως $\alpha \mathcal{R} b$.

$\Leftarrow$

Έστω $x \in [\alpha]_{\mathcal{R}}$. Τότε $\alpha \mathcal{R} x$. Όμως εξ υποθέσεως $\alpha \mathcal{R} b$, και επειδή η $\mathcal{R}$ είναι συμμετρική $b \mathcal{R} \alpha$. Επομένως από την μεταβατικότητα της $\mathcal{R}$, έχουμε $b \mathcal{R} x$, δηλ. $x \in [b]_{\mathcal{R}}$. Άρα $[\alpha]_{\mathcal{R}} \subseteq [b]_{\mathcal{R}}$.

Έστω $x \in [b]_{\mathcal{R}}$. Τότε $b \mathcal{R} x$. Όμως εξ υποθέσεως $\alpha \mathcal{R} b$. Επομένως από την μεταβατικότητα της $\mathcal{R}$, $\alpha \mathcal{R} x$, δηλ. $x \in [\alpha]_{\mathcal{R}}$. Άρα $[b]_{\mathcal{R}} \subseteq [\alpha]_{\mathcal{R}}$

Επομένως $[\alpha]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$

(2) Έστω ότι $[\alpha]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} = \{x, y, \ldots\}$.

Τότε $\alpha \mathcal{R} x$ και $b \mathcal{R} x$. Όμως επειδή η $\mathcal{R}$ είναι συμμετρική $x\mathcal{R}b$. Άρα χρησιμοποιώντας την μεταβατικότητα της $\mathcal{R}$, $a\mathcal{R}b$. Επομένως από την (1) έχουμε $[a]_{\mathcal{R}}=[b]_{\mathcal{R}}$.

(3) Για κάθε $a\in A$, έχουμε $a\in[a]_{\mathcal{R}}$. (επειδή η $\mathcal{R}$ είναι αυτοπαθής). Άρα η ένωση όλων των κλάσεων ισοδυναμιών της $\mathcal{R}$, θα μας δώσει το A.

Συμπέρασμα: Το $A/\mathcal{R}$ χωρίζει το A σε υποσύνολα, ανά δύο ξένα μεταξύ τους, των οποίων η ένωση μας κάνει το A.

Παράδειγμα:

$\equiv_4$

$(\alpha, b) \in \equiv_4 \Longleftrightarrow \alpha - b = 4k \qquad k \in \mathbb{Z}$

Κλάσεις ισοδυναμίας της $\equiv_4$

$[0]_{\equiv_4} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 - x = 4k \text{ για } k \in \mathbb{Z}\} =$

$= \{0, -4, -8, -12, \ldots, 4, 8, 12, \ldots\}$

$[1]_{\equiv_4} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 - x = 4k \text{ για } k \in \mathbb{Z}\} =$

$= \{1, -3, -7, -11, \ldots, 5, 9, 13, \ldots\}$

$[2]_{\equiv_4} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 - x = 4k \text{ για } k \in \mathbb{Z}\} =$

$= \{2, -2, -6, -10, \ldots, 6, 10, 14, \ldots\}$

$[3]_{\equiv_4} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3 - x = 4k \text{ για } k \in \mathbb{Z}\} =$

$= \{3, -1, -5, -9, \ldots, 7, 11, 15, \ldots\}.$

$[4]_{\equiv_4} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 4 - x = 4k \text{ για } k \in \mathbb{Z}\} =$

$= \{4, 0, -4, -8, \ldots, 8, 12, \ldots\}$

Σχέσεις διάταξης.

Ορ. Μια σχέση $\mathcal{R}$ στο σύνολο A $(A \neq \emptyset)$ ονομάζεται αντισυμμετρική αν ισχύει το εξής:

όταν $x \mathcal{R} y$ και $y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$ (όπου $x, y \in A$)

Ορ. Μια σχέση $\mathcal{R}$ στο σύνολο A θα ονομάζεται σχέση μερικής διάταξης, εάν είναι (i) αυτοπαθής, (ii) αντισυμμετρική και (iii) μεταβατική.

π.χ.
1) Η σχέση "$\leq$" στο $\mathbb{R}$ είναι μια σχέση μερικής διάταξης

2) Η σχέση "$\subseteq$" στο δυναμοσύνολο ενός συνόλου, είναι μια σχέση μερικής διάταξης.

3) Έστω σχέση $\mathcal{R} \subseteq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ η οποία ορίζεται ως εξής:

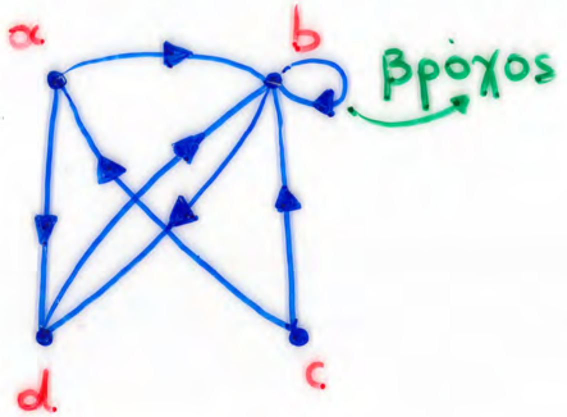
$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a \leq c$ και $b \leq d$.

Η $\mathcal{R}$ είναι σχέση μερικής διάταξης

Ορ. Έστω $\mathcal{R}$ σχέση μερικής διάταξης, η οποία ορίζεται σ' ένα σύνολο A. Αν επιπλέον $\forall\, x,y \in A$, είτε $x\mathcal{R}y$ ή $y\mathcal{R}x$, τότε η $\mathcal{R}$ ονομάζεται σχέση ολικής διάταξης.

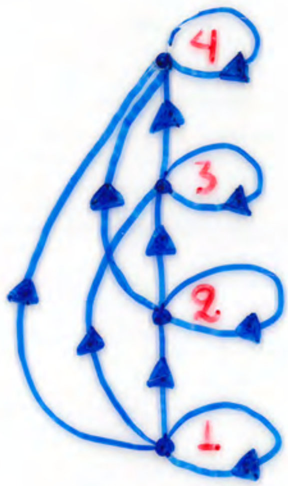
(Γραφική παράσταση σχέσεων:

$A=\{a,b,c,d\}$ $\quad \mathcal{R}=\{(a,b),(a,d),(b,b),(b,d),(c,a),(c,b),(d,b)\}$



)

π.χ. Η σχέση $\leq$ στο $A=\{1,2,3,4\}$.



Στην περίπτωση των σχέσεων διάταξης, μπορούν να παραλειφθούν από την γραφική τους παράσταση, τα εξής στοιχεία:

α) Οι βρόχοι (η ύπαρξη τους συνεπάγεται από την αυτοπαθή ιδιότητα)

β) Τα τόξα, η ύπαρξη των οποίων συνεπάγεται από την μεταβατική ιδιότητα.

Επίσης

γ) Τα τόξα μπορούν να αντικατασταθούν με ακμές. (Αυτό μπορεί να γίνει εάν στο αρχικό γράφημα, οι τοποθετήσεις των κορυφών είναι τέτοιες έτσι ώστε όλα τα τόξα να "δείχνουν" προς τα πάνω.)

Επομένως η προηγούμενη γραφική παράστα-
ση γίνεται:

<u>Ορ.</u>: Έστω σύνολο A και έστω $\underset{\sim}{R}$ σχέση μερικής διάταξης που ορίζεται σ'αυτό.

1) Ένα στοιχείο $a_0 \in A$, λέμε ότι είναι **ελάχιστο** στοιχείο του $A \Leftrightarrow a_0 \underset{\sim}{R} x, \forall x \in A$.

2) Ένα στοιχείο $b_0 \in A$, λέμε ότι είναι **μέγιστο** στοιχείο του $A \Leftrightarrow x \underset{\sim}{R} b_0, \forall x \in A$.

3) Ένα στοιχείο $a_0 \in A$, λέμε ότι είναι **σχετικό ελάχιστο** στοιχείο του A, εάν και μόνον εάν, όταν $x \underset{\sim}{R} a_0 \Rightarrow x = a_0$

4) Ένα στοιχείο $b_0 \in A$ λέμε ότι είναι σχετικό μέγιστο στοιχείο του A, εάν και μόνον εάν, όταν $b_0 R x \Rightarrow x = b_0$.

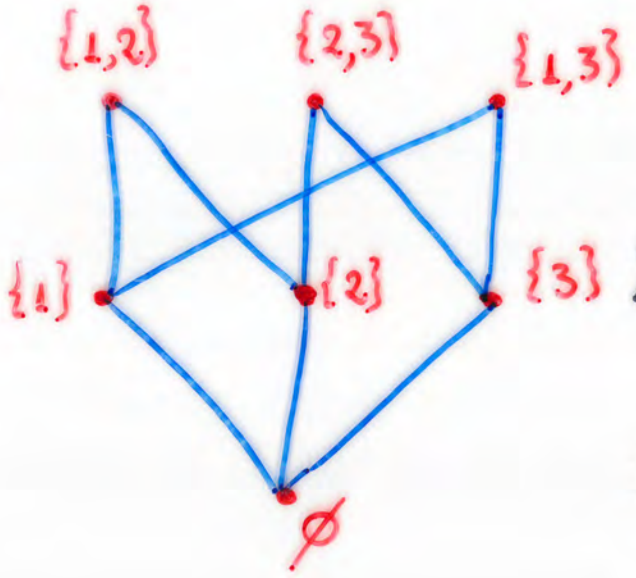
π.χ.

α)

Δεν υπάρχει μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο.

Σχετικά ελάχιστα: 9, 6, 8, 10
» » μέγιστα: 3, 2, 5

β)

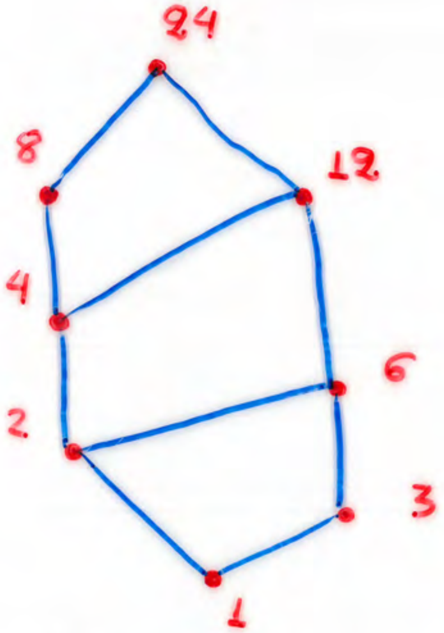


Ελάχιστο στοιχείο: $\emptyset$
Σχετικά ελάχιστα: $\emptyset$
Μέγιστο στοιχείο: Δεν υπάρχει.
Σχετικά μέγιστα: $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{1,3\}$.

γ) $A=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$.

$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x$ διαιρεί το y

Η $\mathcal{R}$ είναι σχέση μερικής διάταξης.



Μέγιστο και σχετικό μέγιστο: 24

Ελάχιστο και σχετικό ελάχιστο: 1

Παρατηρήσεις: 1) Κάθε μερικώς διατεταγμένο σύνολο έχει το πολύ ένα ελάχιστο (μέγιστο) στοιχείο.

Αποδ. Έστω $\mathcal{R}$ σχέση διάταξης που ορίζεται στο σύνολο A και έστω α_0 και α_0' ελάχιστα στοιχεία.

Τότε

$$\forall x \in A,\ \alpha_0 \mathcal{R} x \qquad -(1)$$

και

$$\forall x \in A,\ \alpha_0' \mathcal{R} x \qquad -(2)$$

Θέτουμε $x=\alpha_0'$ στην (1) και $x=\alpha_0$ στην (2), οπότε έχουμε $\alpha_0 \mathcal{R} \alpha_0'$ και $\alpha_0' \mathcal{R} \alpha_0$. Η $\mathcal{R}$ όμως έχει την αντισυμμετρική ιδιότητα, άρα

$$\alpha_0 = \alpha_0'$$

2) Ένα ελάχιστο (μέγιστο) στοιχείο ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου είναι και σχετικό ελάχιστο (σχετικό μέγιστο) στοιχείο.

3) Όπως είδαμε στην παρατήρηση (2) κάθε ελάχιστο (μέγιστο) στοιχείο ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου Α είναι και σχετικό ελάχιστο (σχετικό μέγιστο) στοιχείο. Συγκεκριμένα αυτό είναι το μόνο σχετικό ελάχιστο (σχετικό μέγιστο) του Α.

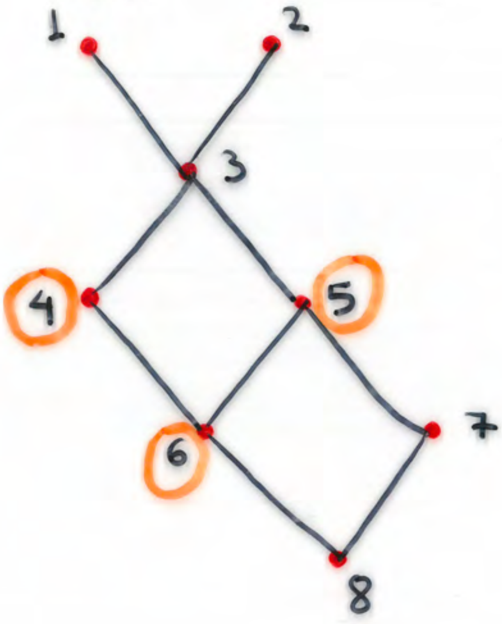
Αποδ. Έστω $\mathcal{R}$ σχέση μερικής διάταξης στο A, και έστω a, a' ελάχιστο και σχετικό ελάχιστο στοιχείο του A.

Επειδή το a είναι ελάχιστο στοιχείο $a\mathcal{R}a'$ και επειδή το a' είναι σχετικό ελάχιστο συνεπάγεται $a=a'$.

Πάνω και κάτω φράγματα.

Ορ. Έστω σύνολο A, $\mathcal{R}$ σχέση μερικής διάταξης στο A και έστω $S \subseteq A$.
Λέμε ότι το στοιχείο m του A είναι **άνω φράγμα** του S, εάν $\forall x \in S$, $x\mathcal{R}m$.
Επίσης λέμε ότι το S έχει για **κάτω φράγμα** του, το στοιχείο m του A, εάν $\forall x \in S$, $m\mathcal{R}x$.

π.χ.

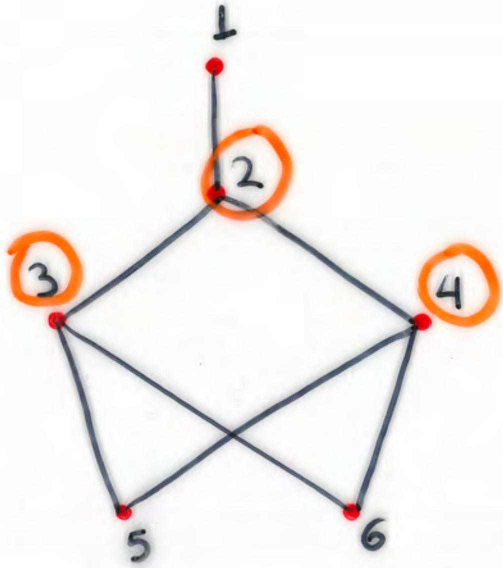


$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

$S=\{4,5,6\}$

Σύνολο πάνω φραγμάτων του $S=\{1,2,3\}$

Σύνολο κάτω φραγμάτων του $S=\{6,8\}$.



$A=\{1,2,3,4,5,6\}$

$S=\{2,3,4\}$

Σύνολο πάνω φραγμάτων του $S=\{1,2\}$

Σύνολο κάτω φραγμάτων του $S=\{5,6\}$.

(Στοιχεία που θα χρησιμοποιήσουμε από το προηγούμενο κεφάλαιο.

Σύνολα X, Y

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{σχέση}}}{R} \subseteq X \times Y$$

Πεδίο ορισμού της $R = \{x \in X \mid \exists y \in Y \text{ τ.ω. } (x,y) \in R\}$

Σύνολο τιμών της $R = \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ τ.ω. } (x,y) \in R\}$.

$$R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\} \subseteq Y \times X.$$

R^{-1}: αντίστροφη σχέση.
)

Κεφ. 3: Συναρτήσεις.

Ορ. Έστω σύνολα X και Y. Μια συνάρτηση από το X στο Y είναι μια σχέση f, που έχει για πεδίο ορισμού της το X και για την οποία ισχύει το εξής:

$\forall x \in X$, υπάρχει ένα και μόνον ένα $y \in Y$ τέτοιο ώστε $(x,y) \in f$.

π.χ. $X=\{a,b,c\}$ $Y=\{x,y\}$.

Η σχέση $f=\{(a,x),(b,x),(c,y)\}\subseteq X\times Y$

είναι μια συνάρτηση από το X στο Y.

Παρατηρήσεις

① Η φράση "η f είναι μια συνάρτηση από το X στο Y" συμβολίζεται με

$f: X \longrightarrow Y$

② Εάν $(x,y)\in f$, τότε συνήθως το στοιχείο y το συμβολίζουμε με $f(x)$. Γενικά αντί να γράφουμε xfy ή $(x,y)\in f$, γράφουμε $y=f(x)$.

③ Το στοιχείο y λέγεται τιμή του x μέσω της f.

(4) Σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο
$\{y \in Y \mid \exists\, x \in X$ τ.ω. $f(x)=y\} \subseteq Y$.

(5) Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το X στο Y είναι υποσύνολο του δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(X \times Y)$.

Ορ. Έστω συνάρτηση $f: X \to Y$
(i) Θα λέμε ότι η f είναι "1-1" εάν ισχύει το εξής:

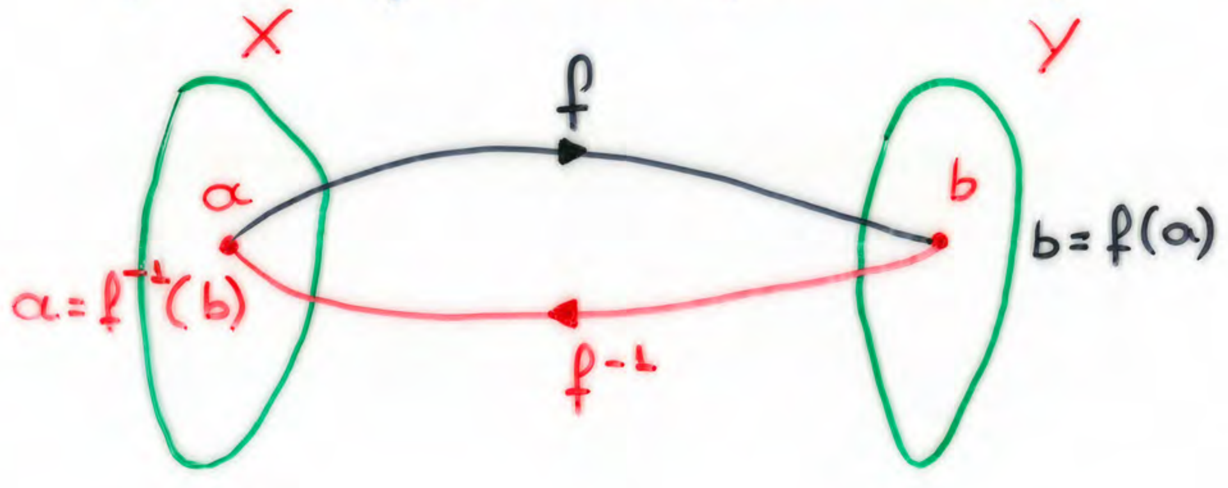
όταν $(x,y) \in f$ και $(z,y) \in f \Rightarrow x=z$

(δηλ. όταν $f(x)=f(z) \Rightarrow x=z$)

(ii) Θα λέμε ότι η f είναι συνάρτηση "επί", αν το σύνολο τιμών της, ταυτίζεται με το Y.

Έστω συνάρτηση $f: X \xrightarrow{1-1} Y$. Θεωρούμε την αντίστροφη σχέση $f^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in f\}$. Προφανώς η f^{-1} θα είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών της f και σύνολο τιμών, το πεδίο ορισμού της f. (δηλ. το X)

f^{-1}: αντίστροφη συνάρτηση της f.

