

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Η ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να ορίσουμε μια ακολουθία.

Ένας τρόπος είναι να δώσουμε ένα ευχευμένο νόμο για τον n όρο της.
π.χ. η ακολουθία με όρους

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

μπορεί να ορισθεί γράφοντας

$$a_n = (-1)^n \text{ για όλους τους ακέραιους } n \geq 0.$$

Ένας άλλος τρόπος είναι να δώσουμε έναν ή περισσότερους αρχικούς όρους της ακολουθίας, μαζί με έναν κανόνα με τον οποίο μπορούμε να προσδιορίσουμε τους επόμενους όρους με την βοήθεια αυτών που προηγούνται.
π.χ. η ακολουθία με όρους

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

μπορεί να ορισθεί από τις αρχικές συνθήκες $a_0=0, a_1=1$ και την

$$\text{σχέση } a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{για } n=2,3,4,\dots$$

Κάθε τέτοιος κανόνας ο οποίος ενεχει-
 ζεί τον n -οστό όρο μιας ακολου-
 θίας $\{a_n\}$ με περιπτώσεις από τους
 προηγούμενους του, είναι ακολουθία,
 για οποιοδήποτε n , ονομάζεται
αναδρομική σχέση ή εξίσωση
διαφορών.

Μια ακολουθία ονομάζεται λύση
 της αναδρομικής σχέσης, αν οι
 όροι της ικανοποιούν την αναδρο-
 μική σχέση.

Γραμμικές Ομογενείς Αναδρομικές Σχέσεις με Σταθερούς Συντελεστές.

Μια αναδρομική σχέση της μορφής

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} \quad (1)$$

όπου $c_1, c_2, \dots, c_k$ πραγματικοί
 αριθμοί με $c_k \neq 0$, ονομάζεται
γραμμική ομογενής αναδρομική σχέση
βαθμού k με σταθερούς συντελεστές.

π.χ. η αναδρομική σχέση

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

είναι γραμμική ομογενής με σταθερούς συντελεστές και βαθμού 2 (Αντίθετα οι $a_n = 2a_{n-1} + 1$ και $a_n = na_{n-1}$ δεν είναι γραμμικές ομογενείς αναδρομικές σχέσεις με σταθερούς συντελεστές).

Η εξίσωση

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_{k-1} r - c_k = 0$$

και οι ρίζες της, ονομάζονται **χαρακτηριστική εξίσωση** και **χαρακτηριστικές ρίζες** της αναδρομικής σχέσης (1), αντίστοιχα.

Θα παρουσιάσουμε αρχικά έναν συστηματικό τρόπο επίλυσης των γραμμικών ομογενών αναδρομικών σχέσεων βαθμού 2 με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή αναδρομικών σχέσεων της μορφής

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

Η μεθοδολογία επίλυσης ζήτητων
αναδρομικών σχέσεων επιπλέον
έχει δύο θεωρήματα.

Θεώρημα 1: Έστω c_1, c_2 πραγματικοί
αριθμοί και έστω ότι η εξίσωση

$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ έχει δύο διαφορετικές
ρίζες r_1 και r_2 . Τότε η
ακολουθία $\{a_n\}$ είναι για
δύνη της αναδρομικής σχέσης
 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ εάν και

μόνον εάν $a_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n$ για

$n = 0, 1, 2, \dots$, όπου A_1, A_2 εαθερές.

Θεώρημα 2: Έστω c_1, c_2 πραγματικοί
αριθμοί, με $c_2 \neq 0$ και έστω ότι
η εξίσωση $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$, έχει
μόνο για ρίζα r_0 . Μια ακολουθία

$\{a_n\}$ είναι δύνη της αναδρομικής
σχέσης $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ εάν

και μόνο εάν $a_n = A_1 r_0^n + A_2 n r_0^n$ για
 $n = 0, 1, 2, \dots$ όπου A_1, A_2
εαθερές.

Ασκησης

1. Να βρεθεί η λύση της αναδρομικής σχέσης $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$,

για $n \geq 2$ με αρχικές συνθήκες $a_0 = 6, a_1 = 8$.

Αη: Η χαρακτηριστική εξίσωση της αναδρομικής σχέσης, στην οποία αναφέρεται η άσκηση, είναι η

$$r^2 - 4r + 4 = 0,$$

η οποία έχει μόνο μια ρίζα την $r_0 = 2$. Επομένως από το θεώρημα 2, λύσεις της αναδρομικής σχέσης, θα είναι οι ακολουθίες $\{a_n\}$ με

$$a_n = A_1 2^n + A_2 n 2^n \text{ όπου } A_1, A_2 \text{ σταθερές.}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις αρχικές συνθήκες, συνεπώς θα είναι

$$a_0 = 6 = A_1$$

$$a_1 = 8 = 2A_1 + 2A_2$$

από το οποίο προκύπτει $A_1 = 6$ και $A_2 = -2$. Άρα η λύση για την αναδρομική σχέση της άσκησης με τις παραπάνω αρχικές συνθήκες είναι

$$a_n = 6 \cdot 2^n + (-2)n 2^n.$$

2. Να βρεθεί η λύση της αναδρομικής σχέσης $a_n = 4a_{n-2}$

για $n \geq 2$ με αρχικές συνθήκες $a_0 = 0, a_1 = 4$.

