28/9/21

ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑ – UTILITY THEORY

· BERNOULLI – ΠΑΡΑΔΟΞΟ ST. PETERSBURG

- VON NEUMANN – MORGENSTERN

· ΟΡΘΟΛΟΓΙΚΟΣ ΑΠΟΦΑΣΙΖΩΝ

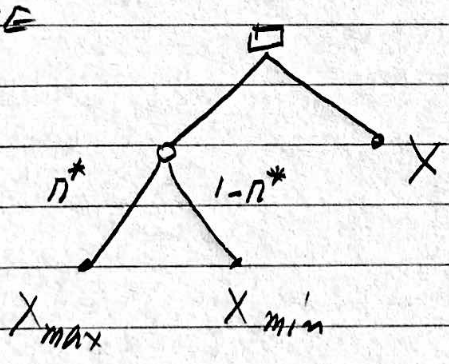
ΑΞΙΩΜΑ 1 ΑΝ $\alpha > \beta > \gamma$ ΤΟΤΕ $\alpha > \gamma$

ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΑΝ $\gamma > \alpha$ ΤΟΤΕ

• ΔΑΝΕΙΖΟΜΑΙ α, ΑΝΤΑΛΛΑΣΣΩ ΜΕ $\beta + \varepsilon$, ΑΝΤΑΛΛΑΣΣΩ ΜΕ $\gamma + \varepsilon + \varepsilon'$ ΚΑΙ ΜΕ $\alpha + \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon''$ ΕΠΙΣΤΡΕΦΩ α ΚΑΙ ΕΧΩ ΚΑΘΑΡΟ ΚΕΡΔΟΣ

ΑΞΙΩΜΑ 2 ΑΝ $\alpha \approx \beta$ ΤΟΤΕ ΟΙ ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ ΔΕΝ ΑΛΛΑΖΟΥΝ ΑΝ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΗΣΩ α ΜΕ β ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ

ΑΞΙΩΜΑ 3 ΥΠΑΡΧΕΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟ $\pi^* > 0$ ΩΣΤΕ

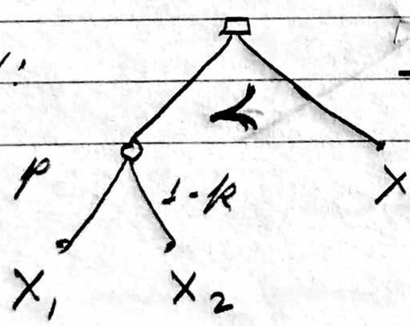


ΓΙΑ $X_{min} < X < X_{max}$

· ΑΡΑ $\pi^* = \pi(X)$ ΚΑΙ ΑΥΞΟΥΣΑ ΩΣ ΠΡΟΣ X.

ΠΡΟΤΑΣΗ ΓΙΑ ΟΡΘΟΛΟΓΙΚΟ ΑΠΟΦΑΣΙΖΟΝΤΑ

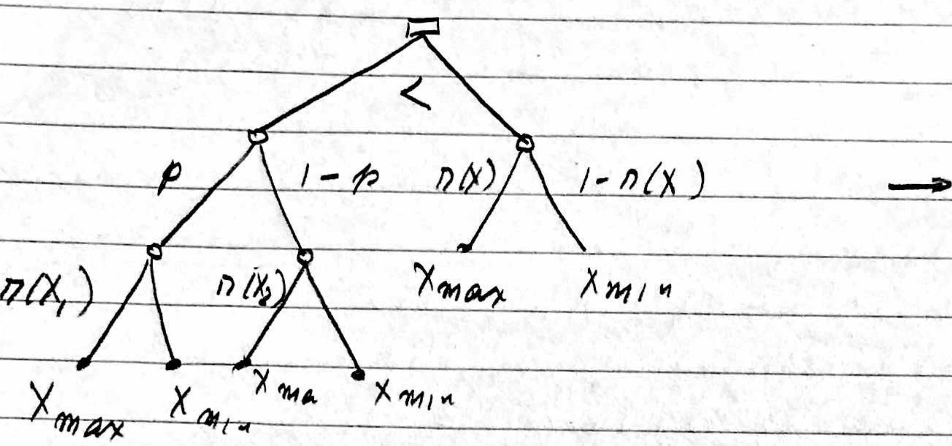
ΑΝ:

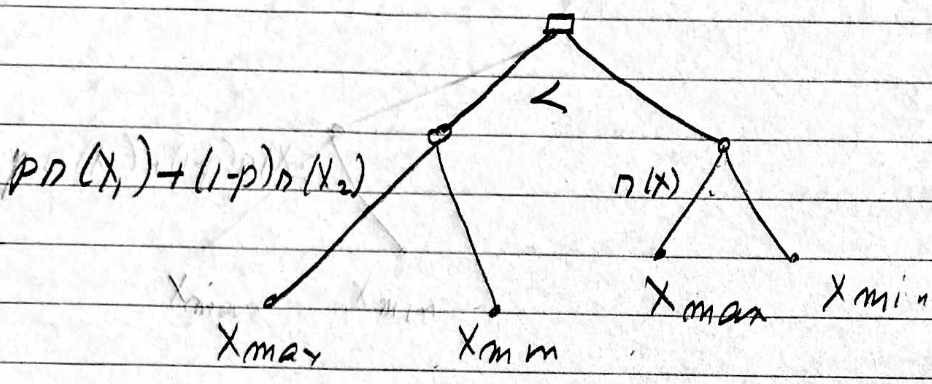


$\Rightarrow \pi(X) > p\,\pi(X_1) + (1-p)\,\pi(X_2)$

ΓΙΑΤΙ;

ΔΕΝΔΡΟ ΑΠΟΦΑΣΗΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΜΕ





ΑΡΑ $\pi(x) > p\pi(x_1) + (1-p)\pi(x_2)$

ΑΡΑ Ο ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΜΕΝΟΣ ΑΠΟΦΑΣΙΖΕΙ ΩΣ ΕΞΗΣ

- ΣΤΟΥΣ ΤΕΛΙΚΟΥΣ ΚΟΜΒΟΥΣ ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΑ ΤΑ ΠΟΣΑ ΤΟΥ ΑΓΑΘΟΥ ΜΕ ΤΙΣ π-ΤΙΜΕΣ
- ΕΠΙΛΕΓΕΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΠΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΕΙ ΤΗΝ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΤΙΜΗ ΤΩΝ π

– ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ BAYES ΩΣ ΠΡΟΣ UTILITIES

Η π ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑΣ

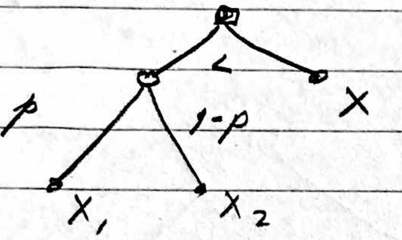
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1 ΕΣΤΩ $U, V : R \to R$ ΜΕ $V = aU + \beta$, $a > 0$. ΟΙ ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ BAYES ΩΣ ΠΡΟΣ U, V ΤΑΥΤΙΖΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΟΙ ΑΞΙΕΣ ΣΥΝΔΕΟΝΤΑ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ

ΑΝ $U(X) > pU(X_1) + (1-p)U(X_2)$ ΤΟΤΕ

$$aU(X) + \beta > paU(X_1) + (1-p)U(X_2) + \underbrace{\beta}_{p\beta + (1-p)\beta}$$