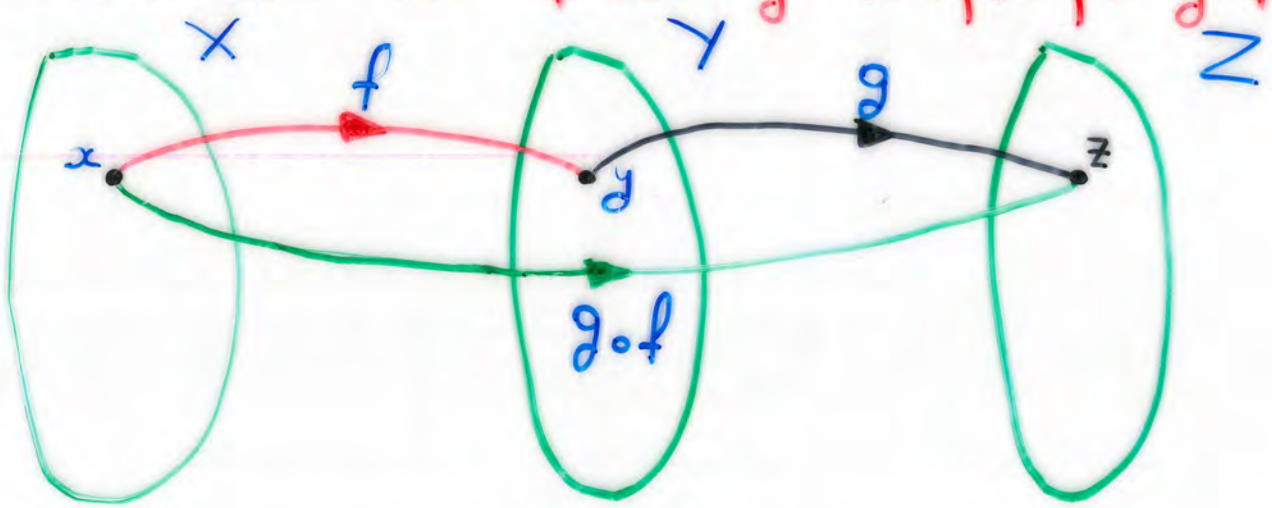


<u>Παρατήρηση</u>: Εάν $f: X \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} Y$ τότε προφανώς το πεδίο ορισμού της f^{-1}, θα είναι το Y.

Ορ. Έστω συναρτήσεις $f: X \to Y$ και $g: Y \to Z$. Για κάθε $x \in X$, υπάρχει ακριβώς ένα $y \in Y$ τ.ω. $y = f(x)$. Τώρα για κάθε $y \in Y$, υπάρχει ακριβώς ένα $z \in Z$ τ.ω. $z = g(y)$. Άρα για κάθε $x \in X$, υπάρχει ακριβώς ένα $z \in Z$ τ.ω. $z = g(f(x))$.

Οι συναρτήσεις f, g ορίζουν μια νέα συνάρτηση $h: X \to Z$ όπου για κάθε $x \in X$, $h(x) = g(f(x))$.

h: σύνθεση των f και g (συμβ. με $g \circ f$)



7.χ.

$$f:\{a,b,c\}\to\{a,b,c\}$$

$$f(a)=b \quad , \quad f(b)=c \quad , \quad f(c)=a$$

$$g:\{a,b,c\}\to\{1,2,3\}$$

$$g(a)=3, \quad g(b)=2, \quad g(c)=1$$

$$(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(b)=2$$

$$(g\circ f)(b)=g(f(b))=g(c)=1$$

$$(g\circ f)(c)=g(f(c))=g(a)=3$$

Παρατηρήσεις:

1) Για να ορισθεί η $g \circ f$ θα πρέπει το σύνολο τιμών της f, να είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της g.

2) Εάν οι $f \circ g$ και $g \circ f$ ορίζονται δεν σημαίνει ότι ταυτίζονται

π.χ. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 2x+3$ $\quad$ $g(x) = 3x+2$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+3) = 3(2x+3)+2 = 6x+11$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+2) = 2(3x+2)+3 = 6x+7.$$

3) Από (1) και (2) έχουμε ότι η διάταξη των f, g είναι σημαντική στην σύνθεσή τους.

<u>Θεώρημα</u>: Αν $f: X \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} Y$ τότε $f^{-1}: Y \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} X$

<u>Θεώρημα</u>: Αν $f: X \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} Y$ και $g: Y \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} Z$

τότε $g \circ f: X \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} Z$

<u>Αποδ.</u> Έστω $x_1, x_2 \in X$, όπου $x_1 \neq x_2$.

Επειδή η f είναι 1-1 έπεται ότι

$f(x_1) \neq f(x_2)$. Επειδή η g είναι 1-1 έχουμε

$g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. Άρα δείξαμε ότι

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow (g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$ που

σημαίνει ότι η $g \circ f$ είναι 1-1.

Έστω $z \in Z$. Επειδή η g είναι "επί",

$\exists\, y \in Y$ τ.ω. $g(y) = z$ και επειδή η

f είναι "επί", $\exists\, x \in X$ τ.ω. $y = f(x)$.

Άρα $\forall z \in Z, \exists\, x \in X$ τ.ω. $z = (g \circ f)(x)$.

Επομένως η $g \circ f$ είναι και "επί"

Κεφ 4: Αρχή της επαγωγής.

Αρχή της επαγωγής: Έστω $S \subseteq \mathbb{N}$ και έστω ότι

(1) $1 \in S$

(2) για κάθε φυσικό αριθμό n: "αν $n \in S$ τότε $n+1 \in S$".

Τότε το S περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς δηλ. $S = \mathbb{N}$

Αρχή του ελαχίστου: Κάθε μη-κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή για κάθε $X \subseteq \mathbb{N}$, $X \neq \emptyset$: υπάρχει $n \in X$ τέτοιο ώστε $n \leq m$, για κάθε $m \in X$.

Οι δύο παραπάνω προτάσεις είναι ισοδύναμες.

Αποδ.

Αρχή του ελαχίστου $\Rightarrow$ Αρχή της επαγωγής.

Έστω ότι $S \neq \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι $\mathbb{N} - S \neq \emptyset$. Άρα από την αρχή του ελαχίστου υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N} - S$ που είναι ελάχιστο στοιχείο του $\mathbb{N} - S$. Επειδή $1 \in S$ έχουμε $n_0 > 1$, άρα $n_0 = m + 1$ όπου $m \in \mathbb{N}$. Προφανώς $m \notin \mathbb{N} - S$ διότι n_0 είναι ελάχιστο στοιχείο του $\mathbb{N} - S$, άρα $m \in S$.

Από την (2) όμως έχουμε ότι $m + 1 \in S$, δηλ. $n_0 \in S$ - ΑΤΟΠΟ (διότι $n_0 \in \mathbb{N} - S$)

Άρα $S = \mathbb{N}$.

Αρχή της επαγωγής $\Rightarrow$ Αρχή του ελαχίστου.

Έστω $X \subseteq \mathbb{N}$, όπου $X \neq \emptyset$. Ας υποθέσουμε ότι το X δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

Θεωρούμε το σύνολο S που αποτελείται από όλους τους φυσικούς αριθμούς k, για τους οποίους ισχύει:

$$k \in S \Longleftrightarrow \text{για κάθε } m \in X : k < m.$$

Παρατηρούμε ότι $1 \in S$ (διαφορετικά αυτό θα ήταν ελάχιστο στοιχείο του X).

Έστω τώρα $n \in S$. Επειδή $n \in S$, θα έχουμε ότι $n < m$ για κάθε $m \in X$ δηλαδή $n+1 \leq m \quad \forall\, m \in X$. Προφανώς $n+1 \notin X$ (διότι διαφορετικά το $n+1$ θα ήταν ελάχιστο στοιχείο.)

Άρα ουσιαστικά έχουμε:

$$n+1 < m \quad \forall\, m \in X.$$

Δηλ. $n+1 \in S$.

Επομένως από την αρχή της επαγωγής

έχουμε ότι $\mathbb{N}=S$.

Επειδή τα σύνολα S και X είναι ξένα, $X=\emptyset$

ΑΤΟΠΟ

Μια άλλη διατύπωση της αρχής της επαγωγής είναι η εξής:

Έστω ϕ μια ιδιότητα των φυσικών αριθμών, τέτοια ώστε:

(1) $\phi(1)$ (δηλ. ο αριθμός 1 έχει την ιδιότητα ϕ)

(2) Για κάθε φυσικό n: "Αν $\phi(n) \Rightarrow \phi(n+1)$"

Τότε όλοι οι φυσικοί αριθμοί έχουν την ιδιότητα ϕ.

Επαγωγική απόδειξη.

π.χ. $\forall\ n \in \mathbb{N},\ n < 2^n$

Έστω ότι $\phi(n)$ είναι η συνθήκη: $n < 2^n$

Προφανώς $\phi(1)$. Θα αποδείξουμε ότι: $\phi(n) \Rightarrow \phi(n+1)$. Πράγματι εάν

$n < 2^n \Rightarrow 2.n < 2.2^n \Rightarrow 2n < 2^{n+1}$. Προφανώς $n+1 \leq n+n$. Άρα $n+1 < 2^{n+1}$ (δηλ. $\phi(n+1)$)

Αρχή της επαγωγής (β! μορφή)

Έστω $S \subseteq \mathbb{N}$ και ας υποθέσουμε ότι:

(1) $1 \in S$

(2) για κάθε $n \in \mathbb{N}$: εάν $\{1,2,\dots,n\} \subseteq S$

$\Longrightarrow n+1 \in S$.

Τότε $S = \mathbb{N}$

Η πιο πάνω αρχή είναι επίσης ισοδύναμη με την αρχή του ελαχίστου.

<u>Απ.</u> Αρχή ελαχίστου $\Longrightarrow$ Β! μορφή αρχής της επαγωγής

Έστω ότι $S \neq \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι $\mathbb{N} - S \neq \emptyset$. Άρα από την αρχή του ελαχίστου το $\mathbb{N} - S$ έχει ελάχιστο στοιχείο, ας υποθέσουμε το n_0. Επειδή $1 \in S$, $n_0 > 1$. Το γεγονός ότι το n_0

είναι ελάχιστο στοιχείο του $\mathbb{N}-S$,
συνεπάγεται ότι $\{1,2,\ldots,n_0-1\}\subseteq S$.
Από την (2) έπεται ότι $n_0\in S$ _ ΑΤΟΠΟ
διότι $n_0\in\mathbb{N}-S$.

(β! μορφή) $\Longrightarrow$ Αρχή ελαχίστου.

Έστω $X\subseteq\mathbb{N}$, όπου $X\neq\emptyset$. Ας υποθέσουμε ότι το X δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.
Θέτουμε $S=\mathbb{N}-X$ και έχουμε:

(1) $1\in S$ (διότι διαφορετικά το 1 θα ήταν ελάχιστο στοιχείο του X).

(2) εάν $\{1,2,\ldots,n\}\subseteq S\Rightarrow n+1\in S$ (διότι διαφορετικά το $n+1$ θα ήταν ελάχιστο στοιχείο του X.)

Άρα από την β! μορφή της επαγωγής έχουμε ότι $S=\mathbb{N}$, δηλ. $X=\emptyset$ — ΑΤΟΠΟ.

Κεφ. 5: Ισοδυναμία συνόλων. Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα.

$|X|$: αριθμός των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου X.

Ορ. Λέμε ότι δύο σύνολα X και Y είναι ισοδύναμα (συμβ. με $X \sim Y$) όταν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων των συνόλων X και Y, δηλαδή όταν υπάρχει συνάρτηση

$$f : X \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} Y$$

Παρατήρηση: Προφανώς εάν τα A, B είναι πεπερασμένα σύνολα,

$$A \sim B \Longleftrightarrow |A| = |B|$$

π.χ. α) Το $\mathbb{N}$ και το σύνολο των άρτιων φυσικών είναι ισοδύναμα σύνολα.

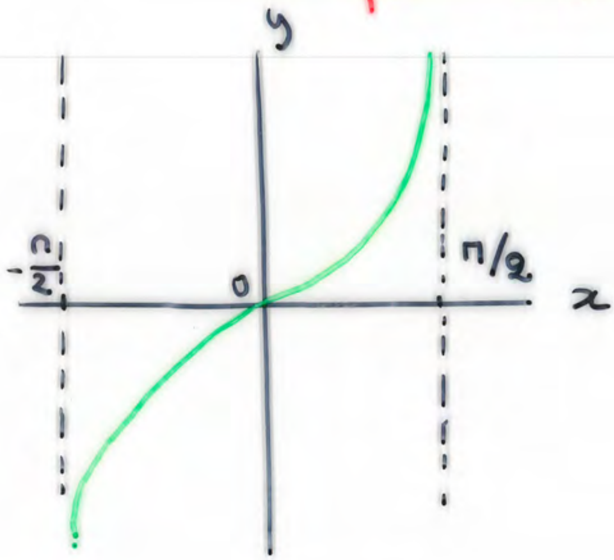
Απ.
$$f: \mathbb{N} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$$

με τύπο $f(x) = 2x$

β) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \sim \mathbb{R}$

Αποδ.
$$f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \mathbb{R}$$

με τύπο $f(x) = \tan x$



Θεώρημα: (i) $X \sim X$

(ii) $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$

(iii) $X \sim Y$ και $Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$

Αποδ: (i) Θεωρούμε την ταυτοτική συνάρτηση
$$i_X : X \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} X$$

(ii) Αν $f : X \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} Y$ τότε $f^{-1} : Y \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} X$

(iii) Αν $f : X \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} Y$ και $g : Y \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} Z$

τότε $g \circ f : X \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} Z$. Άρα $X \sim Z$.

$\mathbb{N}_k = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ για $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$.

Έστω πεπερασμένο σύνολο $X = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$

Η διαδικασία μετρήματος των στοιχείων του X είναι "ουσιαστικά" μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων του X και των στοιχείων του $\mathbb{N}_k$.

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \dots\dots & a_k \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ 1 & 2 & \dots\dots & k \end{array} \qquad f : X \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} \mathbb{N}_k$$

Παρατήρηση: $|X| = k \iff X \sim \mathbb{N}_k$

ΤΗΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΜΕΤΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΝ ΕΠΕΚΤΕΙΝΟΥΜΕ ΣΕ ΑΠΕΙΡΟΣΥΝΟΛΑ.

Ορ. Ένα σύνολο X, θα λέμε ότι είναι αριθμήσιμο όταν $X \sim \mathbb{N}$ δηλ. όταν υπάρχει $f: X \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \mathbb{N}$.

Παραδείγματα:

α) Το $\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο.

β) Το σύνολο A των περιττών φυσικών είναι αριθμήσιμο.

Απ. $f: \mathbb{N} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} A$ με τύπο $f(k)=2k+1$.

γ) Το $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο.

Απ. $f: \mathbb{N} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \mathbb{Z}$ με τύπο

$$f(n)=\begin{cases} k & \text{αν } n=2k \\ -k & \text{αν } n=2k-1 \end{cases}$$

δ) Το $(0,1)$ <u>δεν</u> είναι αριθμήσιμο.

Απ. Ας υποθέσουμε ότι το $(0,1)$ είναι

αριθμήσιμο. Τότε $(0,1) \sim \mathbb{N}$, δηλαδή θα είχαμε όλα τα στοιχεία του $(0,1)$ σε μια λίστα $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ δηλ. εάν $\alpha \in (0,1)$, αυτός θα ήταν κάποιος α_i με $i \in \mathbb{N}$. Θα είχαμε την λίστα δηλ.

$$\begin{array}{l}
\alpha_0 = 0.\alpha_{00}\alpha_{01}\alpha_{02}\alpha_{03}\ldots\ldots \\
\alpha_1 = 0.\alpha_{10}\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\ldots \\
\alpha_2 = 0.\alpha_{20}\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\ldots \\
\vdots \\
\alpha_n = 0.\alpha_{n0}\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots\ldots \\
\vdots
\end{array}$$

Ας θεωρήσουμε τον αριθμό $0.b_0b_1b_2\ldots$ όπου

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } \alpha_{ii} = 9 \\ 9-\alpha_{ii} & \text{αν } \alpha_{ii} = 0,1,2,\ldots,8 \end{cases}$$

για όλα τα $i \in \mathbb{N}$.

Προφανώς $0.b_0b_1b_2b_3\ldots\ldots \in (0,1)$.

Ο παραπάνω όμως αριθμός δεν βρίσκεται στην λίστα, διότι διαφέρει από τον a_0 στο ψηφίο a_{00}, από τον a_1 στο ψηφίο a_{11} ..... κ.ο.κ. , δηλαδή γενικά ο αριθμός $0.b_0b_1b_2b_3\ldots\ldots$ διαφέρει από τον a_k στο k-οστό ψηφίο , διότι $b_k \neq a_{kk}$ — ΑΤΟΠΟ.

Παρατήρηση: Μπορεί να αποδειχθεί ότι $(0,1) \sim \mathbb{R}$, άρα και το $\mathbb{R}$ δεν είναι αριθμήσιμο.

Αποδ. Έστω ότι το $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο, έστω δηλ. ότι $\mathbb{R} \sim \mathbb{N}$. Επειδή $(0,1) \sim \mathbb{R}$, θα είχαμε $(0,1) \sim \mathbb{N}$, δηλαδή το $(0,1)$ θα ήταν αριθμήσιμο — ΑΤΟΠΟ.

Κεφ. 6: Λογική

Οι κανόνες της Λογικής δίνουν ακριβές νόημα στις Μαθηματικές προτάσεις. Οι κανόνες αυτοί μας επιτρέπουν να αποφασίζουμε ποιά μαθηματικά επιχειρήματα ισχύουν και ποιά όχι.

Προτασιακός Λογισμός.

Γλώσσα Γ: Το σύνολο των συμβόλων της, συμβολίζεται με $\Sigma(\Gamma)$ και περιέχει τα εξής στοιχεία:

α) $P_0, P_1, P_2, \ldots$, που ονομάζονται προτασιακές μεταβλητές.

β) $\neg, \wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow$, που ονομάζονται σύνδεσμοι.

άρνηση σύζευξη διάζευξη συνεπαγωγή ισοδυναμία

γ)), (, που λέγονται παρενθέσεις, αντίστοιχα δεξιά, αριστερή παρένθεση.

Σύνδεσμοι } Λογικά σύμβολα.
παρενθέσεις } Καθορισμένο περιεχόμενο

Οι προτασιακές μεταβλητές μπορούν να ερμηνευθούν με διάφορους τρόπους.

$M(\Gamma)$: σύνολο προτασιακών μεταβλητών της Γ.

Ορ.: Έκφραση της Γ, ονομάζουμε κάθε πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων της

π.χ. $\vee \longrightarrow p_0) \wedge p_1 \longleftrightarrow$

Μια έκφραση ϕ της Γ, ονομάζεται προτασιακός τύπος αν και μόνον αν:

(i) είναι προτασιακή μεταβλητή, ή

(ii) είναι της μορφής $(\neg\beta)$, $(\beta\wedge\gamma)$, $(\beta\vee\gamma)$, $(\beta\rightarrow\gamma)$, $(\beta\longleftrightarrow\gamma)$ όπου β,γ προτασιακοί τύποι ήδη κατασκευασμένοι.

