ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΑ - ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΕΣ

· ΕΣΤΩ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΟΣ $U(r)$ ΟΡΙΣΜΕΝΗ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ ΠΟΥ ΘΑ ΠΡΟΚΥΨΟΥΝ ΑΠΟ ΜΙΑ ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑ ΑΥΤΗ ΔΙΑΦΕΡΕΙ ΑΠΟ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΕΠΙ ΧΡΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΟΣΩΝ

· ΕΣΤΩ ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΕΣ ΕΥΚΑΙΡΙΕΣ (ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ) ΜΕ ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ (ΤΗΝ ΠΑΓΙΑ ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΤΙΓΜΗ Τ) $\tilde{R}_i \quad i=0,1,\dots,n$.

ΤΟ $i=0$ ΠΕΡ. ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΣΥΝΗΘΩΣ ΘΕΩΡΕΙΤΑΙ ΒΕΒΑΙΟ, ΔΗΛΑΔΗ $\tilde{R}_0 = r$ ΜΕ ΠΙΘ/ΤΑ 1.

· ΑΝ ΕΧΟΥΜΕ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑ ΥΨΟΥΣ Κ ΚΑΙ ΤΗΝ ΕΠΕΝΔΥΣΟΥΜΕ ΚΑΤΑ K_i ΣΤΑ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ $i=0,1,\dots,n$ ΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΟΝ ΧΡΟΝΟ Τ ΕΙΝΑΙ $\tilde{K}_T = \sum_{i=0}^{n} K_i (1+\tilde{R}_i T)$ (ΑΒΕΒΑΙΗ...

ΚΑΙ Η ΑΠΟΔΟΣΗ ΕΙΝΑΙ

$$\tilde{R}_p = \frac{1}{T}\left[\frac{\tilde{K}_T - K}{K}\right] = \sum_{i=0}^{n} \frac{K_i}{K} \tilde{R}_i$$

ή ΘΕΤΟΝΤΑΣ $x_i = K_i/K$

$$\tilde{R}_p = \sum_{i=0}^{n} x_i \tilde{R}_i$$

Ο ΔΕΙΚΤΗΣ P ΥΠΟΔΗΛΩΝΕΙ PORTFOLIO (ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ)

ΚΑΙ $\sum_{i=0}^{n} x_i = 1$

· ΑΝ $x_i \geq 0$ ΕΧΟΥΜΕ ΑΓΟΡΑ ΤΟΥ i ΠΕΡ. ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ (LONG POSITION)
ΕΝΩ ΑΝ $x_i < 0$ ΕΧΟΥΜΕ ΠΩΛΗΣΗ (SHORT POSITION)

· ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΕΙΝΑΙ

$$\max_{x_i,\ i=0,1,\dots,N} E\{U[\tilde{R}_p(x_0,x_1,\dots,x_N)]\}$$

ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟ $\sum_{i=0}^{N} x_i = 1$

· Η ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΕΙΝΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΔΥΣΚΟΛΗ. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΙΝΕΤΑΙ

$$\max_{x_0,x_1,\dots,x_N} \int_{R^N} U\left(\sum_{i=0}^{N} x_i R_i\right) p(R_0,\dots,R_N)\, dR_0\, dR_1 \dots dR_N$$

ΜΕ $\sum x_i = 1$

ΟΠΟΥ $p(R_0,R_1,\dots,R_N)$ ΕΙΝΑΙ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ (ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ) ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ $\tilde{R}_i$.