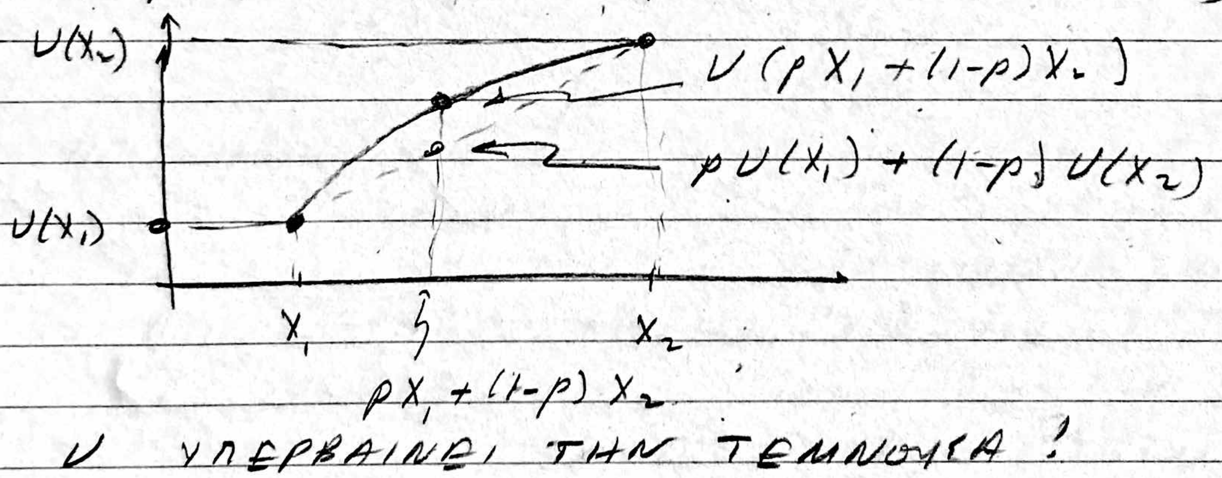
$$= p(aU(X_1) + \beta) + (1-p)(aU(X_2) + \beta)$$

$$\Longrightarrow V(X) > pV(X_1) + (1-p)V(X_2)$$



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2 ΑΝ ΠΡΟΤΙΜΩ $E(X)$ ΒΕΒΑΙΟ ΑΠΟ ΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ Τ.Μ. X ΤΟΤΕ Η ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑ ΜΟΥ ΕΙΝΑΙ ΚΟΙΛΗ. (ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ)

ΓΙΑΤΙ; $U(pX_1 + (1-p)X_2) > pU(X_1) + (1-p)U(X_2)$



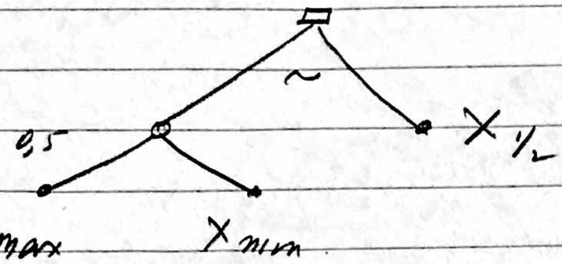
· Η U ΥΠΕΡΒΑΙΝΕΙ ΤΗΝ ΤΕΜΝΟΥΣΑ!

· ΟΙ ΑΣΦΑΛΕΙΕΣ ΚΕΡΔΙΖΟΥΝ ΑΠΟ ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΟΥΣ!

· ΛΟΓΩ Ν.Μ.Α. Η ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΕΙΣΠΡΑΤΤΕΙ $E(X)$ ΑΛΛΑ ΟΙ ΑΠΟΦΑΣΙΖΟΝΤΕΣ ΑΝΤΑΛΛΑΣΣΟΥΝ ΜΕ $\hat{x} < E(X)$

ΚΑΤΑΓΡΑΦΗ ΠΡΟΤΙΜΗΣΕΩΝ

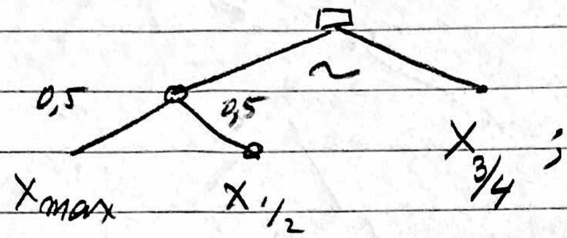
1.



ΕΡΩΤΗΣΗ ΓΙΑ $X_{1/2}$

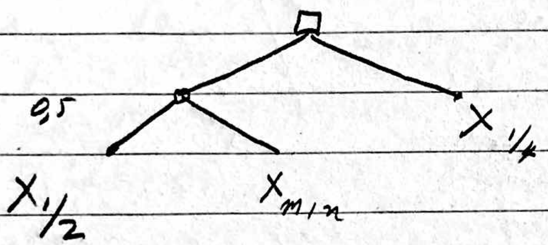
ΤΟΤΕ $U(X_{1/2}) = 1/2$

2.