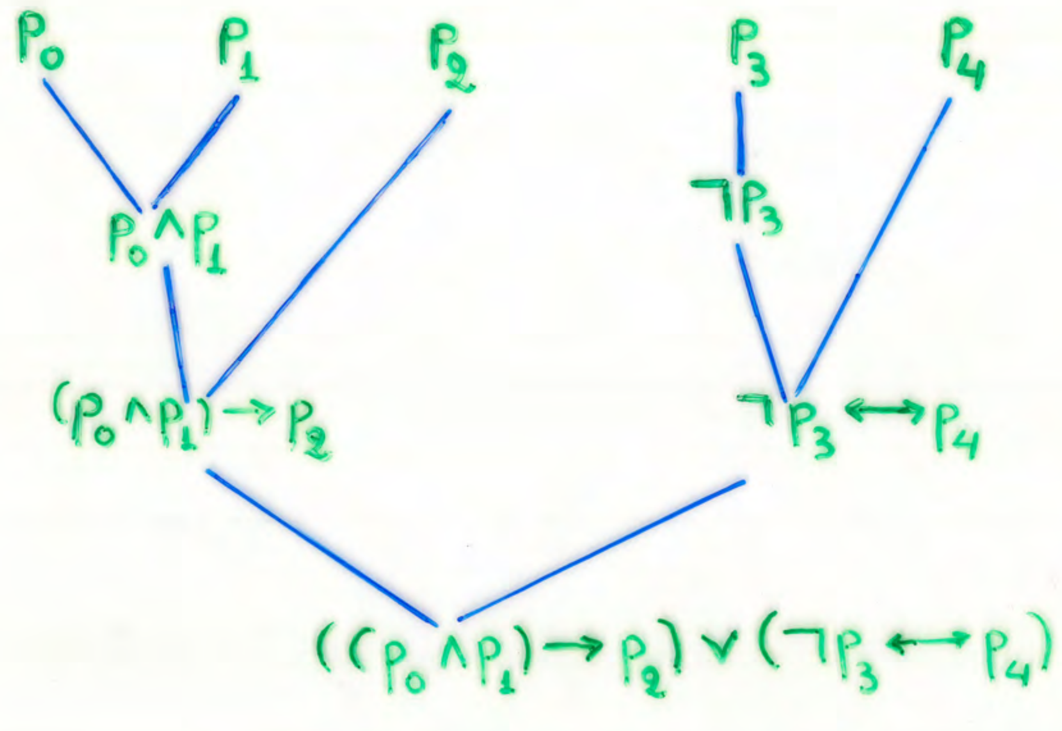
π.χ. $(\neg p_1) \vee (p_0 \wedge p_2)$, $(\neg p_0) \vee (p_1 \to p_2)$

Εμείς θα ασχοληθούμε με εκφράσεις της Γ που είναι προτασιακοί τύποι.

$T(\Gamma)$: Το σύνολο των προτασιακών τύπων της Γ.

Δενδροδιάγραμμα προτασιακού τύπου.

π.χ. $((p_0 \wedge p_1) \to p_2) \vee (\neg p_3 \leftrightarrow p_4)$



Μια ερμηνεία της Γ είναι η εξής:

α) Προτασιακές μεταβλητές: Στοιχειώδεις προτάσεις της ελληνικής γλώσσας, δηλ. προτάσεις που

(i) δεν περιέχουν μικρότερες

και (ii) είναι αληθείς ή ψευδείς.

β) Οι σύνδεσμοι αντιστοιχούν στις φράσεις:

$\neg$	δεν
$\wedge$	και
$\vee$	ή
$\rightarrow$	αν ..... τότε ....
$\leftrightarrow$	...... αν και μόνον αν .....

γ) Οι παρενθέσεις αντιστοιχούν σε σημεία στίξεως που δηλώνουν την αρχή και το τέλος μιας πρότασης.

ΜΕ ΤΗΝ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΟΙ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΤΗΣ Γ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥΝ ΣΕ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΛΩΣΣΑΣ.

Ορ. Μια συνάρτηση $v: M(\Gamma) \to \{A, \Psi\}$ ονομάζεται αποτίμηση. Τα A, Ψ ονομάζονται τιμές αλήθειας και αντιστοιχούν στις έννοιες αληθής, ψευδής.

Ορ. Τώρα δοσμένης μιας τέτοιας συνάρτησης v, ορίζουμε μια νέα συνάρτηση $\bar{v}: T(\Gamma) \to \{A, \Psi\}$ που είναι επέκταση της v στο $T(\Gamma)$ και η οποία υπακούει στους παρακάτω κανόνες-πίνακες.

$\bar{v}(\phi)$	$\bar{v}(\neg\phi)$
A	Ψ
Ψ	A

$\bar{v}(\phi)$	$\bar{v}(\psi)$	$\bar{v}(\phi\wedge\psi)$	$\bar{v}(\phi\vee\psi)$	$\bar{v}(\phi\to\psi)$	$\bar{v}(\phi\leftrightarrow\psi)$
A	Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ
Ψ	A	Ψ	A	A	Ψ
A	A	A	A	A	A
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A	A

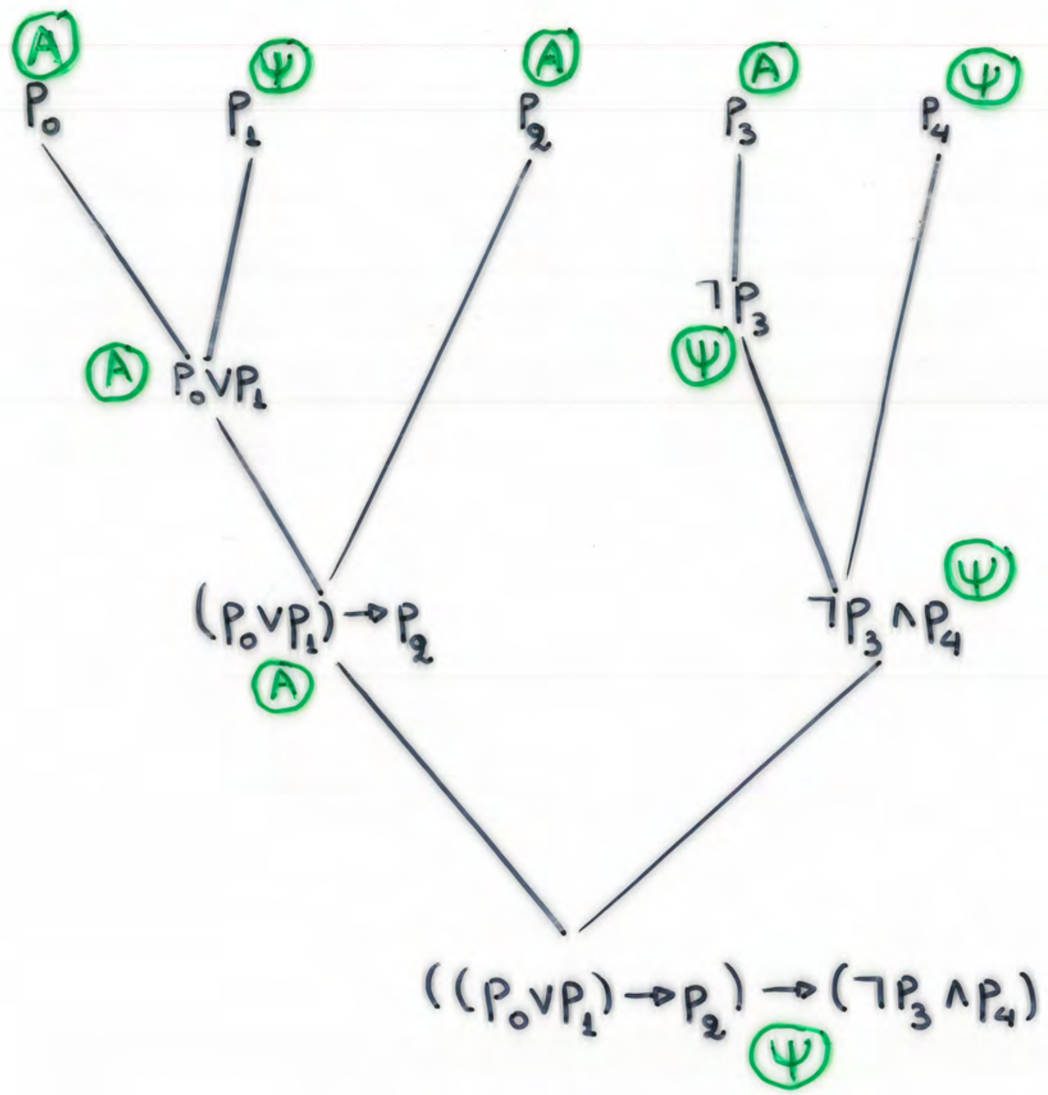
Ασκήσεις: 1) Έστω v μια αποτίμηση τ.ω.

$$v(p_0) = v(p_2) = v(p_3) = A \quad \text{και} \quad v(p_1) = v(p_4) = \Psi.$$

Να βρεθεί η τιμή αλήθειας του

$$(((p_0 \vee p_1) \to p_2) \to (\neg p_3 \wedge p_4))$$

Απ:



2) Να κατασκευαστεί ο πίνακας αλήθειας για τον προτασιακό τύπο:

$$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$$

Απ.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	$p \leftrightarrow q$	$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
A	Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	A
Ψ	A	A	Ψ	Ψ	Ψ	A
Ψ	Ψ	A	A	A	A	A
A	A	Ψ	Ψ	A	A	A

3) Να γίνει το ίδιο για τον προτασιακό τύπο $\neg p \leftrightarrow q$

Απ.

p	q	$\neg p$	$\neg p \leftrightarrow q$
Α	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ

Ορ. Έστω $T \subseteq T(\Gamma)$, $\phi \in T(\Gamma)$. Θα λέμε ότι

α) η αποτίμηση v ικανοποιεί τον ϕ αν και μόνον αν $\bar{v}(\phi) = A$· και ότι η v ικανοποιεί το T αν και μόνον αν ικανοποιεί κάθε στοιχείο του.

β) το T είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνον αν υπάρχει αποτίμηση που το ικανοποιεί.

γ) ο ϕ είναι ταυτολογία αν και μόνον αν κάθε αποτίμηση ικανοποιεί τον ϕ.

δ) ο ϕ είναι αντίφαση αν και μόνον αν ο $\neg\phi$ είναι ταυτολογία.

Ορ. (i) Έστω $T \subseteq T(\Gamma)$, $\phi \in T(\Gamma)$. Θα λέμε ότι το T ταυτολογικά συνεπάγεται τον ϕ ($T \models \phi$) αν κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το T ικανοποιεί και τον ϕ.

(ii) Αν $T = \{\psi\}$ και $T \models \phi$, τότε γράφουμε $\psi \models \phi$ και λέμε ότι ο ψ ταυτολογικά συνεπάγεται τον ϕ.

(iii) Αν $\psi \models \phi$ και $\phi \models \psi$ τότε γράφουμε $\psi \models\!\dashv \phi$ και λέμε ότι οι ϕ, ψ είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι.

Ασκήσεις: Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω προτασιακοί τύποι είναι ταυτολογίες:

(α) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α.

(Παρατηρούμε ότι $p \to q \models\!\!\!= \neg q \to \neg p$)

(b) $\neg(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\phi \vee \neg\psi$

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$	$\neg(\phi \wedge \psi)$	$\neg\phi$	$\neg\psi$	$\neg\phi \vee \neg\psi$	$\neg(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\phi \vee \neg\psi$
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α

Συναρτήσεις Boole.

Ορ. Συνάρτηση Boole με $k+1$ μεταβλητές ονομάζουμε κάθε συνάρτηση $f: \{A, \Psi\}^{k+1} \to \{A, \Psi\}$.

Πρόταση: Σε κάθε προτασιακό τύπο με $k+1$ μεταβλητές αντιστοιχεί μια συνάρτηση Boole με $k+1$ μεταβλητές.

π.χ. $(\neg p_1) \vee (p_0 \to p_2)$

p_0	p_1	p_2	$\neg p_1$	$p_0 \to p_2$	$(\neg p_1) \vee (p_0 \to p_2)$
Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α

Η συνάρτηση f που ορίζουμε εδώ, είναι η εξής:

$$f(A,A,A)=A \qquad f(A,A,\Psi)=\Psi \qquad f(A,\Psi,A)=A$$

$$f(\Psi,A,A)=A \qquad \text{κ.τ.λ.π.}$$

δηλαδή η συνάρτηση Boole που έχουμε ορίσει εδώ, έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

Για κάθε αποτίμηση v,

$$\bar{v}(\phi)=f(v(p_0),v(p_1),v(p_2))$$

Στην συνέχεια θα αποδειχθεί ότι ισχύει

και το αντίστροφο δηλ.

σε κάθε συνάρτηση Boole f με $k+1$ μεταβλητές αντιστοιχεί ένας προτασιακός τύπος φ επίσης με $k+1$ μεταβλητές τ.ω. $\bar{v}(\varphi) = f(v(P_0), v(P_1), \ldots\ldots\ldots, v(P_k))$ για κάθε αποτίμηση v.

Θα δείξουμε μ' ένα παράδειγμα πως προκύπτει ένας τέτοιος προτασιακός τύπος.

π.χ. Έστω ότι

$f(A,A,A) = A$	$f(A,A,\Psi) = \Psi$
$f(\Psi,A,A) = A$	$f(A,\Psi,\Psi) = A$
$f(\Psi,A,\Psi) = A$	$f(\Psi,\Psi,A) = A$
$f(A,\Psi,A) = A$	$f(\Psi,\Psi,\Psi) = A$

Επιλέγουμε τα στοιχεία του $\{A, \Psi\}^3$ στα οποία, μέσω της f, αντιστοιχεί το A. Αυτά είναι τα

$$
\begin{array}{l}
(A, A, A)\\
(\Psi, A, A)\\
(\Psi, A, \Psi)\\
(A, \Psi, A)\\
(A, \Psi, \Psi)\\
(\Psi, \Psi, A)\\
(\Psi, \Psi, \Psi)
\end{array}
$$

Σε κάθε τέτοια διατεταγμένη 3-άδα αντιστοιχούμε ένα προτασιακό τύπο που περιέχει τις προτασιακές μεταβλητές p_0, p_1, p_2. Συγκεκριμένα αν το πρώτο στοιχείο της 3-άδας είναι το A, τότε παίρνουμε την p_0, ενώ αν το πρώτο στοιχείο της 3-άδας είναι το Ψ, τότε παίρνουμε την $\neg p_0$. Αυτό το κάνουμε και για τα άλλα δύο στοιχεία της 3-άδας και η σύζευξη αυτών των μεταβλητών θα μας δώσει τον προτασιακό τύπο που αναφέραμε παραπάνω.

π.χ. $(A, \Psi, A) \longrightarrow P_0 \wedge \neg P_1 \wedge P_2$

Τέλος η διάζευξη όλων των προτασιακών τύπων που προκύπτουν με την παραπάνω διαδικασία θα μας δώσει το προτασιακό τύπο, στον οποίο αντιστοιχεί η συνάρτηση Boole.

Για το συγκεκριμένο παράδειγμα ο προτασιακός τύπος θα είναι:

$$(P_0 \wedge P_1 \wedge P_2) \vee (\neg P_0 \wedge P_1 \wedge P_2) \vee (\neg P_0 \wedge P_1 \wedge \neg P_2) \vee (P_0 \wedge \neg P_1 \wedge P_2)$$
$$\vee (P_0 \wedge \neg P_1 \wedge \neg P_2) \vee (\neg P_0 \wedge \neg P_1 \wedge P_2) \vee (\neg P_0 \wedge \neg P_1 \wedge \neg P_2).$$

Για αυτόν τον προτασιακό τύπο ϕ έχουμε:

$\bar{v}(\phi) = f(v(P_0), v(P_1), v(P_2))$

για κάθε αποτίμηση v.

Ορ.: Έστω $C \subseteq \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Το C είναι πλήρες αν κάθε προτασιακός τύπος είναι ταυτολογικά ισοδύναμος μ' έναν προτασιακό τύπο που περιέχει μόνον συνδέσμους που ανήκουν στο C.

Πόρισμα: Το $\{\vee, \wedge, \neg\}$ είναι πλήρες

Αποδείξεις:

Ένα μαθηματικό θεώρημα είναι μια πρόταση του τύπου

$p \wedge q \wedge \ldots\ldots \rightarrow t$

(δηλ. αν $p, q, \ldots$ τότε t)

$p, q, \ldots\ldots$ υποθέσεις

t: συμπέρασμα.

Ευθεία απόδειξη:

Μια πεπερασμένη ακολουθία $s_1, s_2, \ldots, s_k$ από προτάσεις, όπου $s_k = t$ και όπου κάθε s_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, είναι ή υπόθεση ή κάποια παραδεδεγμένη αλήθεια (αξίωμα ή γνωστό θεώρημα) ή είναι το αποτέλεσμα εφαρμογής της αρχής ευθείας απόδειξης* σε δύο προηγούμενες προτάσεις.

* Αν γνωρίζουμε ότι η r είναι αληθής και ότι η $r \to s$ είναι αληθής τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η s είναι αληθής.

π.χ. Εάν το n είναι περιττός, τότε το n^2 είναι περιττός

s (το n είναι περιττός), t (το n^2 είναι περιττός)

$s \to t$

$s=s_1$ $\qquad$ s_2

Αν το n είναι περιττός, τότε $n=2k+1$

όπου k ακέραιος αριθμός.

s_3

Επομένως $n^2=(2k+1)^2=4k^2+1+4k=2(2k^2+2k)+1$.

s_3

Αν $2(2k^2+2k)+1=n^2$ τότε το n^2 είναι

s_4

περιττός.

Άρα το n^2 είναι περιττός.

$s_4=t$

Μη ευθείες αποδείξεις.

• Αρχή απόδειξης μέσω αντιθετοαντιστροφής.

Αν θέλουμε να αποδείξουμε την πρόταση $s \to t$, αρκεί να αποδείξουμε την πρόταση $\neg t \to \neg s$, διότι οι δύο παραπάνω προτάσεις είναι ταυτολογικά ισοδύναμες.

• Αρχή απόδειξης μέσω αντίφασης

Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε το θεώρημα $s \to t$. Η αρχή της απόδειξης μέσω αντίφασης μας λέει ότι από την s και την $(s \wedge \neg t) \to \neg s$ μπορούμε να συμπεράνουμε την t.

(s αληθής

$\underbrace{(s \wedge \neg t)}_{\text{ψευδής}} \to \underset{\text{ψευδής}}{\neg s}$ αληθής

$\neg t$ ψευδής

t αληθής)

- **Αρχή της επαγωγής σε άτοπο.**

Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε το θεώρημα $s \to t$. Η αρχή της επαγωγής σε άτοπο μας λέει ότι από την s και την $s \wedge \neg t \to r \wedge \neg r$ μπορούμε να συμπεράνουμε την t.

(s αληθής

$\underbrace{s \wedge \neg t}_{\text{ψευδής}} \to \underbrace{r \wedge \neg r}_{\text{ψευδής}}$ αληθής

$\neg t$ ψευδής

t αληθής.)

Κεφ. Συνδυαστική Ανάλυση.

Βασικές αρχές απαρίθμησης: Απλές μαθηματικές προτάσεις, που είναι πολύ χρήσιμες στην λύση συνδυαστικών προβλημάτων.

Προσθετική αρχή απαρίθμησης.

Πρόταση: Έστω A, B πεπερασμένα σύνολα ξένα μεταξύ τους. Τότε

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Με επαγωγή μπορούμε να αποδείξουμε ότι η παραπάνω πρόταση ισχύει και για περισσότερα από δύο σύνολα.

Θεώρημα: Αν τα πεπερασμένα σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους, τότε

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_\nu|.$$

Άσκηση: Πόσες λέξεις μήκους 2 μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα γράμματα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$;

Απ. Ορίζουμε τα εξής σύνολα:

X_α: σύνολο ζητούμενων λέξεων που αρχίζουν με α.

X_β: » » » » » » β

X_γ: » » » » » » γ

X_δ: » » » » » » δ.

Προφανώς το σύνολο των ζητούμενων λέξεων είναι το $X_\alpha \cup X_\beta \cup X_\gamma \cup X_\delta$.

Άρα

από το προηγ. θεώρ.

$$\text{Ζητούμενος αριθμός λέξεων} = |X_\alpha \cup X_\beta \cup X_\gamma \cup X_\delta| = |X_\alpha| + |X_\beta| + |X_\gamma| + |X_\delta|$$

$$= 4 + 4 + 4 + 4$$

$$= 16$$

Πολ/στική αρχή απαρίθμησης

Πρόταση: Έστω A, B πεπερασμένα σύνολα. Τότε

$$|A \times B| = |A| . |B|$$

Αποδ. Έστω $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ και $B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$.
Ορίζουμε $\forall i = 1, 2, \ldots, k$ $A_i = \{\alpha_i\}$. Προφανώς $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_k$. Άρα

$$A \times B = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) \times B = (A_1 \times B) \cup \ldots\ldots \cup (A_k \times B).$$

Επειδή τα σύνολα $A_1 \times B, A_2 \times B, \ldots, A_k \times B$ είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους, από την Προσθετική αρχή της απαρίθμησης έχουμε ότι:

$$|A \times B| = |A_1 \times B| + |A_2 \times B| + \cdots + |A_k \times B|$$
$$= |A||B| = k.m$$

Με επαγωγή μπορούμε να αποδείξουμε ότι το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει για περισσότερα από δύο σύνολα.

