

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ (ΣΧΕΣΕΙΣ)

- 1) Έστω σχέσεις ισοδυναμίας R και S που ορίζονται σε ένα σύνολο A . α) Είναι η $R \cup S$ σχέση ισοδυναμίας; β) Είναι η $R \cap S$ σχέση ισοδυναμίας;
- 2) Έστω σχέση R , η οποία ορίζεται στο σύνολο των διατεταγμένων ζευγών θετικών ακέραιων ως εξής: $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c$. Να αποδειχθεί ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας.
- 3) Ορίζουμε σχέση R στο σύνολο των ακεραίων Z ως εξής: $(a,b) \in R \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 3k$ για $k \in Z$. Είναι η R σχέση ισοδυναμίας;
- 4) Έστω σχέση S , η οποία ορίζεται στο σύνολο των ακεραίων Z ως εξής: $(a,b) \in S \Leftrightarrow a+b$ είναι άρτιος αριθμός. α) Να αποδειχθεί ότι η S είναι σχέση ισοδυναμίας. β) Να βρεθεί το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμιών στοιχείων του Z ως προς την S .
- 5) Έστω σχέση S , η οποία ορίζεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ως εξής: $(x,y) \in S \Leftrightarrow |x-y| < 1$. Είναι η S σχέση ισοδυναμίας;
- 6) Ορίζουμε σχέση S στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ως εξής: $(x,y) \in S \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$. Είναι η S σχέση ισοδυναμίας;
- 7) Έστω σχέση R στο σύνολο των θετικών ρητών αριθμών, η οποία ορίζεται ως εξής: $\left(\frac{a}{b}\right)R\left(\frac{c}{d}\right) \Leftrightarrow ad \leq bc$. Να αποδειχθεί ότι η R είναι σχέση ολικής διάταξης.
- 8) Έστω σχέση S που ορίζεται στο σύνολο A , η οποία είναι σχέση ισοδυναμίας και σχέση μερικής διάταξης. Τι έχουμε να πούμε για τα στοιχεία της S ;
- 9) Μια σχέση R που ορίζεται σε κάποιο σύνολο, ονομάζεται κυκλική όταν ισχύει το εξής: εάν aRb και bRc τότε cRa . Να αποδειχθεί ότι μια σχέση είναι αυτοπαθής και κυκλική εάν και μόνον εάν είναι σχέση ισοδυναμίας.
- 10) Έστω αυτοπαθής σχέση R , η οποία ορίζεται στο σύνολο A . Να αποδειχθεί ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας εάν και μόνον εάν για κάθε (a,b) και (a,c) που ανήκουν στην R συνεπάγεται ότι και (b,c) ανήκει στην R .