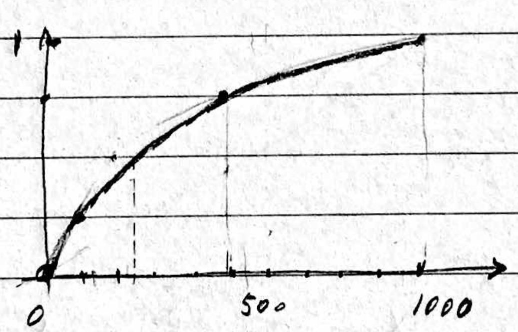
$U(X_{3/4}) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}U(X_{1/2}) = 3/4$

3.



$U(X_{1/4}) = \frac{1}{2}U(X_{1/2}) = 1/4$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



· $U(500) = 0{,}75$ $U(100) = 0{,}25$ $U(250) = 0{,}50$

50%

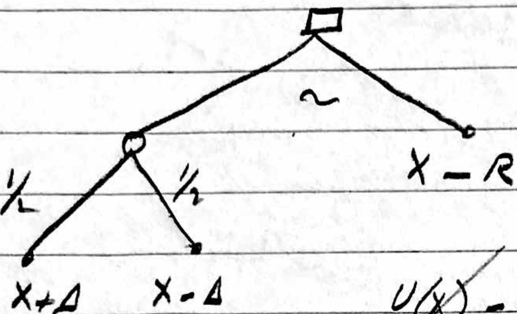
· ΣΕ ΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕΤΑΞΥ 100 ΚΑΙ 500 Ο ΑΠΟΦΑΣΙΖΩΝ ΤΗΝ ΑΝΤΑΛΛΑΣΣΕΙ ΜΕ ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ ΠΟΣΟ A ΩΣΤΕ $U(A) > \frac{1}{2}U(100) + \frac{1}{2}U(500) = 0{,}5 = U(250)$

ΑΡΑ $A > 250$.

· ΑΝ ΠΡΟΣΦΕΡΟΥΜΕ Π.Χ. $A = 260$ ΕΧΟΥΜΕ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΟ ΟΦΕΛΟΣ $\left(\frac{1}{2}100 + \frac{1}{2}500\right) - 260 = \underline{40}$ ΠΟΥ ΘΑ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΘΕΙ ΜΕ ΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ ΥΠΟ ΤΙΣ ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΤΟΥ Ν.Μ.Α.

ΜΟΡΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑΣ - ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

- ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΡΙΨΟΚΙΝΔΥΝΟΥ ΑΠΟ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑ
- ΤΑΣΗ ΑΠΟΦΥΓΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ (ΜΕΓΑΛΗ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ...)



$$U(X-R) = \tfrac{1}{2}U(X+\Delta) + \tfrac{1}{2}U(X-\Delta)$$

$$\downarrow$$

$$\cancel{U(X)} - U'(X)R + \cancel{\frac{U''(X)R^2}{2}} =$$

$$\tfrac{1}{2}\cancel{U(X)} + \frac{1}{2}U''(X)\Delta^2 \longrightarrow R = \frac{\tau(X)\Delta^2}{2}$$

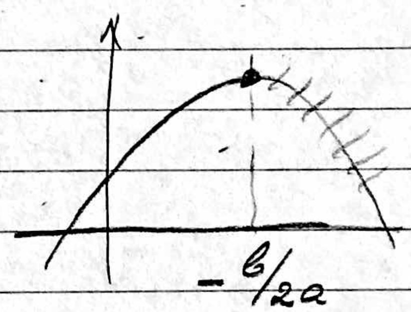
$$R = -\frac{1}{2}\frac{U''(X)}{U'(X)}\Delta^2 \qquad \underline{\tau(X) = -\frac{U''(X)}{U'(X)}}$$

, ή Τ.Α.Κ ΜΕΙΩΝΕΤΑΙ ...