Θεώρημα: Αν $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ πεπερασμένα σύνολα, τότε

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\nu| = |A_1| . |A_2| . \ldots . |A_\nu|$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Κάθε στοιχείο του $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\nu$ είναι μια διατεταγμένη ν-άδα $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$, όπου $\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2, \ldots, \alpha_\nu \in A_\nu$, ενώ $\forall i = 1, 2, \ldots, \nu$ ο αριθμός $|A_i|$ εκφράζει τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούμε να καλύψουμε την i-θέση μιας τέτοιας διατεταγμένης ν-άδας.

Άρα το παραπάνω θεώρημα μπορεί να διατυπωθεί επίσης ως εξής:

Αν υπάρχουν k_i δυνατότητες για την επιλογή της i-συνιστώσας μιας διατεταγμένης ν-άδας, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε $k_1 k_2 \ldots k_\nu$

τέτοιες διατεταγμένες ν-άδες.

<u>Άσκηση</u>: Με πόσους τρόπους μπορεί να ντυθεί κάποιος που έχει 6 πουκάμισα, 4 παντελόνια και 3 ζευγάρια παπούτσια;

<u>Απ</u>. Ορίζουμε

A: σύνολο πουκάμισων

B: σύνολο παντελονιών.

Γ: σύνολο ζευγαριών παπουτσιών.

Κάθε πιθανό ντύσιμο μπορεί να θεωρηθεί σαν μια διατεταγμένη 3-άδα (α, β, γ) όπου $\alpha \in A$, $\beta \in B$, $\gamma \in \Gamma$. Εμείς θέλουμε να προσδιορίσουμε τον αριθμό αυτών των διατεταγμένων 3-άδων. Δηλαδή θέλουμε να προσδιορίσουμε το $|A \times B \times \Gamma|$. Έχουμε

$$|A \times B \times \Gamma| = |A| \cdot |B| \cdot |\Gamma| = 6 \cdot 4 \cdot 3 = 72$$

Διατάξεις.

Έστω σύνολο $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\nu\}$. Διάταξη των ν στοιχείων του A ανά μ ονομάζουμε μια διατεταγμένη μ-άδα $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_\mu)$ όπου $\beta_i \in A$, $\forall i=1,2,\dots,\mu$.

Διατάξεις στις οποίες δεν επιτρέπεται επανάληψη στοιχείου του A.
→ Διάταξη των ν ανά μ

Διατάξεις στις οποίες επιτρέπεται επανάληψη στοιχείου του A.
→ Διάταξη των ν ανά μ με επανάληψη.

Θεώρημα: Ο αριθμός των διατάξεων των ν ανά μ συμβολίζεται με $P(\nu,\mu)$ και δίνεται από την σχέση

$$P(\nu,\mu)=\nu(\nu-1)\cdot\ldots\cdot(\nu-\mu+1)$$

Απόδειξη: Έστω σύνολο $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu\}$ και έστω $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\mu)$ διάταξη των ν στοιχείων του A ανά μ. Το πρώτο στοιχείο της, το β_1, μπορεί να επιλεγεί από το σύνολο $A=A_1$, το οποίο περιέχει ν στοιχεία. Μετά από αυτήν την επιλογή, το δεύτερο στοιχείο της διάταξης, το β_2, θέλουμε να είναι διαφορετικό του β_1, άρα αυτό μπορεί να επιλεγεί από το σύνολο $A_2=A-\{\beta_1\}$, το οποίο περιέχει $\nu-1$ στοιχεία. . . . .

. . . . Εάν τώρα έχουν επιλεγεί τα στοιχεία $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{\mu-1}$ το τελευταίο στοιχείο της διάταξης, το β_μ, μπορεί να επιλεγεί από το σύνολο $A_\mu=A-\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{\mu-1}\}$, το οποίο περιέχει $\nu-(\mu-1)$ στοιχεία.

Άρα από την πολ/στική αρχή της απαρίθμησης

$$P(\nu,\mu)=|A_1\times A_2\times\ldots\times A_\mu|=|A_1|\cdot|A_2|\ldots|A_\mu|=$$
$$=\nu(\nu-1)\ldots\ldots(\nu-\mu+1).$$

Παρατηρήσεις: α) Εάν $\nu=\mu$, η διάταξη ονομάζεται μετάθεση. Άρα ο αριθμός των μεταθέσεων ν στοιχείων είναι

$$P(\nu,\nu)=\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\nu+1)=\nu!$$

β) $$P(\nu,\mu)=\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\mu+1)=\frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\mu+1)(\nu-\mu)!}{(\nu-\mu)!}=$$
$$=\frac{\nu!}{(\nu-\mu)!}$$

Άσκηση: Με πόσους τρόπους μπορεί να εκλεγεί ένας πρόεδρος, ένας αντιπρόεδρος, ένας γραμματέας και ένας ταμίας από ένα σύνολο 10 ατόμων;

Απ. Έστω A το σύνολο των 10 ατόμων.

Κάθε πιθανή εκλογή είναι μια διάταξη των 10 στοιχείων του A ανά 4. Άρα ο ζητούμενος αριθμός θα ισούται με

$$P(10,4)=\frac{10!}{6!}=(10).(9).(8).(7).$$

Θεώρημα: Το πλήθος των διατάξεων των ν στοιχείων ανά μ με επανάληψη συμβολίζεται με $P^*(\nu,\mu)$ και δίνεται από την σχέση

$$P^*(\nu,\mu)=\nu^\mu$$

Άσκηση: Να υπολογισθεί ο αριθμός των διαφορετικών στηλών που μπορούμε να συμπληρώσουμε στο ΠΡΟ-ΠΟ.

Απ. Κάθε συμπληρωμένη στήλη είναι μια διάταξη των 3 στοιχείων του συνόλου $A=\{1,X,2\}$ ανα 13 με επανάληψη.

Άρα ο ζητούμενος αριθμός θα ισούται με

$P^*(3,13)=3^{13}$.

Έστω σύνολο $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\nu\}$. Θα εξετάσουμε το σύνολο των διατάξεων των ν στοιχείων του A ανά μ με επανάληψη, σε κάθε μια από τις οποίες το στοιχείο α_1 εμφανίζεται μ_1 φορές, το στοιχείο α_2 εμφανίζεται μ_2 φορές, ..., το στοιχείο α_ν εμφανίζεται μ_ν φορές, και όπου

$$\mu=\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_\nu.$$

Θεώρημα: Ο αριθμός των διατάξεων που περιγράψαμε συμβολίζεται με $M(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_\nu)$ και

$$M(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_\nu)=\frac{\mu!}{\mu_1!\mu_2!\dots\mu_\nu!}$$

Αποδ: Έστω S, το σύνολο των διατάξεων, του οποίου τον πληθικό αριθμό θέλουμε να προσδιορίσουμε, και έστω $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_\mu)\in S$.

Παίρνουμε όλα τα στοιχεία της $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu)$, τα οποία είναι a_1 και τα αριθμούμε από το 1 έως το μ_1: $a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,\mu_1}$. Μεταθέτουμε τώρα όλα αυτά τα στοιχεία κατά όλους τους δυνατούς τρόπους, διατηρώντάς τα όμως στις θέσεις που κατείχε το a_1. Άρα από μια τέτοια ενέργεια από την διάταξη $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu)$ θα προκύψουν $\mu_1!$ νέες διατάξεις. Παίρνουμε κάθε μία από αυτές τις νέες διατάξεις και αριθμούμε τα στοιχεία a_2, από το μ_1+1 έως το $\mu_1+\mu_2$: $a_{2,\mu_1+1}, \dots \dots \dots, a_{2,\mu_1+\mu_2}$. Μεταθέτουμε αυτά τα στοιχεία κατά όλους τους δυνατούς τρόπους, διατηρώντάς τα όμως στις θέσεις που κατείχε το a_2. Άρα από κάθε μια από τις $\mu_1!$ διατάξεις του προηγούμένου βήματος, θα προκύψουν $\mu_2!$ νέες διατάξεις.

Εάν επαναλάβουμε αυτή την διαδικασία μέχρι να εξαντληθούν και τα ν είδη στοιχείων, τελικά από την αρχική διάταξη $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_\mu)$ θα προκύψουν $\mu_1!\,\mu_2!\cdots\mu_\nu!$ μεταθέσεις του συνόλου

$$R=\{\alpha_{1,1},\alpha_{1,2},\dots,\alpha_{2,\mu_1+1},\dots,\alpha_{\nu,\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_\nu}\}.$$

(π.χ. $\nu=3$, $A=\{1,2,3\}$, $\mu_1=2$, $\mu_2=2$, $\mu_3=1$

$$(1,2,1,2,3)\to(1_1,2,1_2,2,3)\xrightarrow{2!}\begin{cases}(1_1,2,1_2,2,3)\to(1_1,2_3,1_2,2_4,3) \quad 2!\\ (1_2,2,1_1,2,3)\to(1_2,2_3,1_1,2_4,3) \quad 2!\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}(1_1,2_3,1_2,2_4,3)\xrightarrow{1!}(1_1,2_3,1_2,2_4,3_5)\\ (1_1,2_4,1_2,2_3,3)\xrightarrow{1!}(1_1,2_4,1_2,2_3,3_5)\\ (1_2,2_3,1_1,2_4,3)\xrightarrow{1!}(1_2,2_3,1_1,2_4,3_5)\\ (1_2,2_4,1_1,2_3,3)\xrightarrow{1!}(1_2,2_4,1_1,2_3,3_5)\end{array}\right\}\ \text{Μεταθέσεις του } R=\{1_1,1_2,2_3,2_4,3_5\}$$

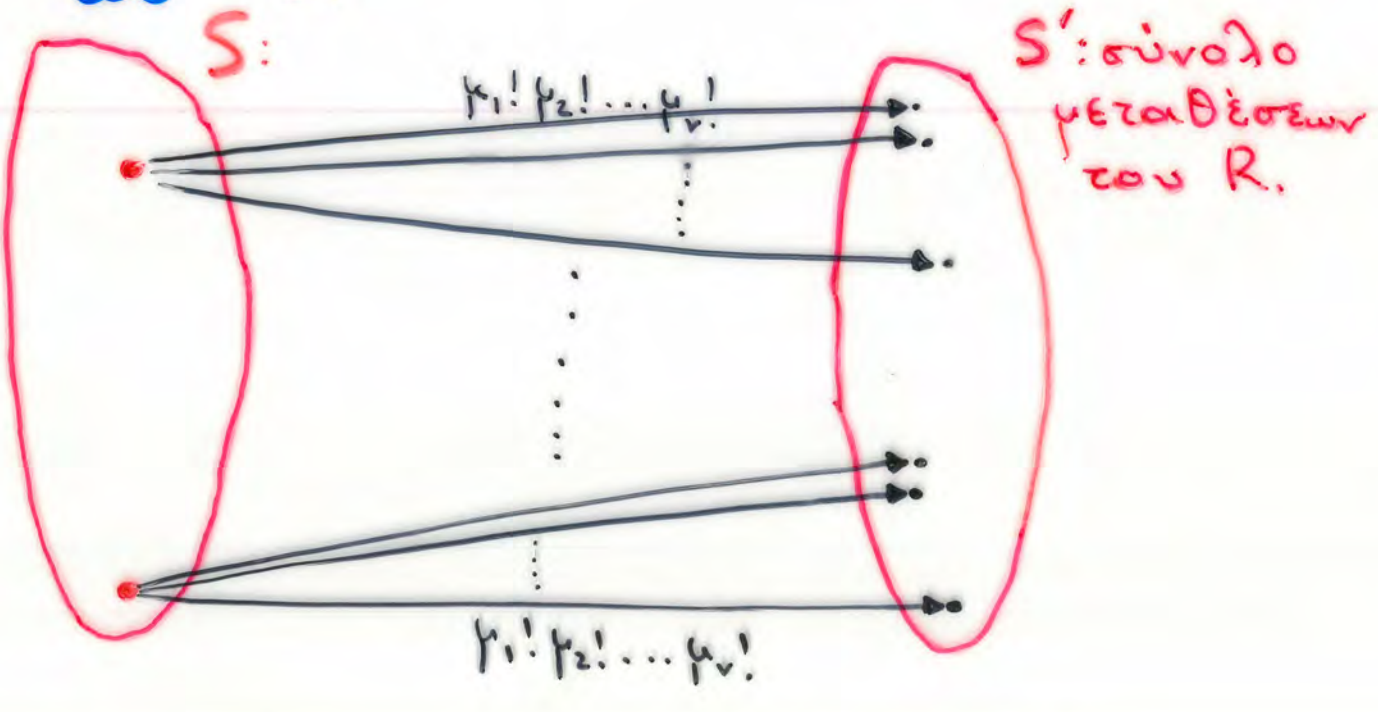
)

Εφαρμόζουμε την διαδικασία που περιγράψαμε προηγουμένως σε κάθε στοιχείο του S. Άρα από κάθε στοιχείο του S παίρνουμε $\mu_1!\mu_2!\ldots\mu_\nu!$ μεταθέσεις του R.

Επίσης παρατηρούμε ότι:

(i) οι μεταθέσεις που προκύπτουν από την $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\gamma)$ είναι διαφορετικές από αυτές που προκύπτουν από την $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\gamma)$

(ii) Κάθε μετάθεση του R προκύπτει από μια διάταξη, που αποτελεί στοιχείο του S.



Άρα

$$|S|\,\mu_1!\,\mu_2!\dots\mu_\nu! = |S'|$$

και

$$M(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_\nu)\,\mu_1!\dots\mu_\nu! = \mu!$$

$$\Longrightarrow M(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_\nu) = \frac{\mu!}{\mu_1!\dots\mu_\nu!}$$

Άσκηση: Έστω το σύνολο $A=\{0,1\}$. Λέξεις 0-1 ονομάζουμε τις λέξεις που έχουν για γράμματά τους στοιχεία του A.

Πόσες 0-1 λέξεις υπάρχουν οι οποίες έχουν οκτώ γράμματα εκ των οποίων πέντε ακριβώς είναι 1;

Απάντηση: Ζητούμενος αριθμός λέξεων $= M(5,3) = \dfrac{8!}{5!\,3!}$

Συνδυασμοί

Έστω σύνολο $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\nu\}$. Συνδυασμό των ν στοιχείων του A ανά μ, ονομάζουμε μια συλλογή μ στοιχείων $\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_\mu\}$, όπου $\beta_i \in A$, $\forall\, i=1,2,\dots,\mu$.

Συνδυασμοί στους οποίους δεν παρατηρείται επανάληψη στοιχείου του A

συνδυασμοί των ν στοιχείων του A ανά μ

Συνδυασμοί στους οποίους επιτρέπεται επανάληψη στοιχείου του A.

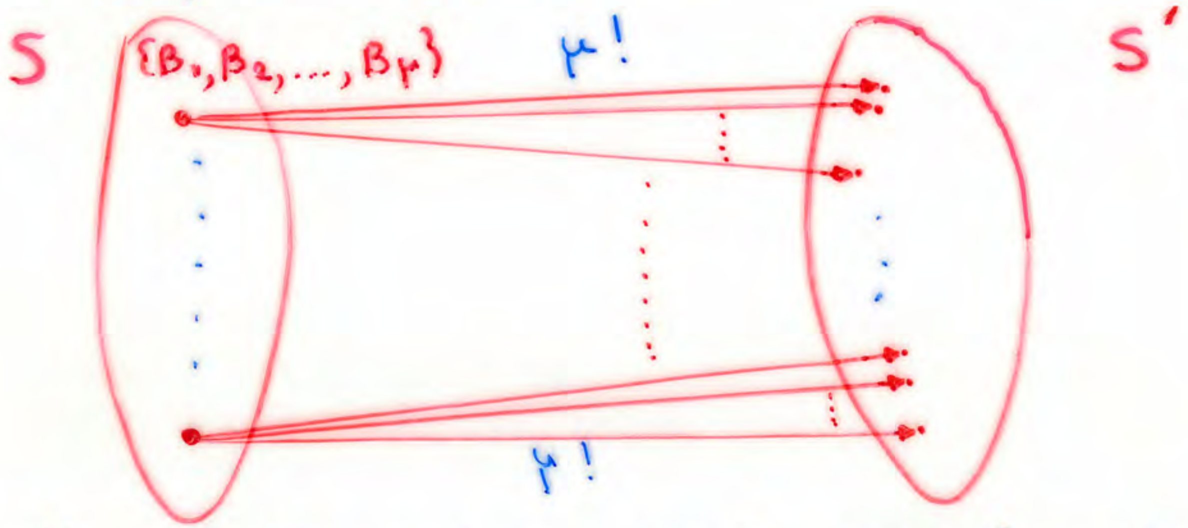
συνδυασμοί των ν στοιχείων του A ανά μ με επανάληψη.

Θεώρημα: Ο αριθμός των συνδυασμών των ν στοιχείων του $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_\nu\}$ ανά μ συμβολίζεται με $C(\nu,\mu)$ και δίνεται από την σχέση

$$C(\nu,\mu)=\frac{\nu!}{\mu!\,(\nu-\mu)!}$$

Αποδ: Έστω S το σύνολο των ζητούμενων συνδυασμών και S′ το σύνολο των διατάξεων των ν στοιχείων του A ανά μ.

Εάν $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu\} \in S$, μεταθέτουμε τα στοιχεία του κατά όλους τους δυνατούς τρόπους, οπότε παίρνουμε όλες τις μεταθέσεις του συνόλου $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu\}$. Αυτές είναι μ! τον αριθμό και προφανώς αποτελούν στοιχεία του S′.



Η διαδικασία αυτή μπορεί να εφαρμοσθεί, σ' όλα τα στοιχεία του S και σε κάθε περίπτωση "παράγονται" μ! στοιχεία του S′.

Σχετικά μ' αυτήν την διαδικασία, παρατηρούμε τα εξής:

(1) Σε δύο διαφορετικά στοιχεία του S αντιστοιχούν διαφορετικά στοιχεία του S'

(2) Κάθε στοιχείο του S' προκύπτει από κάποιο στοιχείο του S.

Άρα

$$|S| \cdot \mu! = |S'|$$

$$\Longrightarrow C(\nu,\mu) \cdot \mu! = P(\nu,\mu) = \frac{\nu!}{(\nu-\mu)!}$$

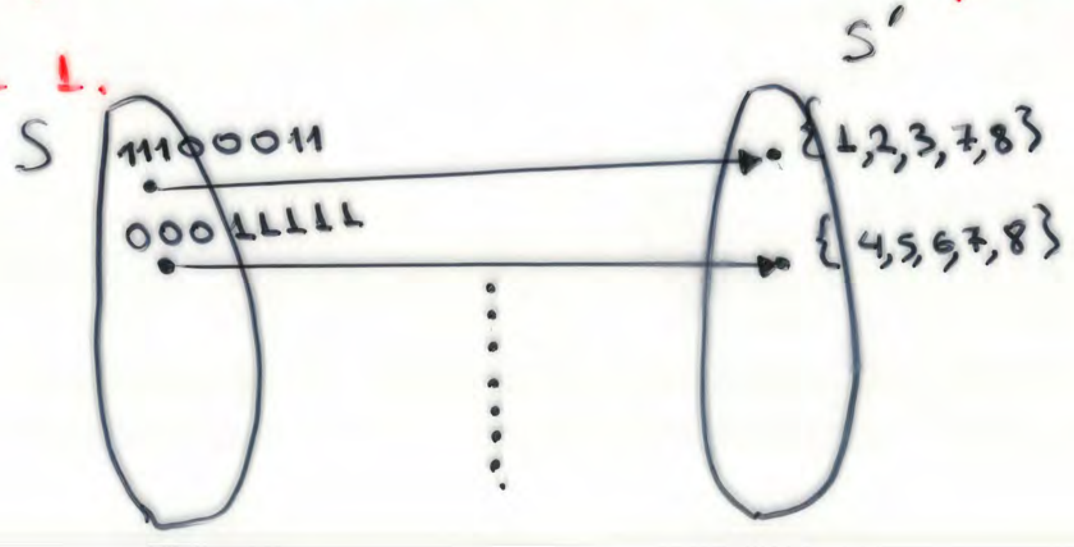
$$\Longrightarrow C(\nu,\mu) = \frac{\nu!}{(\nu-\mu)!\,\mu!}$$

Άσκηση: Να βρεθεί ο αριθμός των 0-1 λέξεων που έχουν οκτώ γράμματα εκ των οποίων πέντε ακριβώς είναι 1.

