

# ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2011

1. Ορίζουμε τη σχέση  $R$  στο σύνολο των ακέραιων  $\mathbb{Z}$ , ως εξής:  $(a,b) \in R$  εάν και μόνον εάν  $a^2 - b^2 = 3k$  για  $k \in \mathbb{Z}$ . Είναι η  $R$  σχέση ισοδυναμίας; (Αιτιολογήσατε πλήρως την απάντησή σας)
2. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών μεταξύ 0 και 1 δεν είναι αριθμήσιμο σύνολο.
3. Να αποδειχθεί ότι ο προτασιακός τύπος  $p \vee q \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$  είναι ταυτολογία. Στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι το  $\{\neg, \wedge\}$  είναι πλήρες σύνολο.
4. (α) Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 2 Α, 4 Β και 3 Γ στη σειρά; (β) Σε πόσες από τις παραπάνω τοποθετήσεις τα 2 Α είναι συνεχόμενα;
5. Έστω σύνολο Α, το οποίο περιέχει 20 στοιχεία και έστω  $a, b, c$  τρία από τα στοιχεία του. Να βρεθεί ο αριθμός των υποσυνόλων του Α που έχουν 6 στοιχεία και περιέχουν το πολύ δύο από τα  $a, b, c$ .
6. Έστω απλό γράφημα G με 12 κορυφές και με ακολουθία βαθμών κορυφών (8,8,5,5,4,4,4,4,4,4,4,4). Πόσες ακμές έχει το G; (Αιτιολογήσατε πλήρως την απάντησή σας)
7. Έστω G συνεκτικό επίπεδο γράφημα. Να αποδειχθεί ότι  $\nu(G) + f(G) = \varepsilon(G) + 2$ . (Με  $f(G)$  συμβολίζουμε τον αριθμό των εδρών του G)
8. Έστω G απλό γράφημα με  $\delta(G) \geq 2$ . Να αποδειχθεί ότι το G περιέχει κύκλο.

Βαθμολογία: Θέματα 1,6,8 από 1 μονάδα, θέματα 2,4,5,7 από 1,5 μονάδες και στο θέμα 3 αντιστοιχούν 2 μονάδες. Σύνολο μονάδων: 11

**ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2 ΩΡΕΣ**