- ΣΤΑΘΕΡΗ ΤΑΚ $U(X) = -e^{-kX}$ $\quad \underline{\tau(X) = k}$
- ΦΘΙΝΟΥΣΑ $U(X) = \ln(X+B)$ $\quad \underline{\tau(X) = \frac{1}{X+B}}$

$$U(X) = aX^2 + bX + \gamma$$

$$a < 0, \quad X < -b/2a$$



$$TAK = -\frac{2a}{2aX+b} = -\frac{1}{X - X_{max}}$$

ΑΝ $X \to X_{max}$ $\quad TAK \to \infty$

$X \to -\infty$ $\quad TAK \to 0$

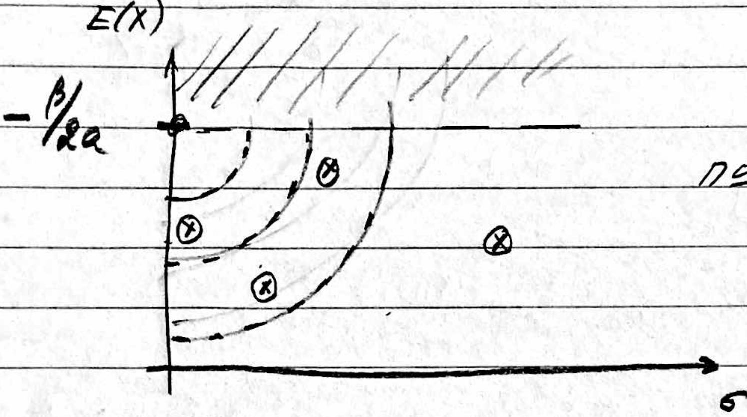
$$E\,U(X) = E(aX^2+\beta X+\gamma) = a\,E(X^2)+\beta E(X)+\gamma$$

$$var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\Rightarrow E(U(X)) = a\left(var(X)+E(X)^2\right)+\beta E(X)+\gamma$$

$$= a\left(\sigma^2+\frac{\beta}{a}E(X)+E(X)^2\right)+\gamma$$

$$= a\left(\sigma^2+\left(E(X)+\frac{\beta}{2a}\right)^2\right)-\frac{\beta^2}{4a^2}+\gamma$$



ΠΩΣ ΑΠΟΦΑΣΙΖΟΥΜΕ;

ΣΤΑΤΙΚΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΑ

ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ K ΣΕ ΠΕΡΙΟΥΣ. ΣΤΟΙΧΕΙΑ $i, j = 0, 1, 2, \ldots, N$ ΜΕ ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ ΑΠΛΟΥ ΤΟΚΟΥ R_i, ΔΗΛΑΔΗ

$$S_j = k_j\,(1+R_j T) \qquad \sum_{j=0}^{N} k_j = K$$

ΑΠΟΔΟΣΗ (ΤΜ)

$$\tilde{R}_p = \frac{1}{T}\,\frac{\sum_{j=0}^{N} k_j(1+\tilde{R}_j T)-K}{K}$$

$$= \sum_{j=0}^{N} R_j \cdot k_j/K$$

SHORT SELLING $\quad K_m < 0 \quad$ ΕΡΜΗΝΕΙΑ;

$$k + K_m = \sum_{j\neq m} k_j \rightarrow k = \sum_{j\neq m} k_j - k_m$$

ΑΠΟΔΟΣΗ $\frac{1}{kT}\left(\sum_{j\neq m} k_j(1+R_jT) - k_m(1+R_mT)\right)$

$$= \sum_{j\neq m} R_j \, k_j/k - \underbrace{R_m \, k_m/k}$$

~~ΑΡΑ~~ SHORT SELLING!

· ΓΙΑ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΠΟΔΟΣΗ U

$$\max_{x_0,\dots,x_n} E\left[U\left(\sum_{i=0}^{n} R_i x_i\right)\right] \qquad x_j = k_j/k$$