<u>Απάντηση</u>: Έστω S το σύνολο των υπό εξέταση λέξεων και έστω S' το σύνολο των συνδυασμών των 8 στοιχείων του $A=\{1,2,\ldots,8\}$ ανά 5.

Μεταξύ του S και του S', ορίζουμε την εξής συνάρτηση:

Σε κάθε στοιχείο του S, δηλ. σε κάθε 0-1 λέξη μήκους 8 που περιέχει ακριβώς πέντε 1, αντιστοιχούμε έναν συνδυασμό των 8 στοιχείων του A ανά 5, ο οποίος έχει για στοιχεία του, τους αριθμούς των θέσεων στις οποίες εμφανίζονται τα 1.



Η συνάρτηση αυτή είναι 1-1 και επί.

Άρα $|S|=|S'| \Rightarrow |S|=C(8,5)=\frac{8!}{5!\,3!}$

Θεώρημα: Ο αριθμός των συνδυασμών των ν στοιχείων του $A=\{a_1,a_2,\dots,a_\nu\}$ ανά μ με επανάληψη, συμβολίζεται με $C^*(\nu,\mu)$ και $C^*(\nu,\mu)=\frac{(\nu+\mu-1)(\nu+\mu-2)\cdots\cdots(\nu+1)\nu}{\mu!}$

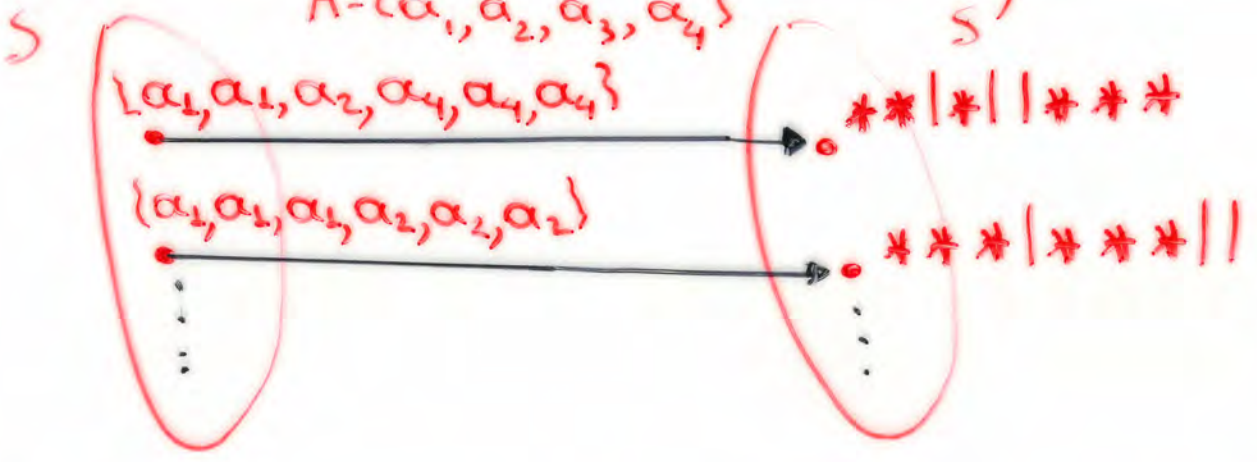
Αποδ: Έστω S το σύνολο των συνδυασμών που εξετάζουμε και έστω S', το σύνολο των λιστών που περιέχουν ν-1 κάθετες γραμμές και μ αστερίσκους (π.χ. εάν ν=4 και μ=6 μια τέτοια λίστα είναι η **|*||***)

Εδώ παρατηρούμε ότι οι ν-1 κάθετες γραμμές χωρίζουν την λίστα σε ν μέρη.

Μεταξύ του S και του S' ορίζουμε την εξής συνάρτηση: Σε κάθε στοιχείο του S, αντιστοιχούμε για λίστα, που αποτελεί στοιχείο του S', η οποία έχει την εξής ιδιότητα:
Ο αριθμός των αστερίσκων που βρίσκονται στο i-μέρος της, αντιπροσωπεύει τον αριθμό των φορών που εμφανίζεται το στοιχείο a_i στον συνδυασμό. $(i=1,2,\dots,\nu)$

(π.χ. $\nu=4$ $\quad \mu=6$

$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$



)

Η συνάρτηση αυτή είναι 1-1 και επί: Άρα $|S|=|S'|$

Όμως $|S'| = M(\nu-1,\mu) = \frac{(\nu-1+\mu)!}{(\nu-1)!\,\mu!} = \frac{(\nu-1+\mu)\cdots(\nu)}{\mu!}$

Άρα $|S| = C^{*}(\nu,\mu) = \frac{(\nu+\mu-1)(\nu+\mu-2)\cdots\cdots(\nu+1)\nu}{\mu!}$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω ν και μ θετικοί ακέραιοι με $\nu \geq \mu$. Τότε

$$C(\nu+1,\mu) = C(\nu,\mu-1) + C(\nu,\mu)$$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω σύνολο A με $\nu+1$ στοιχεία και έστω $\alpha \in A$. Ορίζουμε σύνολο $B = A - \{\alpha\}$.

Σύνολο υποσυνόλων του A με μ στοιχεία ← $C(\nu+1,\mu)$

Υποσύνολα που περιέχουν το α (δηλαδή περιέχουν $\mu-1$ στοιχεία του B και το α)

↑ $C(\nu,\mu-1)$

+

Υποσύνολα που δεν περιέχουν το α. (δηλαδή περιέχουν μ στοιχεία του B)

↑ $C(\nu,\mu)$

Τρίγωνο του Pascal.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & C(0,0) & & & \\
 & & C(1,0) & & C(1,1) & & \\
 & C(2,0) & & C(2,1) & & C(2,2) & \\
C(3,0) & & C(3,1) & & C(3,2) & & C(3,3) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Βάσει του προηγούμενου θεωρήματος κάθε στοιχείο του πίνακα είναι ίσο με το άθροισμα των δύο όρων που βρίσκονται ακριβώς πάνω απ' αυτό.

<u>Θεώρημα:</u>

$$(x+y)^{\nu}=\sum_{r=0}^{\nu} C(\nu,r)\,x^{\nu-r}\cdot y^{r}.$$

$$\begin{aligned}
(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)(x+y)\\
&= \left[(x+y)x+(x+y)y\right](x+y)\\
&= (x.x+y.x+x.y+y.y)(x+y)\\
&= (x.x+y.x+x.y+y.y)x+(x.x+y.x+x.y+y.y)y\\
&= x.x.x+y.x.x+x.y.x+y.y.x+x.x.y+\underline{y.x.y}+\\
&\quad+\underline{x.y.y}+y.y.y = x^3+y.x^2+x^2y+y^2x+x^2y+\\
&\quad+y^2x+x.y^2+y^3 = x^3+3y.x^2+3xy^2+y^3.
\end{aligned}$$

$x.y.y$: Επιλέξαμε το x από το πρώτο άθροισμα, το y από το δεύτερο, το y από το τρίτο και τα πολ/σαμε.

$y.x.y$: Επιλέξαμε το y από το πρώτο άθροισμα, το x από το δεύτερο, το y από το τρίτο και τα πολ/σαμε.

⋮

Γενικά κάθε όρος προκύπτει από την εξής διαδικασία:

Επιλέγουμε από κάθε άθροισμα το x ή το y και τα πολλ/ζουμε.

Άρα ο αριθμός των όρων $x \cdot y^2$ που θα πάρουμε θα ισούται με το αριθμό των τρόπων με τους οποίους εμείς μπορούμε να επιλέξουμε 2 φορές το y και μια φορά το x από τα τρία αθροίσματα δηλ. με $C(3,2)=3$ τρόπους)

Απόδειξη του Θεωρήματος: Κάθε όρος του αναπτύγματος $(x+y)^v$ είναι της μορφής $x^{v-r} \cdot y^r$, με $0 \leq r \leq v$, και προκύπτει αν από τα v αθροίσματα $(x+y)$ επιλέξουμε $v-r$ φορές το x και r φορές το y. Η επιλογή αυτή μπορεί να γίνει κατά $C(v,v-r)=C(v,r)$ τρόπους.
Επομένως στο ανάπτυγμα θα υπάρχουν $C(v,r)$ όροι ίσοι με $x^{v-r} \cdot y^r$.

Η αρχή του Εγκλεισμού και Αποκλεισμού.

Θεώρημα: Εάν A_1, A_2 οποιαδήποτε πεπερασμένα σύνολα, τότε

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

Θεώρημα: Έστω $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ πεπερασμένα σύνολα. Τότε

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\nu| = \sum_{1 \le i \le \nu} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le \nu} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le \nu} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots \dots + (-1)^{\nu+1} |A_1 \cap \dots \cap A_\nu| \quad (*)$$

Λήμμα: Έστω ν θετικός ακέραιος. Τότε

$$\sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r C(\nu, r) = 0.$$

Απόδειξη: Από το Διωνυμικό Θεώρημα έχουμε

$$0 = (1 + (-1))^\nu = \sum_{r=0}^{\nu} C(\nu, r) . 1^{\nu-r} (-1)^r$$

Απόδειξη του Θεωρήματος:

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα, αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε στοιχείο του συνόλου $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu$ μετριέται ακριβώς μια φορά στο δεξιό μέρος της εξίσωσης (*).

Έστω $a \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu$ και έστω ότι το a ανήκει ακριβώς σε k σύνολα αυτής της ένωσης.

$C(k,1)$

Το a στον όρο $\sum |A_i|$ μετριέται k φορές

Το a στον όρο $\sum |A_i \cap A_j|$ μετριέται $C(k,2)$ φορές.

Το a στον όρο $\sum |A_i \cap A_j \cap A_k|$ μετριέται $C(k,3)$ φορές

⋮ ⋮

Γενικά το a, σ' ένα άθροισμα που

συμμετέχουν r σύνολα, μετριέται $C(k,r)$ φορές

Άρα το a μετριέται συνολικά

$C(k,1)-C(k,2)+C(k,3)-\cdots\cdots+(-1)^{k+1}C(k,k)$

φορές.

Όμως από το προηγούμενο Λήμμα

$$C(k,0)-C(k,1)+C(k,2)-\cdots\cdots+(-1)^{k}C(k,k)=0.$$

Άρα

$$1=C(k,0)=C(k,1)-C(k,2)+\cdots\cdots+(-1)^{k+1}C(k,k)$$

Επομένως το στοιχείο a του συνόλου $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu$ μετριέται ακριβώς μια φορά στο δεξιό μέρος της $(*)$.

ΑΣΚΗΣΗ Ένας καθηγητής συγκεντρώνει ν εργασίες από ισάριθμους φοιτητές και σκοπεύει να τις δώσει στους φοιτητές για να τις διορθώσουν. Η επιστροφή των εργασιών πρέπει να γίνει μ'έναν τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε να αποκλεισθεί η περίπτωση, κάποιος φοιτητής να διορθώσει την δική του εργασία. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η κατανομή των εργασιών;

Απάντηση: Αριθμούμε τους φοιτητές.
A: σύνολο των ν εργασιών.

$$A=\{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_\nu\}$$

a_i: εργασία του φοιτητή i $(i=1,\ldots,\nu)$

Γενικά κάθε επιστροφή των ν εργασιών, μπορεί να θεωρηθεί σαν μετάθεση των ν στοιχείων του A όπου· εάν η εργασία a_i διορθώνεται από τον φοιτητή j, αυτό σημαίνει ότι το στοιχείο a_i εμφανίζεται στην j θέση μιας τέτοιας μετάθεσης.

Ορίζουμε τα εξής σύνολα:

K_i: σύνολο των μεταθέσεων του A όπου το a_i εμφανίζεται στην i-θέση.

για $i=1,2,\ldots,\nu$.

Άρα

Ζητούμενος αριθμός $= \underbrace{\nu!}_{\text{συνολικός αριθμός επιστροφών}} - \underbrace{|K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_\nu|}_{\text{αριθμός μη-επιτρεπτών επιστροφών.}}$

Όμως

$$|K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_\nu| = \sum_{1\le i \le \nu} |K_i| - \sum_{1 \le i < j \le \nu} |K_i \cap K_j| + \ldots$$

$$\ldots\ldots + (-1)^{\nu+1} |K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_\nu|$$

$$\sum_{1\le i\le \nu} |K_i| = \nu(\nu-1)! = C(\nu,1)(\nu-1)!$$

$$\sum_{1\le i<j\le \nu} |K_i \cap K_j| = C(\nu,2)(\nu-2)!$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$|K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_\nu| = 1 = C(\nu,\nu)(\nu-\nu)!$$

Άρα

$$|K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_\nu| = \sum_{r=1}^{\nu} (-1)^{r+1} C(\nu,r)(\nu-r)!$$

Επομένως

$$\text{Ζητούμενος αριθμός} = \nu! - \sum_{r=1}^{\nu} (-1)^{r+1} C(\nu,r)(\nu-r)!$$

ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Γράφημα G

$$G = (V(G), E(G), \psi_G)$$

Σύνολο κορυφών

Σύνολο ακμών

Συνάρτηση βάσει της οποίας σε κάθε ακμή του G αντιστοιχεί ένα μη-διατεταγμένο ζεύγος κορυφών του G.

π.χ.

$$V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

$\psi_G(e_1) = \{u_1, u_2\}$ $\psi_G(e_4) = \{u_4, u_1\}$ $\psi_G(e_7) = \{u_1, u_1\}$

$\psi_G(e_2) = \{u_2, u_3\}$ $\psi_G(e_5) = \{u_1, u_3\}$

$\psi_G(e_3) = \{u_3, u_4\}$ $\psi_G(e_6) = \{u_1, u_2\}$

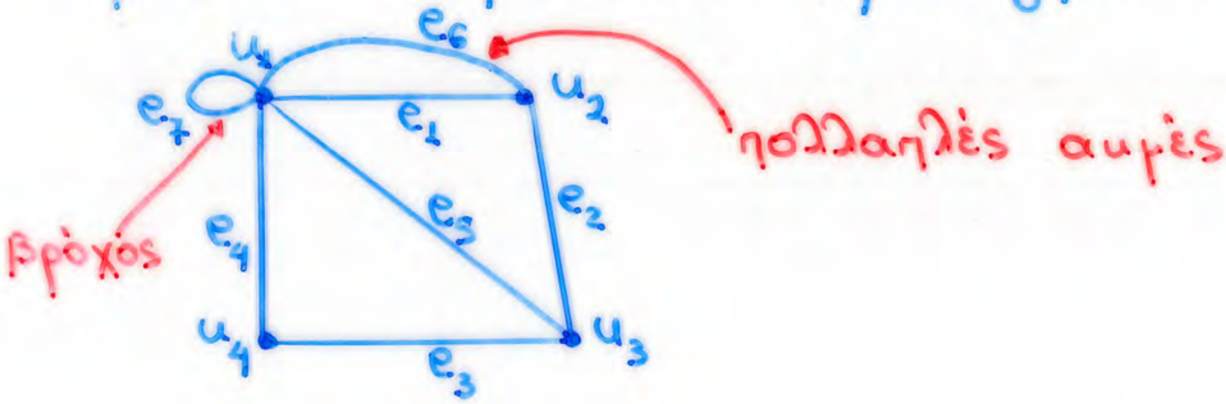
Γραφική παράσταση γραφημάτων.

Κορυφές: Σημεία στο επίπεδο.

Ακμές: Γραμμές στο επίπεδο.

Μια γραμμή που περιγράφει την ακμή e θα έχει για άκρα της τα σημεία που περιγράφουν τις κορυφές u και v, εάν και μόνον εάν $\psi_G(e)=\{u,v\}$.

Γραφική παράσταση παραδείγματος:



Παρατήρηση: Οι θέσεις των σημείων και γραμμών στο επίπεδο δεν έχουν σημασία. Η γραφική παράσταση του γραφήματος G εκφράζει απλώς την σχέση που υπάρχει μεταξύ των κορυφών του και των ακμών του, έτσι όπως αυτή καθορίζεται από την συνάρτηση ψ_G.

Εάν $e \in E(G)$, $u, v \in V(G)$ και $\psi_G(e) = \{u, v\}$ τότε θα λέμε:

Η ακμή e συνδέει τις κορυφές u και v,

ή οι κορυφές u και v αποτελούν τα άκρα της e,

ή οι κορυφές u και v είναι γειτονικές.

$|V(G)| = \nu(G)$ (ή ν)

$|E(G)| = \varepsilon(G)$ (ή ε)

<u>Ορ.</u> Ο βαθμός μιας κορυφής u ενός γραφήματος G συμβολίζεται με $d_G(u)$ και είναι ίσος με τον αριθμό των φορών που η κορυφή u, αποτελεί άκρο ακμών του G.

Θεώρημα: Για κάθε γράφημα G,

$$\sum_{x\in V(G)} d_G(x) = 2\varepsilon(G).$$

Απόδειξη: Εάν η e έχει για άκρα της,

τις κορυφές u και v, αυτό σημαίνει ότι η e "συνεισφέρει" τον αριθμό 1 στον $d_G(u)$ και επίσης τον αριθμό 1 στον $d_G(v)$.

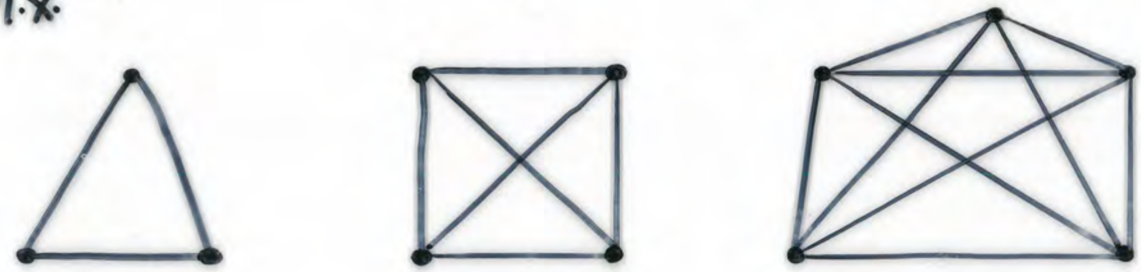
Άρα συνολικά η e "συνεισφέρει" τον αριθμό 2 στο $\sum_{x\in V(G)} d_G(x)$.

Επομένως $$\sum_{x\in V(G)} d_G(x) = 2|E(G)|.$$

Γραφήματα ειδικής μορφής.

Απλά γραφήματα: Γραφήματα που δεν περιέχουν βρόχους και πολλαπλές ακμές.

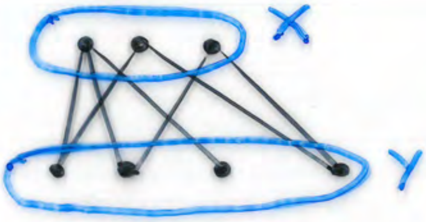
<u>Πλήρη γραφήματα</u>: Ένα απλό γράφημα ονομάζεται πλήρες, εάν κάθε ζεύγος κορυφών του συνδέεται με μια ακμή.
(Ένα πλήρες γράφημα με ν κορυφές συμβολίζεται με K_ν.)
π.χ.

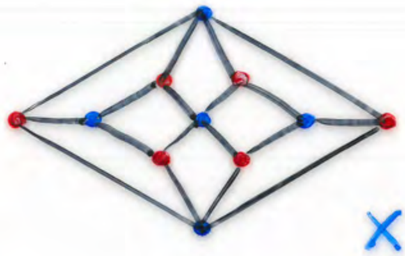


K_3 K_4 K_5

<u>Διμερή Γραφήματα</u>: Ένα γράφημα G ονομάζεται διμερές, εάν το σύνολο των κορυφών του μπορεί να χωριστεί σε δύο σύνολα X και Y, ξένα μεταξύ τους, έτσι ώστε κάθε ακμή του G να συνδέει ένα στοιχείο του X μ' ένα στοιχείο του Y.
(X,Y): διαμερισμός του G.