ΣΥΝΘΗΚΕΣ (LAGRANGE) ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ ΕΚΦΡΑΖΟΝΤΑΙ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗΝ

$$\mathcal{L}(x_0,x_1,\dots,x_N,\lambda) = \int U\left(\sum x_i R_i\right) p(R_0,\dots)\, dR_0 \dots + \lambda \sum_{i=0}^{N} x_i$$

ΟΠΟΤΕ ΕΧΟΥΜΕ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

· $\int R_i\, U'\left(\sum x_i R_i\right) p(R_0,R_1,\dots,R_N) = -\lambda$

· $\sum x_i = 1$

ΟΠΟΥ $U'(\sum x_i R_i)$ Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΗΣ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΕΝΗ ΣΤΟ $\sum x_i R_i$. <u>ΑΣΚΗΣΗ</u> ΓΙΑ $\tilde{R}_0 = 5\%$, $\tilde{R}_1$, $\tilde{R}_2$ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΕΣ ΣΤΟ $[3\%, 8\%]$ ΚΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΚΑΙ $U(R) = \ln(R)$ ΓΡΑΨΤΕ ΤΙΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ..

• ΑΝ ΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΔΕΝ ΕΧΟΥΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ, Η ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΕΙΝΑΙ ΔΥΣΧΕΡΗΣ!

• ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΕΙΝΑΙ ΕΥΚΟΛΟ ΑΝ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ U ΕΙΝΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $U(R) = -aR^2 + \beta R + \gamma$ ΜΕ $a, \beta > 0$, γ ΑΥΘΑΙΡΕΤΟ. <u>ΠΡΕΠΕΙ $R \le \beta/2a$</u> <u>ΓΙΑ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΑΥΞΟΥΣΑ Η ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑ!</u>

ΤΟΤΕ $EU(\tilde{R}) = -aE(\tilde{R}^2) + \beta E(\tilde{R}) + \gamma$

ΚΑΙ ΕΦΟΣΟΝ $Var\,\tilde{R} = E(\tilde{R}^2) - E(\tilde{R})^2$ ΕΙΝΑΙ

$$EU(\tilde{R}) = -a\left[Var\,\tilde{R} + E(\tilde{R})^2\right] + \beta E(\tilde{R}) + \gamma$$

$$= -a\,Var\,\tilde{R} - a\left[E(\tilde{R}) - \frac{\beta}{2a}\right]^2 + \frac{\beta^2}{4a} + \gamma$$

ΕΦΟΣΟΝ Η ΣΤΑΘΕΡΑ γ ΔΕΝ ΕΠΗΡΕΑΖΕΙ ΤΙΣ ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ, Ο ΣΤΑΘΕΡΟΣ ΟΡΟΣ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΘΕΩΡΗΘΕΙ ΜΗΔΕΝΙΚΟΣ!

ΑΡΑ ΑΝ Η $\tilde{R}$ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΑΠΟ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ x
$\tilde{R} = \tilde{R}(x)$ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

$$\max_x EU(\tilde{R}(x))$$

ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΙ ΜΕ $\min_x \left\{ Var\,\tilde{R}(x) + \left(E[\hat{R}(x)] - \frac{\beta}{2a}\right)^2 \right\}$

$\left(\text{ΕΦΟΣΟΝ} \quad \max_x f(x) = -\min_x(-f(x))\right)$

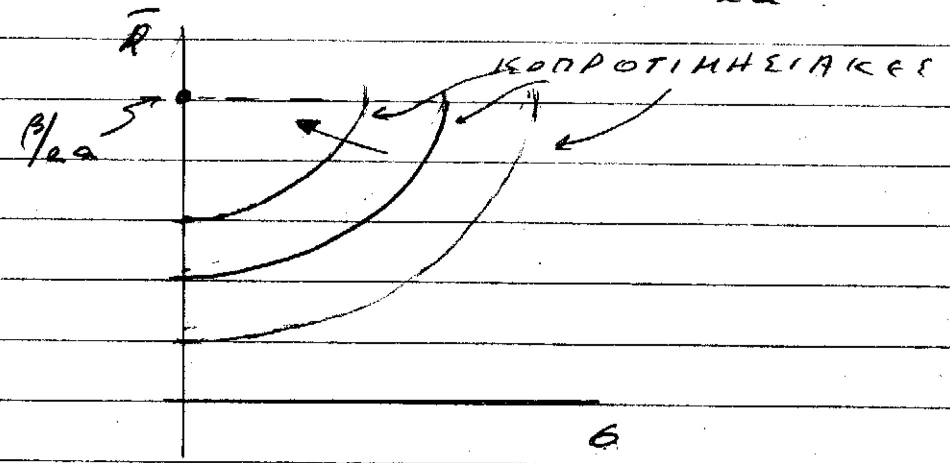
• ΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΑΥΤΟ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΟΤΙ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ <u>ΜΟΝΟ</u> ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΤΗΝ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΤΗΣ $\tilde{R}$ ΚΑΙ ΟΧΙ ΑΠΟ ΤΙΣ ΥΨΗΛΟΤΕΡΕΣ ΡΟΠΕΣ!

