Το Neyman - Pearson ως πρόβλημα βελτιστοποίησης

I Διακριτές Παρατηρήσεις:

x_j : $j=1,\dots,n$ με πιθανότητες

· $P(X=x_j\,;\Theta=\theta_1)=p_j$

· $P(X=x_j\,;\Theta=\theta_2)=q_j$

$\Theta=\theta_1$: Υπόθεση H_1

$\Theta=\theta_2$ Υπόθεση H_2

I = Σφάλμα τύπου I : Απορρίπτω την H_1 ενώ είναι αληθής

II = Σφάλμα τύπου II : Αποδέχομαι την H_1 ενώ ισχύει η H_2.

· Ο έλεγχος μπορεί να χαρακτηρισθεί από αριθμούς y_j αν αντιστοιχούμε στις παρατηρήσεις x_j. Τα y ερμηνεύονται ως: $y_j \in [0,1]$, αν είναι $y_j=1$ αποδεχόμαστε την H_1, αν είναι $y_j=0$ αποδεχόμαστε την H_2, διαφορετικά αν $0<y_j<1$ αποδεχόμαστε την H_1 με πιθ/τα y_j.

Συναρτήσει των y_j είναι

$$I=\sum_{j=1}^{n}(1-y_j)\,p_j$$

$$II=\sum_{j=1}^{n}y_j\,q_j$$

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα έλεγχο y_j ώστε να ελαχιστοποιείται το II αν το I είναι μικρότερο ή ίσο ενός δεδομένου επιπέδου a

Εναλλακτικά πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$\min_{y_j} \sum_{j=1}^{n} y_j q_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} (1-y_j) p_j \le q$$

$$0 \le y_j \le 1$$

Οι συνθήκες Kuhn Tucker γι' αυτό (ή οι δυϊκές συνθήκες) γράφονται ως εξής: Πρέπει να υπάρχουν μη αρνητικές μεταβλητές λ, μ_j, ν_j ώστε (βλέπε Σημειώσεις μου στο Μαθ/κό Προγ/σμό - εαρινό μάθημα Επιχ. Έρευνα) στη βέλτιστη λύση y^* να είναι

$$-q_j + \lambda p_j - \mu_j + \nu_j = 0 \qquad j=1,\dots,n$$

$$\mu_j (1-y_j^*) = 0 \qquad \nu_j y_j^* = 0 \qquad j=1,\dots,n$$

$$0 \le y_j^* \le 1$$

Αν $y_j^* = 0$ πρέπει $\mu_j = 0$ άρα

$$-q_j + \lambda p_j = -\nu_j \le 0$$

ή

$$\frac{p_j}{q_j} \le 1/\lambda .$$

Αν $y_j^* = 1$ πρέπει $\nu_j = 0$ άρα

$$-q_j + \lambda p_j = \mu_j \ge 0$$

ή

$$p_j/q_j \ge 1/\lambda$$

Αν $0 < y_j < 1$ θα έχουμε $x_j = \mu_j = 0$ και άρα

$$p_j / q_j = 1/\lambda$$

Αυτή είναι ακριβώς η έκφραση του λήμματος Neyman Pearson.

<u>Παρατήρηση</u> Αν τα y_j πρέπει να είναι 0 ή 1 (δεν επιτρέπονται πιθανοτικοί έλεγχοι) τότε ο έλεγχος χαρακτηρίζεται από τα $y_j \in \{0,1\}$ που λύνουν το πρόβλημα

$$\min_{y_j} \sum_j y_j q_j$$

$$\sum_j (1-y_j) p_j \leq a$$

$$y_j \in \{0,1\}$$

Θέτοντας $z_j = 1 - y_j$ το πρόβλημα γράφεται ως 0-1 Σακίδιο:

$$\max \sum_{j=1}^{n} z_j q_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j p_j \leq a$$

$$z_j \in \{0,1\}$$

Επιβεβαιώνεται με παραδείγματα ότι η λύση <u>δεν</u> ικανοποιεί απαραίτητα το κριτήριο επιλογής $p_j/q_j \geq 1/\lambda$ για κάποιο $\lambda > 0$!

II <u>Συνεχείς παρατηρήσεις</u>: Τώρα η παρατήρηση X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $p(x)$ αν ισχύει η H_1, $g(x)$ αν ισχύει η H_2. Ένας έλεγχος μπορεί να περιγραφεί από την συνάρτηση $y(x)$ $0 \leq y(x) \leq 1$ με την ίδια ερμηνεία. Είναι

$$I = \int_{\Omega} (1-y(x))\, p(x)\, dx$$

$$II = \int_{\Omega} y(x)\, g(x)\, dx$$

όπου το X παίρνει τιμές x, $x \in \Omega$.

Εξετάζουμε το πρόβλημα

$$\min_{y(x)} II = \int_{\Omega} y(x)\, g(x)\, dx$$

με $\quad 0 \leq y(x) \leq 1$

$$I = \int_{\Omega} (1-y(x))\, p(x)\, dx \leq a$$

Με ίδιες τεχνικές όπως στην διακριτή περίπτωση μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει $y^*(x)$ αριθμός λ ώστε η βέλτιστη λύση είναι της μορφής

$$y^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } p(x)/g(x) \geq 1/\lambda \\ 0 & \text{αν } p(x)/g(x) \leq 1/\lambda \\ \gamma & \text{αν } p(x)/g(x) = 1/\lambda \end{cases}$$

Το γ επιλέγεται να είναι τέτοιο ώστε

$$\int_{\Omega} (1-y^*(x))\, p(x)\, dx = a$$