π.χ.

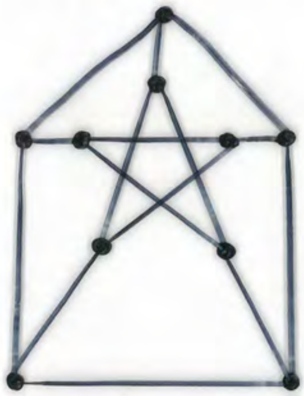




X: κορυφές μπλέ.
Y: κορυφές κόκκινες.

<u>Κανονικά γραφήματα</u>: Ένα γράφημα G θα λέμε ότι είναι k-κανονικό εάν $d_G(x)=k$, $\forall\, x\in V(G)$.

π.χ.



3-κανονικό
(γράφημα του Petersen)

3-κανονικό

<u>Θεώρημα</u>: Εάν το G είναι k-κανονικό, όπου το k είναι περιττός αριθμός, τότε το G περιέχει άρτιο αριθμό κορυφών.

Απόδειξη:

Από προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι

$$\sum_{x \in V(G)} d_G(x) = 2|E(G)|$$

Όμως επειδή το G είναι k-κανονικό

$$\sum_{x \in V(G)} d_G(x) = k|V(G)|.$$ Άρα

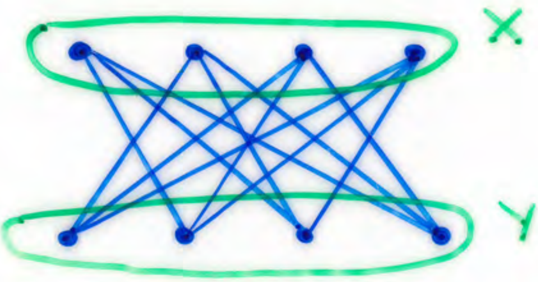
$$k|V(G)| = 2|E(G)|$$

Το γινόμενο $k|V(G)|$ θα πρέπει να είναι άρτιος αριθμός. Επειδή k περιττός $\Longrightarrow |V(G)|$ άρτιος.

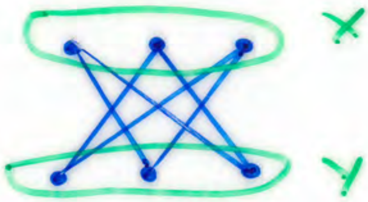
Ασκήσεις

1) (Άσκηση 18). Έστω G k-κανονικό διμερές γράφημα με διαμερισμό (X,Y). Να αποδειχθεί ότι $|X|=|Y|$.

Απ.: (παραδείγματα γραφημάτων όπως αυτά που εξετάζουμε:

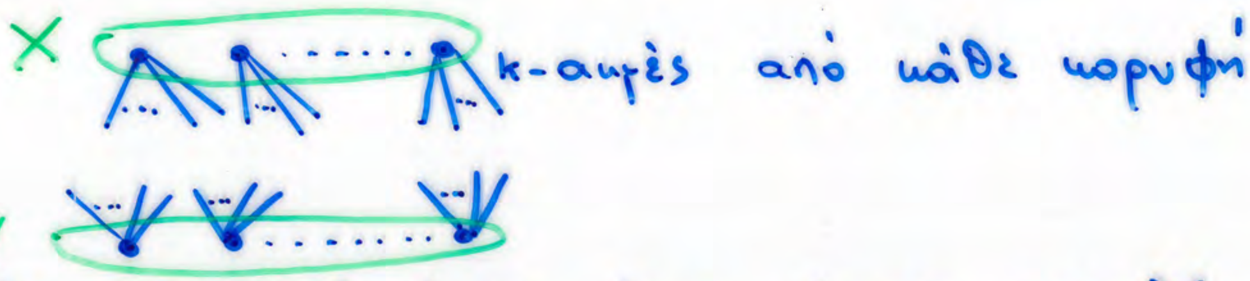


3-κανονικό διμερές



2-κανονικό διμερές)

Γενικά



κάθε ακμή έχει ένα άκρο στο X και το άλλο στο Y. Άρα

αριθμός των ακμών που έχουν άκρο στο X =
= αριθμός των ακμών που έχουν άκρο στο Y.

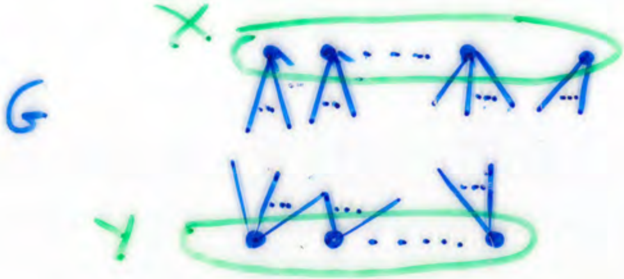
αριθμός των ακμών που έχουν άκρο στο $X = k|X|$.

αριθμός των ακμών που έχουν άκρο στο $Y = k|Y|$.

Άρα $k|X| = k|Y| \Rightarrow |X| = |Y|$.

2) (Άσκηση 15(ii)). Εάν το G είναι απλό και διμερές τότε $\varepsilon(G) \leq \frac{(\nu(G))^2}{4}$.

Απ: Έστω (X,Y) διαμερισμός του G. Θέτουμε $|X| = x$ και $|Y| = y$. Προφανώς $x + y = \nu(G) \Rightarrow y = \nu(G) - x$.



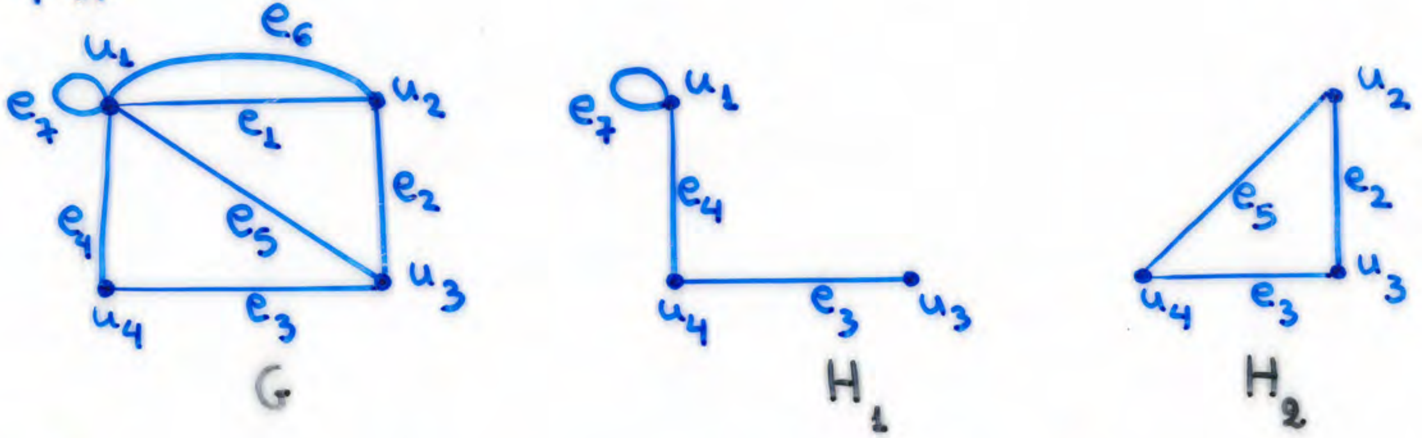
Αριθμός των ακμών του G = αριθμό των ακμών που έχουν άκρο στο $X \leq x.y = x(\nu(G) - x)$.

Όμως $x(\nu(G)-x) \leq \frac{(\nu(G))^2}{4}$. Άρα $\varepsilon(G) \leq \frac{(\nu(G))^2}{4}$.

Υπογραφήματα.

Ορ. Ένα γράφημα H, θα λέμε ότι είναι υπογράφημα κάποιου γραφήματος G, εάν (i) $V(H) \subseteq V(G)$, (ii) $E(H) \subseteq E(G)$ και (iii) η ψ_H είναι περιορισμός της ψ_G στο $E(H)$.

π.χ.



Το H_1 είναι υπογράφημα του G.

Το H_2 δεν είναι υπογράφημα του G.

- Έστω γράφημα G και έστω $S \subseteq V(G)$.

$G[S]$: Υπογράφημα του G που έχει για σύνολο κορυφών του το S και σαν σύνολο ακμών του τις ακμές εκείνες του G που έχουν και τα δύο άκρα τους στο S.
(Υπογράφημα που παράγεται από το S).

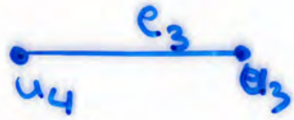
π.χ. εάν $S=\{u_1,u_3\}$

$G[S]$:

<u>$G-S$</u>: Υπογράφημα του G, που προκύπτει από αυτό εάν διαγράψουμε τις κορυφές εκείνες που ανήκουν στο S καθώς επίσης και τις ακμές των οποίων τουλάχιστον ένα άκρο ανήκει στο S.

π.χ. εάν $S=\{u_1,u_2\}$

$G-S$:

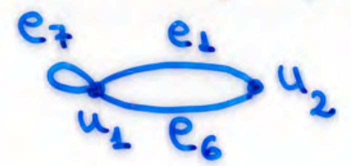


• Έστω γράφημα G και έστω $K\subseteq E(G)$.

<u>$G[K]$</u>: Υπογράφημα του G που έχει σαν σύνολο ακμών το K και σαν σύνολο

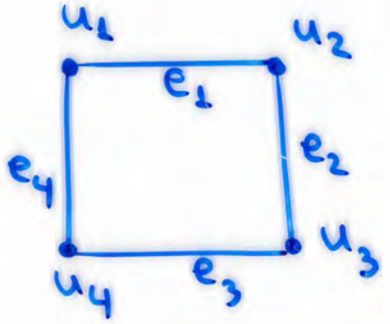
κορυφών του τα άκρα των ακμών που ανήκουν στο K.
(Υπογράφημα που παράγεται από το K).

π.χ. εάν $K=\{e_1, e_6, e_7\}$.

G[K]: 

G-K: Υπογράφημα του G που προκύπτει από αυτό εάν διαγράψουμε τις ακμές που αποτελούν στοιχεία του K.

π.χ. εάν $K=\{e_5, e_6, e_7\}$

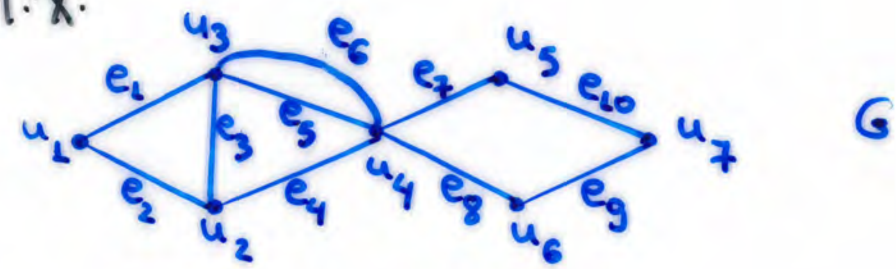


Ορισμός: Ένα υπογράφημα H του G θα ονομάζεται επικαλυπτικό εάν $V(H)=V(G)$.

Μονοπάτια, κύκλοι και συνεκτικότητα.

Ορ. Μια πεπερασμένη ακολουθία $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_k v_k$ της οποίας οι όροι είναι αλληλοδιαδόχως κορυφές και ακμές, όπου για $1 \le i \le k$ τα άκρα της ακμής e_i είναι οι κορυφές v_{i-1} και v_i, ονομάζεται περίπατος στο G.

π.χ.



$$W = u_2 e_4 u_4 e_7 u_5 e_{10} u_7 e_9 u_6 e_8 u_4 e_4 u_2 e_2 u_1$$

Παρατήρηση: Στα απλά γραφήματα ο περίπατος $v_0 e_1 v_1 \ldots e_k v_k$ μπορεί να προσδιοριστεί με την ακολουθία των κορυφών του, δηλαδή με την $v_0 v_1 v_2 \ldots v_k$.

Έστω περίπατος $W = v_0 v_1 v_2 \ldots v_k$

v_0: αρχή του W
v_k: τέλος του W
$v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$: εσωτερικές κορυφές του W.

Ο W ονομάζεται (v_0, v_k)-περίπατος.

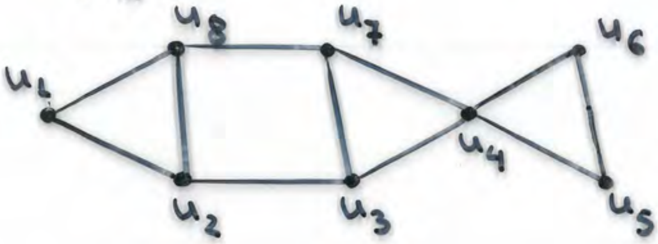
Εάν $v_0 = v_k$ ο W ονομάζεται κλειστός περίπατος.

Μήκος του W: αριθμός των ακμών του.

Ορ. Έστω περίπατος $W: v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$.

- Εάν οι ακμές $e_1, e_2, \dots, e_k$ του W είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε ο W ονομάζεται ίχνος.
- Εάν ο W είναι κλειστός και δεν παρατηρείται επανάληψη εσωτερικών κορυφών, τότε αυτός ονομάζεται κύκλος.
- Εάν οι κορυφές του W, $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε ο W ονομάζεται μονοπάτι.

π.χ.



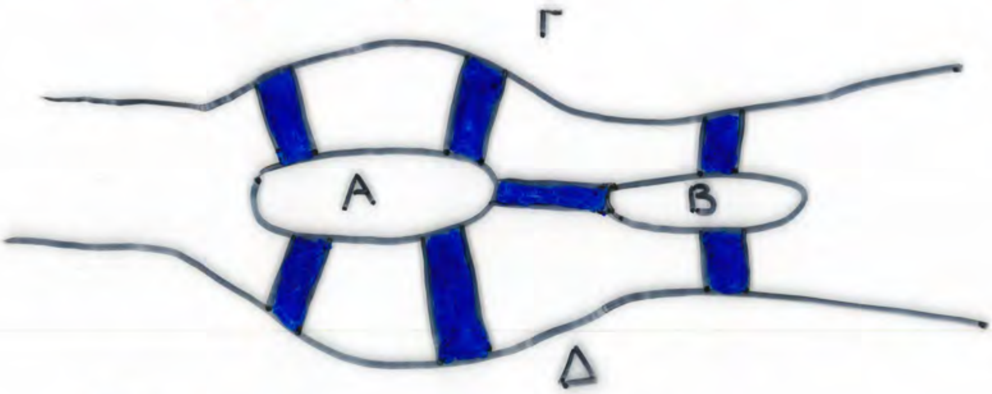
G

$u_8u_7u_4u_5u_6u_4u_3u_2$ (u_8,u_2)-ίχνος.

$$\left.\begin{array}{l} u_1u_2u_3u_7u_8u_1 \\ u_7u_3u_4u_7 \end{array}\right\} \text{κύκλοι στο } G$$

$$\left.\begin{array}{l} u_7u_4u_5u_6 \\ u_7u_3u_4u_6 \end{array}\right\} (u_7,u_6)\text{-μονοπάτια στο } G.$$

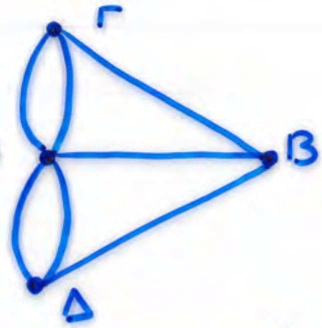
• Το πρόβλημα της γέφυρας του Königsberg. (1736)



Θέλουμε να περάσουμε από κάθε γέφυρα ακριβώς μια φορά επιστρέφοντας στο σημείο απ' όπου ξεκινήσαμε.

Euler.

G



Θέλουμε ένα κλειστό ίχνος που περιέχει κάθε ακμή του G.

- Το πρόβλημα του Hamilton (1850)

G

Θέλουμε έναν κύκλο στο G που περιέχει όλες τις κορυφές του.

Ορ: Ένα γράφημα G, θα λέμε ότι είναι συνεκτικό εάν $\forall\ u, v \in V(G)$, υπάρχει (u,v)-μονοπάτι.

π.χ

G_1

συνεκτικό γράφημα

G_2

μη-συνεκτικό γράφημα

$\omega(G)$: αριθμός συνιστωσών του G.

(Προφανώς $\omega(G)=1 \Leftrightarrow$ το G είναι συνεκτικό).

Ασκήσεις.

17). Εάν το G είναι απλό και $\delta(G) \geq 2$, να αποδειχθεί ότι το G περιέχει κύκλο.

Απόδειξη:

1ος τρόπος.

Θεωρούμε ένα μονοπάτι μεγίστου μήκους στο G. Ας το ονομάσουμε P και ας υποθέσουμε ότι είναι ένα (u,v)-μονοπάτι.

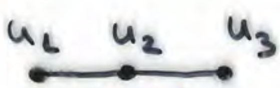
Επειδή $d_G(u) \geq \delta(G) \geq 2$ και επειδή το G είναι απλό, η u θα είναι γειτονική με τουλάχιστον δύο κορυφές. Οι γειτονικές κορυφές προς την u, θα βρίσκονται πάνω στο P, διότι το P είναι μονοπάτι μεγίστου μήκους. Άρα η u εκτός από την u_2 θα είναι γειτονική με τουλάχιστον άλλη μια κορυφή, έστω u_ℓ, που βρίσκεται πάνω στο P. Προφανώς ο περίπατος

$$u_1 u_2 \dots u_\ell u_1$$ αποτελεί κύκλο στο G.

2ος τρόπος.

Έστω u_1 τυχαία κορυφή του G και έστω u_2 κορυφή γειτονική προς την u_1.

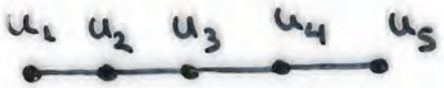
Επειδή $d_G(u_2) \geq \delta(G) \geq 2$ και επειδή το G είναι απλό, η u_2 εκτός από την u_1 θα είναι γειτονική με τουλάχιστον άλλη μια κορυφή, έστω την u_3



Τώρα επειδή $d_G(u_3) \geq 2$, η u_3 εκτός από την u_2 θα είναι γειτονική με τουλάχιστον άλλη μια κορυφή, έστω την u_4. Εάν $u_4 = u_1$ τότε έχουμε τελειώσει.

Εάν $u_4 \neq u_1$ επειδή $d_G(u_4) \geq 2$, η u_4 εκτός από την u_3 θα είναι γειτονική με τουλάχιστον άλλη μια κορυφή, έστω την u_5. Εάν $u_5 \in \{u_1, u_2\}$ τότε έχουμε τελειώσει.

Εάν $u_5 \notin \{u_1, u_2\}$ τότε η διαδικασία που περιγράφουμε, θα μας δώσει ένα μονοπάτι της μορφής:



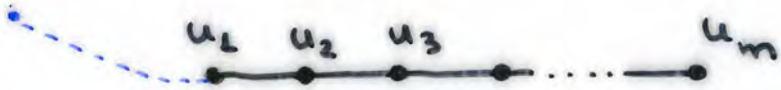
Η διαδικασία αυτή δεν μπορεί να συνεχιστεί για πάντα, διότι το G περιέχει πεπερασμένο αριθμό κορυφών. Άρα κάποια στιγμή, η διαδικασία αυτή θα μας δώσει κύκλο στο G.

16) Εάν το G είναι απλό και $\delta(G) \geq k$ τότε το G περιέχει μονοπάτι μήκους k.

Απάντηση:

1ος τρόπος

Έστω $P = u_1 u_2 \ldots u_m$ μονοπάτι μεγίστου μήκους στο G. Επειδή $d_G(u_1) \geq \delta(G) \geq k$ και επειδή το G είναι απλό, η u_1



θα είναι γειτονική με τουλάχιστον k κορυφές. Αυτές θα βρίσκονται οπωσδήποτε πάνω στο P, διότι το P είναι μονοπάτι μεγίστου μήκους στο G. Άρα το P θα έχει τουλάχιστον k+1 κορυφές. Επομένως το μήκος του θα είναι τουλαχιστον k.