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ, ΑΝ ΑΠΟΤΥΠΩΣΟΥΜΕ ΤΗΝ Τ.Μ. $\tilde{R}_c$ ΣΤΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΤΥΠΙΚΗΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ - ΑΝΑΜ. ΤΙΜΗΣ ΕΧΟΥΜΕ ΤΙΣ ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΚΕΣ

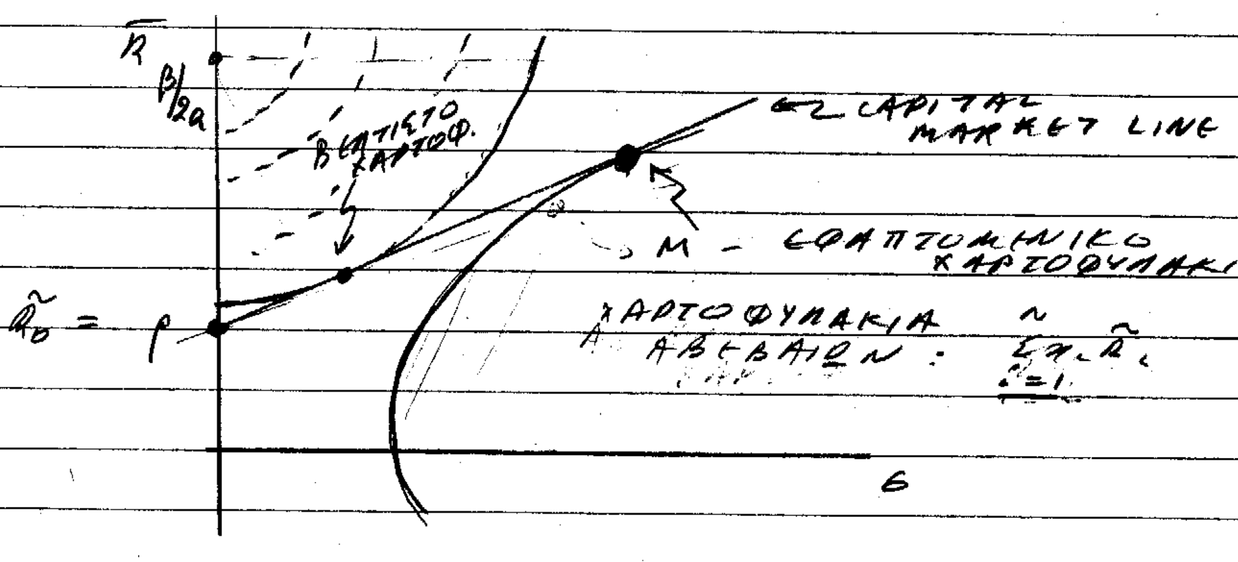
$$Var\,\tilde{R} + \left(E(\tilde{R}) - \beta/2a\right)^2 = \sigma\tau\alpha\vartheta$$

$$\sigma^2 + \left(\bar{R} - \beta/2a\right)^2 = \sigma\tau\alpha\vartheta$$

ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΚΥΚΛΟΙ ΜΕ ΚΕΝΤΡΟ ΤΟ $(0, \beta/2a)$ ΜΕ ΠΡΟΤΙΜΟΤΕΡΕΣ ΜΙΚΡΕΣ ΑΚΤΙΝΕΣ. ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΜΟΝΟ ΣΗΜΕΙΑ ΜΕ $\bar{R} \leq \beta/2a$ (ΓΙΑΤΙ;)



ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΜΕ ΥΠΑΡΞΗ ΒΕΒΑΙΟΥ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ, ΤΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΕΤΑΙ ΩΣ ΕΞΗΣ



ΤΟ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ ΠΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΕΙ ΤΗΝ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑ ΚΕΙΤΑΙ ΕΠΙ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΠΟΥ ΣΥΝΔΕΕΙ ΤΟ ΒΕΒΑΙΟ ΠΕΡ. ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΜΕ ΤΟ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΙΚΟ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ Μ (Ή ΤΗΝ ΠΡΟΕΚΤΑΣΗ ΤΗΣ!)

· ΑΡΑ Η ΒΕΛΤ. ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΕΠΙΤΥΓΧΑΝΕΤΑΙ ΕΠΕΝΔΥΟΝΤΑΣ ΕΝΑ ΜΕΡΟΣ x^* ΤΗΣ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΣ ΣΤΟ ΒΕΒΑΙΟ ΚΑΙ $1-x^*$ ΣΤΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟ ΤΩΝ ΑΒΕΒΑΙΩΝ ΠΟΥ ΔΙΝΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟ Μ.

· ΑΝ $x^* < 0$ ΤΟΤΕ ΕΧΟΥΜΕ ΔΑΝΕΙΣΜΟ!

· Η ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΙΣΧΥΕΙ ΓΙΑ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥ $\beta/2a$ (ΕΦΟΣΟΝ $\beta/2a \geq \rho$. ΤΙ ΣΥΜΒΑΙΝΕΙ ΑΝ $\beta/2a < \rho$;). ΑΡΑ ΑΝ <u>ΟΛΟΙ</u> ΟΙ ΕΠΕΝΔΥΤΕΣ ΕΧΟΥΝ ΤΕΤΡΑΓ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΟΣ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΒΕΒΑΙΑ ΤΩΝ a, β, ΤΟΤΕ <u>ΟΛΟΙ</u> ΘΑ ΕΠΕΝΔΥΣΟΥΝ ΣΤΟΝ ΙΔΙΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟ ΑΒΕΒΑΙΩΝ (ΠΟΥ ΔΙΝΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟ Μ) (ΑΥΤΟ ΕΙΝΑΙ ΕΝΑ <u>ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ</u>.

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> ΑΠΟΔΕΙΞΤΕ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΠΑΡΑΤΗΡΩΝΤΑΣ ΟΤΙ

$$\begin{cases} \sigma_p^2 = Var\,\tilde{R}_p = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \,Cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j) \\ \bar{R}_p = \sum_{i=0}^{N} x_i \bar{R}_i \end{cases}$$

SHORT SELLING - ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΑ ΒΕΒΑΙΟΥ - ΑΒΕΒΑΙΟΥ

• ΕΣΤΩ ΑΒΕΒΑΙΟ Π.Σ. $\tilde{R}$ ΚΑΙ ΒΕΒΑΙΟ ρ. ΤΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΑ ΕΙΝΑΙ

$$\tilde{R}_p = x\rho + (1-x)\tilde{R}$$

ΚΑΙ: $\bar{R}_p = x\rho + (1-x)\bar{R}$ $\quad \sigma_p^2 = (1-x)\sigma^2$

ΟΠΟΥ ΚΑΙ $\tilde{R} = \sigma^2$

• ΕΦΟΣΟΝ $\sigma_p \geq 0$ ΕΙΝΑΙ $\sigma_p = |1-x|\sigma$

• ΑΝ $1-x \geq 0$ ή $1 \geq x$ ΕΙΝΑΙ

$$\bar{R}_p = x\rho + (1-x)\bar{R}, \quad \sigma_p = (1-x)\sigma \Rightarrow \underline{\bar{R}_p = \rho + \sigma_p \frac{\bar{R}-\rho}{\sigma}}$$