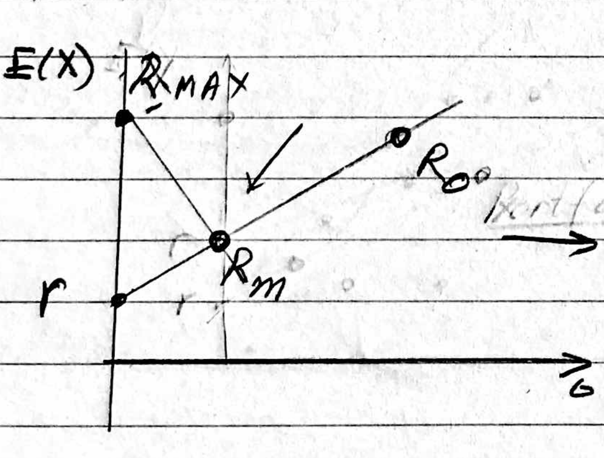
$$\sum_{j=0}^{n} x_j = 1$$

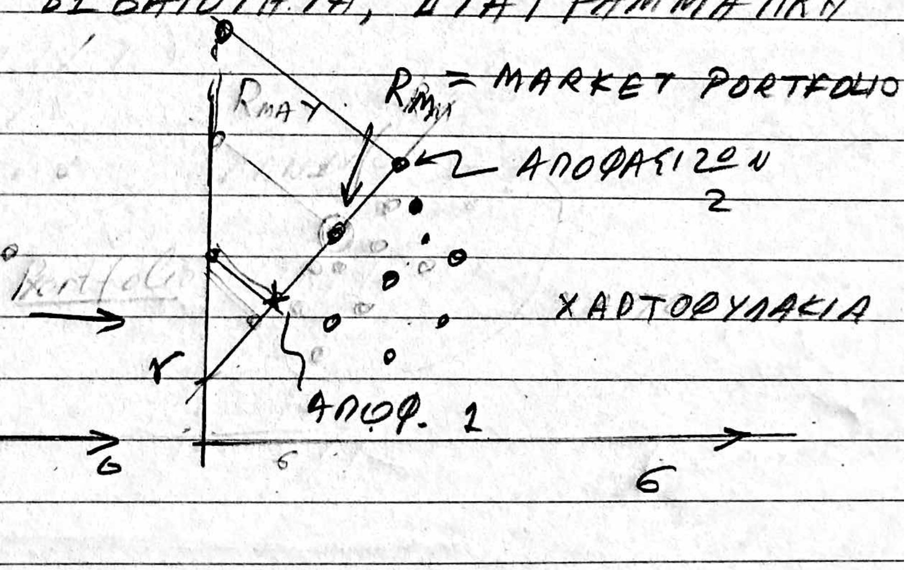
ΓΕΝΙΚΑ ΔΥΣΕΠΙΛΥΤΟ, ΕΚΤΟΣ ΑΝ U: ΤΕΤΡΑΓΩΝ.

$$\min_x \; Var\left(\sum R_i x_i\right) + \left(\sum \bar{R}_i x_i + \beta\right)^2$$

$$\sum x_i = 1$$

· ΑΝ $\tilde{R}_0 = r$ ΜΕ ΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ, ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΗ ΛΥΣΗ:





<u>ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ</u> $Var\left(\sum_{i=0}^{n} x_i R_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j C_{ij}$

$$C_{ij} = E\left((R_i - \bar{R}_i)(R_j - \bar{R}_j)\right)$$

$$\min \sum_{i,j} x_i x_j c_{ij}$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{R}_j x_j = B$$

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j c_{ij} + \lambda\left(\sum x_j - 1\right) + \mu\left(\sum \bar{R}_j x_j - B\right)$$

$$\partial\mathcal{L}/\partial x_0 = \lambda_0 + \mu r = 0$$

$$\partial\mathcal{L}/\partial x_i = \sum c_{ij} x_j + \lambda + \mu \bar{R}_i = 0 \quad i = 1..n$$

$$+ \lambda\left(1 - \frac{\bar{R}_i}{r}\right) = 0$$

$$C\bar{x} = \lambda\left(\frac{1}{r}\begin{pmatrix}\bar{R}_1 \\ \vdots \\ \bar{R}_n\end{pmatrix} - 1\right)$$

ΑΡΑ ΤΑ $(x_1, .., x_n)$ ΠΟΛ/ΚΙΑ ΤΟΥ $\underline{C^{-1}\left(\frac{1}{r}\begin{pmatrix}R_1 \\ \vdots \\ R_n\end{pmatrix} - 1\right)}$

ΤΟ λ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΖΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟ ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ $R \cdot X = B$, ΔΗΛΑΔΗ

$$x_0 = 1 - \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 - 1'\bar{x}$$

$$r(1 - 1'x) + \bar{R}'\lambda \cdot C^{-1}\left(\frac{1}{r}\bar{R} - 1\right) = B$$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΕ Φ.Λ.
- ΜΕ SOLVER
- ΧΩΡΙΣ SOLVER