$2^{\text{ος}}$ τρόπος:

Έστω u_1 τυχαία κορυφή στο G.

Επειδή $d_G(u_1) \geq k$, η u_1 θα είναι γειτονική με τουλάχιστον k κορυφές στο G· έστω u_2 μια τέτοια κορυφή.

Επειδή $d_G(u_2) \geq k$, η u_2 θα είναι γειτονική με τουλάχιστον $k-1$ κορυφές, διάφορες της u_1· έστω u_3 μια τέτοια κορυφή.

Επειδή $d_G(u_3) \geq k$, η u_3 θα είναι γειτονική με τουλάχιστον $k-2$ κορυφές, διάφορες των u_1, u_2.

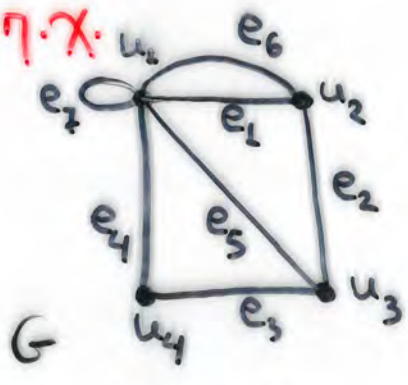
Γενικά
επειδή $d_G(u_i) \geq k$, η u_i θα είναι γειτονική με τουλάχιστον $k-(i-1)$ κορυφές, διάφορες των $u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}$.

Ο αλγόριθμος σταματά όταν $k-(i-1)=0 \Rightarrow i=k+1$., δηλαδή όταν θα μας έχει δώσει μονοπάτι μήκους k.

Πίνακες γραφημάτων.

Πίνακας γειτνίασης: Έστω γράφημα G με $V(G)=\{u_1, u_2, \dots, u_\nu\}$. Ο πίνακας γειτνίασης του G θα είναι ένας πίνακας $A(G)=[a_{ij}]$ μεγέθους $\nu \times \nu$, όπου το a_{ij} αντιπροσωπεύει τον αριθμό των ακμών που συνδέουν τις κορυφές u_i και u_j

π.χ.:



$$A(G)= \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Πίνακας πρόσπτωσης.

Έστω γράφημα G με $V(G)=\{u_1,u_2,\ldots,u_\nu\}$ και $E(G)=\{e_1,e_2,\ldots,e_\varepsilon\}$. Ο πίνακας πρόσπτωσης του G, θα είναι ένας πίνακας $B(G)=[b_{ij}]$ μεγέθους $\nu\times\varepsilon$ όπου το b_{ij} συμβολίζει πόσες φορές η κορυφή u_i είναι άκρο της ακμής e_j.

π.χ.

$$B(G)=\begin{array}{c}\\ u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7\end{array}\\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

Κατευθυνόμενα γραφήματα.

$D = (V(D), A(D), \psi_D)$

$V(D)$: σύνολο κορυφών

$A(D)$: σύνολο τόξων

ψ_D: συνάρτηση βάσει της οποίας σε κάθε τόξο αντιστοιχεί ένα διατεταγμένο ζεύγος κορυφών

Παράδειγμα: $V(D) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

$A(D) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$

$\psi_D(a_1) = (u_1, u_2)$

$\psi_D(a_2) = (u_2, u_3)$

$\psi_D(a_3) = (u_3, u_4)$

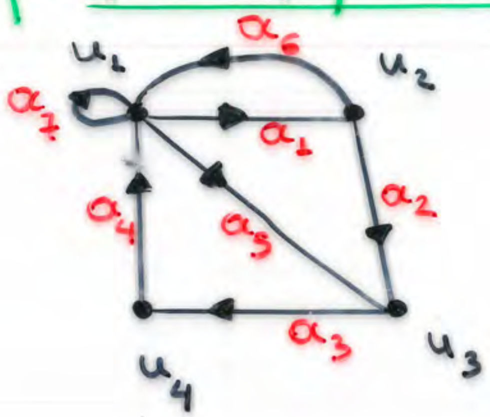
$\psi_D(a_4) = (u_4, u_1)$

$\psi_D(a_5) = (u_1, u_3)$

$\psi_D(a_6) = (u_2, u_1)$

$\psi_D(a_7) = (u_1, u_1)$

Γραφική παράσταση.



u: αρχή του a
v: τέλος » »

Βαθμοί κορυφών

Ο έξω-βαθμός της κορυφής u συμβολίζεται με $d_D^+(u)$ και ορίζεται ως εξής:

$d_D^+(u)$: αριθμός των φορών που η κορυφή u αποτελεί αρχή τόξου στο D.

Ο έσω-βαθμός της κορυφής u συμβολίζεται με $d_D^-(u)$ και ορίζεται ως εξής:

$d_D^-(u)$: αριθμός των φορών που η κορυφή u αποτελεί τέλος τόξου στο D.

Θεώρημα: Για κάθε κατευθυνόμενο γράφημα D,

$$\sum_{u\in V(D)} d_D^-(u) = |A(D)| = \sum_{u\in V(D)} d_D^+(u)$$

Απόδειξη:

Κάθε τόξο a με αρχή την κορυφή u και τέλος την κορυφή v "συνεισφέρει" τον αριθμό 1 στον έξω-βαθμό της u και τον αριθμό 1 στον έσω-βαθμό της v. Άρα

$$\sum_{u\in V(D)} d_D^-(u) = \sum_{u\in V(D)} d_D^+(u) = |A(D)|.$$

Δέντρα.

Δέντρο ονομάζουμε κάθε συνεκτικό γράφημα, το οποίο δεν περιέχει κύκλους.

π.χ.

Θεώρημα: Για ένα απλό γράφημα G οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(1) Το G είναι δέντρο

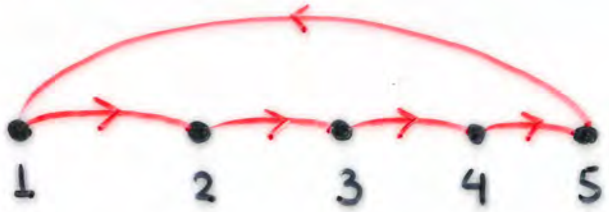
(2) Για κάθε $u,v \in V(G)$ υπάρχει ακριβώς ένα (u,v)-μονοπάτι.

(3) Το G είναι συνεκτικό και $\nu(G)=\varepsilon(G)+1$

(4) Το G δεν περιέχει κύκλους και $\nu(G)=\varepsilon(G)+1$.

(5) Το G δεν περιέχει κύκλους και για κάθε ζεύγος μη-γειτονικών κορυφών u,v το γράφημα

που προηγείται από την προσθήκη μιας ακμής που έχει για άκρα της, τις u, v περιέχει ακριβώς ένα κύκλο

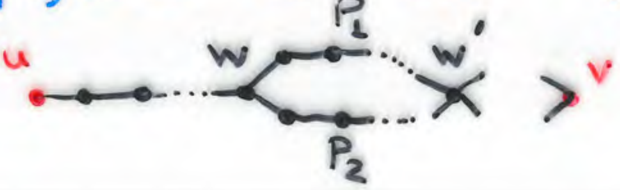


Απόδειξη:

(1) ⇒ (2)

Έστω u, v δύο τυχαίες κορυφές στο G. Επειδή το G είναι συνεκτικό, θα υπάρχει (u,v)-μονοπάτι σ' αυτό. Έστω ότι υπάρχουν δύο διαφορετικά τέτοια μονοπάτια, τα P_1 και P_2.

Αυτά τα μονοπάτια σε κάποια κορυφή, έστω w θα "χωρίζουν" και σε κάποια κορυφή, έστω w' θα "ξανασυναντιούνται"



Όμως σ' αυτήν την περίπτωση τα τμήματα των P_1 και P_2 που βρίσκονται μεταξύ των w και w' σχηματίζουν κύκλο στο G

ΑΤΟΠΟ

διότι το G είναι δέντρο.

(2)$\Rightarrow$(3)

Προφανώς από την (2), το G είναι συνεκτικό. Θα αποδείξουμε ότι $v(G)=\varepsilon(G)+1$ με επαγωγή. Εάν $v(G)=1$, $\varepsilon(G)=0=v(G)-1$.

Έστω ότι ισχύει για όλα τα γραφήματα που έχουν λιγότερες από $v(G)$ κορυφές. Εάν $e\in E(G)$, το γράφημα $G-\{e\}$ είναι μη-συνεκτικό γράφημα με δύο συνιστώσες, έστω τις G_1, G_2.

Τα G_1, G_2 είναι γραφήματα που περιέχουν λιγότερες από $v(G)$ κορυφές. Άρα από την υπόθεση της επαγωγής

$$v(G_1)=\varepsilon(G_1)+1$$

$$v(G_2)=\varepsilon(G_2)+1$$

Επομένως $v(G_1)+v(G_2)=\varepsilon(G_1)+\varepsilon(G_2)+2$. Όμως

$$v(G_1)+v(G_2)=v(G), \quad \varepsilon(G_1)+\varepsilon(G_2)+1=\varepsilon(G)$$

Άρα $v(G)=\varepsilon(G)+1$.

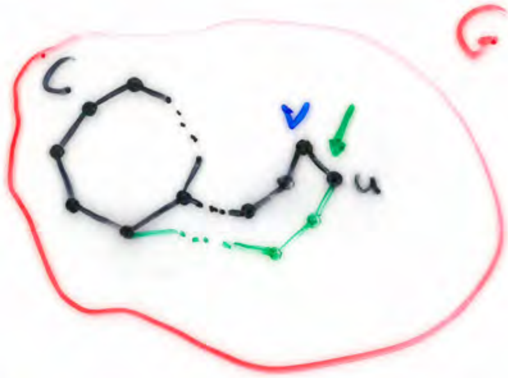
(3) $\Rightarrow$ (4).

Αρκεί να αποδείξουμε ότι το G δεν περιέχει κύκλο.

Έστω ότι το G περιέχει κύκλο C μήκους n. Προφανώς ο C θα περιέχει n κορυφές και n ακμές. Άρα υπάρχουν $v(G)-n$ κορυφές και $\varepsilon(G)-n$ ακμές που δεν ανήκουν στον C.

Τώρα σε κάθε κορυφή u που

δεν ανήκει στον C αντιστοιχούμε την πρώτη ακμή του συντομότερου μονοπατιού που συνδέει την u με τον C. Η αντιστοιχία αυτή είναι 1-1.



Άρα $\nu(G)-n \leq \varepsilon(G)-n. \Rightarrow \nu(G) \leq \varepsilon(G).$
ΑΤΟΠΟ
διότι από την (3)
$\nu(G)=\varepsilon(G)+1.$

Επομένως το G δεν περιέχει κύκλο.

(4) ⇒ (5)

Έστω $G_1, G_2, \ldots, G_k$ συνιστώσες του G. Επειδή το G δεν περιέχει κύκλους τα $G_1, G_2, \ldots, G_k$ θα είναι δένδρα

Άρα από την (1) ⇒ (3),

$$v(G_i) = \varepsilon(G_i) + 1 \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, k$$

Οπότε

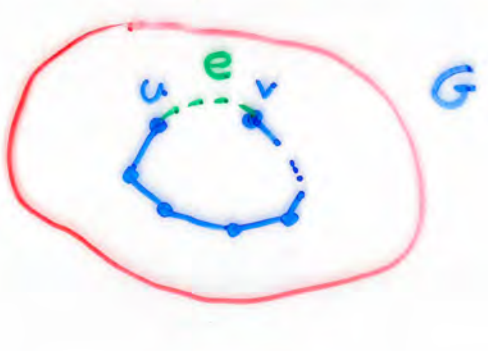
$$\sum_{i=1}^{k} v(G_i) = \sum_{i=1}^{k} \left(\varepsilon(G_i) + 1\right)$$

$$\Rightarrow \qquad v(G) = \varepsilon(G) + k.$$

Όμως από την (4), $v(G) = \varepsilon(G) + 1$. Επομένως $k = 1$, δηλαδή το G είναι συνεκτικό γράφημα.

Τώρα από την (4), το G δεν περιέχει κύκλους και άρα το G είναι δέντρο.

Από την $(1) \Rightarrow (2)$, $\forall\; u, v \in V(G)$, $\exists$ ακριβώς ένα (u,v)-μονοπάτι



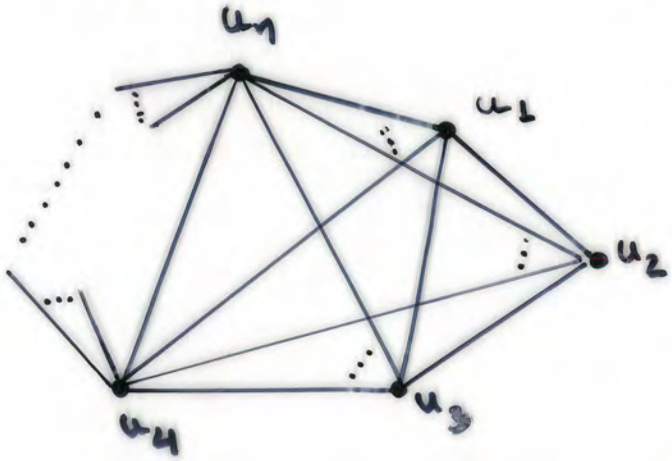
Εάν οι u, v δεν είναι γειτονικές, η προσθήκη μιας ακμής e που τις συνδέει θα μας δώσει γράφημα (το $G + \{e\}$) που περιέχει ακριβώς έναν κύκλο

Το πρόβλημα σύνδεσης

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα σιδηροδρομικό δίκτυο, το οποίο θα συνδέει η πόλεις.

Για οικονομικούς λόγους θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος κατασκευής αυτού του δικτύου.

Έστω ότι οι πόλεις του δικτύου αποτελούν το σύνολο των κορυφών του γραφήματος K_η.



Έστω επίσης ότι σε κάθε ακμή e του K_η, η οποία έχει για άκρα της τις κορυφές u_i και u_j αντιστοιχεί ένας πραγματικός μη αρνητικός αριθμός $w(e)$.

ο αριθμός $w(e)$ θα αντιπροσωπεύει το κόστος κατασκευής μιας άμεσης σύνδεσης μεταξύ των u_i, u_j.

Το πιο οικονομικό δίκτυο, θα είναι ένα επικαλυπτικό δένδρο T του K_n, για το οποίο ισχύει ότι το $\sum_{e \in E(T)} w(e)$ είναι ελάχιστο.

Ένα τέτοιο δένδρο ονομάζεται βέλτιστο (optimal) δένδρο.

Αλγόριθμος του Kruskal.

(1) Επιλέγουμε μια ακμή e_1 έτσι ώστε το $w(e_1)$ να είναι ελάχιστο.

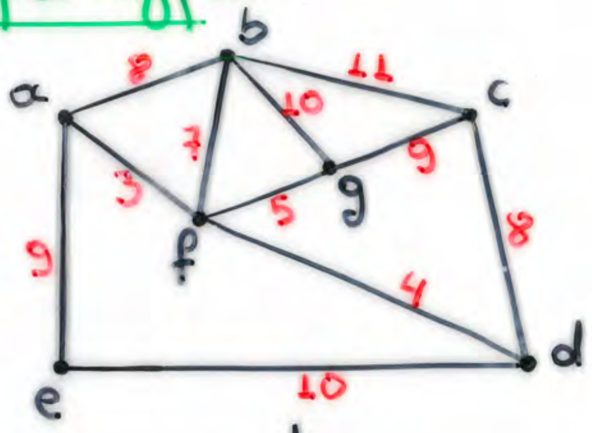
(2) Εάν οι ακμές $e_1, e_2, \ldots, e_i$ έχουν επιλεγεί, τότε επιλέγουμε ακμή e_{i+1} από το σύνολο $E - \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ έτσι ώστε

(i) $G[\{e_1, e_2, \ldots, e_{i+1}\}]$ δεν περιέχει κύκλους

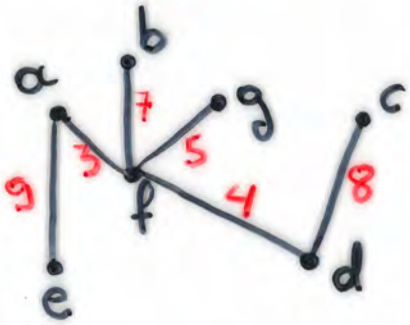
(ii) $w(e_{i+1})$ είναι ελάχιστο ως προς (i)

(3) Η διαδικασία διακόπτεται όταν το (2) δεν είναι δυνατόν να εκτελεσθεί.

Παράδειγμα:



af	3
fd	4
fg	5
fb	7
cd	8
ae	9
	36



Θεώρημα: Κάθε επικαλυπτικό δένδρο $T^* = G[\{e_1, e_2, \ldots, e_{\nu-1}\}]$ ενός γραφήματος G, το οποίο προκύπτει από τον αλγόριθμο του Kruskal είναι optimal.

Αποδ: Έστω ότι το επικαλυπτικό δέντρο T^* δεν είναι optimal. Τότε θα υπάρχει επικαλυπτικό δέντρο S του G έτσι ώστε

$$\sum_{e \in E(S)} w(e) < \sum_{e \in E(T^*)} w(e) \qquad \text{— (A)}$$

Έστω e_k η πρώτη ακμή της ακολουθίας $e_1, e_2, \ldots, e_{v-1}$ που δεν ανήκει στο S. Το γράφημα $S+\{e_k\}$, θα περιέχει ακριβώς έναν κύκλο C, ο οποίος με την σειρά του περιέχει την ακμή e_k.

Επειδή το T^* είναι δέντρο, υπάρχει μια ακμή e_ℓ του C που δεν ανήκει στο T^*. Πηγαίνουμε στο S και αντικαθιστούμε την e_ℓ με την e_k. Δηλαδή θεωρούμε το γράφημα $S'=(S+\{e_k\})-\{e_\ell\}$.

Το S' είναι προφανώς επικαλυπτικό δέντρο του G. Τώρα από τον τρόπο κατασκευής του T^*, $w(e_k)\le w(e_\ell)$. Άρα

$$\sum_{e\in E(S')} w(e) \le \sum_{e\in E(S)} w(e).$$

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία, αλλάζοντας μια ακμή κάθε φορά, μπορούμε να πάρουμε από το δέντρο S το δέντρο T^*.

Κατά την διάρκεια αυτής της διαδικασίας το συνολικό κόστος δεν αυξάνεται.

Άρα $$\sum_{e\in E(S)} w(e) \ge \sum_{e\in E(T^*)} w(e)$$ ΑΤΟΠΟ (ΒΛΕΠΕ Α)

Δέντρα με ρίζα.

Κατευθυνόμενο δέντρο: Κατευθυνόμενο γράφημα D, στο οποίο εάν αντικαταστήσουμε τα τόξα με ακμές προκύπτει ένα γράφημα που είναι δέντρο.

π.χ.

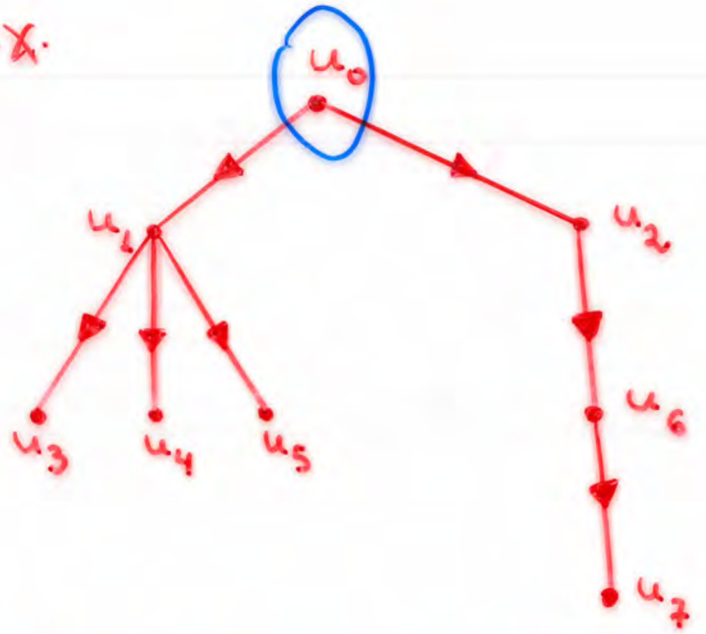
Ορ. Ένα κατευθυνόμενο δέντρο D λέμε ότι έχει ρίζα, εάν

(i) υπάρχει σ' αυτό ακριβώς μια κορυφή u_0 με $d_D^-(u_0)=0$.