• ΑΝ $x > 1$ ΕΙΝΑΙ $|1-x| = x-1$ ΟΠΟΤΕ

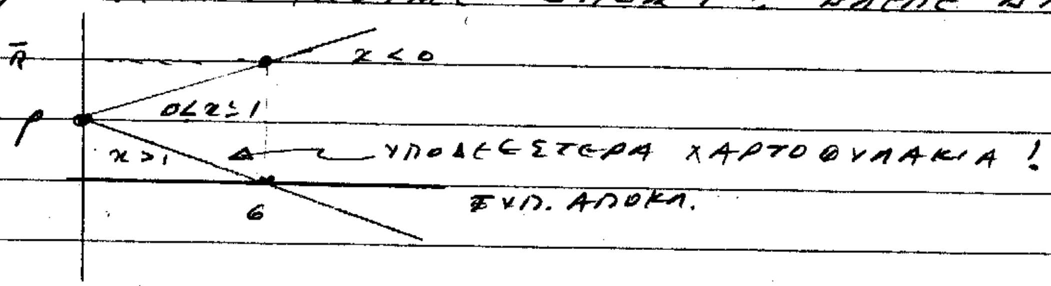
$$\bar{R}_p = x\rho + (1-x)\bar{R}, \quad \sigma_p = (x-1)\sigma \Rightarrow \underline{\bar{R}_p = \rho - \sigma_p \frac{\bar{R}-\rho}{\sigma}}$$

• ΕΡΜΗΝΕΙΑ x: • ΑΝ $x < 0$ ΔΑΝΕΙΖΟΜΑΣΤΕ

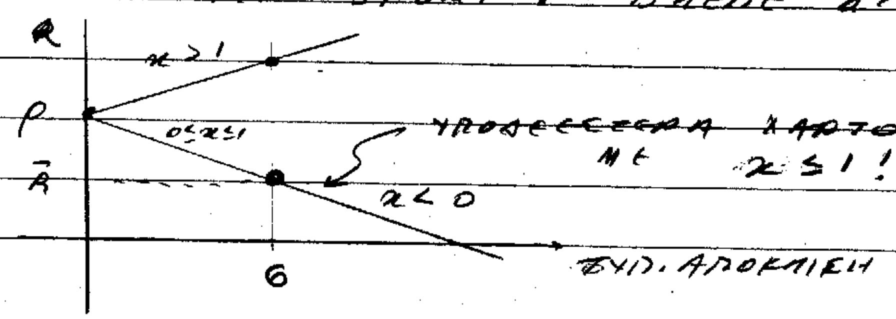
• ΑΝ $x > 1$ ΚΑΝΟΥΜΕ SHORT ΤΟ ΑΒΕΒΑΙΟ ΚΑΙ ΕΠΕΝΔΥΟΥΜΕ ΣΤΟ ΒΕΒΑΙΟ

• ΑΝ $0 \leq x \leq 1$ ΤΟΠΟΘΕΤΟΥΜΕ ΚΑΙ ΣΤΟ ΒΕΒΑΙΟ ΚΑΙ ΣΤΟ ΑΒΕΒΑΙΟ.

• ΑΝ $\bar{R} > \rho$ ΔΕΝ ΚΑΝΟΥΜΕ SHORT! ΒΛΕΠΕ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ



• ΑΝ $\bar{R} < \rho$ ΚΑΝΟΥΜΕ SHORT! ΒΛΕΠΕ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ!



