

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ (ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ)

- 1) Έστω απλό γράφημα G με $\delta(G) \geq 2$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει κύκλος στο G .
- 2) Έστω απλό γράφημα G με $\delta(G) \geq \kappa$, όπου κ θετικός ακέραιος. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μονοπάτι στο G μήκους κ .
- 3) Έστω G κ -κανονικό διμερές γράφημα με διαμερισμό (X, Y) . Να αποδειχθεί ότι $|X| = |Y|$.
- 4) Εάν το G είναι απλό και διμερές γράφημα, να αποδειχθεί ότι $\varepsilon(G) \leq \frac{(\nu(G))^2}{4}$.
- 5) Εάν G απλό και διμερές γράφημα με $\delta(G) > \frac{|V(G)|}{2} - 1$, να αποδειχθεί ότι το G είναι συνεκτικό γράφημα.
- 6) Έστω απλό γράφημα G με ακριβώς δύο κορυφές περιττού βαθμού. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μονοπάτι στο G που συνδέει αυτές τις δύο κορυφές.
- 7) Έστω δέντρο T με $\Delta(T) = \kappa$ και έστω ότι με n_i συμβολίζουμε τον αριθμό των κορυφών που έχουν βαθμό i , για $i = 1, 2, \dots, \kappa$. Να αποδειχθεί ότι $n_1 = n_3 + 2n_4 + 3n_5 + \dots + (\kappa - 2)n_\kappa + 2$.
- 8) Να αποδειχθεί ότι σε κάθε απλό γράφημα με τουλάχιστον δύο κορυφές υπάρχουν δύο κορυφές με τον ίδιο βαθμό.
- 9) Έστω G Hamiltonian γράφημα. Εάν S μη-κενό υποσύνολο του $V(G)$, να αποδειχθεί ότι $\omega(G - S) \leq |S|$.
- 10) Να δοθεί παράδειγμα γραφήματος, το οποίο είναι Eulerian και δεν είναι Hamiltonian.
- 11) Να δοθεί παράδειγμα γραφήματος, το οποίο είναι Hamiltonian και δεν είναι Eulerian.
- 12) Έστω G απλό κ -κανονικό γράφημα, το οποίο δεν περιέχει κύκλο μήκους 3. Να αποδειχθεί ότι $|V(G)| \geq 2\kappa$.
- 13) Έστω απλό γράφημα G με 10 κορυφές και με ακολουθία βαθμών κορυφών $(6, 6, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 4, 4)$. Πόσες ακμές έχει το G ;
- 14) Θεωρούμε γράφημα G , το οποίο έχει για κορυφές του, τις 0-1 λέξεις με n γράμματα και στο οποίο δύο κορυφές είναι γειτονικές εάν και μόνον εάν διαφέρουν ακριβώς κατά ένα γράμμα.
 (α) Πόσες κορυφές έχει το G ;
 (β) Πόσες ακμές έχει το G ;
- 15) Έστω G απλό γράφημα με $\delta(G) \geq 3$. Να αποδειχθεί ότι το G περιέχει κύκλο άρτιου μήκους.
- 16) Έστω $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ σύνολο σημείων στο επίπεδο έτσι ώστε η απόσταση για κάθε ζεύγος αυτών είναι τουλάχιστον 1. Να αποδειχθούν ότι υπάρχουν το πολύ 3η ζεύγη των παραπάνω σημείων που απέχουν μεταξύ τους απόσταση ακριβώς 1.
- 17) Έστω G απλό γράφημα με $\delta(G) \geq 2$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει στο G κύκλος μήκους τουλάχιστον $\delta(G) + 1$.

18) Έστω G συνεκτικό γράφημα, του οποίου όλες οι κορυφές είναι άρτιου βαθμού.

Να αποδειχθεί ότι για κάθε $u \in V(G)$, $\omega(G - \{u\}) \leq \frac{1}{2} d_G(u)$.

19) Έστω G απλό συνεκτικό 4-κανονικό γράφημα. Για κάθε ακμή e του G , να αποδειχθεί ότι το γράφημα $G - \{e\}$ είναι επίσης συνεκτικό γράφημα.

20) Μέσα σε μια αίθουσα υπάρχουν άνδρες και 15 γυναίκες. Κάθε άνδρας της αίθουσας γνωρίζει ακριβώς 6 από αυτές τις γυναίκες και κάθε γυναίκα της αίθουσας γνωρίζει ακριβώς 8 από αυτούς τους άνδρες. Πόσοι άνδρες υπάρχουν στην αίθουσα;

21) Έστω απλό συνεκτικό 3-κανονικό γράφημα G και έστω ακμή e του G τέτοια ώστε $\omega(G - \{e\}) = 2$. Να αποδειχθεί ότι $|V(G)| \geq 10$.