(ii) για όλες τις άλλες κορυφές u_i του D, ισχύει ότι $d_D^-(u_i)=1$.

Η κορυφή u_0 ονομάζεται ρίζα του κατευθυνόμενου δέντρου D.

π.χ.



u_0: ρίζα του κατευθυνόμενου δέντρου.

- Σ' ένα κατευθυνόμενο δέντρο D με ρίζα, όλες τις κορυφές u_j για τις οποίες ισχύει ότι $d_D^+(u_j)=0$, τις ονομάζουμε φύλλα του.
- Όλες οι κορυφές που δεν είναι φύλλα ονομάζονται εσωτερικές κορυφές

I: αριθμός εσωτερικών κορυφών του D.

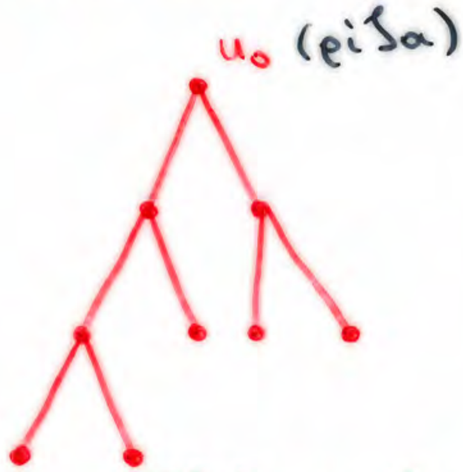
L: αριθμός φύλλων του D.

Παρατήρηση: Σ' ένα κατευθυνόμενο δέντρο με ρίζα, τα τόξα του μπορούν να αντικατασταθούν με ακμές, διότι η επιλογή μιας κορυφής σαν ρίζα, ουσιαστικά προσδιορίζει τις κατευθύνσεις των τόξων.

Επομένως από εδώ και πέρα τα δέντρα με ρίζα, θα τα αποκαλούμε με μη-κατευθυνόμενα δέντρα.

- Δυαδικά δέντρα: Δέντρα με ρίζα D, για τα οποία ισχύει $d_D^+(u_i) \leq 2$, $\forall u_i \in V(D)$.
- Πλήρη δυαδικά δέντρα: Δέντρα με ρίζα D, για τα οποία ισχύει $d_D^+(u_i) = 2$, για κάθε κορυφή u_i που δεν είναι φύλλο του.

Δυαδικό δέντρο



Πλήρες δυαδικό δέντρα

<u>Θεώρημα</u>: Σ' ένα πλήρες δυαδικό δέντρο T έχουμε ότι $L = I + 1$.

Απόδειξη: Τα φύλλα του T έχουν βαθμό 1 ενώ οι εσωτερικές κορυφές του, εκτός της ρίζας, έχουν βαθμό 3. Τέλος η ρίζα έχει βαθμό 2. Άρα

$$\sum_{x \in V(T)} d_T(x) = L + 3(I-1) + 2 = L + 3I - 1$$

Όμως επειδή το T είναι δέντρο

$$\sum_{x \in V(T)} d_T(x) = 2|E(T)| = 2(|V(T)| - 1) =$$

$$= 2(L + I - 1) = 2L + 2I - 2.$$

Άρα $L + 3I - 1 = 2L + 2I - 2 \Rightarrow I = L - 1$

Σ' ένα δέντρο με ρίζα,

- ύψος μιας κορυφής u, ονομάζουμε το μήκος του μοναδικού μονοπατιού που συνδέει την ρίζα με την u.
- ύψος του δέντρου, ονομάζουμε την μέγιστη τιμή ύψους κορυφής.

Θεώρημα: Σ' ένα δυαδικό δέντρο T ύψους h υπάρχουν το πολύ 2^h φύλλα.

Αποδ: Θα το αποδείξουμε με επαγωγή ως προς h.

Εάν $h=1$ τότε προφανώς το T θα έχει ένα ή δύο φύλλα. Άρα σ'αυτή την περίπτωση το θεώρημα ισχύει.

Έστω τώρα ότι έχουμε ένα δυαδικό δέντρο T ύψους h. Διαγράφουμε από το T τις ακμές που έχουν για άκρο τους την ρίζα του T. Από αυτή την διαγραφή θα προκύψουν:

(i) Μια κορυφή βαθμού 0 (η ρίζα)

και

(ii) ένα ή δύο δυαδικά δέντρα ύψους το πολύ $h-1$.

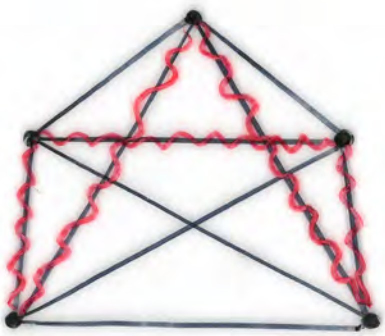
Από την υπόθεση της επαγωγής, καθένα από αυτά έχει το πολύ 2^{h-1} φύλλα. Άρα το T έχει το πολύ $2 \cdot 2^{h-1} = 2^h$ φύλλα.

Κύκλοι του Hamilton και ίχνη του Euler.

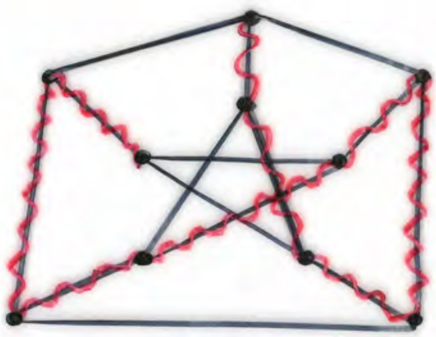
Κύκλος του Hamilton: Κύκλος που περιέχει όλες τις κορυφές του γραφήματος.

Μονοπάτι του Hamilton: Μονοπάτι που περιέχει όλες τις κορυφές του γραφήματος.

Hamiltonian γράφημα: Γράφημα που περιέχει κύκλο του Hamilton.



Κύκλος του Hamilton



Μονοπάτι του Hamilton.

Άσκηση: Έστω G Hamiltonian γράφημα. Να αποδειχθεί ότι για κάθε μη-κενό υποσύνολο S του $V(G)$,

$$\omega(G-S) \leq |S|.$$

<u>Απάντηση</u>: Έστω C κύκλος του Hamilton στο G.

Για κάθε μη-κενό υποσύνολο S του $V(C)$, $\quad \omega(C-S) \leq |S|$.

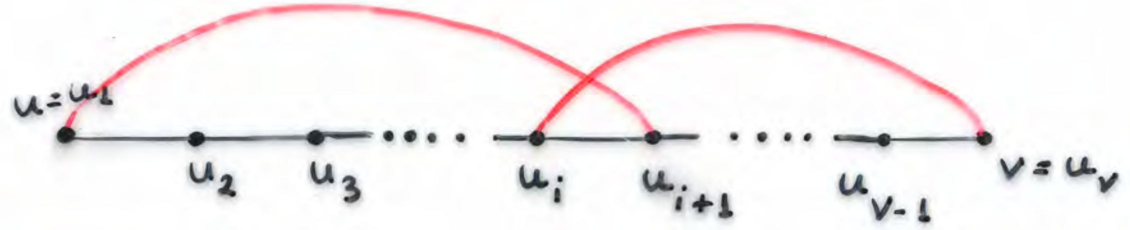
Όμως
$$\omega(G-S) \leq \omega(C-S)$$
διότι ο κύκλος C είναι ένα επικαλυπτικό υπογράφημα του G. Άρα
$$\omega(G-S) \leq |S|.$$

<u>Θεώρημα</u>: (Dirac 1952) Έστω G απλό γράφημα με (i) $v(G) \geq 3$ και (ii) $\delta(G) \geq \frac{v(G)}{2}$. Τότε το G είναι Hamiltonian.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω ότι το G δεν είναι Hamiltonian. Προσθέτουμε ακμές στο G που συνδέουν μη-γειτονικές κορυφές του. Η προσθηκή αυτή των ακμών

σταματά, όταν η προσθήκη μιας επιπλέον ακμής θα μας δώσει Hamiltonian γράφημα.

Έστω G^* το γράφημα που προκύπτει από την παραπάνω διαδικασία. Το G^* δεν είναι πλήρες γράφημα (διότι κάθε πλήρες γράφημα με τουλάχιστον 3 κορυφές είναι Hamiltonian.) Άρα υπάρχουν δύο κορυφές u και v στο G^* που δεν είναι γειτονικές. Εάν e είναι μια ακμή που συνδέει τις u, v το γράφημα $G^*+\{e\}$ είναι Hamiltonian. Αυτό σημαίνει ότι το G^* έχει (u,v)-μονοπάτι του Hamilton. Το $u_1u_2\ldots u_v$ όπου $u_1=u$ και $u_v=v$.



Έστω

$$S=\{u_i \mid u \text{ και } u_{i+1} \text{ είναι γειτονικές κορυφές στο } G^*\},$$

$$T=\{u_i \mid v \text{ και } u_i \text{ είναι γειτονικές κορυφές στο } G^*\}.$$

Επειδή $u_\nu = v \notin S\cup T$,

$$|S\cup T| < \nu(G) \qquad -(1)$$

Επίσης

$$|S\cap T| = 0 \qquad -(2)$$

διότι διαφορετικά το G^* θα είχε κύκλο του Hamilton (τον $u_1 u_{i+1} \ldots u_{\nu-1} u_\nu u_i \ldots u_1$)

Τώρα

$$d_{G^*}(u)+d_{G^*}(v) \geq d_G(u)+d_G(v) \geq |V(G)|$$

και

$$d_{G^*}(u)+d_{G^*}(v)=|S|+|T|=|S\cup T|+|S\cap T|<v(G)$$

από τις (1) και (2)

Άρα το G είναι HAMILTONIAN.

Ίχνος του Euler: Κλειστό ίχνος που περιέχει όλες τις ακμές του γραφήματος

Eulerian γράφημα: Γράφημα που περιέχει ίχνος του Euler.

Θεώρημα: Για κάθε συνεκτικό γράφημα G, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες.

(1) Το G είναι Eulerian.

(2) Ο βαθμός κάθε κορυφής είναι άρτιος.

Απόδειξη:

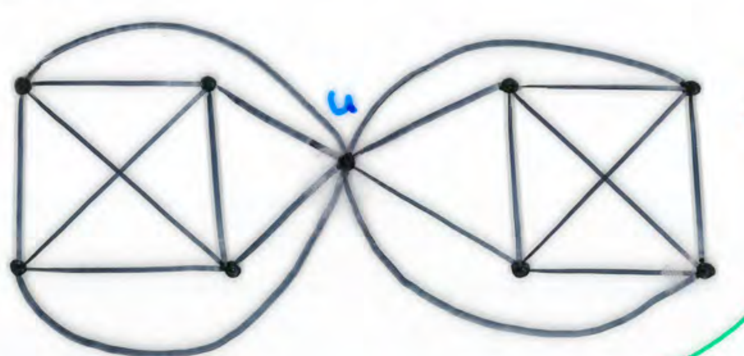
(1)⇒(2). Κάθε φορά που το ίχνος του Euler "περνάει" από μια κορυφή u, χρησιμοποιεί δύο διαφορετικές ακμές ή ένα βρόχο. Άρα

ο βαθμός της u: 2 × (αριθμό των επισκέψεων του ίχνους στην u).

(2)⇒(1). Παραλείπεται.

Ασκήσεις:

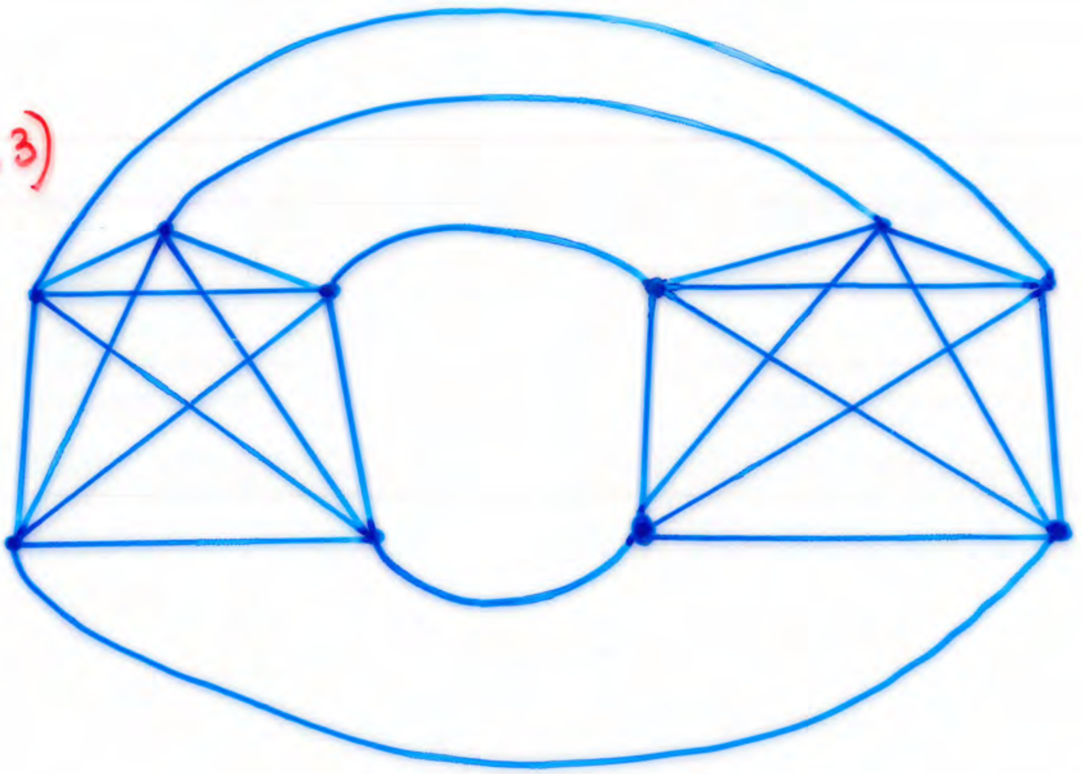
22)



(διότι ο βαθμός κάθε κορυφής είναι άρτιος)

Eulerian γράφημα που δεν είναι Hamiltonian. (διότι $\omega(G-\{u\}) > |\{u\}|$)

23)



- Το G είναι Hamiltonian διότι $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$ και $|V(G)| \geq 3$.

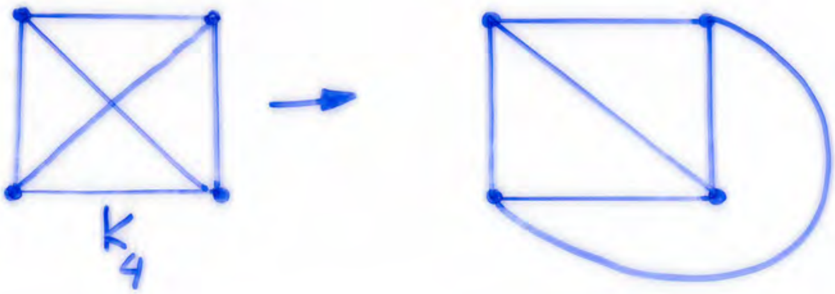
- Το G δεν είναι Eulerian διότι υπάρχουν στο G, κορυφές περιττού βαθμού.

<u>Άσκηση</u>: Έστω G απλό γράφημα με τουλάχιστον δύο κορυφές. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν στο G τουλάχιστον δύο κορυφές του ιδίου βαθμού.

Επίπεδα γραφήματα και χρωματισμός γραφημάτων.

Ορ. Τα γραφήματα που μπορούν να απεικονισθούν έτσι ώστε οι γραμμές που αντιστοιχούν στις ακμές του γραφήματος να μη τέμνονται σε σημεία που δεν είναι κορυφές, ονομάζονται επίπεδα γραφήματα.

π.χ.



K_4

Οι περιοχές που ορίζει στο επίπεδο μια τέτοια γραφική απεικόνιση, ονομάζονται έδρες του επιπέδου γραφήματος G και ο αριθμός τους συμβολίζεται με $f(G)$.

Θεώρημα (Euler 1750). Έστω G συνεκτικό επίπεδο γράφημα G. Τότε $v(G)+f(G)=\varepsilon(G)+2$.

Αποδ. Εάν το G δεν περιέχει κύκλους, εάν δηλ. το G είναι δέντρο τότε το Θεώρημα προφανώς ισχύει διότι $v(G)=\varepsilon(G)+1$. και $f(G)=1$.

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε το Θεώρημα για γραφήματα που περιέχουν κάποιο κύκλο. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή ως προς τον αριθμό των ακμών του G.

Εάν $\varepsilon(G)=0$, τότε $v(G)=1$ (διότι το G είναι συνεκτικό) και επομένως $f(G)=1$. Άρα σ' αυτή την περίπτωση το Θεώρημα ισχύει.

Ας υποθέσουμε ότι το Θεώρημα ισχύει για όλα τα συνεκτικά επίπεδα γραφήματα με $\varepsilon(G)-1$ ακμές. Θεωρούμε κύκλο C στο G και έστω $e\in E(C)$. Το γράφημα $G_1 = G-\{e\}$ θα είναι συνεκτικό επίπεδο γράφημα με $\varepsilon(G)-1$ ακμές.

Άρα από την υπόθεση της επαγωγής

$$v(G_1)+f(G_1)=\varepsilon(G_1)+2.$$

Όμως $v(G_1)=v(G)$, $\varepsilon(G_1)=\varepsilon(G)-1$

και $f(G_1)=f(G)-1$. Επομένως

$$v(G)+f(G)=\varepsilon(G)+2.$$

Πόρισμα 1: Για κάθε απλό συνεκτικό επίπεδο γράφημα G με $\nu(G) \geq 3$,

$$\varepsilon(G) \leq 3\nu(G) - 6.$$

Αποδ. Αθροίζουμε τους αριθμούς των συγγενοχών ακμών στο "φράξιμο" περιοχών.

Επειδή κάθε έδρα "φράσσεται" από τουλάχιστον 3 ακμές, το παραπάνω άθροισμα θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $3f(G)$.

Επίσης επειδή κάθε ακμή "φράσσει" το πολύ δύο έδρες, το παραπάνω άθροισμα θα πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο του $2\varepsilon(G)$.

Άρα

$$3f(G) \leq 2\varepsilon(G).$$

Όμως από το προηγούμενο Θεώρημα,

$$\nu(G) + f(G) = \varepsilon(G) + 2.$$

Άρα

$$3(\varepsilon(G) + 2 - \nu(G)) \leq 2\varepsilon(G)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon(G) \leq 3\nu(G) - 6.$$

Πόρισμα 2: Κάθε απλό επίπεδο γράφημα G περιέχει τουλάχιστον μια κορυφή βαθμού το πολύ 5.

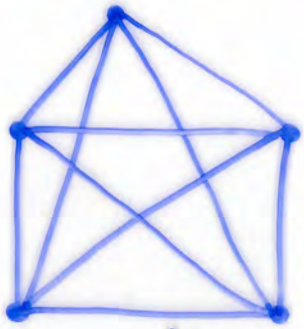
Αποδ. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το G είναι συνεκτικό και ότι έχει τουλάχιστον 3 κορυφές.

Αν κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον 6, τότε

$$6\nu(G) \leq \sum_{x \in V(G)} d_G(x) = 2\varepsilon(G)$$

δηλ. $3\nu(G) \leq \varepsilon(G)$ – ΑΤΟΠΟ. από το Πόρισμα 1.

Άσκηση: Να αποδειχθεί ότι τα παρακάτω γράφημα δεν είναι επίπεδο.



K_5

$2\varepsilon(K_5) = 5.4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon(K_5) = 10$

$\nu(K_5) = 5$

$$\underset{10}{\varepsilon(G)} > \underset{9}{3\nu(G) - 6}$$

Άρα από το Πορ. 1, το K_5 δεν είναι επίπεδο