Λύση Χαρτοφυλακίου Τετραγωνικής Χρησιμότητας

Το πρόβλημα χαρτοφυλακίου ανάγεται στο πρόβλημα βελτιστοποίησης:

διάνυσμα αναμ. αποδόσεων — απόδοση βέβαιη

$$\min_{\bar{x}, x_0} \quad \bar{x}' C x + \left(\bar{x}' R + x_0 r_0 - \frac{b}{2a} \right)^2$$

C: πίνακας διακύμανσης

όπου $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ τα μερίδια των αβέβαιων, x_0 το μερίδιο του βέβαιου. Στο πρόβλημα υπάρχει ο περιορισμός $\sum_{j=0}^{n} x_j = 1$ ή διανυσματικά

$$\bar{x}' \vec{1} + x_0 = 1 \quad \text{όπου} \quad \bar{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Η Λαγκρανζιανή είναι

$$L = \bar{x}' C x + (\bar{x}' R + x_0 r_0 - b/2a)^2 + \lambda(\bar{x}' \bar{1} + x_0 - 1)$$

Οι συνθήκες βελτιστοποίησης είναι

(α) $\partial L / \partial x_0 = 0$ ή

$$2 r_0 (\bar{x}' R + x_0 r_0 - b/2a) + \lambda = 0$$

ή $$2(\bar{x} R + x_0 r_0 - b/2a) = -\lambda / r_0 \qquad (1)$$

(β) Η διανυσματική παράγωγος ως προς τα $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ πάλι μηδενίζεται, ή

$$2 C x + 2(\bar{x} R + x_0 r_0 - b/2a) \cdot \bar{R} + \lambda \vec{1} = 0$$

ή λόγω της (1)

$$2 C x - \frac{\lambda}{r_0} \vec{R} + \lambda \vec{1} = 0$$

ή $$C x = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{r_0} \vec{R} - 1 \right)$$

από το παραπάνω

Το θεώρημα διαχωρισμού προκύπτει Λ καθώς τα μερίδια των αβέβαιων στο χαρτοφυλάκιο των αβέβαιων, n_j $j=1,\dots,n$ είναι $\pi_j = n_j / \sum_{j=1}^{n} n_j$.

$$\pi = \begin{pmatrix}\pi_1\\ \vdots \\ \pi_n\end{pmatrix} = \frac{\lambda}{2} C^{-1}\left(\frac{1}{r_0}\bar{R} - \bar{1}\right) \Big/ \frac{\lambda}{2}\bar{1}' C^{-1}\left(\frac{1}{r_0}\bar{R} - 1\right)$$

$$= \frac{C^{-1}\left(1/r_0\,\vec{R} - 1\right)}{1' C^{-1}\left(\frac{1}{r_0}\bar{R} - 1\right)}$$

που δεν εξαρτάται από το λ και άρα και από τις παραμέτρους b, a της ωφελιμότητας.

Η ολοκλήρωση της λύσης των προβλημάτων χαρτοφυλακίου είναι ως εξής: Αρκεί να προσδιορίσουμε το λ στις παραπάνω σχέσεις (γιατί;)

Πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{cases} x_0 + \bar{x}'\cdot\bar{1} = 1 & \text{(περιορισμός)} \\ \bar{x}'R + x_0 r_0 - b/2a + \lambda = 0 & \text{(η (a))} \end{cases}$$

η αντικαθιστώντας της $1^{η}$ στην $2^{η}$

η' $\bar{x}'R + (1 - \bar{x}'1)\cdot r_0 - b/2a + \lambda = 0$

και έτσι $\bar{x} = \frac{\lambda}{2} C^{-1}\left(\frac{1}{r_0}\bar{R} - 1\right)$ προκύπτει τελικά

$$\frac{\lambda}{2} R' C^{-1}\left(\frac{1}{r_0}\bar{R} - 1\right) + \left(1 - \frac{\lambda}{2} 1' C^{-1}\left(\frac{1}{r_0}\bar{R} - 1\right)\right) r_0 - \frac{b}{2a} + \lambda = 0$$

από όπου προσδιορίζεται το λ σαν συνάρτηση των C, R, r_0 και $b/2a$.