Αν. Η χαρακτηριστική εξίσωση της αναδρομικής σχέσης είναι

$$r^2 - 4 = 0,$$

η οποία έχει δύο διαφορετικές ρίζες, την $r_1 = 2$ και $r_2 = -2$. Επομένως από το θεώρημα 1, λύσεις της αναδρομικής σχέσης θα είναι οι ακολουθίες $\{a_n\}$ με

$a_n = A_1 2^n + A_2 (-2)^n$ όπου A_1, A_2 σταθερές. Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες, συνεπώς θα έχουμε

$$a_0 = 0 = A_1 + A_2$$

$$a_1 = 4 = 2A_1 + (-2)A_2,$$

από τις οποίες προκύπτει ότι $A_1 = 1$ και $A_2 = -1$.

Άρα η λύση για την αναδρομική σχέση της άσκησης με τις παραπάνω αρχικές συνθήκες είναι $a_n = 2^n + (-1)(-2)^n$.

Το επόμενο θεώρημα αποζητεί γενίκευση του Θεωρήματος 1 και αναφέρεται στην επίλυση γραμμικών ομογενών αναδρομικών σχέσεων με σταθερούς συντελεστές, όπου ο βαθμός μπορεί να είναι μεγαλύτερος του 2, υπό την προϋπόθεση ότι η χαρακτηριστική της εξίσωση έχει διαφορετικές ρίζες.

Θεώρημα 3: Έστω $c_1, c_2, \dots, c_k$ πραγματικοί αριθμοί και έστω ότι η εξίσωση $r^k - c_1 r^{k-1} - \dots - c_k = 0$ έχει k διαφορετικές ρίζες $r_1, r_2, \dots, r_k$. Τότε η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι για λύση της αναδρομικής σχέσης

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

εάν και μόνο εάν

$$a_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + \dots + A_k r_k^n$$

για $n = 0, 1, 2, \dots$ όπου $A_1, A_2, \dots, A_k$ σταθερές.

Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί, ότι υπάρχει αντιστοιχία γενίκευση του Θεωρήματος 2, για την επίλυση ομογενών αναδρομικών σχέσεων με

συνθετούς συνελεστές, όπου ο βαθμός μπορεί να είναι μεγαλύτερος του 2 και όπου η χαρακτηριστική της εξίσωση μπορεί να έχει πολλαπλές ρίζες.

Η παραπάνω γενίκευση παραλείπεται.

Παρατήρηση: Οι γραμμικές ομογενείς αναδρομικές σχέσεις εμφανίζουν συχνά στη μαζικοποίηση προβλήματα.

Παράδειγμα. Να βρεθεί για αναδρομική σχέση με m αρχικές της συνθήκες για το πλήθος των $0-1$ λέξεων μήκους n , οι οποίες δεν έχουν 2 διαδοχικά μηδενικά.

Αν. Έστω a_n το πλήθος των $0-1$ λέξεων μήκους n , οι οποίες δεν έχουν 2 διαδοχικά μηδενικά. Υποθέτουμε $n \geq 3$.

Χωρίζουμε m παραπάνω λέξεις σε δύο κατηγορίες:

Λέξεις που τελειώνουν
σε 1

Υπάρχουν a_{n-1}
τέτοιες λέξεις

(διότι κάθε τέτοια
λέξη προκύπτει από
για 0-1 λέξη μήκους
 $n-1$, η οποία δεν
περιέχει 2 διαδοχικά
μηδενικά, στην οποία
προσθέτουμε στο
τέλος το 1)

Λέξεις που τελει-
ώνουν σε 0

Υπάρχουν a_{n-2}
τέτοιες λέξεις

(διότι κάθε τέτοια
λέξη προκύπτει από
για 0-1 λέξη μήκους
 $n-2$, η οποία δεν
περιέχει 2 διαδοχι-
κά μηδενικά, στην
οποία προσθέτουμε
στο τέλος το 10)

Επομένως η ακολουθία $\{a_n\}$, ικανοποιεί
την γραμμική ομογενή αναδρομική
σχέση

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ για } n \geq 3,$$

με αρχικές συνθήκες

$$a_1 = 2 \text{ (Λέξεις 0, 1) και } a_2 = 3 \text{ (Λέξεις 01, 10, 11)}$$

Ετσι έχουμε

$$a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 8 + 5 = 13$$

κ.τ.λ.η.